

Astérisque

GENEVIÈVE POURCIN

Déformation de singularités isolées

Astérisque, tome 16 (1974), p. 161-173

http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__161_0

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEFORMATION DE SINGULARITES ISOLEES

par Geneviève POURCIN

Soit X_0 un sous-espace analytique fermé à singularités isolées d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. On construit par un procédé analytique une déformation semi-universelle de $\bigcup_{x \in \text{Sing } X_0} X_0, x$ et on démontre "l'ouverture de la versalité".

§ 1. Introduction.

1) Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$ réunion disjointe de polycylindres. On note $B(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K et analytiques sur $\overset{\circ}{K}$ et G_K l'espace analytique banachique des idéaux de $B(K)$ admettant une présentation finie directe ([1]). En un point I l'espace tangent de Zariski de G_K est égal à

$$\text{Hom}_{B(K)}(I, B(K)/I) \quad .$$

On note R_K le sous-espace analytique universel de $G_K \times \overset{\circ}{K}$.

2) Dans tout ce qui suit, U désigne un ouvert de Stein de $\mathbb{C}^n$ et X_0 un sous-espace analytique de U à singularités isolées définies par un faisceau d'idéaux I_0 . On suppose que K est un compact contenant $\text{Sing } X_0$ en son intérieur et privilégié pour $\mathcal{O}_{X_0}$.

Soient $I_0 = B(K, I_0)$ le point de G_K défini par X_0 et T_K l'espace tangent de Zariski de G_K en I_0 .

3) Soient $(f_1, \dots, f_p)$ des générateurs de I_0 au voisinage de K et $(z_1, \dots, z_n)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^n$. On considère

IX-02

$$(1) \quad T_1 = \text{coker}[O_{X_0}^n \xrightarrow{J} \text{Hom}_{O_U}(I_0, O_{X_0})]$$

où J est défini par

$$J(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(f_i) = \sum_{s=1}^n \lambda_s \frac{\partial f_i}{\partial z_s}.$$

On sait [3] que T_1 est concentré sur $\text{Sing } X_0$ et que $\Gamma(U, T_1)$ classe les déformations infinitésimales de X_0 .

4) Soient $X \xrightarrow{\pi} S$, et $X' \xrightarrow{\pi'} S$ deux déformations de X . On dit qu'elles sont localement isomorphes s'il existe un voisinage W (resp. W') de $\pi^{-1}(s_0)$ (resp. $(\pi')^{-1}(s_0)$) et un S -isomorphe de W sur W' .

On note Def_{X_0} le foncteur contravariant associant à tout germe d'espace analytique A l'ensemble des classes d'isomorphie locale de déformations de X au-dessus de A .

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THEOREME.- Il existe : un germe d'espace analytique de dimension finie S, s_0 , un ouvert U_1 de $\mathbb{C}^n$ contenant K et un sous-espace X de $S \times U_1$ plat sur S , tels que

(i) $X \rightarrow S$ soit une déformation semi-universelle de

$$C_0 = \bigsqcup_{x \in \text{Sing } X_0} X_{0,x}.$$

(ii) Pour tout point s de S assez voisin de s_0

(a) $X \rightarrow S$ est une déformation verselle de

$$C(s) = \bigsqcup_{x \in \text{Sing } X(s)} X(s), x.$$

(b) Pour toute immersion de germes d'espaces analytiques $B \rightarrow B'$ le morphisme

$$\text{Hom}(B', S) \longrightarrow \text{Def}_{C(S)}(B') \times_{\text{Def}_{C(S)}(B)} \text{Hom}(B, S)$$

est surjectif.

N.B. Le fait que les singularités soient isolées n'est utilisé que pour montrer que $\text{Supp } T_1$ est fini et que K est privilégié pour $\text{Ext}^q(I_0, \mathcal{O}_{X_0})$, $q > 0$.

§ 2. Quelques lemmes.

LEMME 1 ([3] Théorème 4.11).— Soit A un espace analytique réduit à un point.

Pour tout couple d'ouvert de Stein (U_1, U_2) contenus dans U et tels que

$$\text{Sing } X_0 \subset U_1 \subset U_2$$

le morphisme naturel $\text{Def}_{X_0 \cap U_2}(A) \longrightarrow \text{Def}_{X_0 \cap U_1}(A)$ est surjectif.

Soient B' un espace analytique ponctuel et B un sous-espace défini par un idéal J de carré nul. Soient $X \longrightarrow B$ une déformation de $X_0 \cap U_2$ et $Y' \longrightarrow B'$ une déformation de $X_0 \cap U_1$ telles que $Y|_B$ et X coïncident dans $B \times U_1$. Il suffit de montrer l'existence d'une déformation $X' \longrightarrow B'$ de $X_0 \cap U_2$ telle que

$$(*) \quad \begin{cases} X' \cap U_1 = Y' \\ X'|_B = X \end{cases}$$

le lemme en résultant par récurrence sur la longueur de A .

Soit $\{V_j\}_{j \in J}$ un recouvrement de Stein de $X_0 \cap U_2 - \text{Sing } X_0$. On pose

$$V_0 = X_0 \cap U_1, \quad I = J \cup \{0\}.$$

Pour tout i dans J , $X_0 \cap V_i$ étant lisse, il existe une déformation $X'_i \longrightarrow B'$ prolongeant $X|_{V_i} \longrightarrow B$. De plus, pour tout couple (i, j) dans $I \times I$, $X_0 \cap V_i \cap V_j$ étant lisse, il existe un isomorphisme

$$\tau_{ij} : X'_{ij} \longrightarrow X'_{ji}$$

IX-04

tel que $\tau_{ij}|_B = \text{Id. de } V_{ij}$

(on note $X'_{ij} = X'_i \cap X'_j$ si (i,j) est dans $J \times J$ et $X'_{oj} = X'_{jo} = Y' \cap X'_j$ si j est dans J . Soient $\Theta = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega^1_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0})$ et l la longueur de J .

On définit une classe de cohomologie dans $H^2(X_0, \Theta^l)$ en posant

$$U_{ijk} \longrightarrow \tau_{ij} \tau_{ik}^{-1} \tau_{jk}.$$

Comme X_0 est de Stein, $H^2(X_0, \Theta^l) = 0$ et on peut modifier les isomorphismes τ_{ij} de façon à recoller les X'_i en une déformation X' vérifiant (*).

LEMME 2.- Au voisinage de I_0 , G_K peut être plongé dans son espace tangent de Zariski.

a) Soit $f : E, o \longrightarrow F, o$ un germe d'application analytique entre deux espaces de Banach tel que $T_o f$ soit direct ; alors $X = f^{-1}(0)$ se plonge dans $T_o X$ au voisinage de 0 : en effet, si p désigne la projection de F sur $\text{Im } T_o f$ parallèlement à un supplémentaire topologique de $\text{Im } T_o f$, X est plongé dans la variété $(p \circ f)^{-1}(0)$.

b) Soient s et p deux entiers et $\mathcal{G}(n,p)$ l'espace analytique banachique des suites exactes de $B(K)$ -modules

$$B(K)^S \xrightarrow{u} B(K)^P \xrightarrow{v} B(K)$$

u et v étant des morphismes directs d'espaces de Banach. L'application $\beta : \mathcal{G}(n,p) \longrightarrow G_K$ telle que

$$\beta(u,v) = \text{Im } v$$

est un morphisme lisse ([1], § 4, cor. prop. 2). D'autre part, on vérifie à l'aide de a) et de ([1], § 4) que $\mathcal{G}(n,p)$ se plonge dans son espace tangent de Zariski. On en déduit alors, par l'intermédiaire de β un plongement

de G_K dans T_K .

LEMME 3.- Soient X un espace analytique à singularités isolées et K un compact $\mathcal{O}_{X_0}$ -privilegié tel que

$$\text{Sing } X_0 \subset \overset{\circ}{K} .$$

Alors pour tout $q \geq 0$, K est $\text{Ext}_{\mathcal{O}_u}^q(I_0, \mathcal{O}_{X_0})$ -privilegié.

C'est une conséquence de (4) et du fait que les $\text{Ext}_{\mathcal{O}_u}^q(I_0, \mathcal{O}_{X_0})$ sont localement $\mathcal{O}_{X_0}$ -libres sur $X_0 - \text{Sing } X_0$.

Pour montrer le dernier point, on suppose que 0 est un point régulier de X_0 et que

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} , \quad f_i(z) = z_i$$

le complexe de Koszul donne une résolution L de $\mathcal{O}_{X_0,0}$ telle que si

$$L_i = \mathcal{O}_{u,0}^{r_i} , \quad d_i : L_i \longrightarrow L_{i-1} \text{ vérifie}$$

$$\text{Im } d_i \subset I^{r_i} .$$

$$\text{Alors } d_{i+1}^* : \text{Hom}_{\mathbb{C}\{x\}}(L_i, \mathcal{O}_{X_{0,0}}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\{x\}}(\text{Im } d_{i+1}, \mathcal{O}_{X_{0,0}})$$

est l'application nulle. Il en résulte que les $\text{Ext}_{\mathbb{C}\{x\}}^q(I_0, \mathcal{O}_{X_{0,0}})$ sont $\mathcal{O}_{X_{0,0}}$ -libres.

LEMME 4.- Soient X_0 un espace analytique à singularités isolées et K un compact $\mathcal{O}_{X_0}$ -privilegié contenant $\text{Sing } X_0$ en son intérieur. Alors le complexe d'espaces de Banach déduit de (1)

$$B(K, \mathcal{O}_{X_0})^n \xrightarrow{J} \text{Hom}_{B(K)}(B(K, I_0), B(K, \mathcal{O}_{X_0})) \xrightarrow{\pi} B(K, T_1) \longrightarrow 0$$

est exact direct.

En effet, on déduit du lemme 3 que le morphisme naturel d'espaces de Banach

IX-06

$$B(K, \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(I_{\mathcal{O}}, \mathcal{O}_{X_{\mathcal{O}}})) \longrightarrow \text{Hom}_{B(K)}(B(K, I_{\mathcal{O}}), B(K, \mathcal{O}_{X_{\mathcal{O}}}))$$

est un isomorphisme.

De plus, il résulte de (4) que K est T_1 -privilegié.

§ III.

Soit $\varphi_{\mathcal{O}} = (z_1, \dots, z_n)$ l'élément de $B(K)$ défini par les coordonnées de $\mathbb{C}^n$. L'ensemble

$$B(K, U) = \{\varphi \in B(K)^n \mid \varphi(K) \subset U\}$$

est un voisinage de $\varphi_{\mathcal{O}}$ dans $B(K)^n$.

On note Φ l'application $(\varphi, z) \longrightarrow \varphi(z)$ de $B(K, U) \times K$ dans U et $\chi : B(K) \longrightarrow B(K, \mathcal{O}_{X_{\mathcal{O}}})$ l'application canonique.

PROPOSITION 1. — Soient $S, s_{\mathcal{O}}$ un germe d'espace analytique de dimension finie ou non et X un sous-espace analytique S -anaplat de $S \times U$ tel que $X(s_{\mathcal{O}}) = X_{\mathcal{O}}$.

(i) Il existe un voisinage w de $\varphi_{\mathcal{O}}$ dans $B(K, U)$ et un morphisme canonique

$$\sigma : S, s_{\mathcal{O}} \times W \longrightarrow G_K$$

tel que

$$(\sigma \times I_K)^* R_K = (I_S \times \Phi)^* X.$$

(ii) Si $T\sigma$ désigne l'application linéaire tangente à σ en $(s_{\mathcal{O}}, \varphi_{\mathcal{O}})$, on a :

$$(a) \quad T\sigma|_{\{0\} \times B(K)^n} = J \circ \chi.$$

$$(b) \quad \pi \circ T\sigma : TS \longrightarrow B(K, T_1) \quad \text{est le morphisme de Kodaira.}$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{L}$ une résolution $\mathcal{O}_{S \times U}$ -libre de type fini de $\mathcal{O}_X$. Par hypothèse,

pour tout s assez voisin de s_0 , $\mathcal{L}_\bullet(s)$ est une résolution de $\mathcal{O}_{X(s)}$.

Pour construire σ , on définit un complexe de fibrés analytiques banachiques sur $S \times W_1$ de la manière suivante : si $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_i}$ et si $q_i : \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}_{i-1}$ est donné par

$$q_i = (Q_{\alpha\beta}^i)_{\substack{\alpha \in \{1, \dots, r_i\} \\ \beta \in \{1, \dots, r_{i-1}\}}}, \quad Q_{\alpha\beta}^i \in \mathcal{O}(S \times U).$$

On pose

$$\tilde{\mathcal{L}}_i = \mathcal{O}_{S \times W \times U}^{r_i}$$

et on note $B(K, \tilde{\mathcal{L}}_i)$ le fibré banachique trivial sur $S \times W_1$ associé à $\tilde{\mathcal{L}}_i$.

Soit alors

$$\tilde{q}_i : B(K, \tilde{\mathcal{L}}_i) \longrightarrow B(K, \tilde{\mathcal{L}}_{i-1})$$

le morphisme de fibrés défini par

$$\tilde{q}_i = (\tilde{Q}_{\alpha\beta}^i)_{\alpha\beta}, \quad \tilde{Q}_{\alpha\beta}^i : S \times W \longrightarrow B(K)$$

avec

$$\tilde{Q}_{\alpha\beta}^i(s, \omega)(z) = Q_{\alpha\beta}^i(s, \varphi(z))$$

le complexe de fibrés banachiques $B(K, \tilde{\mathcal{L}}_\bullet)$ est exact direct en (s_0, φ_0) donc sur un voisinage $S, s_0 \times W$ de (s_0, φ_0) ; il en résulte un morphisme canonique ([1])

$$\sigma : S, s_0 \times W \longrightarrow G_K$$

tel que l'assertion (1) soit vraie.

Remarque.— Ensemblistement σ associe à (s, φ) le sous-espace $\varphi^{-1}(X(s))$ de $\overset{\circ}{K}$.

— Pour démontrer (ii), on considère la suite exacte directe

$$B(K, \mathcal{L}_2(s_0)) \xrightarrow{P_2} B(K, \mathcal{L}_1(s_0)) \xrightarrow{P_1} B(K) \xrightarrow{P_0} B(K, \mathcal{O}_{X_0}) \longrightarrow 0$$

et l'application r :

IX-08

$$r : \text{Hom}_{B(K)}(B(K, \mathcal{L}_2(s_o)), B(K, \mathcal{L}_1(s_o))) \times \text{Hom}_{B(K)}(B(K, \mathcal{L}_1(s_o)), B(K)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \text{Hom}_{B(K)}(B(K, \mathcal{L}_2(s_o)), B(K))$$

définie par

$$r(u, v) = p_1 \circ v + v \circ p_2 \quad .$$

Il résulte de [2] que $T\sigma = h_1 \circ h_2$ où

$$h_1 : \ker r \longrightarrow \text{Hom}(B(K, J_o), B(K, \mathcal{O}_{X_o}))$$

est l'application naturelle et où

$$h_2 : TS \times B(K)^n \longrightarrow \ker r$$

est définie par

$$h_2(t, \Psi) = \left(\frac{\partial q_2}{\partial z}(z, 0) \cdot \Psi + \frac{\partial q_2}{\partial t}(z, 0) \cdot t, \frac{\partial q_1}{\partial z}(z, 0) \cdot \Psi + \frac{\partial q_1}{\partial t}(z, 0) \cdot t \right)$$

avec, si $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$

$$\forall i = 1, 2, \quad \frac{\partial q_i}{\partial z}(z, 0) \cdot \Psi = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial z_j} \cdot \Psi_j \right)_{\alpha, \beta}$$

et si S est de dimension finie et $t = (t_1, \dots, t_k)$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}(z, 0) \cdot t = \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial Q_{\alpha\beta}^i}{\partial t_j} \cdot t_j \right)_{\alpha, \beta} \quad .$$

Alors $T\sigma(t, \Psi) : B(K, J_o) \longrightarrow B(K, \mathcal{O}_{X_o})$ est déterminé par

$$\forall l \in \{1, \dots, r_1\}, \quad T\sigma(t, \Psi)(Q_l^1(z, 0)) = p_o \left(\frac{\partial Q_l^1}{\partial z}(z, 0) \cdot \Psi + \frac{\partial Q_l^1}{\partial t}(z, 0) \cdot t \right)$$

d'où l'on déduit les assertions (ii) et (iii) ; ce qui termine la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE.— On suppose, donné au voisinage de 0 , une sous-variété Σ_K de dimension k de T_K telle que $T_o \Sigma_K$ soit un supplémentaire de $\text{Im } J$ dans T_K .
Alors, pour toute déformation $X \longrightarrow S$ de X_o , il existe deux morphismes
 $h : S \longrightarrow W$ et $0 \longrightarrow S \longrightarrow \Sigma_K \cap G_K$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{(I_S, h)} & S \times W & \xrightarrow{\sigma} & G_K \\ & \searrow 0 & & \nearrow & \\ & & \Sigma_K \cap G_K & & \end{array}$$

soit commutatif et que

$$(0 \times I_{\mathring{K}})^* R_K = (I_S \times \Phi \quad (I_S \times \mathring{K}, h))^* X|_{S \times \mathring{K}} .$$

C'est une conséquence de la proposition 1 et du théorème des fonctions implicites. Il existe au voisinage de 0 un isomorphisme $\alpha : \Sigma_K \times \text{Im } J \longrightarrow T_K$ tel que

$$\alpha|_{\Sigma_K} = \text{Id.} , \quad T\alpha|_{\{0\} \times \text{Im } J} = \text{Id.} .$$

Soit $\tilde{\sigma} : TS \times W \longrightarrow T_K$ un morphisme prolongeant σ , alors

$$p = \text{pr}_2 \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\sigma} : TS \times W \longrightarrow \text{Im } J$$

est une submersion et $\Gamma = p^{-1}(0)$ est une sous-variété de $TS \times W$ isomorphe à TS . Il suffit alors de prendre pour h le morphisme admettant pour graphe $\Gamma \cap S \times W$ et $0 = \sigma \circ (I_{S,h})$.

Remarque.— L'espace analytique de dimension finie $\Sigma_K \cap G_K$ muni de $R = R_K|_{\Sigma_K \cap G_K}$ est "presque" semi-universel en ce sens que pour toute déformation $X \longrightarrow S$ de X_0 définie au voisinage de K , il existe un morphisme $0 : S \longrightarrow \Sigma_K \cap G_K$ tel que X et $(0 \times I)^* R$ soient des déformations localement isomorphes dans $S \times \mathring{K}$.

§ 4. Etude locale de G_K

Soient L, K et K' trois compacts 0_{X_0} -privilegiés tels que

$$\text{Sing } X_0 \subset L^0 \subset L \subset \subset K \subset \subset K' .$$

Compte tenu du lemme 4, soit E_K un sous-espace $\mathbb{C}$ -direct de $B(K)$ isomorphe par $\chi \circ J$ à $\text{Im } J$. On définit E_K , et E_L de la même manière et on identifie T_K , à $\mathbb{C}^k \times E_K$. Soit

$$S_K = G_K \cap \mathbb{C}^k \times \{0\}.$$

Soient alors $\rho' : G_K \rightarrow G_K$ et $\rho : G_K \rightarrow G_L$ les morphismes canoniques ([1]) et $\tilde{\rho}' : T_K \rightarrow T_K$, $\tilde{\rho} : T_K \rightarrow T_L$ des prolongements de ρ et ρ' définis au voisinage de 0. On pose

$$\Sigma_K = \tilde{\rho}'(\mathbb{C}^k \times \{0\}, 0, 0), \quad S_K = \Sigma_K \cap G_K$$

$$S_L = G_L \cap \tilde{\rho}(\Sigma_K)$$

$$X_K = R_K|_{S_K} \times K, \quad X_L = R_L|_{S_L} \times L^0.$$

On déduit de la proposition 1 et de son corollaire :

- un morphisme canonique de germes $f : S_K \times E_L \rightarrow G_L$ tel que Tf soit un isomorphisme et que les déformations $(f \times I_{L^0})^* R_L \rightarrow S_K$ et $X_K|_{S_K \times L^0} \rightarrow S_K$ soient localement isomorphes ;

- un morphisme $\theta : G_K \rightarrow S_K$ tel que $\theta|_{\mathbb{C}^k \times \{0\}} = \text{Id. } \mathbb{C}^k$.

PROPOSITION 2.- Au voisinage de (s_0, φ_0) ,

(a) ρ induit un isomorphisme $i : S_K \rightarrow S_L$ tel que

$$(i \times I_{L^0})^* X_L = X_K|_{S_K} \times L^0.$$

(b) f est un isomorphisme.

Puisque Tf est un isomorphisme, f est un plongement au voisinage de (s_0, φ_0) . De plus, il résulte de l'universalité de G_K que

$$f|_{S_K \times \{0\}} = \rho|_{S_K}$$

et par conséquent ρ induit un plongement $i : S_K \rightarrow S_L$. Le fait que i soit un isomorphisme résulte du paragraphe 2, lemme 1 et du

LEMME 5.- Soit A un voisinage infinitésimal de $i(s_o)$ dans S_L . Il existe un morphisme $\tau : A \longrightarrow S_K$ tel que $i \circ \tau$ soit tangent à l'identité.

En effet d'après le lemme 1, $X_L|_A$ se prolonge en une déformation de X_o ; il en résulte un morphisme canonique $j : A \longrightarrow G_K$. Il suffit alors de prendre $\tau = 0 \circ j$.

L'assertion (b) est une conséquence de (a) et du résultat suivant :

LEMME ([2], § 5 - lemme 1).- "Soient H un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^k$, U un voisinage de 0 dans un espace de Banach, $\mathcal{G}$ un sous-espace $\mathbb{C}$ -analytique de $H \times U$. Posons $S = H \times \{0\} \cap \mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ contient $S \times U$ au voisinage de 0 dans $H \times U$ "

COROLLAIRE.- Au voisinage de I_o , G_K est isomorphe au produit d'un espace de dimension finie par un ouvert d'espace de Banach.

§ 5. Démonstration du théorème.

Soient alors S un ouvert de S_K et V un voisinage de 0 dans E_L tels que $f : S \times V \longrightarrow G_K$ soit un isomorphisme et que

$$\forall s \in S, \quad \text{Sing } X(s) \subset \mathring{K}.$$

On pose

$$X = X_K|_{S \times \mathring{K}}$$

et on identifie dorénavant $S \times V$ et son image par f . On a alors

$$R_K = (I_S \times \mathring{\otimes}) * X.$$

Démonstration de l'assertion (i).

Soient $Y \longrightarrow B$ une déformation de C_o et L_1 un compact $\mathcal{O}_{X_o}$ -

privilégié tels que Y soit défini au voisinage de $B \times L_1$ et que

$$\text{Sing } X_0 \subset L_1 \subset L^0.$$

On définit E_{L_1} , S_{L_1} et X_{L_1} comme E_L , S_L et X_L et on note $i_1 : S_K \rightarrow S_{L_1}$ l'isomorphisme déduit de la proposition 2. Il résulte du corollaire de la proposition 1 deux morphismes $h_1 : B \rightarrow E_{L_1}$ et

$0_1 : B \rightarrow S_{L_1}$ tels que

$$(0_1 \times I_{L_1^0})^* X_{L_1} = (I_B \times \Phi \circ (I_B \times L_1^0, h_1))^* Y.$$

Le morphisme $0_2 = i_1^{-1} \circ 0_1 : B \rightarrow S$ vérifie donc

$$(0_2 \times I_{L^0})^* X = (I_B \times \Phi \circ (I_B \times L^0, h_1))^* Y$$

ce qui démontre la versalité de $X \rightarrow S$. La semi-universalité résulte de

$$\dim_{\mathbb{C}} T_{S_0} = k.$$

On remarque, de plus, que toute déformation de C_0 se prolonge à $\hat{K}$.

Démonstration de (ii) (a).

Soient s un point de S et $Y \rightarrow B$ une déformation de $C(s)$. On peut supposer Y défini dans $B \times \hat{K}$. Soit alors $f_1 : B \rightarrow G_L$ le morphisme canonique. Alors les deux morphismes

$$\tilde{f} = \text{pr}_1 \circ f_1 : B \rightarrow S$$

$$\tilde{h} = \text{pr}_2 \circ f_1 : B \rightarrow V$$

vérifient

$$(f \times I_{L^0})^* X = (I_B \times \Phi \circ (I_B \times L^0, \tilde{h}))^* Y.$$

Démonstration de (iii) (b).

On suppose donné un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

un polycylindre $\mathcal{O}_{X_0}$ -privilegié L_1 contenant $\dot{C}(s)$ et deux morphismes

$$f_1 : B \longrightarrow S$$

$$h_1 : B \longrightarrow W_{L_1}$$

tels que

$$(f_1 \times I_{L_1^0})^* X = (I_B \times \Phi \circ (I_B \times L_1^0, h_1))^* Y \quad .$$

Le morphisme composé

$$B \xrightarrow{(f_1, h_1)} S \times W_{L_1} \hookrightarrow G_{L_1}$$

est le morphisme canonique.

D'autre part, on peut supposer Y' défini dans $B' \times \overset{\circ}{K}$, il en résulte un morphisme $g_2 : B' \longrightarrow G_L$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g_1} & G_{L_1} \\ \downarrow & & \uparrow \text{can} \\ B' & \xrightarrow{g_2} & G_L \end{array}$$

soit commutatif. G_L étant toujours identifié à $S \times V$, $pr_1 \circ g_2$ prolonge f_1 et est le morphisme cherché.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DOUADY - "Le problème des modules...", Ann. Institut. Fourier, XVI, I (1966).
- [2] A. DOUADY - "Le problème des modules pour les variétés analytiques" d'après Kuranishi, Séminaire Bourbaki, I (1964/1965).
- [3] D.S. RIM - "Formal deformation theory", S.G.A. (1971), exposé VI, Lecture notes n° 288, Springer-Verlag.
- [4] G. POURCIN - "Polycylindres privilégiés", Séminaire E.N.S., 1971-1972.