

Astérisque

GABRIEL RUGET

**Le problème des modules pour les fibres vectoriels
holomorphes sur un espace analytique complexe
compact donné. I - Le cas d'une base lisse**

Astérisque, tome 16 (1974), p. 250-254

http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__250_0

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE PROBLEME DES MODULES POUR LES FIBRES VECTORIELS HOLOMORPHES
SUR UN ESPACE ANALYTIQUE COMPLEXE COMPACT DONNE

I - LE CAS D'UNE BASE LISSE

par Gabriel RUGET

Soient X une variété (resp., pour l'exposé suivant, un espace) analytique complexe compact, et V un fibré vectoriel holomorphe de base X . On étudie les fibrés vectoriels $\mathcal{V}$ sur le produit de X par un germe (d'origine 0) d'espace analytique S , munis d'un isomorphisme de V sur la restriction de $\mathcal{V}$ à $X \times \{0\}$; précisément, on cherche un objet "versel" parmi les objets décrits, c'est-à-dire donnant naissance à tous ces objets grâce à des changements de base (non nécessairement uniquement déterminés). La méthode, décrite dans les exposés précédents, qui permet de résoudre le problème des modules pour les singularités isolées, c'est-à-dire étude du problème formel à la base, suivie de l'application d'un théorème de convergence, semble pour l'instant difficile à reproduire ici : ce nouveau problème, un peu trop global, se laisse malaisément décrire par des équations. Dans le cas où X est lisse, on pense immédiatement à un autre espace de modules vedette, celui de Kuranishi, pour les déformations propres et lisses d'une variété analytique compacte donnée [6]. De fait, toute démonstration du théorème de Kuranishi (par exemple [1]) s'adapte aussitôt à notre problème (§1) ; on pourrait même [2] classifier les G -fibrés principaux, où G est un groupe de Lie complexe, sur les déformations propres et lisses de la base X . Au paragraphe 2, pour les personnes que rebuterait l'usage explicite d'outils

aussi sales que des formes différentielles à coefficients de classe C^r , r non entier, le théorème des fonctions implicites, ..., nous indiquons une méthode, que Deligne attribue à Mike Artin, pour passer de l'énoncé de Kuranishi à notre problème (X toujours lisse) ; les ingrédients supplémentaires sont alors le théorème de Douady relatif [7], et le Picard relatif analytique décrit par Grothendieck à la fin de [3].

Dans l'exposé suivant, on ramènera, suivant l'idée de Deligne, le cas X quelconque au cas X lisse (seulement pour les fibrés vectoriels). Puis, dans un autre exposé, Houzel indiquera sa méthode (avec des recouvrements) pour traiter directement le cas X quelconque ; on peut aussi consulter [4].

§1 . Structures complexes sur un fibré vectoriel

Soient $V_0 \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe de base la variété X , et $V \rightarrow X$ le fibré vectoriel complexe différentiable sous-jacent. Cette structure différentiable restera constante dans toute déformation holomorphe de V_0 ; nous allons donc chercher comment paramétrer les structures holomorphes sur V voisines de V_0 . Si $x \in X$, et si $v \in V$ se projette en x , on a une suite exacte d'espaces vectoriels réels :

$$0 \rightarrow V_x \xrightarrow{\gamma} T_v V \xrightarrow{\pi} T_x X \rightarrow 0.$$

En fait, V_x et $T_x X$ sont munis de structures d'espace vectoriel complexe fixées, et $T_v V$ d'une extension de la seconde par la première, variable avec la structure holomorphe sur V , que l'on repère par rapport à la structure de référence 0 comme suit : soit $w \in T_x X$, relevé en $w' \in T_v V$

arbitraire ; appelons I_0 la multiplication par i de référence, et I celle à repérer ; $Iw' - I_0 w'$ appartient à V_x , et ne dépend que de w ; pour chaque $v \in V_x$, nous avons donc construit une application λ_v de $T_x X$ dans V_x , qui est $\mathbb{C}$ -antilinéaire, puisque

$$-w' = I^2 w' = I(I_0 w' + \lambda_v w) = I_0^2 w' + \lambda_v(iw) + i\lambda_v w.$$

On vérifie facilement que λ_v dépend $\mathbb{C}$ -linéairement de v ; ainsi, nous avons obtenu une forme différentielle de type $(0,1)$ sur X , à valeurs dans $\text{End } V_0$, que nous baptisons $-2i\omega$: pour nous raccrocher à [1], § 1, si l'application identité de $T_v V_0$ dans $T_v V$ s'écrit $f' + f''$, avec f' $\mathbb{C}$ -linéaire et f'' $\mathbb{C}$ -antilinéaire, $f'^{-1} \circ f''(\tau)$ n'est autre que $\gamma(\omega_x(\pi(\tau)), v)$. L'examen de la définition du crochet des formes à valeurs vectorielles [5] montre que la condition d'intégrabilité [1], § 2 de la structure presque complexe sur l'espace total de V ainsi repérée se traduit par

$$(1) \quad d''\omega - [\omega, \omega] = 0,$$

où $[,]$ désigne le crochet ordinaire des matrices. Il n'y a plus maintenant qu'à recopier [1].

§ 2 . Existence du module

On peut voir un espace vectoriel E comme l'espace des sections globales du fibré canonique sur le projectif de E^* . L'idée de Mike Artin est de retenir de même d'un fibré vectoriel $V_0 \rightarrow X$.

- 1°) P_0 , projectif de V_0^* , qui est une variété compacte ;
- 2°) la projection $\pi_0 : P_0 \rightarrow X$;
- 3°) le fibré canonique L_0 de P_0 .

A partir de là, on peut reconstruire V_0 : c'est le fibré associé au faisceau localement libre $R^0 \pi_{0*} L_0$.

Le programme pour trouver une déformation verselle de V_0 est donc

1°) déformer versellement la variété compacte P_0 : appelons $P_1 \rightarrow S_1$ la solution de Kuranishi à ce problème.

2°) repérer les points de S_1 au-dessus desquels la fibre de P_1 veut bien se projeter d'une (ou plusieurs) façons sur X : on considère le produit $P_1 \times X$ paramétré par S_1 , et le module de Douady pour les sous-espaces de $P_1 \times X \times_{S_1} T$ plats sur T ($T \rightarrow S_1$ est un changement de base variable) que l'on regarde au voisinage du graphe de π_0 (T étant alors le point de base de S_1). Appelons S_2 la base correspondante ; on a maintenant une projection

$$\begin{array}{ccc} \pi : P_1 \times_{S_1} X & \longrightarrow & X \times S_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & S_2 & \end{array}$$

qui, au-dessus du point-base de S_2 , n'est autre que π_0 .

3°) $P_2 = P_1 \times_{S_1} X \rightarrow S_2$ admet un module de Picard relatif, car il est localement trivial du point de vue topologique, et car $\mathcal{O}_{P_2}$ est cohomologiquement plat sur S_2 (l'espace projectif étant rigide, toutes les fibres de P_2 sont des fibrés sur X fixé à fibres projectives). On regarde ce module de Picard au voisinage de L_0 (pour le changement de base : inclusion du point-base de S_2), on appelle sa base S , et L le fibré universel sur $P_1 \times S$. Pour des raisons de rigidité, $R^0 \pi_* L$ est localement libre : on a finalement trouvé un fibré vectoriel V sur $X \times S$, dont la restriction à $X \times 0$ est V_0 , et dont on vérifie facilement qu'il est versel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DOUADY - Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki 1964/65, exposé n° 277.
- [2] P.A. GRIFFITHS - The extension problem for compact submanifolds of complex manifolds I, pp. 113-142 in Proceedings of the conference on complex analysis, Minneapolis 1964, edited by Aeppli, Calabi, Röhrl; Springer-Verlag 1965.
- [3] A. GROTHENDIECK - Techniques de construction en géométrie analytique. IX. Quelques problèmes de modules, Séminaire Cartan 1960/61, exposé n° 16.
- [4] R.C. GUNNING - Local moduli for complex analytic vector bundles, Math. Ann. 195, pp. 51-78 (1971).
- [5] K. KODAIRA, L. NIRENBERG et D.C. SPENCER - On the existence of deformations of complex analytic structures, Annals of Math., vol. 68, pp. 450-459 (1958).
- [6] M. KURANISHI - On the locally complete families of complex analytic structures, Annals of Math., vol. 75, pp. 536-577 (1962).
- [7] G. POURCIN - Théorème de Douady au-dessus de S , Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, s.III, vol. 23, pp. 451-459 (1969).