Astérisque

GENEVIÈVE POURCIN

Polycylindres privilégiés

Astérisque, tome 16 (1974), p. 145-160
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__145_0>

POLYCYLINDRES PRIVILEGIES

par Geneviève POURCIN

§ 1. Introduction.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $K = K_1 \times \dots \times K_n \subset U$ un polycylindre, i.e. un produit de compacts convexes d'intérieur non vide, et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur U. On sait qu'il existe des résolutions libres finies de $\mathcal{F}$ au voisinage de K et que pour une telle résolution $\mathcal{L}_\bullet$ de $\mathcal{F}$, le complexe de $\mathcal{O}(K)$-modules.

$$\mathcal{L}_\bullet(K) \longrightarrow \mathcal{F}(K) \longrightarrow 0$$

est exact. On note B(K) l'algèbre des fonctions continues sur K et holomorphes sur $\overset{\circ}{K}$. Le complexe d'espaces de Banach

$$\mathcal{L}_\bullet(K) \otimes_{\mathcal{O}(K)} B(K)$$

est noté $B(K\mathcal{L}_\bullet)$.

On dit que K est $\mathcal{F}$-privilégié s'il existe une résolution $\mathcal{L}_\bullet$ de $\mathcal{F}$ pour laquelle le complexe $B(K,\mathcal{L}_\bullet)$ est exact direct. Il est facile de voir qu'il en est alors de même pour toute résolution. On introduit l'espace

$$B(K,\mathcal{F}) = \mathrm{coker}[B(K\mathcal{L}_1) \longrightarrow B(K,\mathcal{L}_0)]$$

muni de la topologie quotient. Il ne dépend pas de la résolution choisie et si K est $\mathcal{F}$-privilégié, c'est un espace de Banach.

En prenant au lieu de B(K) l'espace H(K) des fonctions holomorphes sur $\dot{K}$ et de carré intégrable, munie de la norme L^2, on définit de même une notion de privilège L^2 : K est $\mathcal{F}$-privilégié au sens L^2 si et seulement si $H(K,\mathcal{L}_1)$ est exact et $H(K,\mathcal{F})$ séparé.

Notations.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$, on note

$$I_x = \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \in K_i \}$$

$$\pi_x = U \longrightarrow \mathbb{C}^{I_x} \text{ la projection.}$$

Pour tout entier p

$$K^{(p)} = \{ x \in K \mid \operatorname{card} I_x \geqslant p \}$$

$K^{(1)}$ est la frontière topologique et $K^{(n)}$ la frontière distinguée.

Soit $\sigma_p(\mathcal{F}) = \{ x \in U \mid \operatorname{prof}_x \mathcal{F} \leqslant p \}$. On sait que $\sigma_p(\mathcal{F})$ est un sous-ensemble analytique de U de dimension $\leqslant p$.

Enfin on dit que K est localement $\mathcal{F}$-privilégié si, pour tout point x de K , il existe un système fondamental $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ de voisinages de x dans K tel que, pour tout α , L_α soit un polycylindre $\mathcal{F}$-privilégié.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THEOREME.- Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout entier p , $0 \leqslant p \leqslant n-1$, on a
$$\sigma_p(\mathcal{F}) \cap K^{(p+1)} = \emptyset \ .$$

(ii) Pour tout x dans K , $\mathcal{F}$ est π_x-plat en x .

(iii) K est localement $\mathcal{F}$-privilégié.

(iv) K est $\mathcal{F}$-privilégié.

(v) Le morphisme de restriction $B(K,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}(\overset{\circ}{K})$ est injectif.

(v') Le morphisme de restriction $H(K,\mathcal{F}) \longrightarrow H(\overset{\circ}{K})$ est injectif.

(vi) $B(K,\mathcal{F})$ est séparé.

(vi') $H(K,\mathcal{F})$ est séparé.

§ 2. Démonstration du théorème.

A - Equivalence de (i) et (ii).

Il est évident que (ii) implique (i). La réciproque utilise le lemme suivant :

LEMME ([3], III 5).- *Soient V un ouvert de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ et $: V \longrightarrow \mathbb{C}^p$ la projection. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur V et Z l'ensemble analytique de non π-platitude de $\mathcal{F}$. Soit $k \geqslant 0$.*

On suppose que la profondeur de $\mathcal{F}$ est supérieure à $p + k$ en tout point de V. Alors les fibres de $\pi|_Z$ sont de dimension strictement supérieure à k en chacun de leurs points.

Montrons que (i) implique (ii). La démonstration se fait par récurrence descendante sur $\operatorname{Card} I_x$. On déduit de (i) que $\mathcal{F}$ est libre au voisinage de $K^{(n)}$, donc vérifie (ii) pour tout point x de $K^{(n)}$.

Supposons (ii) démontré pour tout point de $K^{(p+1)}$ et soit x vérifiant $\operatorname{Card} I_x = p$.

On note

$$K' = \prod_{i \in I_x} K_i \quad , \qquad K'' = \prod_{i \notin I_x} K_i$$

et π au lieu de π_x. Soient s un élément de $K'^{(p)}$ et y un élément de $\{s\} \times K''$. Si $\operatorname{Card} I_y$ est supérieur ou égal à $(p + 1)$, on déduit de l'hypothèse de récurrence que $\mathcal{F}$ est π_y-plat en y, donc a fortiori π-plat. Par conséquent, si Z désigne le sous-ensemble de U de non π-platitude de $\mathcal{F}$, la fibre de Z en s ne rencontre pas $K''^{(1)}$ et est donc de dimension au plus 0 dans K''. Il résulte alors de l'hypothèse et du lemme que Z ne rencontre pas $\{s\} \times K''$.

B - Montrons que (ii) implique (iii) .

C'est une conséquence de "platitude et privilège" et du théorème d'existence des voisinages privilégiés ([1]). En effet soit

$$x = (x',x'') \in K'^{(p)} \times K'' \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p} .$$

$\mathcal{F}$ étant π_x-plat, pour tout polycylindre L'' contenu dans K'' et $\mathcal{F}(x')$-privilégié, il existe un voisinage V de x' tel que pour tout polycylindre L' contenu dans V , $L' \times L''$ soit $\mathcal{F}$-privilégié ([1]) § 7, prop. 6). La démonstration dans le cas du privilège L^2 est rigoureusement la même.

C— Les faisceaux $\mathcal{B}_{K,T}$.

Pour montrer que (iii) implique (iv), on doit montrer que sous l'hypothèse (iii) le complexe $B(K,\mathcal{L}_\bullet)$ est exact direct. Pour cela on va considérer $B(K)$ comme espace des sections sur K d'un certain faisceau $\mathcal{B}_K$. D'autre part on rappelle qu'une suite d'espaces de Banach

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

est exacte directe si et seulement si, pour tout Banach T

$$0 \longrightarrow L(T,E) \longrightarrow L(T,F) \longrightarrow L(T,G) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte. Ceci conduit à introduire les faisceaux $\mathcal{B}_{K,T}$ définis ci-dessous.

Soit donc K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$. Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{B}_K(U)$ l'espace des fonctions continues sur $U \cap K$ et holomorphes sur $U \cap \mathring{K}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. C'est un Fréchet.

Pour tout espace de Banach T , on note

$$\mathcal{B}_{K,T}(U) = L(T,\mathcal{B}_K(U)) \quad ;$$

On définit ainsi un <u>faisceau</u> $\mathcal{B}_{K,T}$ concentré sur K.

PROPOSITION 1.

(1) $H^\circ(K,\mathcal{B}_{K,T}) = L(T,B(K))$.

(2) $\forall q > 0,\quad H^q(K,\mathcal{B}_{K,T}) = 0$.

On utilise la démonstration du théorème de Dolbeault faite dans [1]. Soit L un polycylindre de $\mathbb{C}^n$; on note $Q_{i_1\ldots i_p}(L)$ l'espace des formes

$$f\,d\bar{z}_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar{z}_{i_p}$$

telles que, pour toute suite $\{j_1,\ldots,j_q\}$ de $\{1,\ldots,n\}$ disjointe de $\{i_1,\ldots,i_p\}$ on ait

$$\frac{\partial^q f}{\partial\bar{z}_{j_1}\ldots\partial\bar{z}_{j_q}} \in \mathscr{C}(L)$$

et on le munit de la norme

$$\sup_{j_1\ldots j_q}\left\|\frac{\partial^q f}{\partial\bar{z}_{j_1}\ldots\partial\bar{z}_{j_q}}\right\| .$$

Si on note

$$Q^p(L) = \bigoplus_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n} Q_{i_1\ldots i_p}(L)$$

et si on considère la différentielle

$$\forall p,\quad 0\leqslant p\leqslant n-1,\quad \bar{\partial}: Q^p(L)\longrightarrow Q^{p+1}(L)$$

il est démontré dans ([1], § 6, théorème 1) que le complexe d'espaces de Banach

$$(*)\qquad 0\longrightarrow B(L)\longrightarrow Q_o(L)\longrightarrow Q_1(L)\longrightarrow\ldots\longrightarrow Q_n(L)\longrightarrow 0$$

est exact direct.

Ceci permet de définir une résolution fine du faisceau $\mathcal{B}_{K,T}$. En effet, pour tout ouvert V et tout entier p on note

$$2^{p}_{K,T}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} \mathcal{Q}_{K,T\,;\,i_1 \dots i_p}(V)$$

où

$$2_{K,T\,;\,i_1 \dots i_p}(V) = L(T, 2_{K\,;\,i_1 \dots i_p}(V))$$

et $\mathcal{Q}_{K\,;\,i_1 \dots i_p}(V)$ désigne l'espace des formes différentielles,

$$f\, d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$$

telles que, pour toute suite $\{j_1, \dots, j_q\}$ disjointe de $\{i_1, \dots, i_p\}$

$$\frac{\partial^q f}{\bar{z}_{j_1} \dots \bar{z}_{j_q}} \in \mathscr{C}(K \cap V) .$$

Comme tout point de K possède un système fondamental de voisinages dans K formé de polycylindres, on déduit de la suite exacte directe (*), une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{K,T} \longrightarrow \mathcal{Q}_{K,T} .$$

La proposition résulte alors de (*) avec $L = K$.

COROLLAIRE.- <u>Pour tout polycylindre</u> L , <u>on a</u> $\forall q > 0$, $H^q(L^\circ, \mathcal{B}_K) = 0$.

En effet, il suffit de montrer

$$\forall q > 0 \; , \quad H^q(L, \mathcal{B}_K) = 0$$

le corollaire s'en déduisant par un argument classique de limite projective. Soit $(L\ )$ un système fondamental de voisinages dans K de L K formé de polycylindres, on a :

$$2_{K,T}\, \mathcal{L} = \varinjlim_{\alpha} L(T, Q^\bullet(L_\alpha))$$

et pour tout α , $Q^\bullet(L_\alpha)$ est exact direct. C.q.f.d.

Dans le cas du privilège L^2 , pour tout ouvert U , on note $\mathcal{H}_K(U)$

l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes sur $\mathring{K} \cap U$ et de carré intégrable, muni de la norme L^2. On obtient ainsi un faisceau $\mathcal{H}_K$. Comme toute suite exacte courte d'espace de Hilbert est directe, il est inutile d'introduire des faisceaux $\mathcal{H}_{K,T}$. un résultat de Hörmander permet d'obtenir la

PROPOSITION 1' ([2], II 1).

(1) $H^0(K, \mathcal{H}_K) = H(K, \mathcal{F})$.

(2) $\forall q > 0 \quad , \quad H^q(K, \mathcal{H}_K) = 0$.

D - Démonstration de : (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Les notations étant celles du paragraphe 1, soit $\mathcal{L}.$ une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de K, il lui correspond un complexe de faisceaux $\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{L}.$. On considère le faisceau

$$\mathcal{B}_{K,T} = \operatorname{coker}[\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{L}_1 \to \mathcal{B}_{K,T}\mathcal{L}_o]$$

il est indépendant de la résolution $\mathcal{L}.$ choisie.

LEMME 1.- Si K est localement $\mathcal{F}$-privilégié, alors

(a) le complexe $\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{L}.$ est exact.

(b) pour tout ouvert V, $\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{F}(V) = L(T, \mathcal{B}_K\mathcal{F}(V))$.

Soient $x \in K$ et $(L_\alpha)_\alpha$ un système fondamental de voisinage de x dans K, $\mathcal{F}$-privilégiés. Pour tout α, $B(L_\alpha, \mathcal{F})$ est un espace de Banach et pour tout Banach T le complexe

$$L(T, B(L_\alpha, \mathcal{L})) \longrightarrow L(T, B(L_\alpha, \mathcal{F})) \longrightarrow 0$$

est exact. De plus,

(1) $(\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{L}.)_x = \varinjlim_{\alpha} L(T, B(L_\alpha, \mathcal{L}.))$

d'où (a). Démontrons (b) :

Soit $\mathcal{G}$ le faisceau défini par

$$\mathcal{G}(V) = L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(V))$$

pour tout ouvert V.

Il suffit de vérifier que le morphisme canonique de faisceaux

$$\mathcal{B}_{K,T}\, \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

est un isomorphisme sur les fibres. Soit $x \in K$ et $(L_\alpha)_\alpha$ comme ci-dessus, on déduit de (1) et de la suite exacte

$$(\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{L}_1)_x \longrightarrow (\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{L}_0)_x \longrightarrow (\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{F})_x \longrightarrow 0$$

que $(\mathcal{B}_{K,T}\mathcal{F})_x = \varinjlim_\alpha L(T, B(L_\alpha, \mathcal{F}))$. Il reste à montrer que :

$$\mathcal{G}_x = \varinjlim_\alpha L(T, B(L_\alpha, \mathcal{F})) .$$

Or pour tout α, on a un morphisme de restriction

$$L(T, B(L_\alpha, \mathcal{F})) \longrightarrow L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(\overset{\circ}{L}_\alpha))$$

et du fait que

$$\forall q > 0 \quad , \quad H^q(\overset{\circ}{L}_\alpha, \mathcal{B}_K) = 0 \qquad \text{(corollaire de la proposition 1)}$$

on a aussi par restriction, pour tout L_β contenu dans $\overset{\circ}{L}_\alpha$ un morphisme

$$L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(\overset{\circ}{L}_\alpha)) \longrightarrow L(T, B(L_\beta, \mathcal{F}))$$

l'assertion résulte alors du fait que

$$\mathcal{G}_x = \varinjlim_\alpha L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(\overset{\circ}{L}_\alpha)) .$$

LEMME 2.- Si K est localement $\mathcal{F}$-privilégié,

(a) $B(K, \mathcal{L}.)$ est exact et $H^\circ(K, \mathcal{B}_K \mathcal{F}) = B(K, \mathcal{F})$.

(b) $B(K, \mathcal{F})$ est séparé.

(c) $H^\circ(K, \mathcal{B}_{K,T} \mathcal{F}) = L(T, B(K, \mathcal{F}))$.

(a) - est une conséquence du lemme 1 (a) et de la proposition 1.

(b) - Soit $(L_\alpha)_\alpha$ une famille de polycylindres dans K , $\mathcal{F}$ privilégiés et dont les intérieurs dans K recouvrent K . On a un diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{tikzcd} B(K,\mathcal{F}) = H^0(K,\mathcal{B}_K\mathcal{F}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \prod H^0(L_\alpha^\circ,\mathcal{B}_K\mathcal{F}) \\ \prod_\alpha B(L_\alpha,\mathcal{F}) \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

i, j, k étant des restrictions ; i est injectif car $\mathcal{B}_K\mathcal{F}$ est un faisceau donc j est injective. Comme $\prod_\alpha B(L_\alpha,\mathcal{F})$ est séparé et j continue on en déduit que $H^0(K,\mathcal{B}_K\mathcal{F})$ est séparé.

(c) - Résulte du lemme 1 (b) et du fait que pour tout ouvert U contenant K

$$\mathcal{B}_K\mathcal{F}(U) = B(K,\mathcal{F}) \ .$$

COROLLAIRE.- <u>Si</u> K <u>est localement</u> $\mathcal{F}$-<u>privilégié</u>, K <u>est</u> $\mathcal{F}$-<u>privilégié</u>.

D'après le lemme 2 (b), $B(K,\mathcal{F})$ est un espace de Banach ; on déduit de la proposition 1, du lemme 1 (a) et du lemme 2 (c) que pour tout Banach T , le complexe

$$0 \longrightarrow L(T,B(K,\mathcal{L}.)) \longrightarrow (L(T,B(K,\mathcal{F})) \longrightarrow 0$$

est exact.

<u>Remarque</u>.- Dans le cas du privilège L^2 la démonstration est simplifiée du fait qu'il suffit de démontrer les lemmes 1 et 2 pour $T = \mathbb{C}$.

E - <u>Démonstration de</u> : (iv) $\Longrightarrow$ (v) .

Elle résultera du lemme suivant, plus précis :

LEMME 3.- *Si* K *est* $\mathcal{F}$ *-privilégié, les applications naturelles*

$$B(K, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{F}(\overset{\circ}{K})$$

$$\mathcal{F}(K) \longrightarrow B(K, \mathcal{F})$$

sont injectives continues d'image dense.

Comme dans [1] (§ 8, lemme 1), soient a un point de $\overset{\circ}{K}$ et $m : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application définie par

$$m(t,x) = tx + (1 - t)a \quad .$$

Posons

$$\tilde{\mathcal{F}} = m^* \mathcal{F} \quad ;$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ est pr_1 - plat et K est $\tilde{\mathcal{F}}(1)$-privilégié. Soit V un voisinage de 1 dans $\mathbb{C}$ sur lequel le fibré $B(K, \tilde{\mathcal{F}})$ est trivial.

Soit f un élément de $B(K, \mathcal{F})$ tel que $\rho(f) = 0$; m^*f définit une section analytique s du fibré $B(K, \tilde{\mathcal{F}})$ sur

$$\{ t \in V \cap \mathbb{R} \mid t \leq 1 \}$$

nulle si t est strictement inférieure à 1. Il en résulte que

$$f = s(1) = 0 \ .$$

On démontre de même que $\mathcal{F}(K) \longrightarrow B(K, \mathcal{F})$ est injective ; les autres assertions sont évidentes.

Comme $\mathcal{F}(\overset{\circ}{K})$ est un espace séparé il est évident que (v) implique (vi) et que (v') implique (vi').

F - *Démontrons maintenant que* (vi) (resp.(vi')) *implique* (i).

LEMME 4.- *Soit* K *un compact convexe de* $\mathbb{C}$. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* f *un élément de* $B(K, \mathcal{L}(E,F))$. *On note* $\tilde{f} : B(K,E) \longrightarrow B(K,F)$ *l'application induite par* f .

(i) *Si* $\tilde{f}$ *est strict, alors pour tout point* a *de* ∂K , $f(a)$ *est strict.*

(ii) *Si* f *est dans* $\mathcal{O}(K, \mathcal{L}(E,F))$ *et si* χ *est un élément du dual* $F^{\perp}$ *de* F *nul sur* $\operatorname{Im} f(a)$, *alors pour tout* v *dans* $\operatorname{Im} \tilde{f}$, $\chi \circ v$ *est* $\mathcal{O}(z-a)$;

Démonstration de (i).

Pour tout morphisme h d'espaces de Banach, on note $q(h)$ sa conorme

$$q(h) = \inf_x \frac{\|h(x)\|}{d(x, \ker h)} .$$

On remarque que h est strict si et seulement si $q(h)$ est trictement positif. Il nous suffit de montrer que

$$q(\tilde{f}) \leqslant q(f(a)) .$$

Soient $\epsilon > 0$ et u un élément de E tels que

$$d(u, \ker f(a)) = 1$$

$$\|f(a).u\| < q(f(a)) + \epsilon ;$$

u se relève en un élément u de $B(K,E)$ tel que

$$d(u, \ker \tilde{f}) \geqslant 1 .$$

On déduit de la continuité de $\tilde{f}(\tilde{u})$ l'existence d'un voisinage U de a dans K tel que

$$\forall s \in U , \quad \|f(s).u\| \quad \|f(a).u\| + \epsilon .$$

Soit alors h un élément de $B(K)$ vérifiant

$$h(a) = 1 \quad \text{et} \quad \forall s \neq a , \quad |h(s)| < 1 .$$

Il existe un entier n tel que

$$\sup_{s \in K \cap \complement U} |h^n(s)| \qquad \frac{\epsilon}{\|\tilde{f}(\tilde{u})\|}$$

l'élément v de $B(K,E)$ défini par

$$v(s) = h^n(s).u$$

vérifie $\qquad \|\tilde{f}(v)\| \leqslant \|f(a).u\| + \varepsilon$

et $\qquad d(v, \ker \tilde{f}) \geqslant 1$.

On en déduit donc que

$$q(\tilde{f}) \leqslant q(f(a)) + 2\varepsilon \quad .$$

L'assertion (ii) résulte du fait que l'élément $\chi \circ f$ de $\mathcal{O}(K, E^{\perp})$ est nul en a .

Pour terminer la démonstration du théorème, nous allons montrer que (vi) implique (i) par récurrence sur n , le cas $n = 0$ étant trivial. Supposons donc le théorème vrai en dimension strictement inférieure à n .

Soit $\mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_o \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$ une présentation de $\mathcal{F}$ sur U . Soit $K = K' \times K'' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ et a un point de $\partial K'$. On déduit du lemme 4 (i) et de l'hypothèse de récurrence que, pour tout entier p ,

(1) $\qquad 0 \leqslant p < n-1 \quad , \quad \sigma_p(\mathcal{F}(a)) \cap K''^{(p+1)} = \emptyset$

et du lemme 3 que

(2) $\qquad \mathcal{F}(a)(K'') \longrightarrow B(K'', \mathcal{F}(a))$ est injective.

Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ est pr_1-plat en tout point de $\{a\} \times K''$ et alors le théorème résultera de (1) et du fait que

$$\forall x \in \{a\} \times K'' \quad , \quad \operatorname{prof}_x \mathcal{F} = \operatorname{prof}_x (a) + 1 \quad .$$

Pour montrer que $\mathcal{F}$ est pr_1-plat en tout point de $\{a\} \times K''$, il suffit de montrer que $(z - a).I_{\mathcal{F}(K)} : \mathcal{F}(K) \longrightarrow \mathcal{F}(K)$ est injective. Soit donc $\tilde{u}$ un élément non nul de $\mathcal{F}(K)$, montrons

$$(z - a)\tilde{u} \neq 0 \quad .$$

Soit u un élément de $B(K, \mathcal{L}_o)$ déduit de $\tilde{u}$; notons

$$f : B(K, \mathcal{L}_1) \longrightarrow B(K, \mathcal{L}_o)$$

$$f_a : B(K'', \mathcal{L}_1(a)) \longrightarrow B(K'', \mathcal{L}_o(a))$$

et u_a l'élément de $B(K'', \mathcal{L}_o(a))$ défini par u ; il résulte de (2) et du fait que $\tilde{u}$ est non nul, que u_a n'est pas dans $\mathrm{Im}\, f_a$. Puisque $\mathrm{Im}\, f_a$ est fermée, il existe un élément χ de $F^{\perp}$ nul sur $\mathrm{Im}\, f_a$ et tel que

$$\chi(u_a) \neq 0 .$$

Soit alors $(h_n)_n$ une suite de $\mathcal{O}(K')$ convergeant dans $B(K')$ vers un élément h et telle que, au voisinage de a,

$$h_n(z) = O(z - a)$$
$$h(z) = O(\sqrt{z - a})$$

pour une détermination donnée de $\sqrt{z - a}$ sur K (*).

Il résulte du lemme 2 (ii) appliqué à χ et à $h.u$ que $h.u$ n'est pas dans $\mathrm{Im}\, f$. On ne peut donc avoir $(z - a)\tilde{u} = 0$ car sinon la suite $(h_n u)_n$ serait dans $\mathrm{Im}\, f$ qui est fermée.

Et le théorème est démontré.

§ 3. Recouvrements $\mathcal{F}$-privilégiés (cft. [2]).

Les résultats de ce paragraphe sont extraits de [2] où est introduite la notion de privilège au sens L^2 donnée au paragraphe 1, notion qui s'étend aux compacts de Stein adhérence de leur intérieur.

DEFINITION.- Soient X une variété $\mathbb{C}$-analytique de dimension n et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Soit K un compact de X. On dit que K est géométriquement $\mathcal{F}$-privilégié si, pour tout entier p, $1 \leqslant p \leqslant n$,

(*) Par exemple, soit $(a_n)_n$ une suite convergeant vers a sur une demi-droite de $\complement K$; on peut choisir une détermination de $\sqrt{z-a}$ et $\sqrt{z-a_n}$ sur K de sorte que $h_n(z) = \dfrac{z-a}{\sqrt{z-a_n}}$ réponde à la question.

<u>et tout point</u> x <u>de</u> $\sigma_p(\mathcal{F}) - \sigma_{p-1}(\mathcal{F})$, <u>il existe un germe de morphisme lisse d'espaces analytiques</u>

$$\pi : X,x \longrightarrow \mathbb{C}^p , 0$$

<u>tel que</u> $\mathcal{F}$ <u>soit</u> π <u>-plat et un germe de compact</u> P <u>de</u> $\mathbb{C}^p$ <u>en</u> 0 <u>tel que</u>

$$K,x = \pi^{-1}(P) \quad .$$

Il est démontré dans [2] que si K est un compact géométriquement $\mathcal{F}$-privilégié, contenu dans un ouvert de carte, K est $\mathcal{F}$-privilégié.

D'autre part, il résulte du théorème, que l'on vient de démontrer, que pour un polycylindre les deux notions coïncident.

1. Recouvrement $\mathcal{F}$-privilégié.

Soient X une variété $\mathbb{C}$-analytique et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Soit $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de compacts de Stein de X. On dit que $\mathcal{K}$ est un recouvrement $\mathcal{F}$-privilégié si

$$X = \cup \overset{\circ}{K}_i$$

et si, pour toute partie finie J de I, $\bigcap_{i \in J} K_i$ est $\mathcal{F}$-privilégié.

2. Variétés cylindrables.

Soient X une variété $\mathbb{C}$-analytique de dimension n et $\mathfrak{X} = (X_p)_{p \in \{0,\dots,n\}}$ une stratification de X, i.e. une suite croissante de sous-espaces analytiques tels que pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant n$, $X_p - X_{p-1}$ soit lisse et

$$\forall p \ , \quad \dim X_p \leqslant p \ .$$

On appelle cylindrage de X, relatif à la stratification $\mathfrak{X}$ la donnée d'une suite $\gamma = \{V_p , \pi_p\}_{p \in \{1,\dots,n\}}$ où

V_p est un voisinage ouvert de $X_p - X_{p-1}$

$\pi_p : V_p \longrightarrow X_p - X_{p-1}$ est un morphisme analytique lisse et une rétraction tel que

$$\forall i \leqslant j \ , \qquad \pi_j = \pi_i \circ \pi_j$$

en tout point où les deux membres sont définis.

DEFINITION ([2],V).- *On dit que la variété* X *est cylindrable si, pour toute suite croissante* $(S_p)_p$ *de sous-espaces analytiques tels que* $\forall p$, $\dim S_p \leqslant p$, *il existe une stratification* $\mathfrak{X}$ *de* *telle que* $\forall p$, $S_p \subset X_p$, *et un cylindrage de* X *relatif à* $\mathfrak{X}$.

Il est démontré dans [2] que les variétés projectives et les tores complexes sont cylindrables mais il existe des variétés non cylindrables (cft.[5]).

3. *Théorème d'existence des recouvrements* $\mathcal{F}$*-privilégiés* ([2],IV).

Soient X *une variété cylindrable et* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* X . *Il existe des recouvrements géométriquement* $\mathcal{F}$*-privilégiés de* X , *arbitrairement fins.*

Pour le démontrer on construit, pour un cylindrage $\gamma = \{V_p , \pi_p\}_p$ convenable et en tout point de X , un système fondamental de voisinages γ-privilégiés ; un fermé A étant γ-privilégié si, pour tout p et tout $x \in X_p - X_{p-1}$, il existe un germe de fermé P dans $X_p - X_{p-1}$ en $\pi_p(x)$ tel que

$$A,x = \pi_p^{-1}(P) \quad .$$

Il est clair d'autre part que l'intersection de deux fermés γ-privilégiés est γ-privilégiée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY - Le problème des modules, Ann. Inst. Fourier (1966).

[2] DOUADY-FRISCH-HIRCHOWITZ - Recouvrements privilégiés, Ann. Inst. Fourier, T. 22 à paraître (1972).

[3] FRISCH-GUENOT - Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Invent. Math. 7, (1969).

[4] G. POURCIN - Polycylindres privilégies, C.R. Acad. Sc, T. 272 (1971).

[5] P. le BARZ - Une variété non cylindrable, C.R. Acad. Sc. à paraître.