

Astérisque

FRANCOIS LAUDENBACH

Topologie de la dimension trois homotopie et isotopie

Astérisque, tome 12 (1974)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__12__1_0

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIÈRES

Introduction : DEUX PROBLÈMES SUR LES DIFFÉOMORPHISMES.	3
Chapitre I : PRÉLIMINAIRES.	
§ 1 Le lissage.	7
§ 2 Les théorèmes de Papakyriakopoulos.	9
§ 3 Décomposition des variétés de dimension 3.	13
Chapitre II : VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 $\mathbb{P}^2$ -IRRÉDUCTIBLES ET SUFFISAMMENT GRANDES.	
§ 1 Définitions et remarques.	15
§ 2 Existence de difféomorphismes.	18
§ 3-4 Démonstration du théorème de scindement.	20
§ 5 Théorème des surfaces isotopes.	31
§ 6 Isotopie de difféomorphismes.	46
§ 7 Famille à un paramètre de difféomorphismes.	48
Chapitre III : ISOTOPIE DE SPHÈRES.	
§ 1 Introduction et énoncé des résultats.	63
§ 2 Disjonction homotopique.	66
§ 3 Démonstration du théorème de disjonction isotopique.	73
§ 4 Classification des difféomorphismes de $\#_p S^1 \times S^2$	78
§ 5 Une caractérisation de la vraie sphère de dimension 4.	84
Chapitre IV : SUR LES DÉCOMPOSITIONS DU GROUPE FONDAMENTAL EN PRODUIT LIBRE.	
§ 1 Position du problème.	87
§ 2 Définitions. Classe d'homotopie d'une décomposition libre.	88
§ 3 Homotopie des sphères de Kneser et homotopie des décompositions libres.	
§ 4 Homotopie et isotopie pour les décompositions d'un groupe quelconque.	
Chapitre V : SCINDEMENT D'UNE ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE LE LONG D'UNE 2-SPHÈRE.	
§ 1 Position du problème et énoncé des résultats.	102
§ 2 Caractérisation de scindement.	105

§ 3 Démonstration du théorème de scindement.	109
§ 4 Difféomorphismes entre sommes connexes.	123
Appendice I : LES VARIÉTÉS SATISFAISANT A LA CONJECTURE DE POINCARÉ ET LES VARIÉTÉS $\mathbb{P}^2$ -INSECABLES.	128
Appendice II : ROTATIONS PARALLÈLEMENT A UN SYSTÈME DE SPHÈRES. ...	133
Appendice III : COHOMOLOGIE DU REVÊTEMENT UNIVERSEL D'UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION 3 ET COHOMOLOGIE DE SON GROUPE FONDAMENTAL.	138
RÉFÉRENCES.	146
ABSTRACT.	151

CONTENTS

Introduction : TWO PROBLEMS ON DIFFEOMORPHISMS.

Ch. I : PRELIMINARIES.

Ch. II : 3-MANIFOLDS WHICH ARE $\mathbb{P}^2$ -IRREDUCIBLE AND SUFFICIENTLY LARGE.

Ch. III : ISOTOPY OF 2-SPHERES.

Ch. IV : ON THE DECOMPOSITIONS OF THE FUNDAMENTAL GROUP IN A FREE PRODUCT.

Ch. V : SPLITTING OF A HOMOTOPY EQUIVALENCE ALONG A 2-SPHERE.

App. I : MANIFOLDS SATISFYING THE POINCARÉ CONJECTURE
AND " $\mathbb{P}^2$ -INSECABLES" MANIFOLDS.

App. II : ROTATIONS PARALLEL TO A SYSTEM OF SPHERES.

App. III: COHOMOLOGY OF THE UNIVERSAL COVERING OF A 3-MANIFOLD AND
COHOMOLOGY OF ITS FUNDAMENTAL GROUP.

Introduction

DEUX PROBLÈMES SUR LES DIFFÉOMORPHISMES

Ce texte correspond à une série d'exposés faits au Collège de France dans le cadre du cours Peccot 1973. Dans la catégorie des variétés $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 3, en général compactes et sans bord, on se propose d'étudier les deux problèmes suivants :

Problème I (Existence) : Une équivalence d'homotopie est-elle homotope à un difféomorphisme ?

Problème II (Unicité) : Deux difféomorphismes homotopes sont-ils isotopes ?

Même si l'on admet la conjecture de Poincaré, on sait que le problème I n'a pas toujours de solution : il existe des espaces lenticulaires qui ont le même type d'homotopie sans avoir le même type d'homotopie simple (a fortiori elles ne sont pas difféomorphes), leur torsion de Franz-Reidemeister étant distinctes ; en même temps le premier groupe de Whitehead $Wh_1(\pi)$ de leur groupe fondamental π n'est pas trivial ([M7],[R1]). En outre, d'après les récents travaux de Hendriks [H7], il existe une autre obstruction au problème I, indépendante de la précédente : l'obstruction au scindement le long d'une sphère non homotope à zéro (voir chap. V).

En ce qui concerne le problème II, à ma connaissance personne n'a encore dégagé d'obstruction ni même trouvé un contre-exemple. Mais les travaux de Hatcher et Wagoner [H5] (théorie d'obstruction au problème de la pseudo-isotopie en grande dimension) laissent à penser que, dans certaines conditions sur le second groupe de Whitehead de π , on aurait des chances de trouver des difféomorphismes homotopes (même pseudo-isotopes) à l'identité et non isotopes à l'identité.

Je me propose de rassembler tous les cas jusqu'ici connus où les problèmes I et II admettent des réponses positives. Dans [N1], F. Waldhausen a résolu ces deux problèmes pour la classe des variétés orientables irréductibles et suffisamment grandes ; elle a été étendue par W. Heil [H1] au cas non-orientable (variétés $\mathbb{P}^2$ -irréductibles suffisamment grandes). Au chapitre II, je reprends l'exposé de cette question en y ajoutant une étude des lacets de difféomorphismes sur de telles variétés ; par cette étude je réponds à l'une des questions posées par Waldhausen lors d'une rencontre organisée en Juillet 1973 par l'Université du Sussex (G.B.).

Dans [L3], j'ai résolu le problème II pour les sommes connexes d'exemplaires de $S^2 \times S^1$; l'outil de base y est un théorème d'isotopie de sphères plongées dans une variété satisfaisant à la conjecture de Poincaré. Au chapitre III, je propose une démonstration sensiblement plus simple pour ce théorème, et je donne le théorème d'isotopie de plongements de sphères. Ce dernier a un correspondant algébrique sous la forme d'un théorème qui compare entre elles les décompositions d'un groupe en produit libre (chapitre IV) ; dans ce chapitre, je prouve aussi par la topologie algébrique (cohomologie du groupe fondamental) l'unicité à homotopie près de la sphère, dite de Kneser, qui réalise géométriquement une décomposition libre du groupe fondamental.

Ce dernier résultat est l'outil de base pour attaquer au chapitre V le problème du scindement d'une équivalence d'homotopie le long d'une sphère. J'y développe la démonstration d'un théorème obtenu avec H. Hendriks sous la forme où elle a été annoncée dans [H8] ; nous avons par ailleurs donné une démonstration plus algébrique pour ce théorème [H8']. En mettant ensemble tous les résultats exposés dans ce cours et en utilisant un travail fait par

Hendriks [H7] dans le cadre de la théorie d'obstruction classique pour détecter des applications non homotopes à l'identité, on prouve le théorème suivant (V 1.5) :

Soient M et N deux variétés fermées de dimension 3. On suppose que N s'écrit comme somme connexe

$$N = N_0 \# N_1 \# \dots \# N_q$$

où N_i est soit un fibré sur S^1 de fibre S^2 , soit une variété suffisamment grande $\mathbb{P}^2$ -irréductible (II 1). On suppose que M satisfait à la conjecture de Poincaré (App. I). Alors toute équivalence d'homotopie de M dans N est homotope à un difféomorphisme, unique à isotopie près.

Si l'on pense, comme je l'ai dit plus haut, que les deux premiers groupes de Whitehead du groupe fondamental ont quelque chose à faire avec d'éventuelles obstructions aux problèmes I et II, on peut se demander s'il n'y a pas derrière le théorème V 1.5 des théorèmes d'annulation en K -théorie algébrique ; certains d'entre eux sont effectivement démontrés :

- 1) Si G est un groupe libre, $Wh_1(G) = 0$ [S6].
- 2) Plus généralement, si G est produit libre de groupes fondamentaux de variétés $\mathbb{P}^2$ -irréductibles suffisamment grandes^(*), $Wh_1(G) = 0$ [W2]
- 3) Utilisant les travaux de Quillen, Gersten et Swan ont prouvé que, si G est un groupe libre, $Wh_2(G) = 0$. Est-ce que le même résultat est vrai pour les groupes décrits au 2)

Pour la commodité du lecteur, j'ai placé en appendice quelques propositions plus ou moins élémentaires ou classiques sur

- les variétés satisfaisant à la conjecture de Poincaré et les variétés $\mathbb{P}^2$ -insécables (Appendice I).

(*) La structure de ces groupes est connue.

- les difféomorphismes de rotation parallèlement à un système de sphères (Appendice II),
- la cohomologie du groupe fondamental (Appendice III).

J'ai rédigé ce texte pour qu'il puisse servir de guide dans le sujet. De ce fait, certaines démonstrations ne sont qu'esquissées, soit que les détails existent par ailleurs, soit qu'une figure suffise à exprimer sans ambiguïté ce que l'on veut faire.

La frappe du manuscrit et la réalisation des figures ont été assurées pour l'essentiel par le secrétariat des Professeurs de Lettres et de Mathématiques du Collège de France, avec une aide complémentaire du secrétariat du Centre Mathématique de l'Ecole Polytechnique ; je les en remercie l'un et l'autre.

Au plan mathématique, je suis reconnaissant à tous ceux qui, à des degrés divers, m'ont aidé par leurs suggestions et, plus particulièrement, à H. Hendriks, V. Poenaru et B. Teissier.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

Je rassemble dans ce chapitre quelques-uns des théorèmes fondamentaux de la topologie tridimensionnelle qui seront d'un usage courant dans la suite de ce travail. Leur présentation ne respectera ni l'ordre historique ni leur formulation originale.

§ 1. Le lissage.

Les problèmes classiques de la topologie se posent naturellement dans trois catégories principales : TOP (variétés topologiques et applications continues), PL (semi-linéaires), DIFF (différentiables de classe infinie). Pour chaque dimension, la question se pose de savoir dans quelle mesure ces trois catégories sont distinctes. En dimension 3 les principaux résultats sont les suivants :

1.1 - Théorème de Moïse [M4] :

Toute variété topologique (métrisable) de dimension 3 admet une structure de variété PL et tout homéomorphisme entre deux variétés PL de dimension 3 est approchable par un PL-homéomorphisme.

On peut en déduire, par le truc d'Alexander, que, pour une variété V compacte de dimension 3, on a, pour tout i ,

$$\pi_i(\text{Aut}^{\text{TOP}}(V)) = \pi_i(\text{Aut}^{\text{PL}}(V)) \quad (*) .$$

(Dans [C1] chap. III, § 3, Cerf prouve l'égalité analogue où PL est remplacé par DIFF, en admettant la conjecture de Smale : $\text{Diff}(D^3 \text{ mod } S^2)$ est

(*) Il s'agit des groupes d'homotopie du complexe quasi-simplicial des PL-homéomorphismes [M5].

acyclique ; mais justement $\text{Aut}^{\text{PL}}(D^3 \bmod S^2)$ est acyclique.)

En particulier, tout homéomorphisme de V est isotope à un PL-homéomorphisme, unique à PL-isotopie près.

1.2 - Théorème de Cerf [C2] :

Tout difféomorphisme de S^3 (resp. D^3 , resp. D^3 modulo S^2) conservant l'orientation est isotope à l'identité.

Corollaire 1 :

Le conoyau Γ_4 de la restriction naturelle $\text{Diff } D^4 \rightarrow \text{Diff } S^3$ est nul.

Corollaire 2 :

Toute variété PL de dimension 3 admet une unique structure différentielle.

Preuve. Par la théorie générale du lissage (voir [M6]) l'existence de la structure différentielle découle de $\Gamma_i = 0$ pour $i \leq 3$ (Smale [S8]^(*)) et l'unicité découle de $\Gamma_4 = 0$.

Corollaire 3 :

Tout homéomorphisme PL est PL-isotope à un difféomorphisme unique à Diff-isotopie près.

Preuve. Ce corollaire découle des théorèmes de Smale^(*) (existence) et de Cerf (unicité) par un théorème de Morlet ([M6], chap. IV § 6 lissage des automorphismes) : ce dernier affirme essentiellement que le lissage à paramètres des automorphismes se ramène au problème du lissage des automorphismes tangents. Pour conclure il suffit donc de savoir que $\pi_i(\text{PL}(3), 0(3)) = 0$ pour $i \leq 3$ (existence), pour $i \leq 4$ (unicité). Or le théorème de Morlet appliqué à D^n , compte tenu de l'acyclicité de $\text{Aut}^{\text{PL}}(D^n \bmod S^{n-1})$, prouve

(*) Le théorème de Smale est en fait l'acyclicité de $\text{Diff}(D^2 \bmod S^1)$. La nullité de Γ_3 en est un corollaire immédiat (voir aussi [C2] p. 132).

que, pour tout i et tout n , on a

$$\pi_i(\text{Diff}(D^n \text{ mod } S^{n-1})) = \pi_{i+n+1}(\text{PL}(n), 0(n)).$$

Le théorème de Cerf signifie donc que $\pi_4(\text{PL}(3), 0(3)) = 0$ et le théorème de Smale^(*) signifie l'acyclicité de la paire $(\text{PL}(2), 0(2))$. Un argument de stabilisation implique la nullité de $\pi_i(\text{PL}(3), 0(3))$ pour $i \leq 3$. $\langle \rangle$

En passant, on a dégagé cet autre corollaire du théorème de Cerf :

Corollaire 4 :

Pour $i \leq 4$, on a

$$\pi_i(\text{PL}(3), 0(3)) = 0.$$

Remarque. Le résultat de Morlet prouve que la conjecture de Smale (acyclicité de $\text{Diff}(D^3 \text{ mod } S^2)$) équivaut à l'acyclicité de la paire $(\text{PL}(3), 0(3))$.

Conclusion. L'ensemble de ces résultats concernant le lissage prouve que dans l'étude des problèmes I et II de l'introduction la catégorie DIFF, PL ou TOP importe peu. Dans la suite, j'ai choisi de travailler avec la catégorie DIFF, en mettant en évidence avec précision les endroits où il faut invoquer le théorème de Cerf.

§ 2. Les théorèmes de Papakyriakopoulos.

Les énoncés que j'en donne (sous une forme un peu restreinte) ont reçu aussi une contribution de J.H.C. Whitehead [S9] [W5], de Epstein [E1] (cas non-orientable du "sphere theorem") et de Stallings [S4] [S5].

2.1 - "Sphere theorem" :

Soit V une variété de dimension 3 telle que $\pi_2(V) \neq 0$. Alors il existe

(*) Cf. page précédente.

une sphère plongée S ou un plan projectif P plongé avec fibré normal trivial, tel que l'inclusion $S \hookrightarrow V$ (resp. $P \hookrightarrow V$) induise un morphisme non nul

$$\pi_2(S) \rightarrow \pi_2(V) \quad (\text{resp. } \pi_2(P) \rightarrow \pi_2(V)) .$$

Une conséquence frappante de ce théorème est que le complémentaire d'un noeud dans S^3 est un espace d'Eilenberg-Mac Lane (de dimension finie !) ; par conséquent, d'après un théorème de P.A. Smith, qui aujourd'hui revient à dire qu'un groupe fini cyclique a une dimension cohomologique infinie, un groupe de noeud est sans torsion.

2.2 - "Loop theorem" + lemme de Dehn.

Soient V une variété de dimension 3, T une surface proprement^(*) plongée dans V avec fibré normal trivial. Si le morphisme $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(V)$ ^(**) induit par l'inclusion n'est pas injectif, alors il existe une courbe simple γ non homotope à zéro sur T et un disque D plongé dans V tel que $\gamma = \partial D$ et $\text{int } D \cap T = \emptyset$.

Remarque. La courbe γ a sûrement un fibré normal trivial dans T.

Je donne dans le numéro suivant ce qui sera l'application "canonique" de ce théorème pour la suite, spécialement au chapitre II.

2.3 - Chirurgie plongée sur une application.

Les données sont les suivantes : une variété V de dimension 3, un couple formé d'une variété X et d'une sous-variété Y à fibré normal trivialisé, une application $f : V \rightarrow X$ transversale sur Y. Posons $T = f^{-1}(Y)$; c'est une sous-variété munie d'une trivialisation normale.

(*) $T \cap \partial V = \emptyset$.

(**) Si T n'est pas connexe, cela veut dire que l'on considère la collection des morphismes $\pi_1(T, x_i) \rightarrow \pi_1(V, x_i)$ où x_i est un point base dans la i-ème composante de T .

Rappelons qu'une chirurgie plongée sur T est la donnée d'un sous-cobordisme $(W, T, T') \subset V \times ([0, 1], \{0\}, \{1\})$, muni d'une trivialisation normale prolongeant celle de T et tel que la projection $V \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ induise une fonction de Morse ayant un seul point critique, dont l'indice est l'indice de la chirurgie. On dira qu'une homotopie $h : V \times [0, 1] \rightarrow X$, d'origine f , réalise cette chirurgie plongée si, h étant transversale sur Y , on a $W = h^{-1}(Y)$ (isomorphisme de sous-variétés à trivialisation normale).

En général, on ne se donne pas W mais seulement sa sphère d'attachement Σ^{k-1} dans T (k est l'indice de la chirurgie). On cherche alors un disque D^k plongé dans V tel que

$$1) \quad \partial D^k = \Sigma^{k-1}, \quad \text{int } D^k \cap T = \emptyset,$$

2) la trivialisation θ du fibré normal $\nu(T, V)$ s'écrit, au-dessus de Σ , $\vec{u} + \theta'$ où $\vec{u}$ est le champ de vecteurs rentrant dans D et où θ' est un champ de repères normaux sur D .

Le cobordisme W et sa trivialisation normale sont alors déterminés à isotopie près par D et θ' . Ensuite connaissant W , on construit h en appliquant la théorie d'obstruction au prolongement d'applications ; l'obstruction s'exprime de la façon suivante : soit $N(Y)$ un voisinage tubulaire de Y dans X assez petit pour que $f^{-1}(N(Y))$ soit un voisinage tubulaire $N(T)$ de T dans V , découpant sur le disque D^k un voisinage collier de son bord ; alors il faut et il suffit que $f|_D - \text{int } N(T)$ représente l'élément trivial de $\pi_k(X - \text{int } N(Y), \partial N(Y))$. Voici quelques cas particuliers : on supposera que T est une surface et que V est de dimension 3.

- Réalisation d'une somme connexe ($k = 1$).

C'est le cas où D^1 est un arc joignant deux composantes distinctes de T sans jamais recouper T . La nullité de $f|_{D^1} - N(T)$ dans

$$\pi_1(X - \text{int } N(Y), \partial N(Y))$$

implique en particulier l'existence de θ' , laquelle signifie qu'au voisinage de chacune de ses extrémités D^1 se trouve du même côté de T .

- Réalisation d'une chirurgie d'indice 2.

On tente souvent de l'effectuer dans le cas où T est compact et où $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(V)$ n'est pas injectif. Le "loop theorem" assure alors l'existence d'un 2-disque D définissant une chirurgie plongée d'indice 2 sur T , dont le résultat est noté T' . Puisque le bord de D est une courbe non homotope à zéro sur T , on peut affirmer que la composante de T contenant ∂D est transformée en une ou deux surfaces, chacune de genre strictement plus petit. Si $\pi_2(X - \text{int } N(Y), \partial N(Y)) = 0$, cette chirurgie plongée est réalisable par une homotopie. Le raisonnement sur le genre assure qu'en itérant cette opération un nombre fini de fois on construit une homotopie de f jusqu'à une application $g : V \rightarrow X$ telle que l'inclusion induise une injection $\pi_1(g^{-1}(Y)) \rightarrow \pi_1(V)$. Dans le cas particulier où $f : V \rightarrow X$ est une équivalence d'homotopie et où $\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ est injectif, cela revient à dire que $g_{\#} : \pi_1(g^{-1}(Y)) \rightarrow \pi_1(Y)$ est injectif sur chaque composante.

- Elimination d'une composante ($k = 3$).

Soit S une composante sphérique de T . On suppose qu'elle borde une boule D^3 minimale, c'est-à-dire $\text{int } D^3 \cap T = \emptyset$. L'obstruction à l'élimination de cette composante par une homotopie de f se trouve dans

$$\pi_3(X - \text{int } N(Y), \partial N(Y)).$$

§ 3. Décomposition des variétés de dimension 3.

Une variété fermée est indécomposable si elle n'est pas isomorphe à une somme connexe de deux variétés chacune distincte de la sphère (somme connexe non triviale).

Kneser [K2] (voir aussi Haken [H2]) a prouvé que toute variété compacte de dimension 3 admettait une décomposition en un nombre fini de variétés indécomposables. Dans la classe des variétés satisfaisant à la conjecture de Poincaré (variétés (C.P.) ; voir Appendice I), cette affirmation est de nature algébrique; en effet si V est une variété (C.P.) dont le groupe fondamental n'admet pas de décomposition (non triviale) en produit libre, on est sûr, d'après le théorème de Van Kampen que V est indécomposable ; d'ailleurs, d'après le théorème de Kneser-Stallings (chap. IV), ceci est une propriété caractéristique de l'indécomposabilité d'une variété (C.P.). Or le théorème de Grushko (voir [M3] p.191) a pour conséquence qu'un groupe de type fini est produit libre d'au plus un nombre fini de groupes non triviaux indécomposables.

D'autre part le théorème de Kurosh sur la structure des sous-groupes d'un produit libre a la conséquence suivante (voir [K1] p. 26) :

Soit G un groupe admettant deux décompositions en produit libre :

$$G = \star_{i \in I} G_i = \star_{j \in J} G'_j .$$

On suppose que, pour tout i et tout j , G_i et G'_j sont indécomposables. Alors il existe une bijection $\varphi : I \rightarrow J$ telle que, pour tout $i \in I$, G_i et $G'_{\varphi(i)}$, considérés comme sous-groupes de G , y soient conjugués.

Milnor [M2] a prouvé que, pour une variété V fermée orientable de dimension 3, cette unicité de la décomposition du groupe fondamental se relève dans la géométrie : si

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

$$V = \#_{i \in I} V_i = \#_{j \in J} V'_j$$

sont deux décompositions non triviales (i.e. si $V \neq S^3$, $V_i, V'_j \neq S^3$ pour tout i, j) et si, pour tout i, j , V_i et V'_j sont indécomposables, alors il existe une bijection $\varphi : I \rightarrow J$ telle que, pour tout $i \in I$, V_i et $V'_{\varphi(i)}$ soient difféomorphes.

Ce théorème est faux dans le cas non-orientable : soit E le fibré sur S^1 non-orientable de fibre S^2 ; on a $E \# E \cong E \# S^1 \times S^2$.

CHAPITRE II

VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 $\mathbb{P}^2$ -IRRÉDUCTIBLES ET SUFFISAMMENT GRANDES

Cette classe de variétés compactes a été introduite par F. Waldhausen dans le cas orientable [W1] et étendue au cas non-orientable par W. Heil [H1]. Dans cette classe, les deux problèmes sur les difféomorphismes, formulés dans l'introduction, ont une réponse positive. L'exposé que je vais en faire s'inspire essentiellement des idées apportées par G. P. Scott [S1]. Celui-ci a mis en évidence des faits sur les sous-groupes du groupe fondamental provenant de surfaces incompressibles (voir définition ci-dessous), dont la démonstration est élémentaire (revêtements et dualité de Poincaré), et a utilisé ses résultats pour simplifier le travail fait par Waldhausen sur le problème I. La solution du problème II repose sur le théorème du h-cobordisme (cas particulier du problème I) et sur un théorème de disjonction de surfaces incompressibles. La démonstration que je propose pour ce dernier consiste à le regarder d'abord dans un certain revêtement, où apparaît une belle structure d'arbre. A ce niveau l'ensemble des courbes d'intersection est muni d'une structure de préordre et il existe une disjonction à peu près canonique, commençant par l'élimination des courbes extrémales. Grâce à cela, on peut espérer mettre des paramètres dans le théorème de disjonction et, à condition d'admettre la conjecture de Smale sur l'acyclicité de $\text{Diff}(D^3 \text{ mod } S^2)$, attaquer la conjecture suivante due à Waldhausen : si V est une variété $\mathbb{P}^2$ -irréductible suffisamment grande, $\text{Diff}(V)$ est un rétracte par déformation de l'espace $H(V)$ des équivalences d'homotopie propres. On va prouver $\pi_i(H(V), \text{Diff}(V)) = 0$ pour $i \leq 2$ (modulo la trivialité de $\pi_1(\text{Diff } D^3 \text{ mod } S^2)$ pour $i = 2$). La démonstration occupe les paragraphes 1 à 4 pour $i = 0, 5$ et 6 pour $i = 1$ et 7 pour $i = 2$.

§1. Définitions et remarques.

1.1 - Une variété est toujours C^∞ compacte de dimension 3, sauf mention du contraire !

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

1.2 - Une variété est irréductible si toute sphère plongée y borde une boule ; il faut noter qu'il existe peut-être des fausses sphères irréductibles.

1.3 - Une variété est $\mathbb{P}^2$ -irréductible si elle est irréductible et si elle n'admet aucun plongement de $\mathbb{P}^2$ à deux côtés.

1.4 - Une surface Σ dans une variété V désigne une sous-variété compacte connexe de dimension 2, proprement plongée dans V ($\partial V \cap \Sigma = \partial \Sigma$). Elle est incompressible si

a) Σ a deux côtés,

b) Σ n'est pas le bord d'une sous-variété contractile ou n'est pas un disque proprement homotope à un disque du bord.

c) l'inclusion $\Sigma \hookrightarrow V$ induit une injection $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(V)$.

D'après le "loop theorem", cette dernière propriété est équivalente à la suivante : toute courbe simple γ sur Σ , qui borde un disque D plongé dans V tel que $\text{int} D \cap \Sigma = \emptyset$, est homotope à zéro sur Σ .

- Une surface incompressible ne peut pas être contenue dans l'intérieur d'une sous-variété contractile.

1.5 - Une variété V est suffisamment grande si V contient une surface incompressible Σ .

- Dès que ∂V a une caractéristique d'Euler négative ou que V est fermée et non-orientable, $H^1(V; \mathbb{Z})$ n'est pas trivial. On peut alors construire une application $f : V \rightarrow S^1$ induisant un épimorphisme $\pi_1(V) \rightarrow \mathbb{Z}$ et donc trouver dans V une surface à deux côtés qui ne sépare pas V . Après un certain nombre de chirurgies plongées d'indice 2 on en fera une surface incompressible.

Lemme :

Si V est $\mathbb{P}^2$ -irréductible et suffisamment grande, $\pi_1(V)$ est infini.

En effet si Σ est une surface incompressible dans V , ou bien $\pi_1(\Sigma)$ est infini, donc $\pi_1(V)$ aussi, ou bien $\Sigma = D^2$ et $\partial\Sigma$ est une courbe non homotope à zéro sur ∂V ; dans ce cas, $\chi(\partial V) \leq 0$ et on vient de dire que $\mathbb{Z}$ est alors facteur direct dans $\pi_1(V)$. $\diamond$

1.6 - Lemme :

Soit V une variété de dimension 3.

1) Si V est $\mathbb{P}^2$ -irréductible et suffisamment grande, V est asphérique (tous ses groupes d'homotopie sont nuls sauf le premier).

2) Si V est $\mathbb{P}^2$ -irréductible et si Σ est une surface incompressible dans V , alors $V - \Sigma$ est $\mathbb{P}^2$ -irréductible.

3) Si V , variété de dimension 3 éventuellement non compacte, est asphérique et si Σ , surface incompressible propre de V , éventuellement non compacte, est distincte de S^2 et de $\mathbb{P}^2$, alors $V - \Sigma$ est aussi asphérique.

Preuve. 1) D'après le lemme précédent, $\pi_1(V)$ est infini; donc le revêtement universel $\tilde{V}$ est une variété ouverte. D'après le "sphere theorem", $\pi_2(V) = 0$. Donc $\tilde{V}$ est acyclique.

2) Puisque Σ ne peut pas être placé dans une boule, toute boule de V dont le bord est dans $V - \Sigma$ est entièrement dans $V - \Sigma$. On en déduit que $V - \Sigma$ est $\mathbb{P}^2$ -irréductible.

3) On est sûr que le revêtement universel $V - \Sigma \sim$ n'est pas une variété fermée. Il suffit donc de voir que $\pi_2(V - \Sigma) = 0$. Si V est orientable, par le "sphere theorem", il suffit de montrer que toute sphère plongée dans $V - \Sigma$, homotope à zéro dans V , est homotope à zéro dans $V - \Sigma$. Une telle sphère borde dans V une variété contractile W (App. I prop. 1); mais Σ ne peut pas être contenue dans $\text{int } W$. Donc $W \subset V - \Sigma$. Si V n'est pas orientable, on fait le même raisonnement dans le revêtement des orientations. $\diamond$

Remarques.-Dans [W3], Waldhausen a construit une variété fermée orientable irréductible, dont le groupe fondamental est infini (elle est donc asphérique) mais qui n'est pas suffisamment grande. Cependant elle a un revêtement fini suffisamment grand. Dans [W1], il a conjecturé que c'est toujours le cas.

- D'autre part, la propriété d'être asphérique se transmet de l'espace total d'un revêtement à sa base et vice versa. La propriété d'irréductibilité se transmet par descente (App. I prop. 1) mais, pour la remontée, c'est une question ouverte.

§2. Existence de difféomorphismes (Problème I).

2.1 - Théorème :

Soient M et N deux variétés de dimension 3 compactes et Π^2 -irréductibles. On suppose que N est suffisamment grande. Soit $f : M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie telle que $f|_{\partial M}$ soit un difféomorphisme sur ∂N . Alors, modulo le bord, f est homotope à un difféomorphisme.

2.2 - Si $N = D^3$, on a $\partial M = S^2$ et, par irréductibilité, $M = D^3$. Alors, dans la catégorie DIFF, ce théorème n'est autre que $\Gamma_3 = 0$ (Smale [S8]). L'idée est donc de trouver un découpage convenable de N (hiérarchie) pour tenter de se ramener à ce cas simple.

Hiérarchie. Cette notion a été introduite par W. Haken [H3]. C'est une suite de variétés $N_1 = N, N_2, \dots, N_{n+1}$ et de surfaces incompressibles $F_j \subset N_j$ ($j = 1, \dots, n$) telles que $N_{j+1} = N_j - \text{int } U(F_j)$, où $U(F_j)$ désigne un voisinage tubulaire fermé de F_j dans N_j , et que N_{n+1} soit une union disjointe de boules. On peut en plus demander que, pour $j \geq 2$, F_j ne sépare pas N_j .

Théorème (Haken) :

Une variété compacte $\mathbb{P}^2$ -irréductible suffisamment grande possède une hiérarchie.

2.3 - L'entier n est la longueur de la hiérarchie. On démontre le théorème 2.1 par récurrence sur n , sachant que c'est connu pour $n = 0$. L'argument de la récurrence est fourni par le

Théorème de scindement :

La situation étant la même que dans le théorème 2.1, on considère une surface F incompressible dans N . Alors, modulo le bord, f est homotope à $g : M \rightarrow N$, transversale sur F , telle que g induise un isomorphisme de $g^{-1}(F)$ sur F .

En admettant ce théorème, vérifions la récurrence pour le théorème 2.1. En notant U un voisinage tubulaire fermé, il faut vérifier que

$$g' = g| : M - \text{int } U(g^{-1}(F)) \rightarrow N - \text{int } U(F)$$

satisfait à toutes les conditions du théorème 2.1, le seul point non immédiat étant que c'est une équivalence d'homotopie. D'après le lemme 1.6 3), la source et le but de g' sont asphériques ; il suffit donc de voir que g' induit un isomorphisme sur le groupe fondamental. Ceci se vérifie immédiatement en utilisant que $\pi_1(M)$ est obtenu à partir de $\pi_1(M - \text{int } U(g^{-1}(F)))$ par amalgamation (idem au but) et que $g_{\#} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ est un isomorphisme de cette structure amalgamée. De plus $N - \text{int } U(F)$ possède une hiérarchie de longueur plus petite que celle de N . Ainsi le théorème 2.1 découle du théorème 2.3, dont la démonstration occupe les paragraphes 3 et 4.

2.4 - La notion de hiérarchie existe aussi sur les surfaces compactes, distinctes de S^2 et $\mathbb{P}^2$. Les objets incompressibles y sont des courbes simples propres, à deux côtés, qui ne bordent pas de disques ou ne sont pas isotopes

à des sous-variétés du bord. De la même manière qu'on démontre les théorèmes précédents, on peut prouver le théorème de Nielsen [N1] :

Soit $f : (G, \partial G) \rightarrow (F, \partial F)$ une application propre de surfaces compactes induisant un monomorphisme $\pi_1(G) \rightarrow \pi_1(F)$. On suppose que $\pi_1(G) \neq 0$ et que $G \neq \mathbb{P}^2$. Alors f est proprement homotope à g vérifiant soit a) soit b) :

a) $g : G \rightarrow F$ est un revêtement ;

b) $g(G) \subset \partial F$ et $G = S^1 \times [0, 1]$ ou le ruban de Mobius.

Remarque. Les surfaces F et G sont asphériques.

§3. Démonstration du théorème de scindement (2.3)

Pour cet énoncé restreint, le cas $\partial F \neq \emptyset$ sera presque immédiat après quelques remarques faites plus loin. Le cas difficile, sur lequel il faut concentrer l'attention, est celui où $\partial F = \emptyset$; c'est l'hypothèse faite de 3.3 à 3.5.

3.1 - Partant d'une application $f : M \rightarrow N$ transversale sur F , nous allons en plusieurs étapes faire des homotopies de f pour simplifier $f^{-1}(F)$ par chirurgie plongée. La première observation est que $f^{-1}(F)$ ne peut être vide ; l'hypothèse faite sur $f|_{\partial M}$ lorsque $\partial M \neq \emptyset$ implique que f est de degré 1 donc surjective. D'autre part F étant à deux côtés, $f^{-1}(F)$ l'est aussi par transversalité ; en particulier $\mathbb{P}^2$ n'est pas inclus dans $f^{-1}(F)$.

3.2 - Modification de f pour que $f^{-1}(F)$ soit une union de surfaces incompressibles.

D'après I 2.3, l'obstruction à faire des chirurgies plongées d'indice 2 réalisables par homotopie de f habite dans $\pi_2(N - \text{int } U(F), \partial U(F))$, où $U(F)$ désigne un voisinage tubulaire fermé de F dans N . Or d'après le lemme 1.6, $\pi_2(N - F) = 0$; d'autre part l'inclusion induit un monomorphisme

$\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(N)$. Donc $\pi_2(N - \text{int } U(F), \partial U(F)) = 0$. Après un certain nombre de ces opérations, on arrive au cas où l'inclusion induit une injection $\pi_1(f^{-1}(F)) \rightarrow \pi_1(M)$. Pour que $f^{-1}(F)$ soit une union de surfaces incompressibles, il reste à éliminer les composantes sphériques, ce que l'on peut faire par chirurgie plongée d'indice 3 sur f si $\pi_3(N - \text{int } U(F), \partial U(F)) = 0$ (I 2.3). Or ceci est vrai puisque $\pi_3(N - F) = 0$ (1.6) et que $\pi_2(F) = 0$.

3.3 - Modification de f pour que f induise un isomorphisme de chaque composante de $f^{-1}(F)$ sur F . ($\partial F = \emptyset$)

Soit T une composante de $f^{-1}(F)$. D'après 3.2, T est incompressible ; donc les morphismes naturels suivants sont tous injectifs

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \longrightarrow & \pi_1(N) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_1(T) & \longrightarrow & \pi_1(F) . \end{array}$$

D'après 2.4, on peut supposer que $f|_T$ est un revêtement de F . Admettons l'assertion suivante, prouvée au paragraphe 4 :

Assertion A : Seul l'un des deux cas suivants peut se produire :

A1 - $f|_T : T \rightarrow F$ est de degré 1 ;

A2 - $f|_T : T \rightarrow F$ est de degré 2 et $T = \partial X$,

$X \subset M$ tel que, dans $\pi_1(N)$, on ait l'égalité

$$f_{\#}(\pi_1(X)) = \pi_1(F).$$

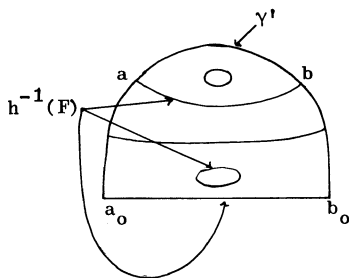
Si on est dans le cas A1, $f|_T$, revêtement de degré 1 sur F , est trivial. Si on est dans le cas A2, il n'y a aucune obstruction à faire une homotopie de f , modulo $M - \text{int } X$, jusqu'à $g : M \rightarrow N$ telle que $g(X) \subset F$. Il existe alors une approximation de g , transversale sur F , par laquelle

l'image réciproque de F est $f^{-1}(F) = T$.

3.4 - Le "binding tie" lorsque $f^{-1}(F)$ n'est pas connexe.

C'est une idée de Stallings, qu'il a utilisée pour prouver la conjecture de Kneser (voir chap. IV et [S5] p. 16). Ici on veut prouver que, si $f^{-1}(F)$ n'est pas connexe, il existe deux composantes distinctes T_1, T_2 de $f^{-1}(F)$ et un arc simple γ d'origine dans T_1 et d'extrémité dans T_2 tels que (1) $\text{int } \gamma \cap f^{-1}(F) = \emptyset$ et que (2) $f|_\gamma$ représente l'élément trivial de $\pi_1(N, F)$.

On commence avec n'importe quel triple (T_1, T_2, γ) vérifiant (1), qui existe sauf si $f^{-1}(F)$ est déjà connexe. Evidemment (2) n'est, en général, pas satisfait ; mais $f_\# : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ étant un isomorphisme, il n'est pas difficile de changer γ en γ' , en conservant les extrémités a_0, b_0 , pour que $f|_{\gamma'}$ représente l'élément trivial de $\pi_1(N, F)$; malheureusement (1) n'a plus de raison d'être satisfait ; on peut seulement prendre γ' transversal sur $f^{-1}(F)$. Soit $h : D^2 \rightarrow N$ une homotopie de $f|_{\gamma'}$ jusqu'à un arc singulier de F . Pour rendre h transversal sur F on choisit D^2 à deux coins, γ' étant identifié à un arc du bord les joignant :



Les points $\gamma' \cap h^{-1}(F)$ sont aussi les points d'intersection $\gamma' \cap f^{-1}(F)$.

Soient a, b deux points de γ' joints par un arc α de $h^{-1}(F)$, distincts de a_0, b_0 et découpant sur γ' un arc minimal $\widehat{ab}$ (c'est-à-dire qui ne recoupe pas $f^{-1}(F)$). Un tel couple de points existe dès que γ' ne vérifie pas (1). Si a et b appartiennent à deux composantes distinctes T_1' et T_2' de $f^{-1}(F)$, alors le triple $(T_1', T_2', \widehat{ab})$ convient. Si a et b appartiennent à la même composante T' de $f^{-1}(F)$, puisque $f_{\#} : \pi_1(T') \rightarrow \pi_1(F)$ est un isomorphisme d'après 3.3, il existe un arc β joignant a et b dans T' tel que, à extrémités fixes, $f|_{\beta} \sim h|_{\alpha}$ (homotopie dans F). Alors l'arc $(\gamma' - \widehat{ab}) \cup \beta$ vérifie toujours (2) et il a une approximation γ'' qui possède moins de points d'intersection avec $f^{-1}(F)$. En répétant ce raisonnement, on finira par trouver le triple désiré.

3.5 - Modification de f pour rendre $f^{-1}(F)$ connexe ($\partial F = \emptyset$).

Si $f^{-1}(F)$ n'est pas connexe, le "binding tie" nous fournit un triple (T_1, T_2, γ) vérifiant les conditions (1) et (2) précédentes. Soit Y l'adhérence de la composante de $M - f^{-1}(F)$ qui contient $\text{int } \gamma$. Admettons l'assertion suivante prouvée au paragraphe 4.

Assertion B : (Y, T_1, T_2) est un h -cobordisme.

On veut alors faire une homotopie de f , modulo $M - \text{int } Y$, jusqu'à $g : M \rightarrow N$ telle que $g(Y) \subset F$. D'après l'asphéricité de la paire $(N, F)^{(*)}$, la seule obstruction pour construire cette homotopie est la trivialité de $f|_{\gamma}$ dans $\pi_1(N, F)$. Justement la condition (2) de 3.4 dit qu'elle est nulle. Après cela on prend une approximation de g , transversale sur F par laquelle l'image réciproque de F est $f^{-1}(F) - (T_1 \cup T_2)$.

3.6 - Démonstration du théorème 2.3 modulo les assertions A et B.

Si $\partial F = \emptyset$, on effectue les modifications décrites de 3.2 à 3.5. Au

(*) $\pi_i(N, F) = 0$ pour $i \geq 2$.

cours de ces modifications, les premières propriétés acquises ne sont pas perdues par la suite. Donc à la fin $f : f^{-1}(F) \rightarrow F$ est un isomorphisme.

Si $\partial F \neq \emptyset$, par hypothèse $f : f^{-1}(\partial F) \rightarrow \partial F$ est un isomorphisme ; donc, dès que l'on a rendu $f^{-1}(F)$ incompressible (3.2) et $f|_{f^{-1}(F)}$ revêtement de son image, celui-ci est trivial puisqu'il est de degré 1 sur le bord.

§ 4. Démonstration des assertions A et B

(suivant les idées de G.P. Scott).

4.1 - Lemme :

Soient V une variété de dimension 3 à bord incompressible et T une composante compacte de ∂V distincte de S^2 et $\mathbb{R}^2$. On suppose que V est asphérique. Soit $p : \tilde{V} \rightarrow V$ le revêtement associé à $\pi_1(T)$. On suppose que ∂V contient au moins deux composantes compactes T_1, T_2 . Alors (V, T_1, T_2) est un h-cobordisme (compact) et l'indice $(\pi_1(V) : \pi_1(T))$ est inférieur ou égal à 2.

Preuve. Par construction de $\tilde{V}$, l'inclusion $i : T \hookrightarrow V$ se relève en une inclusion $\tilde{i} : T \hookrightarrow \tilde{V}$ qui est une équivalence d'homotopie puisqu'elle induit un isomorphisme des groupes fondamentaux et que T et $\tilde{V}$ sont asphériques. Considérons la suite exacte

$$H_3(\tilde{V}, \partial\tilde{V}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(\partial\tilde{V}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2)$$

et calculons les rangs r_1, r_2, r_3 de ces trois $\mathbb{Z}_2$ -modules, de gauche à droite. On a $r_1 \leq 1$ puisque $\tilde{V}$ est connexe ; $r_1 = 1$ si et seulement si $\tilde{V}$ est compact. $r_2 \geq 2$ par hypothèse sur $\partial\tilde{V}$; $r_2 = 2$ si et seulement si $\partial\tilde{V} = T_1 \cup T_2$. Enfin $r_3 = 1$ puisque $\tilde{V} \sim T$ surface fermée. L'exactitude de la suite implique $r_1 = 1, r_2 = 2$. On peut alors supposer que $T_1 = \tilde{i}(T)$.

- Supposons maintenant que $\tilde{V}$ soit orientable. ($\cong T$ orientable).

Dans la suite exacte

$$H_2(\tilde{V}, \partial\tilde{V}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H_1(\partial\tilde{V}; \mathbb{Z}) = H_1(T_1) \oplus H_1(T_2) \xrightarrow{\beta} H_1(\tilde{V}; \mathbb{Z})$$

les flèches α et β sont duales et $\beta|_{H_1(T_1) \oplus 0}$ est un isomorphisme. Donc α est un monomorphisme et on a

$$\text{rang } H_1(\partial\tilde{V}; \mathbb{Z}) = 2 \text{ rang } H_1(T_1; \mathbb{Z}).$$

Finalement $H_1(T_1; \mathbb{Z})$ et $H_1(T_2; \mathbb{Z})$ ont le même rang, donc $T_1 \cong T_2$.

- Prouvons que $T_2 \hookrightarrow \tilde{V}$ est une équivalence d'homotopie (c'est-à-dire que $(\tilde{V}, T_1, T_2)$ est un h-cobordisme). Soit $\rho : \tilde{V} \rightarrow T_1$ une équivalence d'homotopie inverse de l'inclusion ; la composée $T_2 \hookrightarrow \tilde{V} \xrightarrow{\rho} T_1$ est de degré 1, puisque T_1 et T_2 sont homologues, et induit un monomorphisme de groupes fondamentaux (incompressibilité de T_2) ; d'après 2.4, c'est une équivalence d'homotopie.

- Cas où $\tilde{V}$ est non-orientable :

Soient $\tilde{p} : \tilde{\tilde{V}} \rightarrow \tilde{V}$ le revêtement des orientations, $\tilde{T}_1 = \tilde{p}^{-1}(T_1)$, $\tilde{T}_2 = \tilde{p}^{-1}(T_2)$. On sait que $\tilde{p}|_{\tilde{T}_1}$ est le revêtement des orientations de T_1 et que $(\tilde{\tilde{V}}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$ est un h-cobordisme ; donc $\tilde{T}_2$ est connexe et $\tilde{p}_\#(\pi_1(\tilde{T}_2))$ est d'indice 2 dans $\pi_1(T_2)$; mais $\tilde{p}_\#(\pi_1(\tilde{T}_2)) = \tilde{p}_\#(\pi_1(\tilde{\tilde{V}}))$ est aussi d'indice 2 dans $\pi_1(\tilde{V})$. Finalement $\pi_1(T_2) \cong \pi_1(\tilde{V}) \cong \pi_1(T_1)$ (isomorphismes induits par les inclusions).

- Calcul de l'indice $(\pi_1(V) : \pi_1(T))$:

Par la compacité de $\tilde{V}$ on sait que cet indice est fini. Si $p(T_1) \neq p(T_2)$, le revêtement est sûrement à un seul feuillet et l'indice est 1. Si $p(T_2) = p(T_1) = T$, $p|_{T_2}$ est un revêtement fini de T . Donc $p_\#(\pi_1(T_2))$ est d'indice fini dans $\pi_1(T)$ et dans $\pi_1(V)$. Puisque $\tilde{V}$ est un h-cobordisme, il existe $\gamma \in \pi_1(V)$ tel que

$$p_{\#}(\pi_1(T_2)) = \gamma^{-1}\pi_1(T)\gamma \subset \pi_1(T).$$

Si $\gamma^{-1}\pi_1(T)\gamma = \pi_1(T)$, c'est que $p|_{T_2}$ est un isomorphisme, donc que $(\pi_1(V):\pi_1(T)) = 2$. Supposons que $\gamma^{-1}\pi_1(T)\gamma \subsetneq \pi_1(T)$. Alors pour tout n , $\gamma^{-n}\pi_1(T)\gamma^n \subsetneq \pi_1(T)$. Or, par finitude de $(\pi_1(V):\pi_1(T))$, il existe un entier n_0 tel que $\gamma^{n_0} \in \pi_1(T)$, ce qui implique $\gamma^{-n_0}\pi_1(T)\gamma^{n_0} = \pi_1(T)$.

cqfd

De la même façon on peut prouver le lemme suivant :

4.1 bis -

Soient V une variété asphérique de dimension 3 à bord incompressible et T une sous-variété compacte de ∂V telle que $\partial T \neq \emptyset$. On suppose qu'aucune courbe de ∂T n'est homotopiquement triviale dans ∂V (donc $\pi_1(T)$ s'injecte dans $\pi_1(V)$). Soient $\tilde{V}$ le revêtement de V associé à $\pi_1(T)$ et $\tilde{T} \cong T$ un relèvement de T . On suppose que $\partial\tilde{V}$ a au moins une composante compacte. Alors $(\tilde{V}, \tilde{T}, \partial\tilde{V} - \text{int } \tilde{T})$ est un h-cobordisme relatif.

4.2 - Corollaire (Assertion B) :

Soient M une variété de dimension 3 asphérique, Y une sous-variété de dimension 3 de M , dont toutes les composantes du bord sont incompressibles et distinctes de S^2 et de $\mathbb{P}^2$. Soient (T_1, a_1) et (T_2, a_2) deux composantes compactes pointées de ∂Y . On suppose qu'il existe dans Y un chemin γ joignant a_1 et a_2 tel que, pour tout lacet ω de T_2 en a_2 , le lacet $\gamma\omega\gamma^{-1}$ soit homotope dans M modulo a_1 à un lacet de T_1 . Alors (Y, T_1, T_2) est un h-cobordisme.

Remarques. 1) Comparer cet énoncé au lemme 5.1 de [W1].

2) Les hypothèses de ce corollaire sont celles dans lesquelles l'assertion B a été énoncée (3.5).

Preuve. D'après le lemme 1.6, Y est asphérique. D'autre part l'incompressibilité de ∂Y implique que $\gamma\omega\gamma^{-1}$ est homotope dans Y modulo a_1 à

un lacet de T_1 . Soit $\tilde{Y}$ le revêtement de Y associé à $\pi_1(T_1, a_1)$; les deux surfaces T_1 et T_2 se relèvent dans $\tilde{Y}$. Ainsi les hypothèses du lemme 4.1 sont satisfaites, donc $\partial\tilde{Y}$ a exactement deux composantes, l'une au-dessus de T_1 , l'autre au-dessus de T_2 . Alors $\tilde{Y}$ est un revêtement à un feuillet de Y . Donc (Y, T_1, T_2) est un h -cobordisme. $\langle \rangle$

4.3 - Corollaire :

Soit Σ une surface fermée incompressible dans une variété V de dimension 3 asphérique. On suppose que $\Sigma \neq S^2$, $\mathbb{P}^2$ et que l'entier $r = (\pi_1(V) : \pi_1(\Sigma))$ est fini et différent de 1. Alors $r = 2$ et $\Sigma = \partial Z$ où Z est une sous-variété compacte de V telle que l'inclusion $Z \hookrightarrow V$ induise un isomorphisme $\pi_1(Z) \cong \pi_1(V)$.

Preuve. La finitude de r et le théorème de Van Kampen impliquent que Σ sépare V en deux composantes $(V = V_1 \cup_{\Sigma} V_2)$ et que $\pi_1(V_1) \cong \pi_1(\Sigma)$, $\pi_1(V_2) \cong \pi_1(V)$, les isomorphismes étant induits par les inclusions ; V_1 et V_2 sont asphériques (1.6). Soit $p : \tilde{V}_2 \rightarrow V_2$ le revêtement associé à $\pi_1(\Sigma)$; il est fini, donc $p^{-1}(\Sigma)$ est compact. Or $p^{-1}(\Sigma)$ contient un relèvement de Σ ; le revêtement étant supposé non trivial ($r \neq 1$), $\partial\tilde{V}_2$ a au moins deux composantes compactes au-dessus de Σ . D'après 4.1, $\tilde{V}_2$ est compact et l'indice $r = (\pi_1(V_2) : \pi_1(\Sigma))$ est égal à 2. On prend donc $Z = V_2$. $\langle \rangle$

4.4 - Corollaire :

L'assertion A (3.3) est vraie.

Preuve. La situation est la suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\quad f(\text{équivalence d'homotopie}) \quad} & N \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 T & \xrightarrow{\quad \text{degré } r \neq 1 \quad} & F
 \end{array}$$

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

où les deux inclusions de surfaces fermées sont incompressibles. On choisit un point base $x_0 \in T$. Rappelons que l'on veut prouver que $T = \partial X$ avec $\pi_1(X, x_0) = G$ (comme sous-groupes de $\pi_1(M, x_0)$), où $G = (f_{\#})^{-1}(\pi_1(F, y_0))$ et où $y_0 = f(x_0)$. Soit $p : (\tilde{M}, x_1) \rightarrow (M, x_0)$ le revêtement associé à G . Par le point x_1 , on a une inclusion relevée $T_1 \hookrightarrow \tilde{M}$, ($T_1 \cong T$), et $r = (\pi_1(\tilde{M}, x_1) : \pi_1(T_1, x_1))$ est fini différent de 1. D'après 4.3, on a $r = 2$ et $T_1 = \partial Z$, où Z est une sous-variété compacte telle que

$$p_{\#}\pi_1(Z, x_1) = G.$$

Si $p^{-1}(T) \cap \text{int } Z = \emptyset$, c'est que $p|_Z$ est un isomorphisme ; on prend alors $X = p(Z)$.

Sinon il y a dans $\text{int } Z$ d'autres composantes compactes de $p^{-1}(T)$. Soient T_2 l'une d'entre elles et un point base $x_2 \in T_2 \cap p^{-1}(x_0)$. On a

$$p_{\#}\pi_1(T_2, x_2) = \pi_1(T, x_0) \cap \gamma^{-1}G\gamma$$

où $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$; un lacet représentant γ se relève en un chemin de $\tilde{M}$ commençant en x_1 et finissant en x_2 .

Or tout monomorphisme entre groupes fondamentaux de surfaces fermées a une image d'indice fini. Donc $p_{\#}\pi_1(T_2, x_2)$ est d'indice fini dans $\gamma^{-1}G\gamma$; ou encore $\pi_1(T_2, x_2)$ est d'indice fini dans $\pi_1(Z, x_2)$. La paire (Z, T_2) satisfait aux hypothèses de 4.3 ; donc $T_2 = \partial Z'$, $Z' \subset Z$ et via l'inclusion $\pi_1(Z', x_2) \cong \pi_1(Z, x_2)$, c'est-à-dire

$$p_{\#}\pi_1(Z', x_2) = \gamma^{-1}G\gamma.$$

Sachant maintenant que chaque composante de $p^{-1}(T) \cap \text{int } Z$ borde dans Z , on peut choisir T_2 de sorte que $p^{-1}(T) \cap \text{int } Z' = \emptyset$. Alors, dans M , $T = \partial X$ avec $X = p(Z')$. Le malheur c'est que $\pi_1(X, x_0) = \gamma^{-1}G\gamma$ et non G .

Il reste donc à prouver que γ appartient au normalisateur de G dans $\pi_1(M, x_0)^{(*)}$.

On introduit le revêtement $(\tilde{N}, y_1) \xrightarrow{p'} (N, y_0)$ associé à $\pi_1(F, y_0)$. L'application f se relève en un morphisme de revêtements $\tilde{f}: (\tilde{M}, x_1) \rightarrow (\tilde{N}, y_1)$. Notons F_1 le relèvement de F par y_1 ($F_1 \cong F$) et F_2 la composante de $p'^{-1}(F)$ passant par $y_2 = \tilde{f}(x_2)$. On a $\tilde{f}(T_1) \subset F_1$ et $\tilde{f}(T_2) \subset F_2$. Posons $\gamma' = f_{\#}(\gamma)$. On a $p'_{\#}(\pi_1(F_2, y_2)) = \pi_1(F, y_0) \cap \gamma'^{-1} \pi_1(F, y_0) \gamma'$.

Notons Y l'adhérence de l'unique^(**) composante de $\tilde{N} - p'^{-1}(F)$ à laquelle adhèrent F_1 et F_2 . Par incompressibilité de F (donc de ∂Y), les inclusions induisent

$$\pi_1(F_1, y_1) \hookrightarrow \pi_1(Y, y_1) \hookrightarrow \pi_1(\tilde{N}, y_1).$$

(*) Le raisonnement que je fais ici est plus compliqué que celui de Scott, mais il en comble une lacune. En effet, Scott prétendait prouver l'assertion A en n'utilisant de G que le fait $(G : \pi_1(T, x_0)) < +\infty$. Je peux alors faire un exemple où γ n'appartient pas au normalisateur de G :

On prend une surface fermée non-orientable Σ , distincte de $\mathbb{P}^2$, son revêtement des orientations $\tilde{\Sigma}$ et E le fibré en intervalles $[0, 1]$ associé : $\partial E = \tilde{\Sigma}$. On pose $M = E_1 \cup_{\tilde{\Sigma}} E_2$, où $E_1 \cong E_2 \cong E$; M est $\mathbb{P}^2$ -irréductible. Soit α un lacet de désorientation sur Σ dans E_2 . Le contre-exemple au théorème 1.4 de [S1] est obtenu pour $G = \alpha^{-1} \pi_1(E_1) \alpha$. En effet, comme sous-groupe de $\pi_1(M)$, $G \neq \pi_1(E_1)$ et $G \neq \pi_1(E_2)$; d'autre part $\pi_1(\tilde{\Sigma})$ est α -invariant et d'indice 2 dans G .

(**) Remarquer que F_1 et F_2 séparent $\tilde{N}$ (voir 5.4 1ère partie).

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

La composée étant un isomorphisme, on a $\pi_1(F_1, y_1) \cong \pi_1(Y, y_1)$. D'autre part F_2 est une surface fermée ; en effet $\pi_1(F_2, y_2)$ contient

$$\tilde{f}_\#(\pi_1(T_2, x_1)) \cong \pi_1(T_2, x_2)$$

qui n'est pas libre puisque T_2 est une surface fermée. D'après 4.1, (Y, F_1, F_2) est un h-cobordisme. Le lemme suivant implique alors que γ' est dans le normalisateur de $\pi_1(F, y_0)$, donc que γ est dans celui de G .

cqfd

Lemme :

Soient (F, y_0) une surface incompressible fermée dans une variété asphérique N ; $p' : (\tilde{N}, y_1) \rightarrow (N, y_0)$ le revêtement associé à $\pi_1(F, y_0)$; F_1 le relèvement de F par y_1 et F_2 une composante de $p'^{-1}(F)$, h-cobordante à F_1 dans $\tilde{N}$ $(F_1 \cup F_2 = \partial Y$ où Y est un h-cobordisme dans $\tilde{N})$. Soit γ' la classe d'homotopie d'un lacet de N dont le relèvement joint y_1 à y_2 , où $y_2 \in p'^{-1}(y_0) \cap F_2$. Alors γ' appartient au normalisateur de $\pi_1(F, y_0)$.

Preuve. On a immédiatement la relation

$$p'_\# \pi_1(F_2, y_2) = \gamma'^{-1} \pi_1(F, y_0) \gamma' \subset \pi_1(F, y_0).$$

Il faut encore prouver que $p'|_{F_2}$ est un isomorphisme sur F ou encore que $p'^{-1}(y_0) \cap F_2 = y_2$. Soit F' une composante de $p'^{-1}(F)$ dans Y ; on a vu dans la démonstration précédente que F' était nécessairement h-cobordante à F_1 . On se ramène donc au cas où $\text{int } Y \cap p'^{-1}(F) = \emptyset$. Maintenant $p'|_Y$ peut être regardé comme un revêtement de la variété $\hat{N}$ obtenue en coupant N le long de F . Si $\hat{N}$ est connexe, $\partial(p'(Y))$ a deux composantes : F_1 en revêt une trivialement, F_2 revêt l'autre ; donc $p'|_Y$ est un revêtement trivial. Si $\hat{N}$ n'est pas connexe, $p'(Y)$ est l'une des deux composantes et $\partial(p'(Y))$ est revêtu en même temps par F_1 et par F_2 . D'après 4.1 ce revê-

tement a au plus deux feuilles ; donc $p'|_{F_2}$ est un revêtement à une seule feuille. $\diamond$

§ 5. Théorèmes des surfaces isotopes.

Il s'agit de savoir si des surfaces incompressibles homotopes sont isotopes. On commence par traiter des cas particuliers (théorème du h-cobordisme et théorème des surfaces parallèles). Le cas général s'y ramène grâce à un théorème de disjonction.

5.1 - Théorème du h-cobordisme.

Soit (X, F, F') un cobordisme compact de dimension 3, éventuellement à face latérale $(\Delta X, \partial F, \partial F')$ $(*)$. On suppose $F \neq \mathbb{P}^2$. Si l'inclusion $F \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie, alors il existe une sphère d'homotopie Σ et un difféomorphisme

$$\Phi : (F \times [0, 1], F \times \{0\}, F \times \{1\}) \# \Sigma \longrightarrow (X, F, F') .$$

Remarques. 1) Ce théorème a un énoncé plus fort (modulo la conjecture de Poincaré) que le même théorème en grande dimension : on ne suppose pas que $F' \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie. D'autre part, il met en évidence - sans pour autant le prouver - le fait qu'il n'y a pas de torsion : le groupe de Whitehead du groupe fondamental d'une surface compacte est nul [W2].

2) La question est ouverte pour $F = \mathbb{P}^2$ (voir A I 3).

Démonstration. 1) $F = S^2$. Alors $F' = S^2$; on choisit un arc simple γ de F à F' et on vérifie que $F \#_{\gamma} F'$ est une sphère homotope à zéro, qui borde donc une variété contractile dans X (A I 1). Le théorème est clair dans ce cas.

2) Si $F \neq S^2$, $\mathbb{P}^2$, il n'existe aucun plongement de $\mathbb{P}^2$ dans X à fi-

(*) $\partial X = F \cup \Delta X \cup F'$

bré normal trivial ; en effet, si un tel plongement existait, le générateur α de $\pi_1(\mathbb{P}^2)$ retournerait l'orientation de X ; donc α serait non nul dans $\pi_1(X)$, autrement dit $\pi_1(X)$ contiendrait $\mathbb{Z}_2$. Mais F (donc X) étant un espace d'Eilenberg-MacLane de dimension finie, ceci est impossible d'après le théorème de P.A. Smith. Si X n'est pas irréductible, c'est que $X = X' \# \Sigma$ où Σ est une homotopie-sphère^(*) ; si besoin est, on recommence cette opération d'extraction des "fausses sphères" ; d'après [H2], au bout d'un nombre fini de fois, on tombe sur une variété irréductible. Il ne reste qu'à démontrer le théorème lorsque X est $\mathbb{P}^2$ -irréductible.

3) Si $\partial F = \emptyset$, d'après 4.2, (X, F, F') est un h-cobordisme et il existe un difféomorphisme $\varphi : F' \rightarrow F$ rendant homotopiquement commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{\varphi} & F \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

Donc il existe une application

$$\varphi' : F \times ([0, 1], \{0\}, \{1\}) \rightarrow (X, F, F')$$

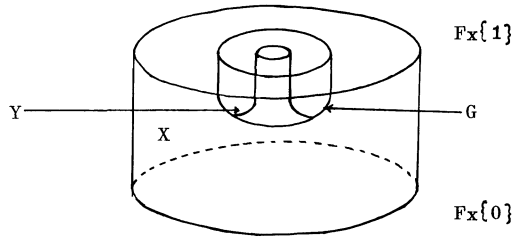
qui est une équivalence d'homotopie et un isomorphisme sur le bord. La conclusion est alors donnée par le théorème 2.1. Si $\partial F \neq \emptyset$ (h-cobordisme relatif), on invoque un corollaire analogue à 4.2 découlant de 4.1 bis.

cqfd.

5.2 - Théorèmes des surfaces parallèles.

Soit F une surface compacte distincte de S^2 et de $\mathbb{P}^2$. Soit G une surface connexe incompressible dans $F \times [0, 1]$ telle que, si $\partial G \neq \emptyset$, on ait $\partial G \subset F \times \{1\}$. Alors G est parallèle à une surface de $F \times \{1\}$ c'est-à-dire qu'il existe une isotopie de G modulo ∂G jusqu'à une surface de $F \times \{1\}$.

(*) Puisque $F \neq S^2$, toute 2-sphère de X y borde une sous-variété.



Démonstration. Puisque $H_2(F \times [0, 1], F \times \{1\}; \mathbb{Z}_2) = 0$, on peut écrire $F \times [0, 1] = X \cup Y$ avec $F \times \{0\} \subset X$. Par incompressibilité, les inclusions $\begin{smallmatrix} G \\ \text{induisent des monomorphismes} \end{smallmatrix}$

$$\pi_1(F \times \{0\}) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(F \times [0, 1]) = \pi_1(X) \underset{\pi_1(G)}{*} \pi_1(Y)$$

et la composée est un isomorphisme. On en déduit que, via les inclusions, $\pi_1(X) \cong \pi_1(F \times [0, 1])$ et $\pi_1(G) = \pi_1(Y)$. Donc $G \hookrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie. La conclusion découle du théorème du h-cobordisme puisque Y , comme $F \times [0, 1]$, est $\mathbb{P}^2$ -irréductible.

cqfd.

5.3 - Soient F et F' deux surfaces plongées dans une variété V .

1) On dira que F est homotope à F' ($F \sim F'$), s'il existe une surface Σ et deux plongements $\varphi, \varphi': \Sigma \rightarrow V$, d'images respectives F et F' , qui soient homotopes. On dira que F est isotope à F' si on peut trouver φ, φ' isotopes.

2) On dira qu'il existe une homotopie de disjonction de F par rapport à F' s'il existe une application $\varphi : F \rightarrow V$ homotope à l'inclusion $F \hookrightarrow V$ et telle que $\varphi(F) \subset V - F'$. (Remarquer que cette définition n'est pas symétrique en F et F' .) On dira qu'il existe une isotopie de disjonction de F et de F' , s'il existe un difféomorphisme H de V , isotope à l'identité, tel que $H(F) \subset V - F'$.

Lorsque $\partial F \neq \emptyset$, alors $\partial F = F \cap \partial V$ et les homotopies considérées sont toujours des homotopies propres.

Remarque : Si F' est à fibré normal trivial et si $F \sim F'$, alors il existe une homotopie de disjonction de F par rapport à F' . Si d'autre part on sait prouver que la disjonction homotopique entraîne la disjonction isotopique, alors, pour prouver que des surfaces homotopes à fibrés normaux triviaux sont isotopes, il suffira de le faire lorsque ces surfaces sont disjointes, cette dernière situation ressemblant à celle d'un h-cobordisme. Cette raison donne beaucoup de poids à un théorème de disjonction.

5.4 - Théorème de disjonction.

Soient V une variété $\mathbb{P}^2$ -irréductible, F et F' deux surfaces compactes proprement plongées et incompressibles dans V . S'il existe une homotopie de disjonction de F par rapport à F' , alors il existe une isotopie de disjonction.

Remarques : 1) On suppose au départ que F et F' se coupent transversalement suivant des courbes. Il va apparaître dans la démonstration que certaines d'entre elles sont extrémales en un certain sens et que la disjonction isotopique commencera par leur élimination. Ce fait ne se reproduira pas dans le théorème de disjonction des sphères (chap. III).

2) On ne peut sûrement pas supprimer l'hypothèse d'incompressibilité sinon on prouverait qu'une courbe qui peut être disjointe homotopiquement

d'une surface peut aussi l'être isotopiquement, ce qui est bien faux. En revanche je conjecture que le théorème est vrai si V au lieu d'être $\mathbb{P}^2$ -irréductible est seulement $\mathbb{P}^2$ -insécable et satisfait à la conjecture de Poincaré (App. I).

3) On exclut de la démonstration les cas triviaux suivants qui se déduisent immédiatement de l'hypothèse d'irréductibilité : F (resp. F') $\cong S^2$; ∂F (resp. $\partial F'$) est homotope à zéro dans ∂V .

Démonstration. Elle se décompose en deux parties comme dans [L2] : on introduit le revêtement $p : \tilde{V} \rightarrow V$ associé à $\pi_1(F)$; on note $\tilde{F}$ un relèvement de F et $\tilde{F}' = p^{-1}(F')$. Il existe une homotopie de disjonction de $\tilde{F}$ par rapport à $\tilde{F}'$.

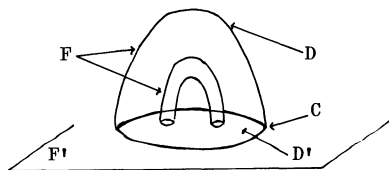
Dans une première partie, on construit une isotopie de disjonction plus ou moins canonique (voir § 7) de $\tilde{F}$ par rapport à $\tilde{F}'$. Dans une deuxième partie, on prouve qu'elle relève une isotopie de disjonction de F par rapport à F' dans V .

Avant cela, commençons par prendre quelques précautions si ∂F et $\partial F'$ sont non vides. Le théorème de disjonction isotopique étant vrai pour des courbes sur des surfaces^(*), on peut supposer au départ que $\partial F \cap \partial F' = \emptyset$. Mais cela ne permet pas d'imposer à l'homotopie de disjonction h de F par rapport à F' d'être constante sur le bord. Cependant, par la technique habituelle (chirurgie plongée et homotopie), on peut supposer

(*) Si ce n'est pas explicite dans [E2], c'est un exercice compte tenu de ce qui y est fait.

(1) que $h^{-1}(F')$ est composée de surfaces incompressibles et que $h^{-1}(\partial F')$ est une réunion de courbes parallèles à ∂F (observer qu'une courbe de $\partial F \times [0,1]$ qui n'est pas parallèle à une courbe de ∂F est le bord d'un disque et qu'on peut donc l'éliminer).

D'autre part, F et F' étant transversales et incompressibles, si une courbe d'intersection C est homotope à zéro sur F elle l'est sur F' (et vice versa). Dans ce cas $C = \partial D$, où D est un disque sur F que l'on peut supposer minimal ($\text{int } D \cap F' = \emptyset$), C borde aussi un disque D' sur F' et $D \cup D'$ est une sphère plongée qui borde une boule anguleuse B ; F' ne peut être contenue dans B ; donc $\text{int } B \cap F' = \emptyset$.



Par isotopie à travers B , on peut éliminer la courbe d'intersection C et en même temps toutes celles qui se trouvent à l'intérieur de D' .

(2) Cette opération étant faite jusqu'à épuisement, on partira pour la suite avec des courbes d'intersection non homotopes à zéro.

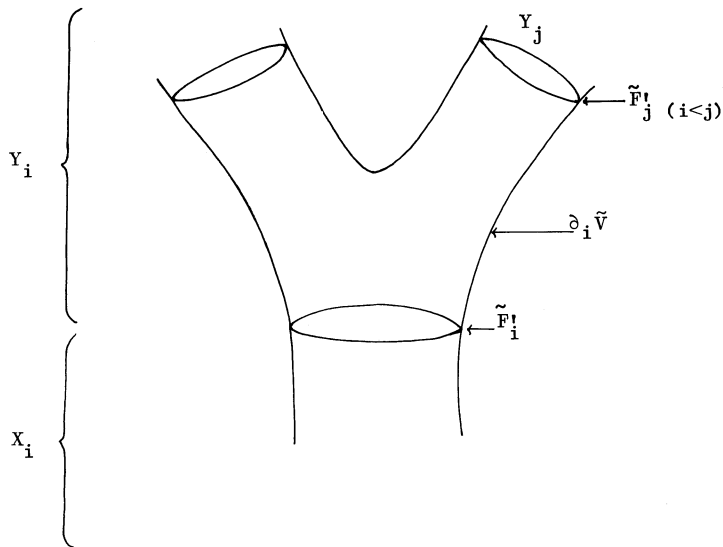
1ère partie : Disjonction dans $\tilde{V}$.

Soit $\tilde{h} : \tilde{F} \times [0,1] \rightarrow \tilde{V}$ le relèvement de l'homotopie h . L'image $\tilde{h}(\tilde{F} \times \{1\})$ habite dans un ouvert U , composante de $\tilde{V} - \tilde{F}'$. L'inclusion $U \hookrightarrow \tilde{V}$ induit un isomorphisme des groupes fondamentaux donc une équivalence

d'homotopie (noter que tous les espaces considérés sont asphériques (1.6)) :
 en effet, la composée

$$\pi_1(F \times \{1\}) \xrightarrow{\tilde{h}_\#} \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\tilde{V})$$

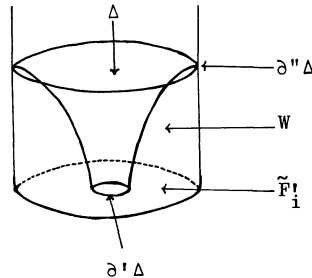
est un isomorphisme et $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\tilde{V})$ est un monomorphisme ($\tilde{F}'$ incompressible). Chaque composante de $\tilde{F}'$ sépare $\tilde{V}$: un lacet qui couperait une composante de $\tilde{F}'$ en un seul point ne serait pas homotope à un lacet de U . On notera $\tilde{F}'_i$, $i \in \pi_0(\tilde{F}')$, les composantes de $\tilde{F}'$ et $\tilde{V} = X_i \cup_{\tilde{F}'_i} Y_i$ où $X_i \supset U$. Les inclusions $\tilde{F}'_i \hookrightarrow Y_i$ et $U \hookrightarrow X_i$ sont des équivalences d'homotopie et la relation $Y_i \subset Y_j$ définit une structure de préordre $i < j$ sur $\pi_0(\tilde{F}')$; finalement, le nerf de la stratification de $\tilde{V}$ par les $\tilde{F}'_i$ est un arbre. On notera aussi $\partial_i \tilde{V} = \partial \tilde{V} \cap Y_i$.



TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

(3) Lemme :

Soit Δ une surface compacte, connexe, incompressible dans Y_i , à bord non vide. On suppose que $\partial\Delta = \partial'\Delta \cup \partial''\Delta$, où $\partial'\Delta = \partial\Delta \cap \text{int } \tilde{F}_i^!$ est non vide et où $\partial''\Delta$, contenu dans $\partial_i \tilde{V}$, est une réunion de courbes parallèles à des composantes de $\partial \tilde{F}_i^!$. Alors Δ est h-parallèle à une surface de $\tilde{F}_i^!$: il existe un h-cobordisme relatif $W \subset Y_i$, d'origine Δ et d'extrémité dans $\tilde{F}_i^!$.

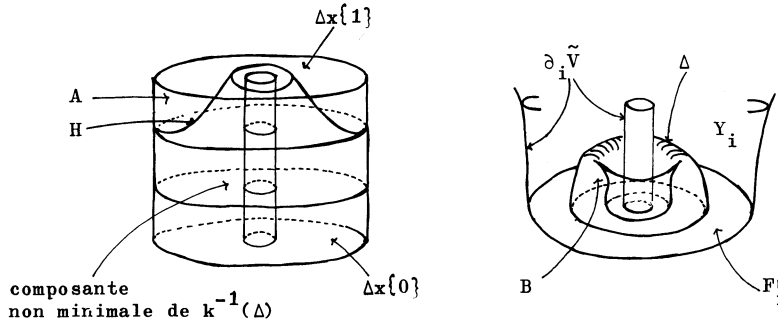


Démonstration du lemme. On exclut le cas trivial $\Delta = D^2$ qui résulte de l'asphéricité de Y_1 . D'autre part, l'hypothèse sur $\partial''\Delta$ permet de faire une isotopie de $\partial''\Delta$ dans $\partial_1\tilde{V} \cup (\tilde{F}_1' - \partial'\Delta)$ (lissé le long de $\partial\tilde{F}_1'$) jusqu'à ce que $\partial''\Delta$ se trouve dans $\tilde{F}_1'$; on prolonge cette isotopie à Δ dans Y_1 . Si, après cela, la conclusion du lemme est vraie, et comme $\partial'\Delta \neq \emptyset$, c'est que deux composantes distinctes de $\partial''\Delta$ sont parallèles à deux composantes distinctes de $\partial\tilde{F}_1'$ et que la conclusion du lemme est déjà vraie avant l'isotopie. On peut donc supposer pour la suite que $\partial''\Delta = \emptyset$.

Maintenant, puisque $\tilde{F}_i^! \hookrightarrow Y_i$ est une équivalence d'homotopie, il existe une application singulière, transversale sur Δ ,

$k : (\Delta, \partial\Delta) \times [0, 1] \rightarrow (Y_i, \tilde{F}_i^!)$ telle que $k|_{\Delta \times \{0\}} = (\Delta \hookrightarrow Y_i)$ et $k(\Delta \times \{1\}) \subset \tilde{F}_i^!$.

Par chirurgie plongée et homotopie de k , on se ramène au cas où $k^{-1}(\Delta)$ est incompressible ; cette opération est possible parce que $Y_i - \Delta$ est asphérique. Maintenant chaque composante de $k^{-1}(\Delta)$ est d'après 5.2 parallèle à une surface de $\Delta \times \{1\} \cup \partial\Delta \times [0, 1]$. Nous dirons qu'une telle composante H est minimale si le domaine A ($\cong H \times [0, 1]$) qu'elle limite du côté de $\Delta \times \{1\} \cup \partial\Delta \times [0, 1]$ ne contient aucune autre composante en son intérieur. Soit alors B l'adhérence de la composante de $Y_i - \Delta$ qui contient $k(\text{int } A)$.



(4) J'affirme que B est un h-cobordisme relatif d'origine Δ et d'extrémité dans $\tilde{F}_i^!$, sauf si $k|_H : H \rightarrow \Delta$ est homotope à une application $H \rightarrow \partial\Delta$, ce qui, d'après 2.4 ne peut arriver que pour $H = D^2$, $S^1 \times [0, 1]$ ou le ruban de Möbius.

Preuve de (4). Les cas indiqués étant exclus, $k|_H : H \rightarrow \Delta$ est homotope à un revêtement. Soit $\tilde{B}$ le revêtement de B associé à $k_*(\pi_1(H))$. L'application

$$k : (A, H, \overline{\Delta A - H}) \rightarrow (B, \Delta, \overline{\partial B - \Delta})$$

se relève en une application

$$\tilde{k} : (A, H, \overline{\partial A - H}) \rightarrow (\tilde{B}, H, \overline{\partial \tilde{B} - H})$$

qui est l'identité sur H . Alors $\tilde{k}$ est de degré 1 de $\overline{\partial A - H}$ sur la composante de $\overline{\partial \tilde{B} - H}$ qui contient $\tilde{k}(\overline{\partial A - H})$. Donc $\partial \tilde{B}$ contient au moins une composante compacte. D'après 4.1 bis, $\tilde{B}$ est un h -cobordisme relatif. D'où l'égalité des indices

$$(\pi_1(\Delta) : k_{\#}\pi_1(H)) = (\pi_1(B) : k_{\#}\pi_1(H)),$$

le premier étant fini par compacité de H . Donc l'inclusion $\Delta \hookrightarrow B$ induit un isomorphisme $\pi_1(\Delta) \cong \pi_1(B)$. Puisque B est compact ($\tilde{B}$ l'est), c'est un h -cobordisme relatif (4.1 bis).

Pour finir la démonstration du lemme, il reste à éliminer H lorsque $k|_H : H \rightarrow \Delta$ est homotope à $H \rightarrow \partial \Delta$. Dans ce cas, considérons

$$k' = k|_{\overline{\Delta \times [0,1] - A}}.$$

Sans introduire de nouvelles composantes de $k'^{-1}(\Delta)$, on peut homotoper k' jusqu'à ce que $k'(H) \subset \tilde{F}_1^!$. En identifiant $\overline{\Delta \times [0,1] - A}$ à $\Delta \times [0,1]$, k' a alors la propriété

$$k'(\Delta \times \{1\} \cup \partial \Delta \times [0,1]) \subset \tilde{F}_1^!$$

et $\text{card } \pi_0(k'^{-1}(\Delta)) = \text{card } \pi_0(k^{-1}(\Delta)) - 1$. De plus k est homotope à k' parmi les applications

$$(\Delta \times [0,1], \Delta \times \{1\} \cup \partial \Delta \times [0,1]) \rightarrow (Y_i, \tilde{F}_1^!). \quad \langle \rangle$$

Démonstration de 5.4 (fin de la 1ère partie). Par compacité de $\tilde{F}$, il existe un plus grand indice i , tel que $\tilde{F} \cap Y_i$ soit non vide. Soit Δ une composante de $\tilde{F} \cap Y_i$. Puisqu'on a supposé $\partial \tilde{F} \cap \partial \tilde{F}^! = \emptyset$, on a $\partial \Delta = \partial' \Delta \cup \partial'' \Delta$, avec $\partial' \Delta \subset \tilde{F}_1^!$ et $\partial'' \Delta \subset \partial_i \tilde{V}$. D'après (2), Δ est incompressible. Pour appliquer le lemme vérifions que $\partial'' \Delta$ est parallèle à un

système de courbes de $\partial \tilde{F}'_i$. Or, C désignant une composante de $\partial''\Delta$, d'après (1), $(h|_{C \times [0,1]})^{-1}(\partial \tilde{F}'_i)$ est une famille de courbes parallèles à C dans $C \times [0,1]$. Les lemmes 4.1 et 4.2 étant vrais pour des courbes à fibrés normaux triviaux sur une surface, on conclut que C est parallèle dans $\partial_i \tilde{V}$ à une courbe de $\partial \tilde{F}'_i$. Enfin $\partial'\Delta \neq \emptyset$, sinon on aurait $\tilde{F} \cap \tilde{F}' = \emptyset$.

Le lemme précédent fournit alors un h-cobordisme relatif W , que l'on peut supposer minimal ($\text{int } W \cap \tilde{F} = \emptyset$). D'après Waldhausen [W1], le revêtement universel de V est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, donc $\tilde{V}$ est irréductible et W est $\mathbb{P}^2$ -irréductible (App. I). C'est donc un cobordisme trivial qui permet l'élimination isotopique des courbes d'intersection $\partial'\Delta$ de $\tilde{F}$ avec $\tilde{F}'$. Ce sont ces courbes que j'ai évoquées comme extrémales dans la remarque 5.4 1).

2ème partie : la descente.

5.4 (5) - Lemme :

Soient V' une variété $\mathbb{P}^2$ -irréductible et F' une composante incompressible de son bord. Soient $p' : \tilde{V}' \rightarrow V'$ un revêtement et Δ une surface incompressible connexe de $\tilde{V}'$, $\Delta \neq D^2$, telle que

- a) $\partial\Delta$ soit non vide et contenu dans une composante de $\tilde{F}' = p'^{-1}(F')$,
- b) Δ sépare $\tilde{V}'$ en deux composantes dont l'une est un h-cobordisme relatif $(W, \Delta, \tilde{F}' \cap W)$,
- c) $p'|_{\Delta}$ soit un plongement.

Alors $p'|_W$ est un plongement et $(W, \Delta, \tilde{F}' \cap W)$ est trivial. De plus $(\tilde{V}' - W, \Delta, \tilde{F}' - \tilde{F}' \cap W)$ n'est pas un h-cobordisme.

Conséquence : Dans la situation du théorème de disjonction, V' est la variété obtenue en coupant V le long de F' , $\tilde{V}' = Y_i - \bigcup_{j>i} \overset{\circ}{Y}_j$ et p' est la restriction de $p : \tilde{V} \rightarrow V$ à ce domaine ; Δ et W sont les objets obtenus à la fin de la première partie. D'après ce lemme $(W, \Delta, \tilde{F}'_i \cap W)$ est un produit, ainsi que la projection. Autrement dit, l'isotopie de disjonction trouvée dans le revêtement relève une isotopie de disjonction dans la base.

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

Démonstration : Soient A et B les deux sous-variétés de V' telles que $V' = A \cup B$. On convient que A contient l'image d'un voisinage $p'(\Delta)$ collier de Δ dans W . Si $(A, p'(\Delta), A \cap F')$ est un h-cobordisme, à cause du relèvement des homotopies, il est sûrement l'image de W , ce qui implique que $p'|_W$ soit un plongement ; de plus, d'après le théorème du h-cobordisme, A est un produit, donc W aussi.

Si $(B, p'(\Delta), B \cap F')$ est un h-cobordisme, par relèvement des homotopies on voit que $(\widetilde{V}' - W, \Delta, \widetilde{F}' - \widetilde{F}' \cap W)$ est un h-cobordisme ; $\widetilde{V}'$ se trouve alors réunion de deux h-cobordismes relatifs le long d'une extrémité commune ; alors $\widetilde{F}'$ est connexe mais n'est pas incompressible, contrairement à l'hypothèse.

Il reste donc à prouver que A ou B est un h-cobordisme. Il existe une sous-variété W' de W vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{int } W' \cap p'^{-1}(p'(\Delta)) = \emptyset, \\ - \Delta' = \overline{\partial W' \cap \text{int } \widetilde{V}'} \text{ est connexe et est inclus dans } p'^{-1}(p'(\Delta)), \\ - \partial W' - \Delta' \text{ est inclus dans } \widetilde{F}'. \end{array} \right.$$

Puisque Δ' revêt $p'(\Delta)$, Δ' est incompressible ; donc $(W', \Delta', W' \cap \widetilde{F}')$ est un h-cobordisme relatif. De plus les conditions ci-dessus imposent que $p'|_{W'}$ soit un revêtement d'image égale à A ou à B . <>

Remarque : Dans le contexte du théorème de disjonction, Waldhausen n'a pas besoin de monter dans un revêtement pour prouver que, dans le complémentaire de $F \cup F'$, il existe un produit tel que A , permettant l'élimination de certaines courbes d'intersection. Ce passage au revêtement peut s'avérer intéressant pour une étude de la disjonction à plusieurs paramètres, dans la mesure où, dans le revêtement, la disjonction est plus ou moins canonique (§ 7).

5.5 - Isotopie de plongements.

Théorème :

Soient V une variété $\mathbb{P}^2$ -irréductible de dimension 3, Σ et Σ' deux surfaces compactes, $\varphi : \Sigma \rightarrow V$ et $\varphi' : \Sigma' \rightarrow V$ deux plongements propres d'images respectives F et F' incompressibles. On suppose que ni F ni F' ne sont parallèles à des surfaces du bord.

1) F et F' ne sont pas homotopes. Alors toute homotopie de disjonction de φ par rapport à F' est homotope (parmi les homotopies de disjonction) à une isotopie de disjonction.

2) F et F' sont homotopes. Alors F et F' sont isotopes et toute homotopie propre de φ à φ' est homotope à une isotopie, sauf éventuellement si $F = \partial X$ et $(\pi_1(X) : \pi_1(F)) = 2$. Dans ce cas les exceptions sont engendrées par l'exemple suivant :

(1) Exemple exceptionnel :

Soient $p : \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement à deux feuillets associé à $\pi_1(F)$, F_0 et F_1 les deux relèvements de F ; $(\tilde{X}, F_0, F_1)$ est un h-cobordisme. Soit $g : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ une équivalence d'homotopie propre telle que $g|_{\Sigma \times \{i\}}$ soit un isomorphisme sur F_i pour $i = 0, 1$. Posons $\varphi = pg|_{\Sigma \times \{0\}}$, $\varphi' = pg|_{\Sigma \times \{1\}}$ et $h = pg$; h est une homotopie de φ à φ' .

Lemme :

Il n'existe pas d'homotopie $H : V \times [0, 1] \rightarrow V$ telle que $H_0 = \text{Id}|_V$, que H_1 soit un difféomorphisme et que $H(\varphi \times \text{Id}|_{[0, 1]}) = h$. En particulier, h n'est pas déformable en une isotopie de φ à φ' .

Preuve. Soient $Y = V - \text{int } X$, Y_0 et Y_1 deux copies de Y et

$p : \tilde{V} = Y_0 \cup_{F_0} \tilde{X} \cup_{F_1} Y_1$ un prolongement de $p : \tilde{X} \rightarrow X$ par un revêtement trivial au-dessus de Y . Supposons que H existe. Notons $\tilde{H}$ le relèvement de H tel que $H_0 = \text{Id}|_{\tilde{V}}$. On a $\tilde{H}_1(F_0) = F_1$. Si $\tilde{V}$ est orientée, on oriente F_0 et F_1 de sorte que les normales positives à F_0 (resp. F_1) rentrent dans Y_0 (resp. $\tilde{X}$). Les hypothèses sur H impliquent que $\deg \tilde{H}_1|_{F_0} = \deg \tilde{H}_1 = +1$. Donc $\tilde{H}_1(Y_0) = Y_0 \cup \tilde{X}$. Quitte à passer au revêtement des orientations, on voit que cette dernière égalité est toujours vraie. Mais elle implique que $H_1(Y) = V$, ce qui est absurde. $\Leftarrow$

(2) Démonstration du théorème.

D'après le théorème 5.4, on peut supposer au départ que $F \cap F' = \emptyset$. Soit $h : \Sigma \times [0,1] \rightarrow V$ une homotopie de disjonction de φ par rapport à F' (si l'on prouve le 1) ou une homotopie de φ à φ' (si l'on prouve le 2). On suppose que h est transversale sur $F \cup F'$. Par l'éternelle même technique, on fait de $h^{-1}(\partial F')$ une réunion de courbes parallèles à $\partial \Sigma$ et de $h^{-1}(F')$ une réunion de surfaces incompressibles ; elles sont :

soit parallèles à Σ (type 1),

soit parallèles à un anneau de $\partial \Sigma \times [0,1]$ (type 2).

Soit T' une composante du type 2. Alors $h|_{T'}$ n'est sûrement pas un revêtement de F' , sinon F' serait parallèle au bord. Donc $h|_{T'} : T' \rightarrow F'$ est homotope à une application $T' \rightarrow \partial F'$; on a déjà vu dans la démonstration de 5.4 (3) comment éliminer T' par une homotopie convenable de h . Pour la suite on suppose donc que toutes les composantes du type 2 sont éliminées.

Supposons qu'il existe encore des composantes du type 1 dans $h^{-1}(F')$; si l'on prouve le 2), $F \times \{1\}$ est une telle composante. Sans toucher à $h^{-1}(F')$ on peut faire sur $h^{-1}(F)$ tout le travail précédent. Après cela,

on trouve deux composantes T et T' , respectivement de $h^{-1}(F)$ et de $h^{-1}(F')$, parallèles et bordant un cobordisme trivial W tel que $\text{int } W \cap (h^{-1}(F) \cup h^{-1}(F')) = \emptyset$. Ceci implique que F et F' bordent un h -cobordisme (trivial), ce qui prouve en particulier que, si F et F' sont homotopes, elles sont isotopes.

1) Si F n'est pas isotope à F' et si $F \cap F' = \emptyset$, on peut donc déformer h jusqu'à l'homotopie triviale, à travers les homotopies de disjonction.

2) Si F est isotope à F' , on peut supposer que $F = F'$ et qu'une homotopie h de φ à φ' a la propriété que $h^{-1}(F)$ est une union de surfaces parallèles à Σ , ayant un nombre minimal de composantes.

Cas (i) : $h^{-1}(F) = \Sigma \times \{0\} \cup \Sigma \times \{1\}$ et pour un point $x_0 \in \Sigma$
 $h(x_0 \times [0,1])$ représente l'élément trivial de $\pi_1(V, F)$.

Il n'y a alors aucune obstruction à déformer h modulo $\Sigma \times \partial[0,1]$ en une homotopie à valeurs dans F et le théorème est démontré car toute homotopie entre deux difféomorphismes d'une surface est déformable en une isotopie [G4].

Cas (ii) : $h^{-1}(F) = \Sigma \times \{0\} \cup \Sigma \times \{1\}$ et $h(x_0 \times [0,1])$ est non trivial
dans $\pi_1(V, F)$.

Notons $\bar{V}$ la variété obtenue en coupant V le long de Σ , on peut considérer que h est à valeurs dans $\bar{V}$. Posons $F_0 = h(\Sigma \times \{0\})$; c'est une composante de $\partial\bar{V}$. L'existence de h permet d'affirmer que les hypothèses du lemme 4.1 sont satisfaites. Ou bien $\bar{V} = F_0 \times [0,1]$, alors V est un fibré sur S^1 de fibre F et h est homotope à l'isotopie de monodromie. Ou bien $F_0 = \partial X$ où X est une composante de $\bar{V}$ et $(\pi_1(X) : \pi_1(F_0)) = 2$. Ce dernier cas est celui de l'exception mentionnée (1).

Cas (iii) : $h^{-1}(F) \cap \Sigma \times]0,1[\neq \emptyset$.

Alors de la même façon on prouve que V et h sont de l'une des deux formes suivantes :

- V est un fibré sur S^1 de fibre F et h est homotope à l'isotopie d'un multiple de la monodromie.
- $V = X_0 \cup_F X_1$, $(\pi_1(X_i) : \pi_1(F)) = 2$ pour $i = 0, 1$ et h est obtenue (à homotopie près) par composition des homotopies de l'exemple (1) alternativement au-dessus de X_0 et au-dessus de X_1 .

cqfd.

§ 6. Isotopie de difféomorphismes (Problème II).

6.1 - Théorème :

Soient V une variété compacte de dimension 3 $\mathbb{P}^2$ -irréductible suffisamment grande, φ un difféomorphisme de V et h une homotopie propre de φ jusqu'à l'identité. Alors h est déformable en une isotopie.

Démonstration. On fixe une hiérarchie $V = V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ de V ayant pour "murs" un système de surfaces incompressibles $F_1, \dots, F_n$, $F_i \subset V_i$ (2.2). On peut supposer que, pour $i \geq 2$, F_i ne sépare pas V_i ; de même pour F_1 si $\partial V \neq \emptyset$. Rappelons que V_{n+1} est une union disjointe de boules.

Supposons d'abord que h soit l'homotopie constante sur $U(F_i)$ pour tout i , où U désigne un voisinage tubulaire fermé. On a $\varphi(V_{n+1}) = V_{n+1}$ et, puisque $\pi_4(V, V_{n+1}) = 0$, on peut supposer aussi que $h(V_{n+1} \times [0,1]) \subset V_{n+1}$. Alors le théorème de Cerf ($\pi_0(\text{Diff}(D^3 \text{ mod } S^2)) = 0$) [C2] implique que h est homotope à une isotopie modulo $\bigcup_{i=1}^n U(F_i)$.

L'idée consiste donc à se ramener à ce cas en redressant de proche en proche les murs de la hiérarchie.

Posons $\varphi_1 = \varphi|_{F_1}$ et $h_1 = h|_{F_1 \times [0,1]}$. D'après 5.5, l'homotopie propre h_1 est déformable en une isotopie sauf dans le cas exceptionnel. Ce dernier ne peut arriver ici d'après le lemme 5.5 (1)^(*). Il existe donc une isotopie de φ , accompagnée d'une déformation de h , après quoi h_1 est l'homotopie constante. Ceci étant fait, φ ne peut échanger les côtés de F_1 , donc on peut supposer que $\varphi|_{U(F_1)} = \text{Id}$ et même que h est une homotopie constante sur $U(F_1)$. Posons $\varphi_2 = \varphi|_{F_2}$ et $h_2 = h|_{F_2 \times [0,1]}$; h_2 est une homotopie constante sur ∂F_2 mais prend ses valeurs dans V_1 . Par la méthode habituelle, on rend $h^{-1}(F_1) \cap \text{int } F_2 \times [0,1]$ incompressible, c'est-à-dire vide puisque F_2 n'est pas parallèle à une surface de F_1 (voir la démonstration de 5.5). On a donc une déformation de h modulo F_1 jusqu'à ce que h_2 soit à valeurs dans V_2 . On continue le redressement ainsi de suite.

cqfd.

6.2 - Classification des difféomorphismes.

D'après les théorèmes 2.1 et 6.1, sur une variété compacte $\mathbb{P}^2$ -irréductible suffisamment grande, la classification des difféomorphismes à isotopie près coïncide avec la classification des équivalences d'homotopie propres à homotopie propre près. Si on oublie la condition de propreté, c'est un problème complètement résolu par la théorie d'obstruction classique puisque la variété est un espace d'Eilenberg-MacLane : il s'agit de connaître les automorphismes du groupe fondamental à automorphisme intérieur près. La condition de propreté nécessite l'introduction de la notion de structure périphérique sur le groupe fondamental ; on suppose alors que le bord de la variété est incompressible. Je renvoie pour cela à l'article de Waldhausen (voir dans [W1], 6.2, 6.3 et 7.5).

(*) Le lemme 5.5 (1), avec la même démonstration, s'applique aussi à une homotopie exceptionnelle composée (cas (iii) de 5.5 (2)).

§ 7. Famille à un paramètre de difféomorphismes.

Dans la catégorie DIFF, le théorème suivant dépend de la conjecture de Smale " $\pi_1(\text{Diff}(D^3 \text{ mod } S^2)) = 0$ " ; si on préfère, on peut le lire dans la catégorie PL, où la conjecture analogue est vraie d'après Alexander. L'autre ingrédient pour le théorème 7.1 consiste en un théorème de disjonction à paramètres, qui, lui, est indépendant de la conjecture de Smale.

7.1 - Théorème (modulo la conjecture de Smale).

Soient V une variété $\mathbb{P}^2$ -irréductible suffisamment grande, $\text{Diff}(V)$ l'espace des difféomorphismes de V et $H(V)$ l'espace des équivalences d'homotopie, tous deux pointés par l'identité. On a

$$\pi_2(H(V), \text{Diff}(V)) = 0 \quad .$$

7.2 - Réduction à un théorème de disjonction.

L'asphéricité de V implique que $\pi_2(H(V)) = 0$, comme on le voit facilement en utilisant une triangulation de V. Il s'agit donc de montrer que tout lacet dans $\text{Diff}(V)$, contractile dans $H(V)$, est aussi contractile dans $\text{Diff}(V)$; ou encore que l'espace $\text{Diff}^0(V)$ des difféomorphismes laissant le point-base fixe est 1-connexe. Considérons une surface incompressible F passant par le point-base et appartenant à une hiérarchie de V. On a une fibration

$$\text{Diff}(V \text{ mod } F) \hookrightarrow \text{Diff}^0(V) \rightarrow \text{Plgt}^0(F, V)$$

où $\text{Plgt}^0(F, V)$ désigne l'espace des plongements de F dans V laissant le point-base fixe, cet espace étant pointé par l'injection canonique $F \hookrightarrow V$.

Par récurrence sur la longueur de la hiérarchie on peut admettre que

$\pi_1(\text{Diff}(V \text{ mod } F))$ est trivial ; le départ de la récurrence est assuré par la conjecture de Smale. On va prouver que $\pi_1(\text{Plgt}^0(F, V))$ est trivial et le

théorème s'en suivra par la suite exacte de la fibration.

En considérant la fibration

$$\text{Diff}^0(F) \hookrightarrow \text{Plgt}^0(F, V) \longrightarrow \text{Im}^0(F, V)$$

où $\text{Im}^0(F, V)$ désigne l'espace des images, et en utilisant l'acyclicité de $\text{Diff}^0(F)$ [G4], on se ramène à prouver que $\pi_1(\text{Im}^0(F, V))$ est trivial^(*). Soit F' une surface parallèle à F et disjointe de F . Par le théorème d'extension des isotopies et grâce au théorème de la pseudo-isotopie sur les surfaces (cas particulier du théorème 6.1), on sait que $\pi_1(\text{Im}^0(F, V - F'))$ est trivial. Le théorème 7.1, modulo la conjecture de Smale, est réduit au théorème de disjonction suivant :

L'inclusion des espaces $\text{Im}^0(F, V - F') \hookrightarrow \text{Im}^0(F, V)$ induit un épimorphisme sur le groupe fondamental.

Si $\partial F \neq \emptyset$, sachant que $\text{Diff}^0(\partial V)$ est acyclique [G4], on voit facilement qu'il suffit de prouver le théorème de disjonction en considérant Im^0 comme l'espace des images dont le bord coïncide avec ∂F .

7.3 - Disjonction à un paramètre de surfaces incompressibles.

Soit (V, F, x_0) un triple formé d'une variété de dimension 3 $\mathbb{P}^2$ -irréductible, d'une surface incompressible propre et d'un point de base $x_0 \in F$. On considère l'espace P' défini comme suit : un élément de P' est une surface G , pointée par un point x et munie d'une classe d'homotopie $[x_0, x]$ de chemin reliant x_0 à x de sorte que :

- $\partial G = \partial F$ si ∂F est non vide,
- $[x_0, x] \cdot \pi_1(G, x) = \pi_1(F, x_0)$ (égalité en tant que sous-groupes de $\pi_1(V, x_0)$).

(*) Il est intéressant de rappeler que, pour prouver $\Gamma_4 = 0$, Cerf prouve que l'espace des sphères plongées dans $\mathbb{R}^3$ est 1-connexe [C2].

L'espace P' revêt un espace de surfaces pointées. On choisit comme point-base dans P' la surface (F, x_0) munie du chemin constant $[x_0, x]$ et dans la suite P désignera la composante connexe du point-base. Si l'on a un chemin dans P partant de ce point-base, on peut l'écrire $\omega = \{(G_t, x_t) | t \in [0, 1]\}$ sans préciser la classe $[x_0, x_t]$ car elle est nécessairement celle du chemin $\{x_t, | t' \in [0, t]\}$.

Soit F' une surface incompressible disjointe de F ; pratiquement le cas intéressant est celui où F' est parallèle à F . On considère le sous-espace P_0 de P formé des surfaces disjointes de F' .

Théorème.

Soit $\omega = \{(G_t, x_t) | t \in [0, 1]\}$ un chemin dans P , d'origine (F, x_0) et d'extrémité dans P_0 . On suppose que la classe du chemin $\{x_t | t \in [0, 1]\}$ est triviale dans $\pi_1(V, V - F', x_0)$. Alors la classe de ω est triviale dans $\pi_1(P, P_0)$.

Remarque : Cet énoncé est clairement équivalent à celui donné à la fin de 7.2 et, comme lui, implique le théorème 7.1. La mobilité possible du point-base supprime quelques complications géométriques.

7.4 - Démonstration.

(1) Stratification et filtration de P .

L'espace P est stratifié "par F' " , les strates de codimension 0 étant définies par la condition de transversalité sur F' (surfaces génériques) et les strates de codimension 1 étant définies par la condition d'un unique contact générique avec F' . Le groupe structural $\mathcal{G}$ est la composante neutre de $\text{Diff}(V, F')$; les strates (connexes par définition) sont des orbites de $\mathcal{G}$. On a une notion de chemins élémentaires de traversée des strates de codimension 1 ; ce sont des isotopies de surfaces, associées à

des modèles géométriques pour l'apparition d'une nouvelle courbe d'intersection avec F' ou la réalisation d'une somme connexe de deux courbes d'intersection (ou le contraire). D'après [C5], tout chemin dans P , dont les extrémités sont génériques, est homotope à un chemin composé de chemins élémentaires ; ici et dans la suite, une homotopie d'un chemin est une déformation à travers des chemins dont les extrémités sont toujours génériques. Si γ désigne un chemin élémentaire d'origine G , $\{\gamma_t \mid t \in [0,1]\}$ désignera une isotopie ambiante de V , à support dans un voisinage de l'élément, arc, disque ou boule, associé à γ , et dont la restriction à G induit le chemin γ .

Considérons d'autre part le revêtement $p : (\tilde{V}, y_0) \rightarrow (V, x_0)$ associé à $\pi_1(F, x_0)$ (voir 5.4). L'ensemble I des composantes connexes de $\tilde{F}' = p^{-1}(F')$ est naturellement isomorphe à l'ensemble des arêtes d'un arbre, le nerf de $(\tilde{V}, \tilde{F}'_i, i \in I)$; on note $\tilde{V} = X_i \cup_{\tilde{F}'} Y_i$, où X_i contient y_0 et, pour $i, j \in I$, on dit que $j > i$ si $Y_j \subset Y_i$; enfin U est la composante de $\tilde{V} - \tilde{F}'$ contenant y_0 . Si $G \in P$, G admet un relèvement canonique $\tilde{G}$ dans $\tilde{V}$ et, pour l'extrémité G_1 du chemin ω considéré dans l'énoncé, on a $\tilde{G}_1 \subset U$.

On peut définir sur P une filtration naturelle compatible avec la stratification. Pour $i \in I$, on pose

$$P_i = \{G \in P \mid \tilde{G} \cap Y_j = \emptyset \text{ pour } j > i\}.$$

En utilisant la structure d'arbre de I , on peut prendre des intersections convenables de ces parties pour filtrer P . Si on décide de rajouter 0 à I comme élément minimal (pour tout $i \in \pi_0(\tilde{F}')$, $i > 0$), on observe qu'alors tout élément de I admet un unique prédécesseur, noté $i - 1$, et on a $P_{i-1} \subset P_i$.

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

Le chemin ω du théorème se trouve dans P_i pour tout $i \in I$ sauf pour un nombre fini d'indices. Notons $J = \{k \in I \mid \omega \subset P_k\}$; si $k \in J$, tout $k' > k$ appartient aussi à J . Considérons un élément minimal i dans J (i.e. $i \in J$ mais $i - 1 \notin J$). Notant $P_J = \bigcap_{k \in J} P_k$, on va prouver que

$$\pi_1(P_J, P_J \cap P_{i-1}) = 0.$$

Le théorème découle de cette affirmation par récurrence sur la cardinalité de $I - J$.

(2) Réduction.

Fixons les notations suivantes :

B est la boule anguleuse standard $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum x_i^2 \leq 1, x_3 \geq 0\}$,

D^0 est la base de B , $D^0 = \{x \in B \mid x_3 = 0\}$,

$D = \partial B - D^0$.

Définition. Une réduction simple d'une surface G est la donnée d'un plongement $\varphi : (B, D^0, \text{int } D) \rightarrow (V, F', V - F')$ tel que $\varphi(D)$ soit contenu dans G .

A une telle donnée est associée (à isotopie près) une isotopie ambiante $\{\lambda_t(\varphi) \mid t \in [0, 1]\}$, à support dans un voisinage de $\varphi(B)$ qui élimine toutes les courbes d'intersection de G avec F' contenues dans $\varphi(D^0)$. Sa restriction à G est un chemin $\lambda(\varphi)$ d'origine G dans P .

Remarques :

1) Le groupe structural $\mathcal{G}$ transforme une réduction simple en une autre.

2) Si $G \in P_J$, $\lambda(\varphi)$ est un chemin dans P_J . Cependant, en général, au cours de ce chemin, le nombre des courbes d'intersection ne va pas en décroissant constamment.

Existence. Si $G \cap F'$ comporte une courbe C homotope à zéro, C borde un disque D dans G et un disque D^0 dans F' . On peut supposer,

quitte à changer de courbe, que D est minimal (i.e. : $\text{int } D \cap F' = \emptyset$) ; alors $D \cup D^0$ est une sphère (topologique) plongée bordant une boule anguleuse B . L'incompressibilité de F' interdit que F' soit contenue dans B ; par conséquent B est à arête saillante et (B, D^0, D) est l'image d'un plongement de $(\mathbb{B}, \mathbb{D}^0, \mathbb{D})$.

Par itération de ce processus, on prouve qu'il existe une réduction totale de G , c'est-à-dire un chemin $\Lambda(G)$ d'origine G et dont l'extrémité est réduite, c'est-à-dire ne possède aucune courbe d'intersection avec F' homotope à zéro.

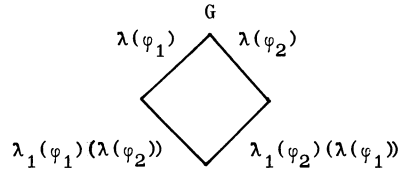
Lemme :

Deux réductions totales de G sont homotopes.

Preuve. Soient φ_1 et φ_2 deux réductions simples de G . Les deux situations suivantes sont les seules à se présenter :

1er cas : $\varphi_1(\mathbb{B}) \cap \varphi_2(\mathbb{B}) = \emptyset$.

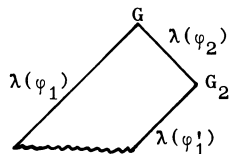
Les deux réductions simples sont indépendantes et on a dans l'espace P une famille à deux paramètres bordée par des réductions simples :



2ème cas : $\varphi_2(\mathbb{D}^0) \subset \varphi_1(\mathbb{D}^0)$.

Alors $\varphi_2(\mathbb{B})$ est contenu dans $\varphi_1(\mathbb{B})$ ou bien ces deux boules sont de part et d'autre de F' . Dans les deux cas, la réduction φ_1 l'emporte sur φ_2 . Précisément si G_2 est l'extrémité de $\lambda(\varphi_2)$, φ_1 peut encore être regardée comme une réduction φ'_1 de G_2 . Pour $u, t \in [0, 1]$, considérons le difféomorphisme de V défini par $h_{u,t} = \lambda_u(\varphi_1) \circ \lambda_t(\varphi_2)$. Cette famille induit

une homotopie entre les chemins $\lambda(\varphi_1)$ et $\lambda(\varphi_2) * \lambda(\varphi'_1)$.



Le lemme se démontre alors par récurrence sur le nombre de courbes d'intersection homotopes à zéro, en appliquant la remarque 1). <>

(3) i-effondrement.

On suppose que $G \in P$ est générique et réduit, que $G \in P_i$ et que $G \notin P_{i-1}$. Donc $\tilde{G} \cap Y_i$ est non vide, contenu dans $Y_i - \bigcup_{j>i} Y_j$ et incompressible.

1er cas : $\tilde{G} \subset Y_i$

Sachant que, par définition de P , $\tilde{G}$ est isotope à $\tilde{F}$, on en déduit que $\tilde{G}$ et $\tilde{F}'_i$ sont parallèles ; notons $\tilde{W}$ le cobordisme qu'elles bordent. J'affirme que $p|\tilde{W}$ est un plongement. Si ce n'était pas le cas, on serait alors dans la situation suivante : $F' = \partial X$, $(\pi_1(X) : \pi_1(F')) = 2$ et $G \subset X$; de plus $\tilde{X} = (\overline{Y_i - \bigcup_{j>i} Y_j})$ serait le revêtement à deux feuillets de X associé à $\pi_1(F')$ et on aurait $p(\tilde{W}) = X$. Mais alors, comme en 5.5 (1), on verrait que l'homotopie de G à F , déduite du parallélisme entre $\tilde{G}$ et $\tilde{F}$ dans $\tilde{V}$, n'est pas homotope à une isotopie, contrairement à l'hypothèse.

Notons $W = p(\tilde{W})$; ce cobordisme a une trivialisation unique à isotopie près (6.1). Il lui correspond un chemin de P d'origine G et d'extrémité dans P_{i-1} . Ce chemin $\Sigma_i(G)$ est le i -effondrement de G ; il est unique à homotopie près.

2ème cas : $\tilde{G} \cap \tilde{F}_1' \neq \emptyset$

Soit $\tilde{\Delta}$ une composante de $\tilde{G} \cap Y_1$. D'après 5.4 (5), $\tilde{\Delta}$ est l'extrémité d'un unique cobordisme relatif trivial $\tilde{W}$ dont l'origine se trouve dans $\tilde{F}_1'$ et qui, en plus, est plongé par p . Si on pose $\Delta = p(\tilde{\Delta})$ et $W = p(\tilde{W})$, la trivialisation "canonique" de W définit un chemin naturel $\sigma(W)$ dans P , appelé i-effondrement élémentaire, qui élimine toutes les courbes d'intersection de G avec F' se trouvant dans $W \cap F'$. Si on appelle i-courbe une courbe d'intersection qui est projection d'une composante de $\tilde{G} \cap \tilde{F}_1'$, on voit que l'on peut itérer le processus précédent jusqu'à épuisement de toutes les i-courbes ; on construit ainsi un chemin $\Sigma_i(G)$ d'origine G et d'extrémité dans P_{i-1} ; c'est le i-effondrement de G . Il est unique à homotopie près car, si on a deux effondrements élémentaires $\sigma(W_1)$ et $\sigma(W_2)$, ou bien ils sont indépendants ($W_1 \cap W_2 = \emptyset$) ou bien $W_1 \supset W_2$ et alors $\sigma(W_1)$ l'emporte sur $\sigma(W_2)$.

Remarques : Mêmes remarques qu'en (2) mutatis mutandis. De plus tous les points de $\Sigma_i(G)$ sont des surfaces réduites.

Notations : Si $G \in P_J \cap (P_i - P_{i-1})$, on a dans P_J un chemin composé $R_i(G) = \Lambda(G) * \Sigma_i(G)$ d'origine G et d'extrémité dans P_{i-1} , qui est bien défini à homotopie près. Si G est déjà réduit, $\Lambda(G)$ est le chemin constant et, si l'extrémité de $\Lambda(G)$ appartient déjà à P_{i-1} , $\Sigma_i(G)$ est le chemin constant.

(4) Relation avec les chemins élémentaires

Commençons par un lemme technique. On introduit l'objet suivant qui généralise la boule anguleuse B : soient F^0 une surface compacte connexe à bord et $f : F^0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction C^∞ nulle au bord et strictement positive à l'intérieur ; notons

$$E = \{(x, t) \in F^0 \times \mathbb{R}^+ \mid 0 \leq t \leq f(x)\}$$

et $F = \partial E - F^0$ ($F \approx F^0$).

Soit $G \in P_J$, générique. On suppose que $R_i(G)$ est défini. On se donne un plongement $\psi : (E, F^0, \text{int } F) \rightarrow (V, F', V - F')$ tel que $\psi(F) \cap G = \emptyset$.

Si $E \neq B$, on astreint ce plongement aux conditions supplémentaires suivantes :

1°) ψ induit un monomorphisme sur le groupe fondamental ; autrement dit, pour chaque composante C de ∂F^0 , $\psi(C)$ n'est pas homotope à zéro.

2°) $\psi(F)$ se trouve par rapport à F' du même côté que la projection d'un voisinage collier de $\tilde{F}_i'$ dans Y_i . En particulier si W définit un i-effondrement de G , W et $\psi(E)$ se trouvent du même côté de F' .

Soit $\{h_t \mid t \in [0, 1]\}$ une isotopie ambiante de V à support dans un petit voisinage de $\psi(E)$, poussant $\psi(F)$ sur $\psi(F^0)$. Soit $G' = h_1(G)$. On vérifie que $R_i(G')$ est défini et on a le lemme suivant :

Lemme 1 :

Dans les conditions ci-dessus, le chemin $R_i(G)^{-1} * \{h_t(G) \mid t \in [0, 1]\} * R_i(G')$ représente l'élément trivial de $\pi_1(P_J, P_J \cap P_{i-1})$.

Preuve : Elle se fait par récurrence sur le nombre des courbes d'intersection de G avec F' . On supposera que $R_i(G)$ commence par une réduction simple $\lambda(\varphi)$ d'extrémité G_1 ; le raisonnement serait le même aux notations près, si G étant réduit, $R_i(G)$ commençait par un effondrement simple. Si $\varphi(B)$ et $\psi(E)$ sont du même côté de F' , ces deux ensembles sont disjoints ou bien l'un contient l'autre. S'ils sont de part et d'autre de F' , on regarde les positions relatives de $\varphi(D^0)$ et de $\psi(F^0)$; d'après la condition 1°) ci-dessus, si $\varphi(\partial D^0)$ est dans $\psi(F^0)$, on a $\varphi(D^0) \subset \psi(F^0)$; donc si $\varphi(D^0)$ et $\psi(F^0)$ ne sont pas disjoints, l'un contient l'autre. Ainsi les trois situations suivantes sont les seules à se présenter :

1er cas : $\varphi(B) \cap \psi(E) = \emptyset$

Les deux isotopies $\lambda_t(\varphi)$ et h_t sont indépendantes ; φ définit une réduction pour G' que l'on peut supposer être le premier morceau de $R_i(G')$; le

plongement ψ satisfait aux hypothèses du lemme pour G_1 et, par récurrence, le lemme est vrai pour G_1 et ψ , donc aussi pour G et ψ .

2ème cas : $\varphi(\mathbb{D}^0) \subset \psi(\mathbb{F}^0)$

On a $\varphi(\mathbb{B}) \subset \psi(\mathbb{E})$ ou bien $\varphi(\mathbb{B})$ et $\psi(\mathbb{E})$ sont de part et d'autre de F' .

Dans les deux cas, on considère la famille à deux paramètres de difféomorphismes $h_t \circ \lambda_u(\varphi)$. On observe que $h_1(\varphi(\mathbb{B}))$ est dans $V - F'$; donc la

famille précédente fournit une homotopie entre les chemins $\{h_t(G)\}$ et

$\lambda(\varphi) * \{h_t(G_1)\}$; en particulier $h_1(G_1)$ et G' sont dans la même strate

de P et $R_i(h_1(G_1))$ est homotope à $R_i(G')$. D'autre part ψ satisfait

aux hypothèses du lemme pour G_1 et, par récurrence, le lemme est vrai pour

G_1 et ψ , donc aussi pour G et ψ .

3ème cas : $\psi(\mathbb{F}^0) \subset \varphi(\mathbb{D}^0)$

Ici φ définit encore une réduction simple $\lambda(\varphi')$ pour G' et la famille

$\lambda_u(\varphi) \circ h_t$ fournit une homotopie entre $\lambda(\varphi)$ et $\{h_t(G)\} * \lambda(\varphi')$. En particulier

G_1 est dans la même strate que G'_1 , extrémité de $\lambda(\varphi')$, et

$R_i(G_1)$ est homotope à $R_i(G'_1)$. Enfin $R_i(G')$ est homotope à

$\lambda(\varphi') * R_i(G'_1)$. Donc $R_i(G)$ est homotope à $\{h_t(G)\} * R_i(G')$. $\langle \rangle$

Lemme 2 :

Soit γ un chemin élémentaire de G_1 à G_2 diminuant le nombre des courbes d'intersection avec F' . On suppose que $G_1 \in P_J$ et que $R_i(G_1)$ est défini.

Alors γ est contenu dans P_J , $R_i(G_2)$ est défini et la classe de

$R_i(G_1) \overset{1}{\frown} * \gamma * R_i(G_2)$ dans $\pi_1(P_J, P_J \cap P_{i-1})$ est triviale.

Conséquence : Si $i \in J$, $\pi_1(P_J, P_J \cap P_{i-1})$ est trivial. Soit en effet

ω un chemin de P_J d'extrémités dans P_{i-1} ; quitte à faire une homotopie,

on peut supposer que ω est formé de chemins élémentaires

$\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$ dont les extrémités sont des surfaces génériques

$G_0, G_1, \dots, G_k, \dots, G_n$. Si i n'est pas minimal dans J , l'affirmation est

évidente : $P_J \cap P_{i-1} = P_J$. Si i est minimal, G_k est l'origine d'un

chemin $R_i(G_k)$ d'extrémité dans P_{i-1} . D'après le lemme précédent, la classe de $R_i(G_{k-1})^{-1} * \gamma * R_i(G_k)$ est triviale, donc aussi celle de ω . Ainsi les théorèmes 7.3 et 7.1 ne dépendent plus que de ce lemme.

Preuve : Si γ est un chemin d'élimination et si $\Lambda(G_1)$ et $\Lambda(G_2)$ sont deux réductions totales, $\gamma * \Lambda(G_2)$ est une réduction totale de G_1 et, d'après le lemme 7.4 (2), est homotope à $\Lambda(G_1)$.

Supposons donc que γ réalise la somme connexe de deux courbes d'intersection C et C' de G_1 avec F' . Soit A le 2-disque à coins associé à γ ; on a $\partial A = \alpha \cup \alpha^0$, où $\alpha^0 = A \cap F'$ et $\alpha = A \cap G_1$; ces deux arcs joignent C et C' respectivement sur F' et sur G_1 . De plus, $\text{int } A \cap (G_1 \cup F') = \emptyset$.

Si G_1 admet une réduction simple φ telle que $\varphi(D^0) \cap \alpha^0 = \emptyset$, alors on peut supposer que $R_i(G_1)$ commence par $\lambda(\varphi)$. Mais $\lambda(\varphi)$ et γ sont indépendants et on se ramène à prouver le lemme pour l'extrémité de $\lambda(\varphi)$. Il en est de même si, G_1 étant réduit, il existe un i-effondrement simple indépendant de γ .

Si G_1 admet une réduction simple φ telle que $\varphi(\text{int } D^0) \supset \alpha^0$, alors la réduction φ l'emporte sur γ , c'est-à-dire que φ définit une réduction pour toutes les surfaces $\gamma_t(G_1)$ et on voit que $\lambda(\varphi)$ est homotope à $\gamma * \lambda(\varphi)$. Le raisonnement est le même avec un i-effondrement.

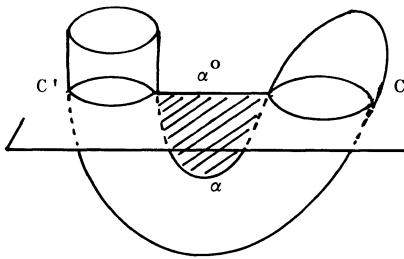
Tous ces cas étant exclus, il ne reste que trois cas :

1er cas : C et C' sont homotopes à zéro. Ou bien C est la seule courbe homotope à zéro et minimale sur G_1 ; ceci conduit aux configurations (1), (2) et (3) dessinées ci-dessous. Ou bien C et C' sont les deux seules courbes homotopes à zéro et minimales sur G_1 ; configurations (4) et (5).

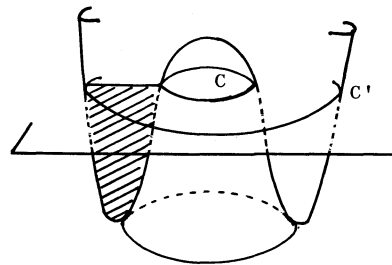
2ème cas : C est la seule courbe d'intersection homotope à zéro.

3ème cas : G_1 est réduit.

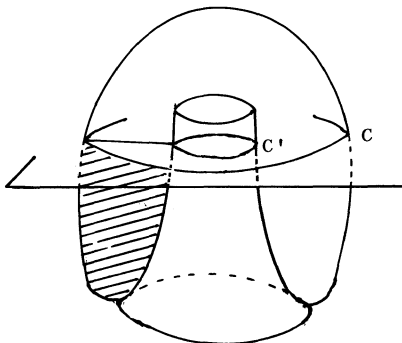
1er cas : Les configurations possibles dans V sont les suivantes : on ne représente de G_1 qu'un voisinage de l'arc α et des disques bordés par C et C' ; contrairement à la figure, ces courbes ne sont pas nécessairement minimales sur F' , qui est dessiné comme un plan horizontal ; enfin le disque hachuré est le disque A .



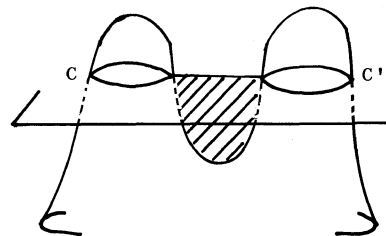
①



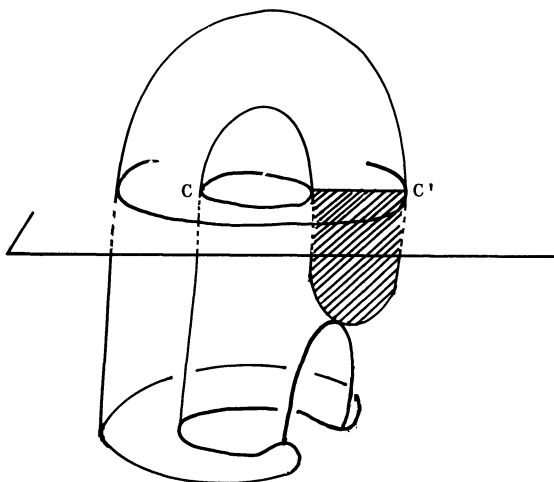
②



③

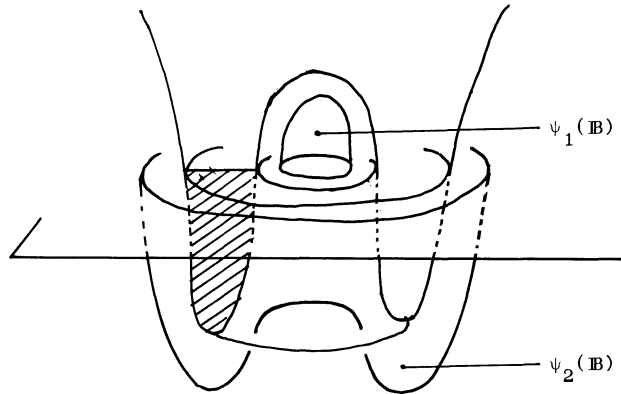


④

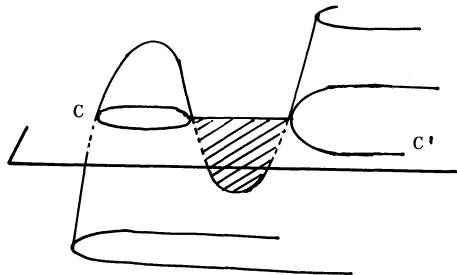


(5)

Supposons qu'il existe un plongement ψ de $\mathbb{B}$ vérifiant les conditions du lemme 1 pour toutes les surfaces du chemin γ . Désignant par h_1 le difféomorphisme de V associé à ψ , si $h_1\gamma$ est entièrement contenu dans une strate de codimension 0 de P , alors, d'après le lemme 1, le lemme 2 est vrai pour γ . Ceci règle le cas des figures (1), (3), (4) et (5). Pour la figure (2), un tel plongement n'existe pas dans le cas où C n'est pas minimale sur F' . Il faut alors utiliser consécutivement deux plongements ψ_1 et ψ_2 . D'abord ψ_1 vérifie les conditions du lemme 1 pour G_1 et l'isotopie associée à ψ_1 ne modifie pas la figure (2) mais sert à chasser hors de $\psi_2(\mathbb{B})$ toutes les parties de G_1 qui coupent F' à l'intérieur du disque bordé par C . Après cela ψ_2 vérifie les conditions du lemme 1 et l'isotopie associée transforme γ en un chemin de surfaces génériques ; on conclut comme dans les autres cas.



2ème cas : Il existe une réduction simple φ pour l'élimination de C ; d'ailleurs $\lambda(\varphi)$ est un chemin élémentaire. La configuration est la suivante :

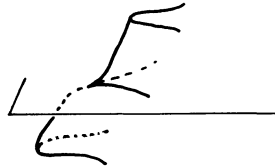


Il est évident que les extrémités de $\lambda(\varphi)$ et de γ appartiennent à la même strate de P . De plus $\lambda(\varphi)$ et γ sont homotopes par une homotopie qui coupe en un point une strate de codimension 2 de P ; si G appartient

à cette strate, en tout point de $G \cap F'$ l'intersection est transversale sauf en un point, au voisinage duquel il existe des coordonnées locales x, y, z de V telle que :

$$- F' = \{z = 0\}$$

$$- G = \{z = x^2 + y^3\}.$$



L'homotopie entre $\lambda(\varphi)$ et γ est donnée par un "déploiement universel" de cette singularité.

3ème cas : Supposons d'abord que G_2 soit aussi réduit, c'est-à-dire que la courbe $C \#_{\alpha^0} C'$ ne soit pas homotope à zéro dans F' . Soient $\sigma(W)$ et $\sigma(W')$ deux i -effondrements élémentaires de G_1 éliminant respectivement C et C' (éventuellement $W = W'$). Dans tous les cas de figure, un voisinage régulier de $W \cup \alpha^0 \cup W'$ dans V coupée le long de F' est l'image d'un plongement $\psi : \mathbb{E} \rightarrow V$ qui satisfait aux conditions du lemme 1. L'isotopie associée à ψ transforme γ en un chemin de surfaces génériques ; la conclusion est alors donnée par le lemme 1.

En revanche, si G_2 n'est pas réduit, ce plongement ψ risque de ne pas satisfaire à la condition sur le groupe fondamental. En effet, $C \#_{\alpha^0} C'$ est homotope à zéro dans F' et ne l'est pas dans $\psi(F^0)$. Mais C et C' sont parallèles sur F' et y bordent une anneau K contenant l'arc α^0 . L'intérieur de K ne contient aucune courbe de $G_1 \cap F'$ car de telles courbes dans $\text{int } K$ devraient être homotopes à zéro. Maintenant si $\psi(\mathbb{E})$ est un épaississement de $W \cup K \cup W'$, ψ satisfait à toutes les conditions du lemme 1 et on conclut comme plus haut.

cqfd.

Chapitre III

ISOTOPIE DE SPHÈRES

§ 1. Introduction et énoncé des résultats.

La question est de savoir si, dans une variété de dimension 3, deux sphères homotopes (au sens de II 5.3) sont isotopes. Elle met en cause la conjecture de Poincaré : en effet, si Δ est une variété compacte contractile et si, pour une boule $B \subset \Delta$, les sphères $\partial\Delta$ et ∂B sont isotopes, alors $\Delta = D^3$. Pour éviter la conjecture de Poincaré, on est donc amené à se restreindre aux variétés satisfaisant à l'hypothèse suivante (C.P.).

1.1 - Définition :

Une variété V^3 satisfait à la conjecture de Poincaré (brièvement V est (C.P.)), si toute sous-variété compacte contractile de dimension 3 dans V est isomorphe à D^3 .

Remarques. 1) Que toute variété irréductible (II 1.2) soit (C.P.) est équivalent à la conjecture de Poincaré.

2) La catégorie des variétés (C.P.) est fermée pour l'opération de somme connexe, intérieure ou sur le bord.

3) Si $p : \tilde{V} \rightarrow V$ est un revêtement et si $\tilde{V}$ est (C.P.), V est aussi (C.P.). La réciproque est un problème ouvert (A I 3 remarque).

4) Dans une telle variété, une sphère plongée homotope à zéro est le bord d'une boule et deux sphères plongées disjointes, non homotopes à zéro, sont parallèles, c'est-à-dire bordent une sous-variété difféomorphe à $S^2 \times [0,1]$.

(Les démonstrations de 2)-4) sont données dans l'appendice I).

A cause de cette dernière remarque, nous ne considérerons dans la suite

que des sphères non homotopes à zéro ; en particulier V ne sera jamais irréductible. D'autre part le théorème d'isotopie 1.3 est trivial pour des sphères disjointes ; autrement dit il est un corollaire du théorème de disjonction 1.2. (voir II 5.3 Remarque).

1.2 - Théorème de disjonction.

Soient V une variété satisfaisant à la conjecture de Poincaré, S et S' deux sphères plongées dans V . S'il existe une homotopie de disjonction de S' par rapport à S , alors il existe une isotopie de disjonction de S' et de S .

Ce théorème a, d'après 1.1 Remarque 4), la conséquence suivante :

1.3 - Théorème d'isotopie.

Dans les mêmes conditions, si S et S' sont homotopes, alors elles sont isotopes.

1.4 - On peut en déduire un théorème d'isotopie de plongements de S^2 dans V , dont l'énoncé n'est malheureusement pas aussi simple. Fixons quelques notations. Soit $\varphi : (S^2, s_0) \rightarrow (V, x_0)$ un plongement pointé ; on pose $-\varphi = \varphi \circ \sigma$ où σ est l'involution antipodale de S^2 . Si γ est un lacet dans V , on peut le considérer comme une isotopie de $\text{Plgt}(x_0, V)$ et la relever, à partir de l'identité, en une isotopie ambiante de V qui finit par un difféomorphisme $H : (V, x_0) \rightarrow (V, x_0)$. La classe d'isotopie (modulo x_0) de H est bien définie et ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ . On pose $\gamma\varphi = H^{-1} \circ \varphi$. Observons que dans $\pi_2(V, x_0)$, on a $[\gamma\varphi] = [\gamma] \cdot [\varphi]$.

Théorème d'isotopie de plongements.

Soient V une variété de dimension 3 satisfaisant à la conjecture de Poincaré, $\varphi, \varphi' : (S^2, s_0) \rightarrow (V, x_0)$ deux plongements homotopes et non homotopes

à zéro. Trois cas se présentent :

1er cas : $\varphi(S^2)$ ne sépare pas V ou bien $V = X_0 \cup_{\varphi(S^2)} X_1$ avec
 $\pi_1(X_1) \neq \mathbb{Z}_2$ si $\hat{X}_1 = X_1 \cup_{\varphi} D^3$ est fermée. Alors φ et φ'
sont isotopes modulo le point base.

2ème cas : $\hat{X}_0$ est fermée, $\pi_1(\hat{X}_0) = \mathbb{Z}_2$ et $\pi_1(X_1) \neq \mathbb{Z}_2$ si $\hat{X}_1$ est fermée.
Alors, modulo le point de base, φ' est isotope à φ ou à $-\alpha\varphi$,
où α est le générateur de $\pi_1(X_0, x_0)$. Ces deux solutions ne
sont pas librement isotopes.

3ème cas : Pour $i = 0, 1$, $\hat{X}_i$ est fermée et $\pi_1(X_i) = \mathbb{Z}_2$. Alors, modulo
le point base, φ' est isotope à $(-1)^n_{\gamma\varphi}$ où
 $\gamma \in \pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ et où l'entier n est la longueur d'un
mot irréductible représentant γ dans $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Ces solutions
ont toutes des classes d'isotopie libre distinctes.

Remarque. Cet énoncé est à rapprocher du théorème II 5.5. Il faut noter la différence : même dans les bons cas, où homotopie implique isotopie, ici à la différence de là-bas, on ne prouve pas que l'homotopie est déformable en une isotopie. D'ailleurs il existe des exemples où la déformation de l'homotopie en isotopie n'est pas possible. Ces exemples reposent sur une connaissance du π_3 de la variété (voir [H6]).

Démonstration :

D'après le théorème 1.3, lorsqu'on libère le point base, φ' est isotope à un plongement qui a même image que φ . C'est dire que, dans une théorie pointée, φ' est isotope à $\pm\gamma.\varphi$ pour un certain $\gamma \in \pi_1(V, x_0)$. D'ailleurs le signe est bien déterminé car, d'après E. Specker [S2], $\pi_2(V, x_0)$ est sans torsion, donc $(\text{mod } x_0)$ $\varphi' \not\sim -\varphi'$. On peut donc écrire $\varphi' = \varepsilon(\gamma)\gamma.\varphi$.

Il s'agit maintenant de savoir pour quels éléments γ non triviaux $\varepsilon(\gamma)\gamma.\varphi$ est homotope à φ . Considérons un revêtement universel pointé $p : (\tilde{V}, y_0) \rightarrow (V, x_0)$, le relèvement orienté S_0 de $\varphi(S^2)$ par y_0 et le

relèvement orienté S_1 de $\varepsilon(\gamma)\varphi(S^2)$ par $\gamma\gamma_0$. Les sphères S_0 et S_1 sont homologues si et seulement si $\varphi \sim \varepsilon(\gamma)\gamma.\varphi$.

Supposons que S_0 et S_1 soient homologues et notons W la sous-variété orientée de $\tilde{V}$ admettant pour bord orienté $S_0 \cup S_1$; c'est un h-cobordisme. La considération de l'isomorphisme local $p|_W$ permet d'obtenir les conclusions suivantes :

Si $\varphi(S^2)$ ne sépare pas, alors V est un fibré sur S^1 de fibre S^2 . Dans ce cas, $\pi_1(V) = \mathbb{Z}$ et $\varphi \sim w_1(\gamma)\gamma.\varphi$, où w_1 est la première classe de Stiefel-Whitney de V . Mais cette relation homotopique est aussi une relation isotopique.

Si $V = X_0 \cup_{\varphi(S^2)} X_1$ et si $p|_W$ n'est pas surjectif, alors on a $X_0 = p(W)$ (ou $X_1 = p(W)$). Dans ce cas X_0 est compact, $\partial X_0 = \varphi(S^2)$, $\pi_1(X_0, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ et X_0 est orientable^(*). Si $p|_W$ est surjectif, X_0 et X_1 sont compacts orientables^(*), bordés par $\varphi(S^2)$, et

$$\pi_1(X_0, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Dans ces deux cas, les signes $\varepsilon(\gamma)$ sont ceux donnés par l'énoncé.

L'argument invoqué pour le lemme I 5.5(1) prouve que, dans les cas 2 et 3 de l'énoncé, $\varepsilon(\gamma)\gamma.\varphi$ n'est librement isotope à φ que si γ est trivial ($\varepsilon(\gamma) = +$). <>

§ 2. Disjonction homotopique.

2.1 - La démonstration du théorème 1.2 nécessite la compréhension des obstructions qui se présentent dans le problème suivant :

Problème : Soient V une variété de dimension 3 et S une sphère plongée dans V non homotope à zéro. Soit $f : S^2 \rightarrow V$ une application singulière. A quelle condition f est homotope à $g : S^2 \rightarrow V - S$?

(*) Cela se voit par le nombre de Lefschetz de la transformation de revêtement.

C'est un problème "théoriquement résolu" par la théorie générale d'obstruction ; mais la réponse apportée par cette théorie n'est pas effective, donc inutilisable dans les applications. Je veux donc associer à la situation géométrique donnée un objet sur lequel on puisse décider à vue si la disjonction homotopique est possible ou non^(*).

Remarque. Puisqu'il s'agit d'un problème homotopique, il n'est pas utile de supposer que V satisfait à la conjecture de Poincaré.

2.2 - Disjonction homologique dans le revêtement universel.

Soit $p : \tilde{V} \rightarrow V$ le revêtement universel de V . Puisque S n'est pas homotope à zéro, $\tilde{V}$ n'est pas une variété fermée et n'est pas contractile. Un point base y_0 étant choisi dans $\tilde{V}$ au-dessus d'un point base x_0 de $V-S$, le choix d'un arc minimal joignant x_0 à S établit une bijection naturelle entre l'ensemble I des composantes de $p^{-1}(S)$ et $\pi_1(V, x_0)$:

$$p^{-1}(S) \cong \bigcup S_i, \quad i \in I \cong \pi_1(V, x_0).$$

Chaque sphère S_i sépare $\tilde{V}$ en deux parties X_i et Y_i : $\tilde{V} = X_i \cup_{S_i} Y_i$; on décide que $y_0 \in X_i$. On note enfin U^j , $j \in J$, les composantes de $\tilde{V} - p^{-1}(S)$ et en particulier U^0 celle qui contient y_0 . La stratification de $\tilde{V}$ par les composantes de $p^{-1}(S)$ a pour nerf un arbre Γ , en général non localement fini : à chaque S_i correspond une arête $|S_i|$, à chaque U^j correspond un sommet $|U^j|$; les relations d'incidence correspondent aux relations d'adhérence. (Comparer avec II 5.4 1ère partie).

Problème de la disjonction homologique :

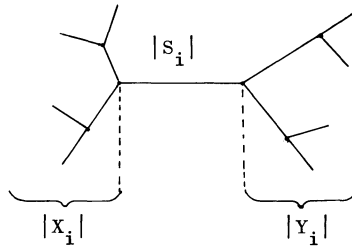
(+) Soit $\alpha \in H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z})$. A quelle condition existe-t-il $j \in J$ tel que α soit

(*) La théorie d'obstruction que je donne ici diffère un peu de celle présentée dans [L3].

dans l'image de

$$H_2(U^j; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \quad (*)$$

Notations : Le nerf de $\tilde{V} - X_i$ (resp. $\tilde{V} - Y_i$) est un sous-arbre $|Y_i|$ (resp. $|X_i|$) de Γ . On a $|X_i| \cap |Y_i| = \emptyset$ et $\Gamma = |X_i| \cup |S_i| \cup |Y_i|$.



Le sommet commun à $|S_i|$ et $|X_i|$ (resp. $|Y_i|$) sera appelé le pied de l'arbre $|X_i|$ (resp. $|Y_i|$). Chaque arête de Γ est munie par α de deux poids:

α_i^Y est la classe de α dans $H_2(\tilde{V}, X_i)$

α_i^X est la classe de α dans $H_2(\tilde{V}, Y_i)$.

Leur nullité signifie que le "support" de α peut être disjoint respectivement de Y_i et de X_i . Il est alors naturel de les placer sur $|S_i|$, respectivement du côté de $|Y_i|$ et de $|X_i|$.

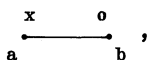
Considérons l'ensemble $\Gamma(\alpha)$ des sommets et des arêtes ayant les propriétés suivantes :

- 1) une arête de Γ appartient à $\Gamma(\alpha)$ si ses deux poids sont non nuls
- 2) Un sommet de Γ appartient à $\Gamma(\alpha)$ si, sur chaque arête de son étoile, le poids écrit de son côté est non nul.

(*) Il serait sans intérêt de se demander si α est dans l'image de $H_2(\tilde{V} - p^{-1}(S)) \rightarrow H_2(\tilde{V})$. D'ailleurs c'est toujours vrai.

Lemme 1 : $\Gamma(\alpha)$ est un arbre fini.

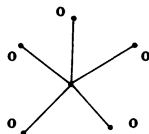
Preuve. Que $\Gamma(\alpha)$ soit un sous-complexe de Γ et qu'il soit connexe résulte directement de la remarque suivante : si l'on a une arête



alors, sur le sous-arbre de Γ de pied b et qui ne contient pas cette arête, toutes les arêtes ont un poids nul, celui du côté le plus éloigné de b . Enfin $\Gamma(\alpha)$ est fini parce que α est représentable par une chaîne finie. $\langle \rangle$

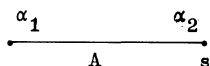
Lemme 2 :

Si $\Gamma(\alpha)$ ne contient pas d'arête, il existe un sommet de Γ sur l'étoile duquel tous les poids extrémaux sont nuls :



Preuve. Si $\Gamma(\alpha)$ est réduit à un point, celui-là répond à la question. Supposons donc que $\Gamma(\alpha)$ soit vide. Alors la finitude de α implique qu'il existe un arbre fini (connexe) K dans Γ ayant la propriété suivante : pour toute arête n'appartenant pas à K , le poids écrit du côté le plus éloigné de K est nul. J'affirme que, si K est non vide et minimal pour la propriété précédente, K est réduit à un point, qui, bien entendu, répond à la question.

Soit s un sommet extrémal de K ; il y a au plus une arête A issue de s et appartenant à K :



La minimalité de K implique $\alpha_2 \neq 0$. Puisque $\Gamma(\alpha)$ est vide, $\alpha_1 = 0$. Donc $K = s$. $\langle \rangle$

Proposition fondamentale :

Une condition nécessaire et suffisante pour que (+) ait une réponse positive est que $\Gamma(\alpha)$ n'ait pas d'arête (*).

Preuve. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Il existe un sommet ayant la propriété du lemme 2. Pour simplifier les notations, supposons que ce soit $|U^0|$. Ainsi, par hypothèse, $\alpha_i^Y \in H_2(\tilde{V}, X_i)$ est nul pour $i \in I^0$, où $I^0 = \{i \in I \mid S_i \subset \bar{U}^0\}$. Il s'agit donc de voir que le morphisme naturel

$$H_2(\tilde{V}, U^0) \rightarrow \bigoplus_{i \in I^0} H_2(\tilde{V}, X_i)$$

est injectif, ou encore que, dans $H_2(\tilde{V}, U^0)$, on a $\bigcap_{i \in I^0} \text{Im } H_2(X_i, U^0) = 0$,

ou encore, par excision, que dans $H_2(\tilde{V} - U^0, \bigcup_{i \in I^0} S_i)$ on a

$$\bigcap_{i \in I^0} \text{Im } H_2(Y_i, S_i) = 0$$

(en effet $\overline{X_i - U^0}$ est une réunion de Y_j , $j \in I^0$).

Or si $i \neq j$ dans I^0 , $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ et, dans $\tilde{V} - U^0$, Y_i n'est pas connectable à Y_j car Γ est un arbre. La dernière affirmation est donc évidente. $\diamond$

2.3 - Application à la disjonction homotopique.

Soient une application $f : S^2 \rightarrow V$ et $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{V}$ un relèvement de f dans le revêtement universel. Choisissons une classe fondamentale $[S^2]$ sur la sphère et posons $\alpha = \tilde{f}_*([S^2])$. Grâce au théorème de Hurewicz, on peut

(*) Il arrive effectivement que $\Gamma(\alpha)$ soit vide, sans que α soit nul. Par exemple, si $\pi_1(V)$ a deux bouts $\Gamma(\alpha)$ est toujours vide. Si $V = X_0 \cup_S X_1$ et s'il existe $j_1, j_2 \in J$ tels que U^{j_1} et U^{j_2} soient sans frontière commune et que, dans $H_2(\tilde{V})$, on ait $\text{Im } H_2(U^{j_1}) \cap \text{Im } H_2(U^{j_2}) \neq 0$, alors $\pi_1(X_0) \cong \mathbb{Z}_2$ (ou, et, $\pi_1(X_1) \cong \mathbb{Z}_2$; si $p_*(\alpha) \in H_2(X_0)$ et si $\Gamma(\alpha)$ n'a pas d'arête, $\Gamma(\alpha)$ est vide. (Rapprocher cette situation de III 1.4 et de IV 4.1).

réénoncer la proposition précédente sous la forme suivante :

Il existe une homotopie de disjonction de f par rapport à la sphère S de V si et seulement si $\Gamma(\alpha)$ n'a pas d'arête. Cette dernière condition est indépendante de la classe fondamentale choisie sur S^2 et du relèvement $\tilde{f}$.

En fait nous allons énoncer deux propositions plus précises dans le cas où f est transversale sur S . La préimage $f^{-1}(S) = \bigcup_{i \in I} \tilde{f}^{-1}(S_i)$ est une union de courbes. Désignons par $\Gamma(f)$ le nerf de S^2 pour cette stratification. Le morphisme stratifié $\tilde{f}$ induit un morphisme de complexes $F : \Gamma(f) \rightarrow \Gamma$.

Proposition 1 :

1) Si, pour tout $i \in I$, $\tilde{f}^{-1}(S_i)$ est connexe (vide pour presque tout i),

$\Gamma(f)$ est isomorphe par F à un sous-arbre de Γ contenant $\Gamma(\alpha)$.

2) Sinon, l'assertion (H1) est vraie :

(H1) Il existe deux composantes C et C' de $f^{-1}(S)$ et une courbe simple γ' joignant C à C' telle que :

a) $\text{int } \gamma' \cap f^{-1}(S) = \emptyset$,

b) $f|_{\gamma'} : (\gamma', \partial\gamma') \rightarrow (V, S)$ représente l'élément trivial de $\pi_1(V, S)$.

Preuve. 1) Par hypothèse, F est injectif sur l'ensemble des arêtes de $\Gamma(f)$. Ceci implique que F est aussi injectif sur l'ensemble des sommets ; sinon, un chemin minimal d'arêtes joignant dans $\Gamma(f)$ deux sommets les plus proches identifiés par F aurait pour image dans Γ une boucle simple ; ceci n'existe pas dans un arbre. Enfin, $\tilde{f}$ étant une chaîne représentant α , on a sûrement $\Gamma(\alpha) \subset F(\Gamma(f))$.

2) Si $\tilde{f}^{-1}(S_j)$ n'est pas connexe, il existe deux composantes C_1 et C'_1 de $\tilde{f}^{-1}(S_j)$ et un arc γ'_1 les joignant dans S^2 . On peut supposer que γ'_1 coupe chaque composante de $f^{-1}(S)$ en au plus un point. Puisque $\tilde{f}(\gamma'_1)$

est trivial dans $\pi_1(\tilde{V}, S_j)$, il existe un indice i et un sous-arc γ' de γ_1^1 vérifiant la condition a), tels que $\tilde{f}(\partial\gamma') \subset S_i$. Les extrémités de γ' appartiennent à deux composantes distinctes C et C' de $\tilde{f}^{-1}(S_i)$ et le b) est évidemment vérifié puisque $\tilde{V}$ est 1-connexe. $\triangleleft$

Supposons maintenant que l'on soit dans la situation du 1) de la proposition 1, $\Gamma(f)$ étant identifié à un sous-arbre de Γ qui contient $\Gamma(\alpha)$.

Proposition 2 :

Dans cette situation, exactement l'une des deux assertions suivantes est vraie :

- 1) $\Gamma(\alpha) = \Gamma(f)$ ou bien $\Gamma(\alpha) = \emptyset$, $\Gamma(f) = 1$ point^(*).
- 2) (H2) : Il existe un disque D sur S^2 et des indices $i \in I, j \in J$, tels que

- a) $\partial D = \tilde{f}^{-1}(S_i)$, $\text{int } D = \tilde{f}^{-1}(U^j)$,
- b) $\tilde{f}|_D$ représente l'élément trivial de $\pi_2(\bar{U}^j, S_i)$.

Preuve. Le contraire de 1) est que $\Gamma(f)$ possède une arête n'appartenant pas à $\Gamma(\alpha)$. Etant donné que $\Gamma(\alpha)$ est un sous-arbre de $\Gamma(f)$, cette arête $|S_i|$ peut être choisie extrémale sur $\Gamma(f)$, avec pour sommet extrémal $|U^j|$. Posons $D = \tilde{f}^{-1}(\bar{U}^j)$; c'est bien un disque. Pour les notations supposons $U^j \subset Y_i$. Puisque $|S_i|$ n'appartient pas à $\Gamma(\alpha)$, $\alpha_i^Y = 0$ ou $\alpha_i^X = 0$. Si $\alpha_i^X = 0$, alors le poids écrit à côté d'un autre sommet extrémal de $\Gamma(f)$ est nul. (Voir la démonstration de 2.2 lemme 1). Donc, quitte à changer d'arête extrémale, on peut supposer que $\tilde{f}_\star([D])$ est nul dans $H_2(\tilde{V}, X_i) \cong H_2(Y_i, S_i)$. Mais l'inclusion induit un monomorphisme

$$H_2(\bar{U}^j, S_i) \rightarrow H_2(Y_i, S_i) ;$$

en effet, aucune composante de $p^{-1}(S)$ n'est homologue à zéro, autrement dit,

(*) $\Gamma(f)$ est réduit au sens expliqué dans [L3].

$H_3(Y_i, \bar{U}^j) = 0$. Donc $\tilde{f}_*([D])$ est nul dans $H_2(\bar{U}^j, S_i)$. La condition b) est alors vérifiée d'après le théorème de Hurewicz. <>

2.4 - Interprétation de l'hypothèse (H1).

La condition a) signifie que γ' définit une chirurgie plongée d'indice 1 sur $f^{-1}(S)$, à savoir la somme connexe de C et C' le long de γ' . Si N signifie voisinage tubulaire, $f|_{\gamma'} - \text{int } N(\partial\gamma')$ définit un élément $\omega \in \pi_1(V - \text{int } N(S), \partial N(S))$. La nullité de cet élément est la condition nécessaire et suffisante pour que cette somme connexe soit réalisable par une homotopie de f (I 2.3). Or la condition b) et la théorème de Van Kampen ($\pi_1(V-S) \rightarrow \pi_1(V)$ est injectif) assurent que $\omega=0$.

Interprétation de l'hypothèse (H2).

La condition a) signifie que le disque D définit une chirurgie plongée d'indice 2 sur $f^{-1}(S)$, à savoir l'élimination de la courbe C . La condition b) assure que cette élimination est réalisable par une homotopie de f .

Remarque. Si $\Gamma(\alpha)$ n'a pas d'arête, on prouve, grâce aux propositions 1 et 2 et par récurrence sur le nombre de courbes de $f^{-1}(S)$ qu'il existe une homotopie de disjonction de f par rapport à S ; d'ailleurs au cours de cette homotopie le nombre de composantes de la préimage de S ne cesse de décroître. Ceci redonne une démonstration de la proposition fondamentale 2.2, qui, en effet, n'a pas été utilisée en 2.3. De 2.2 nous n'avons utilisé que les notations et l'argument du lemme 1. Cependant, la proposition 2.2, au demeurant bien simple à prouver, a le mérite d'éclairer le problème de la disjonction.

§ 3. Démonstration du théorème de disjonction isotopique (1.2).

Soit $f : S^2 \rightarrow V$ un plongement que l'on suppose au départ transversal sur une sphère S de V ; S n'est pas homotope à zéro, V satisfait à la

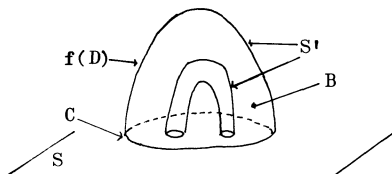
conjecture de Poincaré et il existe une homotopie de disjonction de f par rapport à S . Donc $p : \tilde{V} \rightarrow V$ étant un revêtement universel et $\tilde{f}$ un relèvement de f , l'arbre $\Gamma(\alpha)$ n'a pas d'arête, où $\alpha = \tilde{f}_*([S^2])$. Or si $S' = \text{Im } f$ n'est pas disjoint de S , l'arbre $\Gamma(f)$ n'est pas réduit à un point. Alors, d'après les propositions 1 et 2 de 2.3, on se trouve soit dans la situation (H1) soit dans la situation (H2). Le théorème 1.2 résulte de la proposition suivante par récurrence sur le nombre des courbes d'intersection $S' \cap S$.

3.1 - Proposition :

Les hypothèses (H1) ou (H2) impliquent que S' est isotope à une sphère S'' , transversale sur S telle que $\text{card } \pi_0(S'' \cap S) < \text{card } \pi_0(S' \cap S)$.

3.2 - Démonstration sous l'hypothèse (H2).

Noter que c'est le seul endroit où l'hypothèse de Poincaré soit nécessaire. Les notations étant celles de la proposition 2 (2.3), $\tilde{f}(D)$ sépare U^j en deux composantes dont l'une a pour adhérence un domaine acyclique $\tilde{B}$ tel que $\tilde{B} \cap S_i = \partial \tilde{B} - \tilde{f}(\text{int } D)$. On sait que $p|_{\partial \tilde{B}}$ est un plongement et aussi que $p|_{\tilde{B}}$ est un plongement puisque $\text{int } \tilde{B} \subset U^j$. Posons $B = p(\tilde{B})$; c'est une sous-variété compacte contractile donc une boule. Soit C la courbe d'intersection $f(\partial D)$; on a $\partial B = f(D) \cup (B \cap S)$.



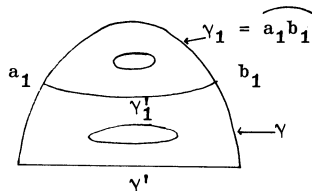
On imagine alors facilement une isotopie qui élimine la courbe d'intersec-

tion C , ainsi que toutes celles qui se trouvent sur le disque $B \cap S$. $\diamond$

3.3 - Démonstration sous l'hypothèse (H1) (esquisse).

Ce qu'il faut faire dans ce cas est beaucoup plus délicat. C'est là que l'on trouve l'essentiel de la différence entre le théorème de disjonction de surfaces incompressibles dans une variété $\mathbb{P}^2$ -irréductible (II 5.4) et le théorème de disjonction de sphères non homotopes à zéro. Je renvoie à [L3] pour les détails. La démonstration repose sur une technique de coupures et recollements que je vais expliquer dans un cas simple.

D'après 2.3, proposition 1, et 2.4, il existe des courbes C et C' de l'intersection $S' \cap S$ ($S' = f(S^2)$) et un arc simple γ' joignant C à C' sur S' tel que $\text{int } \gamma' \cap S = \emptyset$. Il existe aussi un disque singulier Δ contenant γ' sur son bord, tel que $\gamma = \partial\Delta - \text{int } \gamma' = \Delta \cap S$. Puisque l'on ne demande aucune propriété à γ , vis-à-vis des courbes $S \cap S'$, sauf celle de joindre C à C' sur S , on peut supposer que γ est plongé et que $\text{int } \gamma \cap S'$ a le moins de points d'intersection possible. Regardée à la source de Δ , $\Delta \cap S'$ a l'allure suivante (en supposant Δ transversal sur S') :

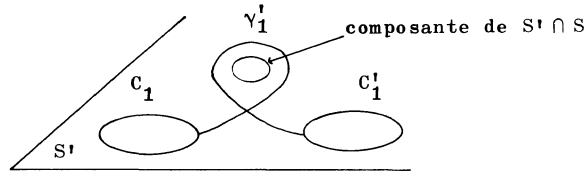


Soit γ_1' un arc de $\Delta \cap S'$, d'extrémités a_1 et b_1 . Soit γ_1 le sous-arc de γ ayant les mêmes extrémités. Si a_1 et b_1 appartenaient à la même courbe d'intersection de S' avec S , $\text{card}(\text{int } \gamma \cap S')$ ne serait pas minimal. Donc $a_1 \in C_1$, $b_1 \in C_1'$, C_1 et C_1' étant des courbes d'intersection distinctes.

On peut maintenant supposer que $\text{int } \gamma_1 \cap S' = \emptyset$ et on prend le disque

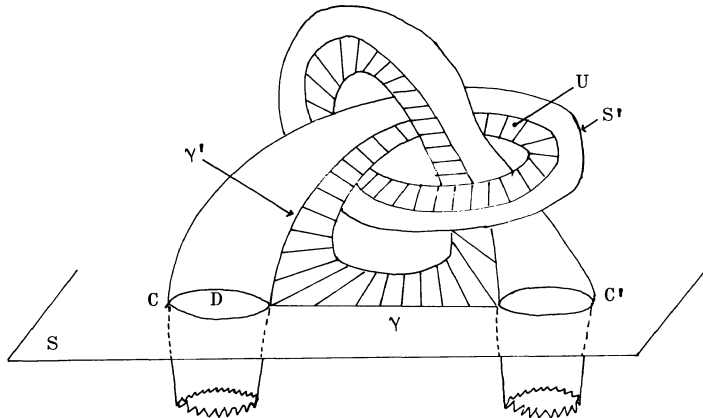
TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

singulier Δ_1 bordé par $\gamma_1 \cup \gamma'_1$ sur Δ . On a bien $\text{int} \gamma'_1 \cap S = \emptyset$; mais γ'_1 n'est peut-être plus plongé. Sur S' , on peut avoir une configuration du genre suivant :



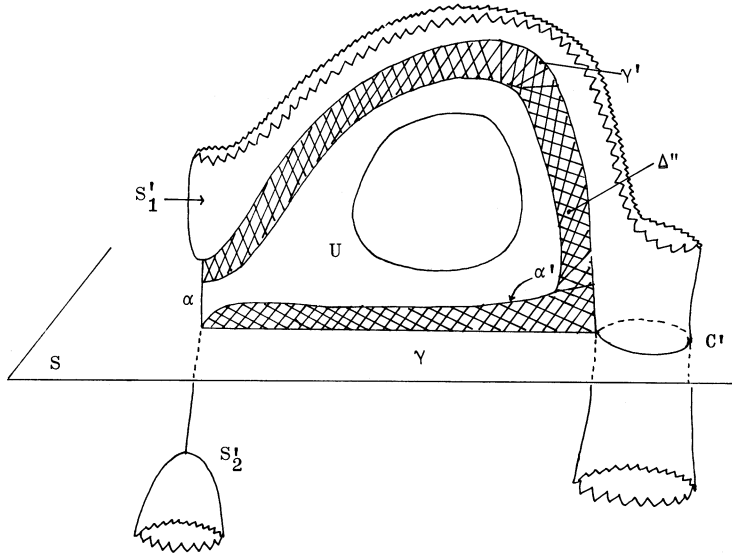
Si on accepte que Δ_1 coupe S en son intérieur, ce qui ne sera pas gênant pour la suite, on peut supposer que γ'_1 est plongé.

En résumé, l'hypothèse (H1) permet de trouver deux courbes d'intersection C et C' , jointes par deux arcs simples γ et γ' de mêmes extrémités, respectivement sur S et sur S' , et un anneau plongé U tel que $\partial U \cap (S \cup S') = U \cap (S \cup S') = \gamma \cup \gamma'$ (intersection transversale) et que $\partial U - (\gamma \cup \gamma')$ soit homotope à zéro dans V .



Supposons pour simplifier que sur S la courbe C borde un disque D ne contenant aucune courbe d'intersection en son intérieur. On coupe S'

par le disque D ; alors $S' = S'_1 \#_{\alpha} S'_2$, où α est un arc coupant S au centre du disque D et joignant deux sphères plongées S'_1 et S'_2



Soit α' un arc, ayant même extrémité que α , mais qui, avant de traverser S , fait le tour de l'anneau U . Faisons la somme connexe

$\hat{S}' = S'_1 \#_{\alpha'} S'_2$. On constate que

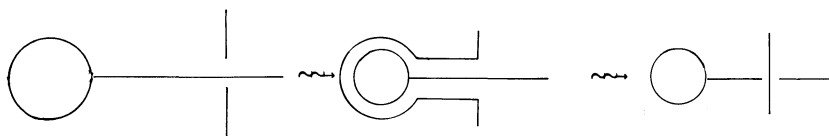
$$1) \hat{S}' \cap S = S' \cap S,$$

2) Grâce au disque plongé Δ'' indiqué sur la figure, on peut réaliser par une isotopie de $\hat{S}'$ la somme connexe des courbes d'intersection C et C' : il existe un difféomorphisme φ isotope à l'identité tel que, si $S'' = \varphi(\hat{S}')$, on a

$$S'' \cap S = (S' \cap S - (C \cup C')) \cup (C \#_{\gamma} C').$$

Or α est homotope à α' à extrémités fixes, puisque l'anneau U est homotope à zéro. D'après Van Kampen, cette homotopie peut être choisie dans le

complémentaire de S'_1 et de S'_2 . Pour conclure, il suffit de voir que α' est isotope à α , donc que $\hat{S}'$ est isotope à S' . Mais, chaque fois que l'on a un croisement dans une homotopie régulière de α' à α , on peut le remplacer par une isotopie qui contourne la sphère S'_1 ou S'_2 .



Remarque. Il est immédiat de voir que, mutatis mutandis, on a également démontré les théorèmes 1.2 et 1.3 pour les disques proprement plongés dans une variété à bord satisfaisant à la conjecture de Poincaré.

§ 4. Classification des difféomorphismes de $\#_p S^1 \times S^2$.

4.1 - Rappelons que $\#_p S^1 \times S^2$ désigne la somme connexe de p exemplaires de $S^1 \times S^2$. La classification des difféomorphismes de cette variété permet de donner une caractérisation de la vraie sphère de dimension 4 (voir § 5).

La classification comporte deux parties ; on montre d'abord que les classifications à isotopie près et à homotopie près coïncident, puis on définit des invariants qui classifient les types d'homotopie de difféomorphismes (*). Pour simplifier, on se restreindra aux difféomorphismes qui conservent l'orientation ($\text{Diff}^+(\#_p S^1 \times S^2)$).

Dans la suite, on pose $V = \#_p S^1 \times S^2$. On choisit dans cette variété des sphères $S_1, \dots, S_p$ telles que, si l'on coupe V le long de toutes ces sphères, on trouve une boule avec $(2p-1)$ trous, notée $D(2p-1)$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, on choisit un arc γ_i qui coupe S_i en un seul point et qui ne coupe pas les autres sphères. On oriente ces objets pour que

(*) Dans [L3], je n'ai donné que la première partie. La seconde partie vient de [L4].

$[\gamma_i] \cdot [S_i] = +1$. La famille des lacets orientés γ_i est une base de

$$\pi_1(V, D(2p-1)) \cong \pi_1(V, x_0) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{p \text{ fois}} \cong *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}.$$

4.2 - Rotation parallèlement à une sphère plongée.

Soient M une variété de dimension 3, Σ une sphère plongée dans M , U un voisinage collier de Σ ($U \cong S^2 \times [0, 1]$, $S^2 \times \{0\} = \Sigma$). Soit $\alpha : ([0, 1], \partial[0, 1]) \rightarrow (SO(3), Id.)$. On définit alors un difféomorphisme de M , à support dans U , qui, pour $(x, t) \in U$ est donné par :

$$(x, t) \longmapsto (\alpha(t)x, t).$$

On l'appelle difféomorphisme de rotation parallèlement à Σ . Sa classe d'isotopie est bien déterminée, d'une part par la classe d'isotopie de Σ (non paramétrée), d'autre part par la classe d'homotopie de α . On utilisera alors la notation suivante : pour $\alpha \in \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, $H_{\Sigma}(\alpha)$ désigne un difféomorphisme dans cette classe d'isotopie.

Maintenant, sur $V = \#_p S^1 \times S^2$, à chaque n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \oplus_p \mathbb{Z}_2$ on peut associer le difféomorphisme (bien défini à isotopie près)

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = H_{S^1}(\alpha_1) \circ \dots \circ H_{S^1}(\alpha_p).$$

On définit ainsi un homomorphisme

$$R : \oplus_p \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(V \text{ mod } x_0)),$$

le point base x_0 étant choisi dans le complémentaire de voisinages collier de chaque sphère S_i .

Lemme :

$H(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est homotope à l'identité si et seulement si $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

Dans ce cas $H(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est évidemment isotope à l'identité modulo x_0 .

(Voir la démonstration dans l'appendice II).

D'autre part, $H(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ induit l'identité sur le groupe fondamental. Ainsi l'image de R est dans le noyau de l'homomorphisme

$$\pi : \pi_0(\text{Diff}^+(V \bmod x_0)) \rightarrow \text{Aut}(*_p \mathbb{Z})$$

qui à tout difféomorphisme associe l'automorphisme induit sur le groupe fondamental.

4.3 - Théorème ^(*):

1) La suite

$$0 \rightarrow \bigoplus_p \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{R} \pi_0(\text{Diff}^+(\#_p S^1 \times S^2 \bmod x_0)) \xrightarrow{\pi} \text{Aut}(*_p \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

est exacte.

2) Tout difféomorphisme de $(\#_p S^1 \times S^2, x_0)$, homotope à l'identité modulo x_0 , est isotope à l'identité modulo x_0 .

Remarques. 1) Dans une théorie non pointée, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \bigoplus_p \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{R} \pi_0(\text{Diff}^+(\#_p S^1 \times S^2)) \rightarrow \text{Aut}(*_p \mathbb{Z}) / \text{Aut. intérieurs} \rightarrow 1.$$

2) Ce théorème ne répond pas à la question naturelle : est-ce que toute équivalence d'homotopie de $\#_p S^1 \times S^2$ est homotope à un difféomorphisme ? Il y sera répondu au chapitre V dans le cadre du problème de scindement d'une équivalence d'homotopie (V 1.4).

Démonstration. Le 2) résulte du 1) : Si H est homotope à l'identité mod x_0 , H est isotope (mod x_0) à $H(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$; mais ce dernier n'est

(*) - Le cas $p = 1$ a été prouvé par Gluck [G1].

- Le même théorème est vrai si on remplace certains termes $S^1 \times S^2$ de la somme connexe par l'espace total d'un S^2 -fibré non-orientable sur S^1 , à condition de faire les modifications suivantes : ne prendre que les automorphismes de $*_p \mathbb{Z}$ qui respectent l'homomorphisme d'orientation et, dans le cas non pointé, remplacer Diff^+ par Diff .

homotope à l'identité que si $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Pour le 1), il ne reste à prouver que les deux points suivants :

- a) π est surjective
- b) le noyau de π est contenu dans l'image de R_* .

4.3.1 - Preuve de a) :

On considère $W = D^4 + p$ anses d'indice 1. On a $\partial W = \#_p S^1 \times S^2$. Il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme :

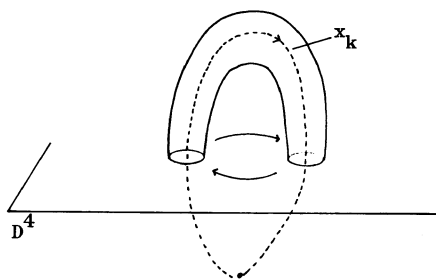
Tout automorphisme de $*_p \mathbb{Z}$ est induit par un difféomorphisme de W .

Preuve. On sait ([M3], p. 131) que $\text{Aut}(*_p \mathbb{Z})$ est engendré par les automorphismes des types suivants, définis sur les générateurs canoniques $x_1, \dots, x_p$ par les formules

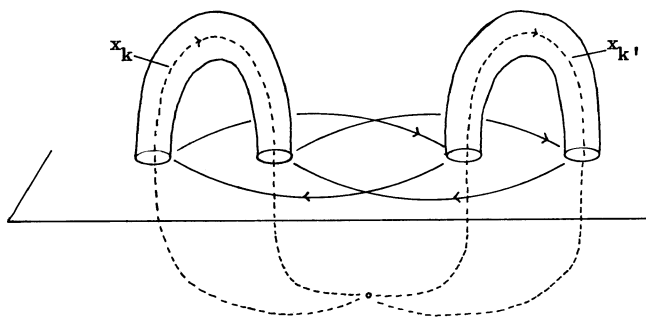
$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \begin{cases} x_k \mapsto x_k^{-1} \\ x_\ell \mapsto x_\ell & \text{si } \ell \neq k \end{cases} \\
 \text{(ii)} \quad & \begin{cases} x_k \mapsto x_{k'} \\ x_{k'} \mapsto x_k \\ x_\ell \mapsto x_\ell & \text{si } \ell \neq k, k' \end{cases} \\
 \text{(iii)} \quad & \begin{cases} x_k \mapsto x_k x_{k'} \\ x_\ell \mapsto x_\ell & \text{si } \ell \neq k. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dans chacun des cas on obtient le difféomorphisme par glissement convenable des anses d'indice 1. Je pense que quelques figures sont convaincantes : les flèches pleines désignent la nature du glissement.

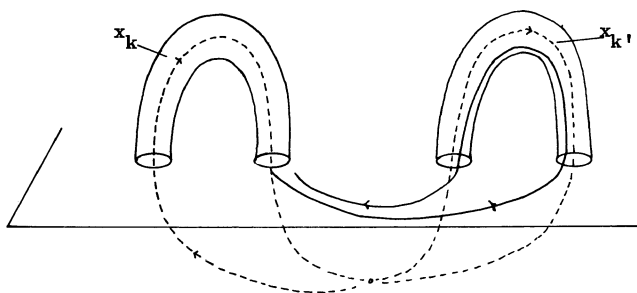
cas (i)



cas (ii)



cas (iii)



On peut regarder ces glissements comme des isotopies de plongements de W dans $\mathbb{R}^4$ aux extrémités desquelles les images coïncident ; donc deux choses sont importantes : d'une part que les anses de W soient triviales (d'où le plongement de W dans $\mathbb{R}^4$), d'autre part que les sphères d'attachement (ici des points) soient de codimension au moins 2 (comme sur la figure, où on a en fait démontré le lemme pour D^{3+p} anses d'indice 1 !). $\diamond$

4.3.2 - Preuve de b).

D'après A III 3, tout difféomorphisme H qui conserve l'orientation et qui induit l'identité sur le groupe fondamental, induit aussi l'identité sur $\pi_2(\#_p S^1 \times S^2, x_0)$. D'après le théorème 1.4, $H|_{S_1}$ et $\text{Id}|_{S_1}$ sont deux plongements isotopes, par une isotopie laissant fixe le point base. Donc H est isotope modulo x_0 à H_1 tel que $H_1|_{S_1} = \text{Id}$. Mais $H_1|_{S_2}$ et $\text{Id}|_{S_2}$, qui sont deux plongements homotopes dans $V = \#_p S^1 \times S^2$, sont aussi homotopes $V - S_1$ (voir V 4.2 Lemme). Ils y sont donc isotopes etc... . Finalement, après une isotopie convenable de H , on arrive au cas où, pour $i=1, \dots, p$, $H|_{S_i} = \text{Id}$. Alors si on coupe V le long de ces sphères, on obtient un difféomorphisme de $D(2p-1)$, qui est l'identité sur $\partial D(2p-1) \cup \{x_0\}$. Sachant que $\text{Diff}^+(D^3)$ est connexe (I 1.2), il est facile de voir avec les théorèmes classiques de fibration d'espaces de difféomorphismes que, modulo $\partial D(2p-1) \cup x_0$, H est isotope à un difféomorphisme de rotation parallèlement au système des sphères $\partial D(2p-1)$. Regardé sur V , ce résultat est celui recherché.

cqfd.

En fait comme les difféomorphismes $H(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ se prolongent à W , ainsi qu'au moins un difféomorphisme changeant l'orientation, on vient de prouver, grâce à ce théorème et au lemme 4.3.1, la proposition suivante :

4.4 - Proposition :

Tout difféomorphisme de $\#_p S^1 \times S^2$ se prolonge en un difféomorphisme de $W = D^4 + p$ anses d'indice 1 = $\#_p S^1 \times D^3$.

§ 5. Une caractérisation de la vraie sphère de dimension 4.

5.1 - Soient Σ^4 une homotopie-sphère de dimension 4 et $f : \Sigma^4 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse ordonnée. Soit t une valeur régulière de f séparant les valeurs critiques d'indice inférieur ou égal à 2 de celles d'indice supérieur ou égal à 3. On sait que le cobordisme supérieur $f^{-1}([t, +\infty))$ est difféomorphe à $\#_p S^1 \times D^3$. En revanche on ne sait presque rien sur le cobordisme inférieur $W' = f^{-1}((-\infty, t])$, hormis la proposition suivante, dont la preuve (homologique) est immédiate.

Proposition :

Soit W' une variété compacte de dimension 4. W' est le cobordisme inférieur d'une homotopie-sphère si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) W' est 1-connexe
- 2) $\partial W' = \#_p S^1 \times S^2$ et l'inclusion induit un épimorphisme

$$H_2(\partial W') \rightarrow H_2(W') \rightarrow 0.$$

5.2 - Je vais indiquer ici, en terme du cobordisme inférieur, une condition nécessaire et suffisante pour que Σ^4 soit difféomorphe à S^4 .

Théorème (*) :

- 1) Une homotopie-sphère Σ^4 est difféomorphe à S^4 si et seulement si son

(*) Sous une forme un peu différente, il a été prouvé avec Poenaru dans [L4].

cobordisme inférieur W' est difféomorphe à $\#_p D^2 \times S^2$.

2) S'il existe un entier q tel que "la somme connexe sur le bord"

$W' \# (\#_q D^2 \times S^2)$ soit difféomorphe à $\#_{p+q} D^2 \times S^2$, alors W' est difféomor-
phe à $\#_p D^2 \times S^2$.

Remarque. Le 2) de ce théorème apparaît comme un résultat de "déstabilisation". Il est intéressant de rappeler que Wall [W4] a prouvé que pour toute sphère d'homotopie, il existe un entier q tel que

$$\Sigma^4 \# (\#_q S^2 \times S^2) = \#_q S^2 \times S^2.$$

La conjecture de Poincaré consiste donc à "déstabiliser" cet isomorphisme.

Démonstration. 1) La condition est nécessaire : on sait que S^4 admet une décomposition canonique $(\#_p D^2 \times S^2) \cup_{\text{Id}} (\#_p S^1 \times D^3)$. Or en dimension 4, les courbes ne sont pas nouées et donc tous les plongements de $\#_p S^1 \times D^3$ dans S^4 ont des images isotopes. Autrement dit, la paire (S^4, W') est isomorphe à la paire canonique.

La condition est suffisante : on a ici affaire à une sphère d'homotopie difféomorphe à $(\#_p D^2 \times S^2) \cup (\#_p S^1 \times D^3)$, où φ est un difféomorphisme de $\#_p S^1 \times S^2$. On a prouvé que φ se prolonge en un difféomorphisme de $\#_p S^1 \times D^3$ (4.4). Donc l'identité de $\#_p D^2 \times S^2$ se prolonge en un difféomorphisme

$$(\#_p D^2 \times S^2) \cup_{\varphi} (\#_p S^1 \times D^3) \cong (\#_p D^2 \times S^2) \cup_{\text{Id}} (\#_p S^1 \times D^3) = S^4.$$

2) La stabilisation de W' consiste à faire naître q paires triviales de points critiques d'indice 2 et 3 à partir de la fonction $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Donc on a des isomorphismes

$$\begin{aligned}\Sigma &= W' \cup (\#_p S^1 \times D^3) = (W' \# (\#_q D^2 \times S^2)) \cup (\#_{p+q} S^1 \times D^3) \\ &= (\#_{p+q} D^2 \times S^2) \cup (\#_{p+q} S^1 \times D^3) = S^4 \quad (\text{d'après 1) cond. suff.}).\end{aligned}$$

D'après 1) (cond. néc.), $W' = \#_p D^2 \times S^2$.

cqfd.

Chapitre IV

SUR LES DÉCOMPOSITIONS DU GROUPE FONDAMENTAL EN PRODUIT LIBRE

§ 1. Position du problème.

Dans ce chapitre (V, x_0) désignera toujours une variété de dimension 3 pointée et fermée. Supposons qu'il existe une sphère S de V , passant par x_0 et séparant $V : V = V' \cup_S V''$. Si V' et V'' ne sont pas contractiles, c'est-à-dire si S n'est pas homotope à zéro (AI 1), le théorème de Van Kampen dit que $\pi_1(V, x_0) \cong \pi_1(V', x_0) * \pi_1(V'', x_0)$, cette décomposition étant non triviale.

Donc, d'après le "sphere theorem", lorsque V est orientable et distincte de $S^1 \times S^2$, il existe une décomposition libre du groupe fondamental dès que $\pi_2(V, x_0)$ est non trivial ; en réalité Stallings a prouvé que l'existence d'une telle décomposition libre dépend de la structure des bouts du groupe [S5].

Inversement, une décomposition libre du groupe fondamental est-elle réalisable géométriquement par une décomposition de V en somme connexe ? De façon précise, la conjecture de Kneser [K2] était la suivante :

Soit $\varphi : \pi_1(V, x_0) \rightarrow G' * G''$ un isomorphisme du groupe fondamental sur un produit libre. Alors il est possible d'écrire $V = V' \cup V''$, où $S = V' \cap V''$ est une sphère contenant le point base, de sorte que

$$\varphi(\pi_1(V', x_0)) = G' \quad \text{et} \quad \varphi(\pi_1(V'', x_0)) = G''.$$

Cette conjecture a été prouvée par Stallings [S5]. La démonstration repose essentiellement sur le "loop theorem" et sur le "binding tie" (II 3.4) [S7].

Le but de ce chapitre est de préciser la correspondance qui semble

exister entre les sphères plongées dans V et les décompositions libres du groupe fondamental. Deux questions me paraissent naturelles dans ce contexte :

1) Est-ce que la solution au problème de Kneser est unique ?

2) Comment sont deux décompositions libres associées à deux sphères plongées homotopes ?

Ayant répondu à ces deux questions et en particulier dégagé la notion de décompositions libres "homotopes", on peut espérer transporter dans l'algèbre le théorème d'isotopie de plongements de sphères (III 1.4). Les conversations que j'ai eues avec Bernard Teissier m'ont aidé à préciser la formulation.

§ 2. Définitions. Classe d'homotopie d'une décomposition libre.

2.1 - Une décomposition libre d'un groupe G est la donnée d'une paire ordonnée de deux groupes non triviaux (G', G'') et d'un isomorphisme $\varphi : G \rightarrow G' \star G''$.

Notation : (G', G'', φ) ou, de façon abrégée, (φ) .

On dit que deux décompositions libres (G'_0, G''_0, φ_0) et (G'_1, G''_1, φ_1) sont isotopes s'il existe deux isomorphismes $\Psi' : G'_0 \rightarrow G'_1$ et $\Psi'' : G''_0 \rightarrow G''_1$ tels que

$$\varphi_1 = (\Psi' \star \Psi'') \varphi_0 .$$

Remarque. (G', G'', φ) et (G'', G', φ) ne sont jamais isotopes.

2.2 - Sur l'ensemble $\text{Sp}(G)^{(*)}$ des classes d'isotopie de décomposition libre, il existe une involution ι , appelée la permutation des facteurs :

$$\iota((G', G'', \varphi)) = (G'', G', \varphi) .$$

(*) Sp comme "splitting". Pour alléger la terminologie on parlera d'une décomposition libre au lieu de sa classe d'isotopie.

Cette involution est sans point fixe.

D'autre part si $\gamma \in G$, on pose

$$\gamma \cdot (G', G'', \varphi) = (G', G'', \varphi \cdot c_\gamma)$$

où, pour $g \in G$, $c_\gamma(g) = \gamma^{-1} g \gamma$. Cette formule définit une action à gauche de G sur $Sp(G)$.

2.3 - Considérant le problème de Kneser, la sphère $S = V' \cap V''$ sera appelée une sphère de Kneser de la décomposition libre (G', G'', φ) . La paire (G', G'') étant ordonnée, la paire (V', V'') l'est aussi et l'on oriente S transversalement de sorte que les normales positives rentrent dans V' . On fixe une fois pour toutes une orientation de V en x_0 ; alors S est aussi orientée, donc munie d'un paramétrage unique à isotopie près (d'après Smale [S8]) et la notation S sous-entend la donnée de cette classe de paramétrage.

On note $\text{Plgt}^0(S^2, V)$ l'ensemble des classes d'isotopie modulo le point base de plongements $(S^2, s_0) \rightarrow (V, x_0)$, non homotopes à zéro et dont l'image sépare V . Si S est une sphère de Kneser, $[S]$ désigne sa classe dans $\text{Plgt}^0(S^2, V)$. Par le théorème de Van Kampen, on a une application

$$\sigma : \text{Plgt}^0(S^2, V) \rightarrow Sp(\pi_1(V, x_0)).$$

Comme en III 1.4, on note $-[S]$ la classe d'isotopie d'un paramétrage induisant l'orientation opposée sur la sphère S . On a

$$\sigma(-[S]) = \iota(\sigma([S])).$$

Si $\gamma \in \pi_1(V, x_0)$, on a défini en III 1.4 la classe d'isotopie $\gamma \cdot [S]$; si $w_1 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \cong \{-1, +1\}$ est l'homomorphisme d'orientation, on a

$$\sigma(w_1(\gamma) \gamma \cdot [S]) = \gamma \cdot \sigma([S]).$$

2.4 - Classe d'homotopie d'une décomposition libre.

Etant donnée une décomposition libre (G', G'', φ) d'un groupe G , on dé-

dinit un élément $C'(\varphi)$ dans l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(G)$ des parties de G : $C'(\varphi)$ est la partie de G formée des éléments non triviaux tels que l'écriture irréductible de $\varphi(g)$ dans $G' \star G''$ commence dans G' . Cette partie ne dépend que de la classe d'isotopie de (φ) , qui d'ailleurs est entièrement déterminée par $C'(\varphi)$ (voir 4.1 Remarques). De plus, si $\gamma \in G$, on a $C'(\gamma\varphi) = \gamma C'(\varphi)$.

On vérifie que $C'(\varphi)$ est une partie presque-invariante à droite, c'est à-dire que, pour tout $g \in G$, la différence symétrique $C'(\varphi) + C'(\varphi).g$ appartient à l'algèbre de Boole $\mathcal{P}_f(G)$ des parties finies de G . Si $\mathcal{P}(G)$ et $\mathcal{P}_f(G)$ sont considérés comme G -modules à droite, on peut encore dire que la classe de $C'(\varphi)$ dans l'algèbre quotient $\mathcal{P}(G)/\mathcal{P}_f(G)$ est G -invariante ; elle représente donc un élément de $H^0(G; \mathcal{P}(G)/\mathcal{P}_f(G))$, que l'on appellera la classe d'homotopie de la décomposition libre (G', G'', φ) . Ainsi on a défini une application, classe d'homotopie,

$$H' : \text{Sp}(G) \rightarrow H^0(G; \mathcal{P}(G)/\mathcal{P}_f(G)).$$

Elle respecte les actions à gauche naturelles définies sur sa source et son but.

Considérant l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$ comme G -module à droite, on peut aussi définir une application

$$H : \text{Sp}(G) \rightarrow H^1(G; \mathbb{Z}[G]).$$

Rappelons qu'une 1-cochaîne ξ à valeurs dans $\mathbb{Z}[G]$ associe à $\gamma \in G$ un élément $\xi_\gamma = \sum_{g \in G} \xi_\gamma(g)g$ où $\xi_\gamma(g) \in \mathbb{Z}$ est nul pour presque tout g . C'est un cocycle si pour $\gamma, \gamma' \in G$,

$$\xi_{\gamma\gamma'} = \xi_\gamma \cdot \gamma' + \xi_{\gamma'}.$$

Par définition $H((G', G'', \varphi))$ est représenté par le cocycle ξ donné par

les formules suivantes : pour $g, \gamma \in G$

$$\begin{cases} \mathbb{E}_\gamma(g) = +1 & \text{si } g \in C^1(\varphi) - C^1(\varphi) \cdot \gamma \\ & = -1 & \text{si } g \in C^1(\varphi) \cdot \gamma - C^1(\varphi) \\ & = 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Remarque. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(G) & \xrightarrow{H} & H^1(G; \mathbb{Z}[G]) \\ \downarrow H^1 & & \downarrow \otimes \mathbb{Z}_2 \\ H^0(G; \mathcal{P}(G)/\mathcal{P}_f(G)) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G; \mathcal{P}_f(G)) \end{array}$$

où δ est le cobord de la suite longue associée à la suite exacte de coefficients $0 \rightarrow \mathcal{P}_f(G) \rightarrow \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G)/\mathcal{P}_f(G) \rightarrow 0$.

§ 3. Homotopie des sphères de Kneser et homotopie des décompositions libres.

3.1 - Théorème :

Soient V une variété de dimension 3 fermée et (G', G'', φ) une décomposition libre de $\pi_1(V, x_0)$. Soit S une sphère de Kneser réalisant la décomposition libre (φ) . Alors la classe d'homotopie de S est déterminée par $(\varphi)^{(*)}$. De plus, si V satisfait à la conjecture de Poincaré, la classe d'isotopie de S est bien déterminée par φ , autrement dit

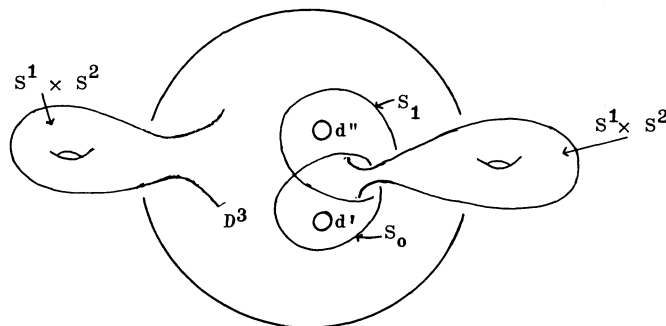
$$\sigma : \mathrm{Plgt}^0(S^2, V) \rightarrow \mathrm{Sp}(G)$$

est une bijection (la surjectivité étant l'objet du théorème de Kneser-Stallings).

(*) Dans [S10], G.A. Swarup démontre ce résultat par des méthodes strictement topologiques. Il démontre aussi la réciproque ; mais c'est sûrement faux : deux sphères de Kneser homotopes ne définissent pas nécessairement des décompositions libres isotopes (voir 3.2 et 4.1).

Remarque. Pour une variété à bord ce théorème n'est pas vrai comme le montre l'exemple suivant :

$$V = S^1 \times S^2 \# (D^3 - (\dot{d}' \cup \dot{d}'')) \# S^1 \times S^2, \quad d' \cong d'' \cong D^3$$



Les sphères S_0 et S_1 définissent la même décomposition libre du groupe fondamental mais ne sont pas homotopes.

Démonstration. Si $p : (\tilde{V}, y_0) \rightarrow (V, x_0)$ est un revêtement universel pointé, on oriente $\tilde{V}$ pour que p envoie l'orientation locale de $\tilde{V}$ en y_0 sur l'orientation locale choisie sur V en x_0 . Ces choix étant faits, il existe un isomorphisme

$$\Delta : \pi_2(M, x_0) \rightarrow H^1(G; \mathbb{Z}[G])$$

où $G = \pi_1(V, x_0)$ (A III 3). D'après A III 5, $\Delta^{-1}(H((G', G'', \varphi)))$ est la classe d'homotopie de S .

Supposons maintenant que V satisfasse à la conjecture de Poincaré et considérons deux sphères de Kneser S_0, S_1 de (φ) . On sait déjà qu'elles sont homotopes ; appliquons donc le théorème III 1.4. Si $G', G'' \neq \mathbb{Z}_2$, $[S_0] = [S_1]$. Si $G' \cong \mathbb{Z}_2$, $G'' \neq \mathbb{Z}_2$, on pourrait avoir $[S_1] = -\alpha \cdot [S_0]$, où $\varphi(\alpha)$ est le générateur de G' ; mais d'après les formules 2.3, on aurait $\sigma([S_1]) = \iota(\alpha, (\varphi))$; remarquer que d'après la formule de Lefschetz une variété dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}_2$ et qui est bordée par une sphère

est orientable. Or on peut vérifier que $(\varphi) \neq \iota(\alpha.(\varphi))$, par exemple parce que $C'(\varphi) \neq C'(\iota(\alpha.(\varphi)))$ (voir th. 4.1). Donc dans ce cas encore, on a $[S_0] = [S_1]$. Si $G' \cong G'' \cong \mathbb{Z}_2$, d'après le théorème III 1.4, on pourrait avoir

$$[S_1] = (-1)^{n_{\gamma.}} [S_0]$$

où n est la longueur de $\varphi(\gamma)$ dans $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_2$. D'après les formules 2.3, $\sigma([S_1]) = \iota^{n_{\gamma.}(\varphi)}$. Or l'égalité

$$\iota^{n_{\gamma.}(\varphi)} = (\varphi)$$

ne peut être satisfaite que pour $n = 0$ et γ trivial.

cqfd.

De même que la classe d'homotopie d'un plongement de S^2 ne détermine pas sa classe d'isotopie, de même elle ne détermine pas la classe d'isotopie de la décomposition libre qu'elle définit sur le groupe fondamental. Elle ne détermine que sa classe d'homotopie. On a le théorème suivant :

3.2 - Théorème :

Soient S_0, S_1 deux sphères de Kneser dans V , $\sigma([S_0]) = (\varphi_0)$ et $\sigma([S_1]) = (\varphi_1)$ les décompositions libres qu'elles définissent sur $G = \pi_1(V, x_0)$. Les sphères S_0 et S_1 sont homotopes si et seulement si (φ_0) et (φ_1) le sont (i.e. $H'((\varphi_0)) = H'((\varphi_1))$).

Démonstration. Elle repose sur le diagramme suivant, dont on vérifie la commutativité :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Plgt}^0(S^2, V) & \xrightarrow[\tilde{\Delta}]{\sigma} & \text{Sp}(G) \\
 \swarrow h & & \downarrow H' \\
 \pi_2(V, x_0) & & H_\infty^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2) \cong H^0(G; \mathcal{P}(G) / \mathcal{P}_F(G)) \\
 \downarrow h' & & \downarrow \delta \\
 \pi_2(V, x_0) \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\Delta \otimes \mathbb{Z}_2} & H_C^1(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(G; \mathcal{P}_F(G))
 \end{array}$$

Les deux isomorphismes indiqués existent d'après A III 2 ; ils sont explicités en A III 4. Ils dépendent du choix d'un point base y_0 dans le revêtement universel $p : \tilde{V} \rightarrow V$. La flèche $\Delta \otimes \mathbb{Z}_2$ est composé de l'homomorphisme de Hurewicz mod 2 $\pi_2(V, x_0) \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_2(\tilde{V}, y_0) \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2)$, suivi de l'isomorphisme de Poincaré mod 2. C'est donc un isomorphisme. Les flèches h et h' sont respectivement les flèches classe d'homotopie et classe d'homotopie modulo 2.

Définition de $\tilde{\Delta}$ et commutativité du diagramme. Soit S une sphère de Kneser et $\tilde{S}$ son relèvement orienté à partir de y_0 . Soit $\tilde{V}'$ la composante de $\tilde{V} - \tilde{S}$ qui se trouve du côté des normales positives, F' son intersection avec la fibre $F = p^{-1}(x_0)$. On peut choisir sur $\tilde{V}$ une structure de CW-complexe dont le 0-squelette soit F . Considérons alors la 0-cochaine $\mu \in C^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2)$ définie par

$$\begin{aligned}
 \mu(y) &= 1 & \text{si } y \in F', \\
 \mu(y) &= 0 & \text{si } y \in F - F'.
 \end{aligned}$$

Il est évident que le cobord de μ est à support compact ; donc μ représente un élément de $H_\infty^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2)$. Par définition $\tilde{\Delta}([S]) = [\mu]$. On vérifie que $\delta[\mu] = (\Delta \otimes \mathbb{Z}_2) h'([S])$. D'autre part, si $(\varphi) = \sigma([S])$ et si on identifie G à F par l'action de G à droite sur F ($g \in G \rightarrow y_0 \cdot g \in F$), on a $F' = C'(\varphi)$; par l'interprétation géométrique de l'isomorphisme

$$H_\infty^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2) \cong H^0(G; \mathcal{P}(G) / \mathcal{P}_F(G))$$

(voir A III 4 et A III 5), on achève de prouver la commutativité.

Condition suffisante. Si $H'((\varphi_0)) = H'((\varphi_1))$, on a $\tilde{\Delta}([S_0]) = \tilde{\Delta}([S_1])$, donc S_0 et S_1 sont homotopes modulo 2. Soient $\tilde{S}_0$ et $\tilde{S}_1$ leurs relèvements orientés dans $\tilde{V}$ à partir de y_0 ; on note $[\tilde{S}_0]$ et $[\tilde{S}_1]$ leurs classes d'homologie dans $H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z})$. Tout arc infini propre de $\tilde{V}$ est homotope à un arc qui les coupe en au plus un point. De tels arcs orientés forment un système de générateurs $\{\alpha_i, i \in I\}$ du groupe d'homologie localement finie $H_1^{LF}(\tilde{V}; \mathbb{Z})$. Donc, si on plonge $H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1^{LF}(\tilde{V}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$, la dualité

$$H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \otimes H_1^{LF}(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

étant donnée par l'intersection homologique, on a, pour tout $i \in J$, et $j = 0, 1$,

$$\langle [\tilde{S}_j], \alpha_i \rangle \in \{-1, 0, +1\}.$$

Puisque $[\tilde{S}_0] = [\tilde{S}_1] \bmod 2$, si $\langle [\tilde{S}_0], \alpha_i \rangle = 0$, on a aussi $\langle [\tilde{S}_1], \alpha_i \rangle = 0$. D'autre part, si $\langle [\tilde{S}_0], \alpha_i \rangle = +1$, c'est que le bout positif de α_i se trouve du côté des normales positives de $\tilde{S}_0$; puisque $\tilde{\Delta}([S_0]) = \tilde{\Delta}([S_1])$, le bout positif de α_i se trouve aussi du côté des normales positives de $\tilde{S}_1$, donc $\langle [\tilde{S}_1], \alpha_i \rangle = +1$. Finalement, pour tout $i \in I$, $\langle [\tilde{S}_0], \alpha_i \rangle = \langle [\tilde{S}_1], \alpha_i \rangle$ et $[\tilde{S}_0] = [\tilde{S}_1]$. Donc S_0 est homotope à S_1 .

Condition nécessaire. Si $h([S_0]) = h([S_1])$, on a $\delta H'((\varphi_0)) = \delta H'((\varphi_1))$. Or le noyau de δ a deux éléments représentés par la partie vide de G et par G lui-même. Donc

$$H'((\varphi_0)) = H'((\varphi_1))$$

$$\text{ou } H'((\varphi_0)) = H'((\varphi_1)) + [G].$$

Il est immédiat de voir que $H'(\iota(\varphi_1)) = H'((\varphi_1)) + [G]$. Donc, si (φ_0) et (φ_1) ne sont pas homotopes, c'est que (φ_0) est homotope à $\iota(\varphi_1) = \sigma(-[S_1])$. D'après la condition suffisante, dans ce cas $h([S_0]) = -h([S_1])$, c'est-à-

dire que $h([S_1])$ est un élément de torsion de $\pi_2(V, x_0)$. Mais, d'après le théorème de Specker [S2] (A III 6), ceci est absurde.

cqfd.

§4. Homotopie et isotopie pour les décompositions libres
d'un groupe quelconque.

(Les notations sont celles du paragraphe 2).

4.1 - Théorème :

Soient (G'_0, G''_0, φ_0) et (G'_1, G''_1, φ_1) deux décompositions libres homotopes d'un
groupe G . Trois cas se présentent :

1er cas : Si $G'_0, G''_0 \not\cong \mathbb{Z}_2$, alors $(\varphi_0) = (\varphi_1)$ (isotopie).

2e cas : Si $G'_0 \cong \mathbb{Z}_2$, $G''_0 \not\cong \mathbb{Z}_2$, alors $(\varphi_0) = (\varphi_1)$ ou $(\varphi_1) = \iota(\alpha.(\varphi_0))$
où α est le générateur de G'_0 .

3e cas : Si $G'_0 \cong G''_0 \cong \mathbb{Z}_2$, alors $(\varphi_1) = \iota^n(\gamma.(\varphi_0))$, où $\gamma \in G'_0 \star G''_0$ et
où n est la longueur d'un mot irréductible représentant γ . Ces
solutions sont toutes dans des classes d'isotopie distinctes.

Si G est le groupe fondamental d'une variété de dimension 3 fermée, que l'on peut de plus supposer satisfaisante à la conjecture de Poincaré, ce théorème n'est autre que le théorème III 1.4 via les théorèmes 3.1 et 3.2.

Démonstration. D'après [S5], la classe d'isotopie d'une décomposition libre (G', G'', φ) d'un groupe G est déterminée par la connaissance des quatre parties suivantes, formant une partition de $G - \{e\}$:

$AA = \{g \in G - \{e\} \mid \text{l'écriture irréductible de } \varphi(g) \text{ commence dans } G' \text{ et finit dans } G'\}$

$A^*A = \{ \quad \mid \quad \text{commence dans } G'' \text{ et finit dans } G' \}$

$AA^* = \{ \quad \mid \quad \quad \quad G' \quad \quad \quad G'' \}$

$A^*A^* = \{ \quad \mid \quad \quad \quad G'' \quad \quad \quad G'' \}$

Cette structure est appelée structure bipolaire (orientée) : X, Y, Z étant des lettres de l'alphabet ordonné $\{A, A^*\}$, sur lequel $*$ opère involutive-ment, on vérifie les axiomes suivants :

- i) si $g \in XY$, alors $g^{-1} \in YX$,
- ii) si $g_1 \in XY$, $g_2 \in Y^*Z$, alors $g_1 g_2 \in XZ$.

Dans notre cas, la structure bipolaire satisfait en plus à deux autres conditions :

- (iii) AA^* ne contient pas d'élément irréductible,
- (C) (iv) condition de finitude :

un mot cassé représentant g est une suite $(g_1, \dots, g_n)$ telle que $g_1 \dots g_n = g$ et que $g_i \in XY \Rightarrow g_{i+1} \in Y^*Z$. La condition de finitude signifie que, pour chaque $g \neq e$, la longueur des mots cassés représentant g est bornée ; si elle est 1, g est irréductible. Dans la suite on ne prendra que des mots cassés formés d'éléments eux-mêmes irréductibles. La condition de finitude assure que tout élément est représentable par un tel mot cassé.

L'ensemble G_A (resp. G_{A^*}) des éléments irréductibles de AA (resp. A^*A^*) auxquels on ajoute l'élément neutre forme un sous-groupe de G et $\varphi(G_A) = G'$, $\varphi(G_{A^*}) = G''$.

Remarques. 1) La partie $AA \cup AA^*$ n'est autre que la partie $C'(\varphi)$ dont la classe modulo les parties finies est $H'((\varphi))$ (voir 2.4).

2) La connaissance de $AA \cup AA^*$ détermine toute la structure bipolaire, donc la classe d'isotopie de la décomposition libre. En effet $AA \cup A^*A$ est connue par inversion et AA est l'intersection des deux parties précédentes. Les trois autres parties sont connues en prenant des différences convenables entre des parties déjà connues. La question est donc de savoir quelle différence il y a entre la connaissance de $AA \cup AA^*$ et celle de sa classe modulo

les parties finies.

Dans la suite, on note $M(X) = XX \cup XX^*$; c'est toujours une partie infinie de G . On a besoin du lemme suivant :

4.2 - Lemme :

Soit G un groupe muni d'une structure bipolaire vérifiant les conditions

(C). Trois cas se présentent :

1er cas : Si G_A et G_{A^*} sont distincts de $\mathbb{Z}_2$, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} g \notin XY &\Leftrightarrow M(X^*) \cap g.M(Y^*) && \text{est finie et} \\ & \left. \begin{aligned} M(X) \cap g.M(Y^*) \\ M(X^*) \cap g.M(Y) \\ M(X) \cap g.M(Y) \end{aligned} \right\} && \text{sont infinies.} \end{aligned}$$

2e cas : Si $G_A \cong \mathbb{Z}_2$ et $G_{A^*} \not\cong \mathbb{Z}_2$ (resp. vice versa), on a :

- pour $g \notin XY$, $g \notin G_A$ (resp. G_{A^*}), les mêmes propriétés d'intersection que dans le 1er cas,
- pour $g \in G_A$ (resp. $g \in G_{A^*}$),

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} M(A^*) \cap g.M(A^*) \\ M(A) \cap g.M(A) \end{aligned} \right\} && \text{finies} \\ & \left. \begin{aligned} M(A^*) \cap g.M(A) \\ M(A) \cap g.M(A^*) \end{aligned} \right\} && \text{infinies.} \end{aligned}$$

3e cas : Si $G_A \cong G_{A^*} \cong \mathbb{Z}_2$, on a

$$\begin{aligned} g \notin XY &\Leftrightarrow M(X^*) \cap g.M(Y^*) \\ & \left. \begin{aligned} M(X) \cap g.M(Y) \\ M(X) \cap g.M(Y^*) \\ M(X^*) \cap g.M(Y) \end{aligned} \right\} && \begin{aligned} &\text{finies} \\ & \\ &\text{infinies.} \end{aligned} \end{aligned}$$

Remarque. Dans le 2e cas, on a une caractérisation de AA^* , A^*A , A^*A^*

(resp. AA) et de $AA-G_A$ (resp. $A^*A^*-G_{A^*}$). Dans le 3e cas on a une caractérisation de $AA \cup A^*A^*$ et de $AA^* \cup A^*A$.

Preuve du lemme. C'est une manipulation des quatre axiomes.

1er cas : Il suffit évidemment de prouver $\Rightarrow$. Soit $\lambda \in M(Y^*)$; alors $g\lambda \in M(X)$, donc $g\lambda \notin M(X^*)$. Ainsi $M(X^*) \cap g.M(Y^*) = \emptyset$ et $g.M(Y^*) \subset M(X)$. De même $g^{-1}M(X^*) \subset M(Y)$. Enfin notons γ le dernier élément d'un mot cassé représentant $g; \gamma \in G_Y$. Puisque $G_Y \neq \mathbb{Z}_2$, il existe $\gamma' \in G_Y$ tel que $\gamma\gamma' \neq e$. Alors si $y \in M(Y)$ est représenté par un mot cassé commençant par γ' , $gy \in M(X)$. De tels éléments y sont en nombre infini.

2e cas : Si au contraire $G_Y \cong \mathbb{Z}_2$ et si γ est le générateur de G_Y , ce dernier raisonnement n'est plus correct. En particulier, si $g = \gamma$, on a $gM(Y) \subset M(Y^*)$. Mais si $g = g'\gamma$, on a $g' \in XY^*$ et on note ε la dernière lettre d'un mot cassé représentant $g'; \varepsilon \in G_{Y^*}$; puisque $G_{Y^*} \neq \mathbb{Z}_2$, il existe $\varepsilon' \in G_{Y^*}$ tel que $\varepsilon\varepsilon' \neq e$. Alors si $y \in M(Y)$ est représenté par un mot cassé commençant par $(\gamma, \varepsilon', \dots)$, $gy \in M(X)$. Il existe une infinité de tels y ; dans ce cas, de nouveau, $M(X) \cap g.M(Y)$ est infinie.

3e cas : Si $y \in M(Y)$ est représenté par un mot cassé plus long que celui représentant g , on a $gy \in M(X^*)$. $\diamond$

Fin de la démonstration du théorème 4.1. On voit dans l'énoncé de ce lemme que $M(A)$ n'intervient que par sa classe modulo les parties finies de G .

1) S'il n'existe aucun $g \in G$ tel que $M(A) \cap gM(A)$ et $M(A^*) \cap gM(A^*)$ soient finies, on est sûrement dans le cas 1 du lemme et la connaissance de $M(A)$ modulo les parties finies redonne toute la structure bipolaire.

2) S'il existe un unique $g_0 \in G$ tel que $M(A) \cap g_0M(A)$ et $M(A^*) \cap g_0M(A^*)$ soient finies, on est dans le 2e cas du lemme et les parties AA^* et A^*A sont déterminées par la classe de $M(A)$, ainsi que A^*A^* si on suppose que $g_0 \in G_A$.

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

Soit $\{B, B^*\}$ l'alphabet d'une autre structure bipolaire telle que $M(A) = M(B) \bmod \mathcal{P}_f(G)$. On vient de voir que $AA^* = BB^*$ et $A^*A = B^*B$.

a) Supposons que $G_B \cong \mathbb{Z}_2$; alors $G_{B^*} \not\cong \mathbb{Z}_2$ et d'après le lemme $A^*B^* = B^*B^*$; finalement les deux structures bipolaires coïncident.

b) Supposons que $G_{B^*} \cong \mathbb{Z}_2$. D'après le lemme, $A^*A^* = B^*B^* - G_{B^*}$, $AA - G_A = BB$ et finalement $G_A = G_{B^*}$. On a $M(A) = M(B) \bmod \mathcal{P}_f(G)$ mais $M(A) \neq M(B)$.

Soit α le générateur de G_A . Définissons une nouvelle structure bipolaire $\{C, C^*\}$:

$$\begin{aligned} g \in C^*C^* &\Leftrightarrow \alpha^{-1}g\alpha \in AA \\ g \in CC &\Leftrightarrow \alpha^{-1}g\alpha \in A^*A^* \\ g \in CC^* &\Leftrightarrow \alpha^{-1}g\alpha \in A^*A \\ g \in C^*C &\Leftrightarrow \alpha^{-1}g\alpha \in AA^* \end{aligned}$$

En particulier $G_{C^*} = G_{B^*} = G_A$ et $M(C) = M(B)$. D'après le a), la structure bipolaire $\{B, B^*\}$ coïncide avec la structure bipolaire $\{C, C^*\}$. Or si $\{A, A^*\}$ est la structure bipolaire de la décomposition libre (φ_0) et si $\{B, B^*\}$ est celle de (φ_1) , $\{C, C^*\}$ est celle de $\iota(\alpha.\varphi_0)$. Donc (φ_1) est isotope à $\iota(\alpha.\varphi_0)$, laquelle n'est pas isotope à (φ_0) parce que $BB \neq AA$.

3) S'il existe une infinité de $g \in G$ tels que $M(A) \cap g.M(A)$ et $M(A^*) \cap g.M(A^*)$ sont infinies, on est dans le 3e cas du lemme. La classe de $M(A)$ détermine les ensembles $AA \cup A^*A^*$ et $AA^* \cup A^*A$. En particulier AA^* est déterminé modulo $\mathcal{P}_f(G)$.

Soit $\{B, B^*\}$ une autre structure bipolaire telle que $M(A) = M(B) \bmod \mathcal{P}_f(G)$. Supposons qu'il existe $g \in AA^*$, $g \notin BB^*$; alors $g \in B^*B$ et pour tout n , $g^n \in AA^*$ et $g^n \notin BB^*$, ce qui contredit le fait que la classe de $M(A)$ détermine celle de AA^* . Donc AA^* et A^*A sont exactement déterminées par la classe de $M(A)$ comme dans le 2).

Notons α', α'' (resp. β', β'') les générateurs de G_A et G_{A^*} (resp. G_B et G_{B^*}). Puisque dans le groupe diédral infini, seuls les éléments dont l'écriture irréductible est de longueur impaire sont de carré nul, β' et β'' sont des conjugués de $x, y \in \{\alpha', \alpha''\}$. Dans ce qui suit la longueur est toujours prise par rapport aux générateurs α' et α'' .

Il est immédiat de voir que l'on ne peut avoir $\beta' \in A^*A^*$ et $\beta'' \in AA$ (si non $AA^* \neq BB^*$) et que, si $\beta' \in AA$ et $\beta'' \in A^*A^*$, alors $\alpha' = \beta'$ et $\alpha'' = \beta''$ (sinon les éléments de longueur plus petite que celle de β' et de β'' ne seraient pas engendrés par β' et β'').

Supposons donc pour fixer les idées que $\beta', \beta'' \in AA$. J'affirme que

$$\text{long } \beta' - \text{long } \beta'' = 2.$$

En effet si $\text{long } \beta' \leq \text{long } \beta''$, $\beta'\beta'' = e$ ou $\beta'\beta'' \in A^*A$ (impossible puisque $BB^* = AA^*$) ; si $\text{long } \beta' > \text{long } \beta'' + 2$, alors $\beta'\beta'' \in AA^*$ et l'on a $\text{long } \beta'\beta'' \geq 4$. Les éléments de longueur paire sont de la forme $(\beta'\beta'')^n$, $n \in \mathbb{Z}$, et ont donc tous une longueur supérieure à 4, ce qui est absurde.

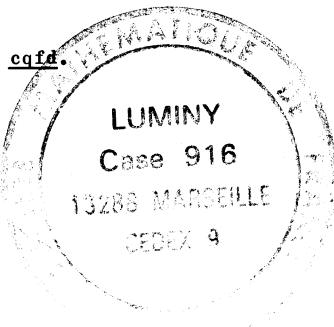
Ceci veut dire que deux cas seulement peuvent se présenter :

a) $\beta' = h\alpha'h^{-1}$, $\beta'' = h\alpha''h^{-1}$ où $h \in AA^*$, (long h paire)

ou

b) $\beta' = h\alpha''h^{-1}$, $\beta'' = h\alpha'h^{-1}$ où $h \in AA$, (long h impaire).

Si $\{A, A^*\}$ est la structure bipolaire de la décomposition libre (φ_0) et si $\{B, B^*\}$ est la structure bipolaire de la décomposition libre (φ_1) , dans le cas a), on a $(\varphi_1) = h.(\varphi_0)$ et, dans le cas b), on a $(\varphi_1) = i(h.(\varphi_0))$. Dans les deux cas si $h \neq e$, (φ_1) n'est pas isotope à (φ_0) puisque $AA \neq BB$.



TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

Chapitre V

SCINDEMENT D'UNE ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE LE LONG D'UNE 2-SPHÈRE

§ 1. Position du problème et énoncé des résultats.

1.1 - Le problème général du scindement d'une équivalence d'homotopie entre variétés est le suivant :

Soient $f : M^{n+1} \rightarrow N^{n+1}$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés fermées et Y^n une sous-variété fermée de codimension 1 dans N et à deux côtés. Existe-t-il une homotopie de f jusqu'à une application g telle que :

(Sc 1) g soit transversale sur Y (on pose $X = g^{-1}(Y)$),

(Sc 2) $g : X \rightarrow Y$ soit une équivalence d'homotopie,

(Sc 3) $g : M-X \rightarrow N-Y$ soit une équivalence d'homotopie ?

Si oui, on dit que l'équivalence d'homotopie f est scindable le long de Y et que g est scindée.

1.2 - Pour $n \geq 5$, S. Cappell a prouvé le théorème suivant [C3] :

On note N_1, N_2 les deux composantes de $N-Y$ si Y sépare et

$N_1 = N-Y, N_2 = \emptyset$ si Y ne sépare pas. On suppose que l'inclusion induit un monomorphisme $\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(N)$ et que, si $g \in \pi_1(N)$ et $g^2 \in \pi_1(Y)$, on a $g \in \pi_1(Y)$. Alors f est scindable le long de Y si et seulement si la torsion de Whitehead $\tau(f)$ est dans l'image du morphisme naturel

$$wh_1(\pi_1(N_1)) \oplus wh_1(\pi_1(N_2)) \rightarrow wh_1(\pi_1(N)) .$$

En particulier si Y est une n -sphère et si $\pi_1(N)$ n'a pas d'élément d'ordre 2, toute équivalence d'homotopie est scindable le long de Y .

Ce dernier résultat a pour application le calcul des groupes de Wall réduits $\tilde{L}_n(G_1 * G_2)$, où G_1 et G_2 sont deux groupes de présentation fi-

nie n'admettant aucun élément d'ordre 2 :

$$\tilde{L}_n(G_1 * G_2) = \tilde{L}_n(G_1) \oplus \tilde{L}_n(G_2).$$

En revanche Cappell [C4] a prouvé que ce résultat est faux pour $G_1 = \mathbb{Z}_2$ et G_2 cyclique. Dans la géométrie, il a prouvé le théorème suivant :

Soit $N = N_1 \cup_Y N_2$, où Y est une 2k-sphère, $\pi_1(N_1) \neq 1$, $\pi_1(N_2) \neq 1$. Soit $\omega : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ l'homomorphisme d'orientation. On suppose qu'il existe $g \in \pi_1(N)$, tel que $g^2 = 1$ et $\omega(g) = (-1)^k$. Alors il existe une variété M et une équivalence d'homotopie $f : M \rightarrow N$ qui n'est pas scindable le long de Y.

Pour $n = 2$, nous avons déjà prouvé un théorème de scindement (II 2.3), dans le cas où M et N sont $\mathbb{P}^2$ -irréductibles et où Y est une surface incompressible (voir aussi Feustel [FI]).

A l'opposé de ce cas, toujours pour $n = 2$, il y a le problème du scindement le long d'une sphère. G. A. Swarup [S10] a conjecturé que ce problème est toujours soluble. Or H. Hendriks [H7] a trouvé des contre-exemples, qui sont analogues à ceux obtenus par Cappell en grande dimension et qui montrent la nécessité de l'hypothèse restrictive, M $\mathbb{P}^2$ -insécable (1.3).

1.3 - Définition :

On dit que M est $\mathbb{P}^2$ -insécable s'il n'existe aucun plongement de $\mathbb{P}^2$ dans M à fibré normal trivial^(*).

Dans l'appendice I on trouvera quelques propriétés élémentaires des variétés $\mathbb{P}^2$ -insécables. D'autre part la proposition suivante donne un critère algébrique pour la $\mathbb{P}^2$ -insécabilité.

(*) Cette terminologie imagée m'a été suggérée par B. Teissier.

Proposition (Hirsch-Smale [H4]^(*)) :

M est $\mathbb{P}^2$ -insécable si et seulement si $\pi_1(M)$ ne contient aucun élément α , tel que $\alpha^2 = 1$ et $\omega(\alpha) = -1$, où $\omega : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ est l'homomorphisme d'orientation.

Corollaire :

La propriété pour une variété de dimension 3 d'être $\mathbb{P}^2$ -insécable est un invariant de son type d'homotopie.

1.4 - Théorème de scindement (Hendriks-Laudenbach [H8]^(**)) :

Soient M et N deux variétés fermées de dimension 3 et S une sphère plongée dans N. On suppose que M (ou N) est $\mathbb{P}^2$ -insécable. Alors toute équivalence d'homotopie de M dans N est scindable le long de S.

Remarques. 1) Si S est homotope à zéro, la $\mathbb{P}^2$ -insécabilité de M n'a pas besoin d'être supposée (2.2).

2) Le cas des variétés à bord est écarté ici. Il faut observer que la conjecture de Kneser (réalisation géométrique d'une décomposition libre du groupe fondamental : existence et unicité - voir chap. IV -) soulève certaines difficultés.

1.5 - Applications :

Ce théorème, le théorème d'isotopie des sphères (III 1.3), les théorèmes (*) Cet article a la réputation d'être faux. Cependant son théorème 1.2, cité ici, est vrai.

(**) [H8] est une annonce de la démonstration exposée ici. [H8 bis] contient une démonstration détaillée fondée sur une augmentation différente ; elle réduit la géométrie au minimum et exploite un résultat intéressant de topologie algébrique sur le groupe de cohomologie à coefficients locaux $H^2(M; \pi_2(M))$.

mes de Waldhausen (II 2.1 et II 6.1) et un résultat de Hendriks sur les difféomorphismes de rotation parallèlement à un système de sphères [H6] permettent d'obtenir la meilleure réponse jusqu'ici connue aux problèmes I et II posés dans l'introduction :

Théorème :

Soient M et N deux variétés fermées de dimension 3. On suppose que N s'écrit comme somme connexe

$$N = N_0 \# N_1 \# \dots \# N_q$$

où N_1 est soit un fibré sur S^1 de fibre S^2 soit une variété suffisamment grande $\mathbb{P}^2$ -irréductible (II 1). On suppose que M satisfait à la conjecture de Poincaré (app. I). Alors toute équivalence d'homotopie de M dans N est homotope à un difféomorphisme, unique à isotopie près.

Je renvoie à l'introduction pour les commentaires concernant ce théorème. La suite du chapitre est découpée de la façon suivante : le paragraphe 2 contient quelques propositions élémentaires qui réduisent le théorème 1.4 à un théorème de modification d'une surface image réciproque ; une esquisse de démonstration de celui-ci est donnée au paragraphe 3. Au paragraphe 4, j'indique l'idée du théorème 1.5 sans toutefois exposer les calculs (géométriques) faits par Hendriks [H6] et nécessaires pour l'unicité : ils permettent de savoir que des difféomorphismes de rotation parallèlement à certains systèmes de sphères ne sont pas homotopes à l'identité (voir app. II).

§ 2. Caractérisation de scindement.

Sauf mention contraire, toutes les variétés sont fermées et de dimension 3.

2.1 - Proposition :

Une équivalence d'homotopie $f : M \rightarrow N$, transversale sur une sphère S de

N, est scindée le long de S si et seulement si $f^{-1}(S)$ est une sphère, ce qui, pour des questions de degré, revient aussi à dire que $f : f^{-1}(S) \rightarrow S$ est une équivalence d'homotopie.

Preuve. Démontrons simplement que la condition est suffisante.

a) Soient x_0 un point base de $M - f^{-1}(S)$ et $y_0 = f(x_0)$. J'affirme que $f_{\#} : \pi_1(M - f^{-1}(S), x_0) \rightarrow \pi_1(N - S, y_0)$ est un isomorphisme. L'injectivité est évidente car les applications naturelles

$$\pi_1(M - f^{-1}(S), x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$$

sont injectives. Pour la surjectivité, considérons un lacet ω de $(N - S, y_0)$; il existe un lacet γ de (M, x_0) tel que $f(\gamma)$ soit homotope modulo le point base à ω . On suppose que $\gamma \cap f^{-1}(S)$ contient le moins de points possible; il s'agit de prouver que $\gamma \cap f^{-1}(S) = \emptyset$. Si cette intersection n'est pas vide, il existe, d'après le théorème de structure dans un produit libre [W7], un arc α de γ , d'extrémités dans $f^{-1}(S)$, tel que $f(\alpha)$ représente l'élément trivial de $\pi_1(N, S)$. En joignant convenablement les extrémités de α au point base x_0 , on forme un lacet α' , contenant l'arc α , qui permet de décomposer γ à homotopie près en $\gamma' \star \alpha' \star \gamma''$, où $f_{\#}(\alpha')$ est trivial et où $\gamma' \star \gamma''$ possède moins de points d'intersection avec la sphère $f^{-1}(S)$. L'injectivité de $f_{\#}$ implique que α' est homotope à zéro donc que $f(\gamma' \star \gamma'')$ est homotope à ω , ce qui contredit l'hypothèse de minimalité faite sur $\text{card } \gamma \cap f^{-1}(S)$.

b) Notons $\tilde{M} = M - U(f^{-1}(S))$ et $\tilde{N} = N - U(S)$, où U désigne ici l'intérieur d'un voisinage tubulaire. On a donc $f : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ qui est une équivalence d'homotopie sur le bord et qui induit un isomorphisme des groupes fondamentaux. Les variétés source et but sont bordées par des sphères; en y attachant des boules, on construit des variétés fermées $\hat{M}$ et $\hat{N}$ et un prolongement de f

$$\hat{f} : \hat{M} \rightarrow \hat{N}$$

qui est de degré ± 1 et qui induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. D'après A III 3, $\hat{f}$ est une équivalence d'homotopie. Par un calcul homologique au niveau des revêtements universels, on en déduit que $f : \bar{M} \rightarrow \bar{N}$ est aussi une équivalence d'homotopie. D'après un principe de recollement d'équivalences d'homotopie [S11], on prouve aussi que $f : (\bar{M}, \partial\bar{M}) \rightarrow (\bar{N}, \partial\bar{N})$ est une équivalence d'homotopie propre. $\langle \rangle$

2.2 - Proposition :

Toute équivalence d'homotopie $f : M \rightarrow N$ est scindable le long d'une sphère S homotope à zéro dans N .

Preuve. S est le bord d'une variété contractile $W \subset N$ (A I 1). Soit B une boule intérieure à W . On peut toujours supposer que $f : f^{-1}(B) \rightarrow B$ est un isomorphisme. Puisque $W - \text{int } B$ est un h -cobordisme, il est facile de construire une application $g : N \rightarrow N$, homotope à l'identité, transversale sur S et telle que $g^{-1}(S) = \partial B$. Alors $gf : M \rightarrow N$ est scindée le long de S . $\langle \rangle$

2.3 - Proposition :

Soient N un fibré sur S^1 de fibre S^2 , S une fibre de N et $f : M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie. Alors f est scindable le long de S .

Preuve. Si U est un voisinage tubulaire fermé de S dans N , on a $\pi_1(N - \overset{0}{U}, \partial U) = 0$. Par application du "Loop theorem" et par chirurgies plongées d'indice 2 sur f (voir ch. I §2), on peut rendre 1-connexes toutes les composantes de $f^{-1}(S)$. Ensuite par le "binding tie" (II 3.4), on rend $f^{-1}(S)$ connexe c'est-à-dire réduit à une sphère. La conclusion est alors donnée par la proposition 2.1. $\langle \rangle$

2.4 - Proposition :

Soit $f : M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie scindable le long d'une sphère

S. Soit B une boule de N-S. On suppose que f est scindée le long de ∂B . On note $M' = M - \text{int } f^{-1}(B)$, $N' = N - \text{int } B$, $f' : M' \rightarrow N'$ la restriction de f. Alors f' est scindable le long de S par une homotopie constante sur $\partial M'$.

Preuve (Hendriks). Soit $h : M \times [0,1] \rightarrow N$ une homotopie de scindement de f. Soit x_0 le centre de la boule B. Tout en conservant les propriétés de scindement, on peut, par un procédé de Whitney, supposer que $h^{-1}(x_0) \cap M \times \{i\}$ est réduit à un point pour $i = 0,1$. Alors, génériquement $h^{-1}(x_0)$ est constitué d'un arc α_0 , ayant une extrémité dans $M \times \{0\}$, et de courbes fermées $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, contenues dans $M \times]0,1[$. Il n'y a aucune obstruction à réaliser par chirurgie plongée sur h la somme connexe de α_0 avec chacune des courbes fermées $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. On se ramène ainsi au cas où $\alpha_0 = h^{-1}(x_0)$. Cet arc est isotope à l'arc vertical $x_0 \times [0,1]$. Grâce à un nouveau paramétrage de $M \times [0,1]$, on peut supposer que $h^{-1}(B) = f^{-1}(B) \times [0,1]$ et que h est l'homotopie triviale sur $f^{-1}(B)$. Alors $h|_{M' \times [0,1]}$ est une homotopie de scindement de f', triviale sur le bord. $\langle \rangle$

2.5 - Application à la démonstration du théorème 1.4.

Soient $f : M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie et S une sphère dans N.

- Si S est homotope à zéro, f est scindable le long de S d'après la proposition 2.2.

- Si S ne sépare pas, il existe une sphère $\Sigma = \partial W$, où W est une sous-variété de N telle que :

- a) $\hat{W} = D^3 \cup_S W$ est fibré sur S^1 ,
- b) S est une fibre de $\hat{W}$.

Si f est scindée le long de Σ , alors, d'après 2.3 et 2.4, f est scindable le long de S, par une homotopie à travers les applications scindées le long de Σ .

Le seul cas à traiter est donc celui où S n'est pas homotope à zéro et sépare N en deux composantes non contractiles. D'après 2.1 celui-ci résulte de (3.1).

§ 3. Démonstration du théorème de scindement.

3.1 - Proposition :

Soit $f : M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie ; soit S une sphère plongée dans N , non homotope à zéro et séparant N en deux composantes :

$N = N_1 \cup_S N_2$. Alors f est homotope à une application g transversale sur S telles que $g^{-1}(S)$ soit une sphère.

Démonstration : Fixons des points base $x_0 \in M$, $y_0 = f(x_0) \in S \subset N$ et supposons que f soit transversale sur y_0 . On oriente S transversalement pour que les normales positives rentrent dans N_1 et on choisit une orientation de N en y_0 ; ainsi S est orientée et représente un élément $[S] \in \pi_2(N, y_0)$. De plus, par le théorème de Van Kampen, elle détermine une décomposition libre (φ) du groupe fondamental (voir IV § 2) :

$$(\varphi) = (\pi_1(N_1, y_0), \pi_1(N_2, y_0), \varphi).$$

Alors $\pi_1(M, x_0)$ est muni de la décomposition libre

$$(\pi_1(N_1, y_0), \pi_1(N_2, y_0), \varphi_{\#}).$$

D'après le théorème de Kneser-Stallings (voir IV § 1), cette dernière est réalisable géométriquement, c'est-à-dire isotope (IV 2.1) à

$$(\psi) = (\pi_1(M_1, x_0), \pi_1(M_2, x_0), \psi)$$

où $M = M_1 \cup M_2$, où $R = M_1 \cap M_2$ est une sphère contenant x_0 , transversalement orientée, les normales positives rentrant dans M_1 , et où ψ est l'isomorphisme de Van Kampen. Par transversalité de f sur y_0 , on trans-

porte en x_0 l'orientation locale de N en y_0 ; donc R est orientée et représente un élément $[R] \in \pi_2(M, x_0)$.

Affirmation 1 :

Dans $\pi_2(N, y_0)$, on a l'égalité

$$f_{\#, 2}([R]) = [S] .$$

Autrement dit, après une homotopie convenable, on peut supposer que $f|_R$ est un isomorphisme sur S de degré $+1$.

Preuve. Pour les choix d'orientation indiqués plus haut, il existe d'après A III 3 des isomorphismes naturels Δ_M et Δ_N rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(M, x_0) & \xrightarrow[\cong]{\Delta_M} & H^1(\pi_1(M, x_0); \mathbb{Z}[\pi_1(M, x_0)]) \\ f_{\#, 2} \downarrow & & \uparrow f_{\#}^* \\ \pi_2(N, y_0) & \xrightarrow[\cong]{\Delta_N} & H^1(\pi_1(N, y_0); \mathbb{Z}[\pi_1(N, y_0)]) \end{array}$$

De plus, $\Delta_M([R])$ et $\Delta_N([S])$ sont des classes $H(\langle \Psi \rangle)$ et $H(\langle \varphi \rangle)$ qui ne dépendent que des décompositions (Ψ) et (φ) des groupes fondamentaux respectifs (voir A III 5 et IV 2.4). Or, par construction même de (Ψ) on a

$$H(\langle \Psi \rangle) = f_{\#}^*(H(\langle \varphi \rangle)) .$$

Donc

$$f_{\#, 2}([R]) = [S] . \diamond$$

3.2 - Dans la suite, on décrit certaines modifications homotopiques de f . On ne modifie pas le nom de l'application, mais à chaque étape on suppose que f possède les propriétés dont on l'a munie dans les étapes précédentes. Ici on part avec $f : M \rightarrow N$ transversale sur S , telle que $f|_R$ soit un isomorphisme sur S . On note T une composante de $f^{-1}(S)$ distincte de R ,

Puisque f induit un isomorphisme en homologie et que S sépare N , on en déduit que T sépare M et on note $V(T)$ la sous-variété de M bordée par T et ne contenant pas R .

Si, dans $\text{int } M_i$ ($i = 1, 2$), T et T' sont deux composantes de $f^{-1}(S)$ jointes par un arc γ , tel que $\text{int } \gamma \cap f^{-1}(S) = \emptyset$ et que $f(\gamma)$ soit trivial dans $\pi_1(N, S)$, alors il existe une homotopie de f , à support dans un voisinage de γ , qui réalise la somme connexe de T et de T' . Si de telles opérations ne sont plus possibles, on dira que $f^{-1}(S)$ est réduit et, dans ce cas, on peut affirmer ce qui suit :

Affirmation 2 :

1) $f_{\#}(\pi_1(V(T)))$ est trivial, donc l'inclusion $V(T) \hookrightarrow M_i$ induit la flèche nulle sur le groupe fondamental.

2) $f|_T : T \rightarrow S$ est de degré 0 ; autrement dit on peut supposer pour la suite que $f(T) = \{y_0\}$.

Preuve. Supposons par exemple $T \subset M_1$.

1) Soit λ un arc joignant x_0 à un point $x_1 \in T$, avec $f(x_1) = y_0$. On choisit λ en position générale par rapport à $f^{-1}(S)$ de sorte qu'il coupe chaque composante au plus une fois. Soit ω un lacet de $V(T)$ en x_1 tel que $(\omega - x_1) \cap f^{-1}(S) = \emptyset$. Considérons le lacet de M_1 en x_0 $\lambda \omega \lambda^{-1}$. Par construction de la décomposition libre (Ψ) , on a $f_{\#}([\lambda \omega \lambda^{-1}]) \in \pi_1(N_1, y_0)$.

a) Supposons $\text{int } \lambda \cap f^{-1}(S) = \emptyset$. Alors $f_{\#}([\omega]) \in \pi_1(N_2, y_0)$. Ce doit être l'élément trivial pour que son conjugué par $[f(\lambda)]$ appartienne à $\pi_1(N_1, y_0)$.

b) $\text{int } \lambda \cap f^{-1}(S) \neq \emptyset$. Comme $f^{-1}(S)$ est réduit, on peut affirmer que $[f(\lambda)]$ n'est pas trivial et que, si la dernière lettre de son écriture irréductible appartient à $\pi_1(N_j, y_0)$, alors $f_{\#}([\omega]) \in \pi_1(N_j, y_0)$ avec $j' \neq j$. De nouveau si $f_{\#}([\omega])$ est non trivial, on ne peut avoir $f_{\#}([\lambda \omega \lambda^{-1}]) \in \pi_1(N_1, y_0)$.

Ainsi, U étant l'une quelconque des composantes de $V(T) - f^{-1}(S)$, le groupe $f_{\#}(\pi_1(U))$ est trivial. La conclusion vient alors de ce que $\pi_1(V(T))$ est obtenu par amalgamation de tous les $\pi_1(U)$, pour $U \subset V(T)$.

2) On considère les revêtements universels $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$ de M et de N . Les relèvements de T dans $\tilde{M}$ bordent des sous-variétés compactes ; ceux de S dans $\tilde{N}$ n'en bordent pas. Ceci implique le 2). $\Leftarrow$

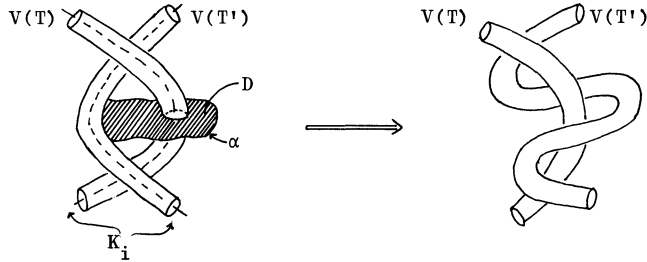
Considérons une anse d'indice 1 dans une décomposition en anses de $V(T)$ à partir de T ; elle définit une chirurgie plongée d'indice 1 sur T ; l'obstruction à la réaliser par une homotopie de f est nulle d'après l'affirmation 2.

Conséquence :

On peut modifier f par une homotopie à support dans $M-R$ jusqu'à ce que, pour toute composante T de $f^{-1}(S)$ distincte de R , $V(T)$ soit un bretzel ($\cong D^3 +$ anses d'indice 1) homotopiquement trivial dans M .

3.3 - L'étape suivante consiste à placer tous ces bretzels dans deux boules l'une $B_1 \subset M_1$, l'autre $B_2 \subset M_2$. Il existe des complexes de dimension 1 $K_1 \subset \text{int} M_1$, $K_2 \subset \text{int} M_2$, tels que, pour $i = 1, 2$, $\bigcup_{T \subset M_i} V(T)$ se rétracte par déformation sur K_i . D'après ce qui précède, il existe dans M_i une homotopie de $K_i \hookrightarrow M_i$ jusqu'à $K_i \rightarrow B_i$. Génériquement les seuls accidents de cette homotopie sont les croisements de deux branches ; soit k_i le nombre minimal de ces accidents ; k_i est nul si et seulement si il existe une isotopie de M_i qui pousse $\bigcup_{T \subset M_i} V(T)$ dans la boule B_i .

Chaque composante de K_i est l'âme d'un bretzel maximal. L'homotopie de K_i se prolonge en une homotopie régulière des bretzels maximaux, dont les seuls accidents "élémentaires" sont du type représenté sur la figure 3.3.1 :



(Eventuellement, $V(T) = V(T')$; $V(T)$ et $V(T')$ sont maximaux mais contiennent peut-être d'autres composantes de $f^{-1}(S)$ en leur intérieur.)

figure 3.3.1

L'homotopie régulière élémentaire représentée ci-dessus est bien définie à isotopie près par le disque à bord anguleux D ; son bord est formé d'un arc dans T' et de l'arc α ; d'autre part il coupe $V(T)$ suivant un disque méridien, c'est-à-dire un disque que la rétraction sur K_i envoie sur un point.

Je ne connais pas d'homotopie de f qui réalise cette modification de l'image réciproque ; mais Hendriks a pu en trouver une qui la réalise, quitte à insérer d'éventuelles composantes parasites ; on s'assurera que, malgré ces parasites, on aura progressé dans la tentative de placer les bretzels $V(T)$ dans des boules.

a) Supposons que $\text{int}V(T') \cap f^{-1}(S) = \emptyset$. L'homotopie choisie pour f réalise successivement deux chirurgies plongées, l'une d'indice 1 effectuée sur T' , l'autre d'indice 2 effectuée sur le résultat $\hat{T}'$ de la précédente. Elles sont représentées sur la figure 3.3.2.

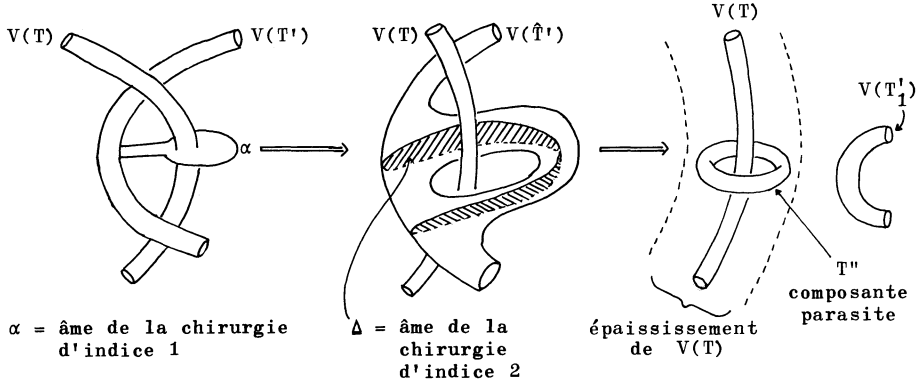


figure 3.3.2

Explication. 1) Le chemin singulier $f(\alpha)$ représente l'élément trivial de $\pi_1(N, S)$, donc la première chirurgie est bien réalisable par une homotopie de f . Notons $\hat{T}'$ et $\hat{f}$ le résultat de la modification de T et de f .

2) Soit β l'arc de $D \cap \hat{T}'$ parallèle à α ; notons Δ' et Δ'' les deux disques méridiens de $V(T')$ contenant les deux extrémités de β . Les disques Δ' et Δ'' , considérés comme méridiens de $V(\hat{T}')$ sont reliés par l'arc β de $\hat{T}'$. Alors le disque

$$\Delta = \Delta' \#_{\beta} \Delta''$$

est bien défini à isotopie près comme disque proprement plongé dans $V(\hat{T}')$. On vérifie que $\hat{f}(\Delta)$ représente l'élément trivial de $\pi_2(N, S)$. Donc la chirurgie d'indice 2 définie par Δ est réalisable par une homotopie de $\hat{f}$. Le résultat en est une application f_1 telle que $f_1^{-1}(S)$ diffère de $f^{-1}(S)$ par le changement de T' en $T'_1 \cup T''$; la surface T'_1 est par rapport à T dans la position recherchée (celle de la figure 3.3.1); le tore T'' est un parasite qui est le prix de l'opération. Mais l'âme de $V(T'')$ est isotope à un méridien de T et est contenu dans un épaississement de $V(T)$ qui

ne rencontre pas les autres bretzels.

Finalement si K'_1 désigne l'âme du nouveau système de bretzels maximaux, on a $\text{card } \pi_0(K'_1) = \text{card } \pi_0(K_1) + 1$ mais $k'_1 = k_1 - 1$; autrement dit, bien qu'on ait augmenté le nombre de composantes de K_1 , moins de croisements sont nécessaires pour le placer dans une boule.

b) $\text{int } V(T') \cap f^{-1}(S) \neq \emptyset$. La chirurgie d'indice 1 définie par l'arc α est toujours possible et on commence par la faire. Mais Δ' et Δ'' recoupent d'autres bretzels intérieurs à $V(T')$; donc $\Delta = \Delta' \#_{\beta} \Delta''$ ne peut plus servir d'âme à une chirurgie d'indice 2. Alors on réutilise α pour faire une chirurgie d'indice 1 sur une des composantes de $\hat{f}^{-1}(S)$, intérieure à $V(\hat{T}')$, qui découpe sur Δ' une courbe maximale. On effectue, dans un ordre convenable, la même modification (chirurgie d'indice 1), sur tous les bretzels intérieurs à $V(T')$, chacun étant compté autant de fois que le nombre de ses courbes d'intersections avec Δ' . Après cela, on peut faire les chirurgies d'indices 2, dont la dernière est la chirurgie par Δ . A la fin, plusieurs tores parasites autres que T'' sont apparus. Ils sont tous intérieurs à $V(T'')$. La figure 3.3.3 donne un exemple de cette suite d'opérations. La conclusion est exactement la même qu'en a). Nous avons donc esquissé la démonstration du lemme suivant :

Lemme :

Soient $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$ une équivalence d'homotopie et S une sphère dans N non homotope à zéro, contenant y_0 et telle que $N = N_1 \cup_S N_2$.

Après une homotopie de f , on peut arriver à la situation suivante :

- 1) $M = M_1 \cup_R M_2$ où $f|_R : R \rightarrow S$ est un isomorphisme.
- 2) Pour $i = 1, 2$, $f^{-1}(S) \cap \text{int } M_i$ est contenu dans une boule B_i .
- 3) Pour chaque composante T de $f^{-1}(S)$, distincte de R ,

$f(T) = \{y_0\}$.

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

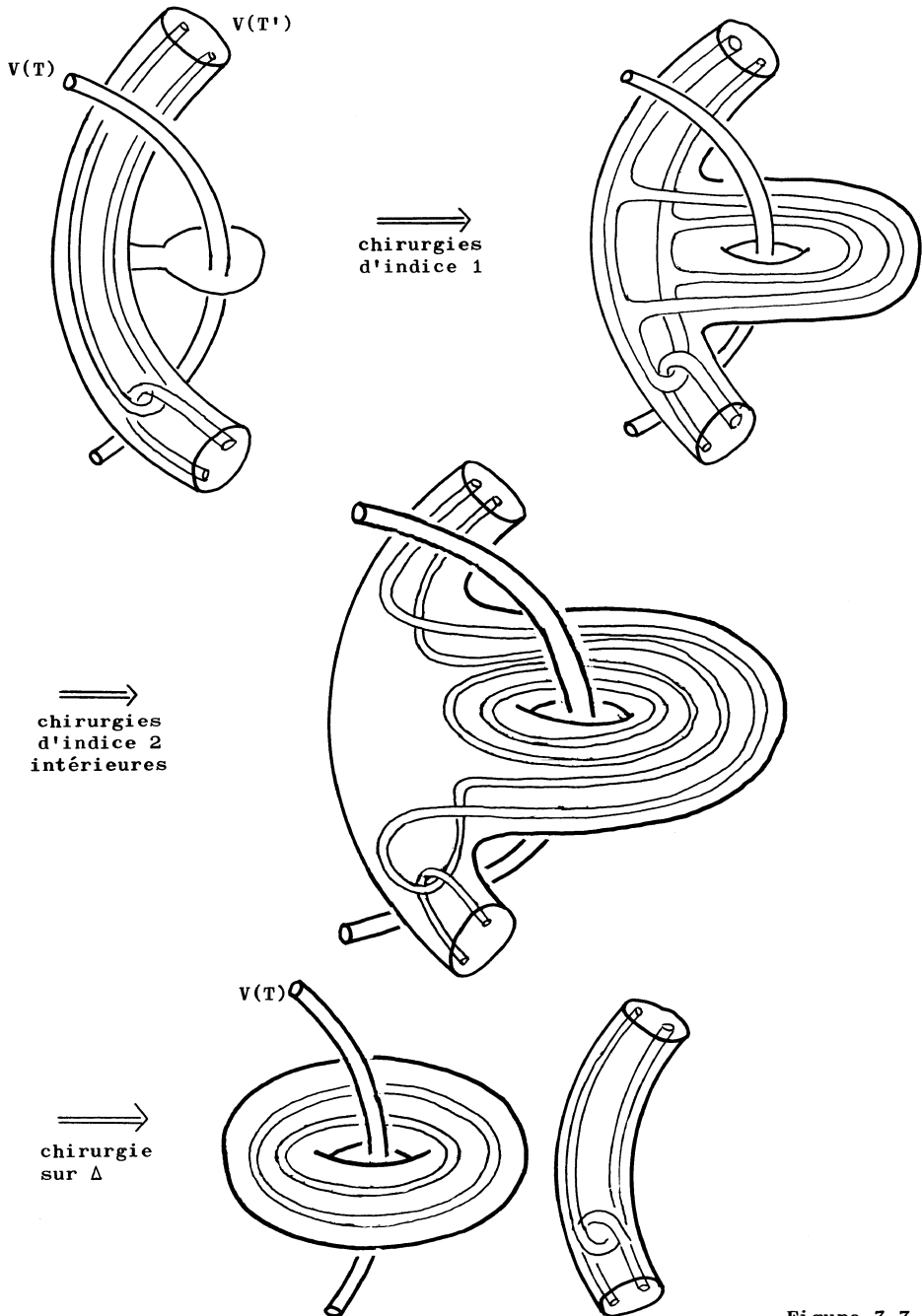


Figure 3.3.3

Affirmation 3 :

$f|_{\partial B_i} : \partial B_i \rightarrow N_i$ est homotope à zéro.

Preuve. Construisons $g : (M, M_1, M_2) \rightarrow (N, N_1, N_2)$ de la façon suivante : on pose, pour toute composante T de $f^{-1}(S)$ distincte de R , $g(V(T)) = \{y_0\}$ et $g = f$ sur le complémentaire. En particulier $g|_{\partial B_i} = f|_{\partial B_i}$. Mais $g(B_i) \subset N_i$. $\diamond$

3.4 - Pour la suite on supposera que f vérifie les conclusions du lemme précédent et que $f(\partial B_i)$ est un point $y_i \in N_i$. Donc $f|_{B_i} : (B_i, \partial B_i) \rightarrow (N, y_i)$ représente un élément de $\pi_3(N, y_i)$. Puisque $\pi_2(N, y_i)$ est infini, le revêtement universel $\tilde{N}$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension 2 $\bigvee_{j \in J} S_j$, où J est un ensemble ordonné d'indices. Rappelons le théorème de Hilton [H9]. L'ensemble des classes d'homotopie de $\text{Hopf}(S_j)$, $j \in J$, et des produits de Whitehead $[S_j, S_{j'}]$, $j, j' \in J$, $j < j'$, constitue une base pour $\pi_3(\bigvee_{j \in J} S_j)$, chacune des sphères du bouquet étant supposée munie d'un paramétrage pointé.

Il n'est pas difficile d'en déduire ici qu'il existe dans N une famille de sphères singulières, paramétrées et pointées, (S_α, y_α) , $\alpha \in A$, et d'arcs γ_α joignant le point base y_i à y_α , transversaux à S , tels que

1) pour tout $\alpha \in A$, $S_\alpha \cap S = \emptyset$.

2) Les classes d'homotopie de $\gamma_\alpha \text{Hopf}(S_\alpha)$, $\alpha \in A$, et de $\gamma_\alpha [S_\alpha, \gamma_\alpha^{-1} \gamma_\beta S_\beta]$, $\alpha, \beta \in A$, constituent un système de générateurs pour $\pi_3(N, y_i)$.

Remarques. La condition 1) oblige à prendre pour A un ensemble d'indices plus gros que J . Chaque sphère S_j qui rencontre S est regardée comme "somme" de sphères ne coupant pas S . Donc l'ensemble des éléments décrits au 2) n'est pas une base.

Un représentant naturel $\mu_\alpha : (D^3, \partial D^3) \rightarrow (N, Y_i)$ de $\gamma_\alpha \text{Hopf}(S_\alpha)$ est construit comme suit : $\mu_\alpha|_{(\frac{1}{2}D^3, \partial\frac{1}{2}D^3)} = \text{Hopf}(S_\alpha, Y_\alpha)$ et les rayons de la couronne $D^3 - \text{int } \frac{1}{2}D^3$ sont tous envoyés sur γ_α de la même manière. Ainsi $\mu_\alpha^{-1}(S)$ est formé de sphères concentriques, chacune correspondant à un point d'intersection de γ_α avec S .

Un représentant naturel $\mu_{\alpha,\beta} : (D^3, \partial D^3) \rightarrow (N, Y_i)$ de $\gamma_\alpha[S_\alpha, \gamma_\alpha^{-1}\gamma_\beta S_\beta]$ est construit comme suit : d'une part, sur la couronne $D^3 - \text{int } \frac{1}{2}D^3$, $\mu_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha$; en particulier, dans cette couronne la préimage de S est formée de sphères concentriques. D'autre part, on décompose $\frac{1}{2}D^3 = X \cup Y$, où $X \cong Y \cong D^2 \times S^1$ et $X \cap Y \cong S^1 \times S^1 - \text{int } D^2$; soient

$$\psi_X : (X, \partial X) \rightarrow (D^2, S^1) \quad \text{et} \quad \psi_Y : (Y, \partial Y) \rightarrow (D^2, S^1)$$

les trivialisations "canoniques" de ces deux tores pleins, c'est-à-dire que les préimages de deux points distincts de D^2 par ψ_X (resp. par ψ_Y) ont un nombre d'enlacement nul dans D^3 . On définit

$$\mu_{\alpha,\beta}|_{X \cap Y} = \{y_\alpha\},$$

$$\mu_{\alpha,\beta}|_X = S_\alpha \circ \psi_X,$$

$$\mu_{\alpha,\beta}|_Y = (\gamma_\alpha^{-1} \gamma_\beta S_\beta) \circ \psi_Y.$$

On voit que $X \cap \mu_{\alpha,\beta}^{-1}(S) = \emptyset$ et que $Y \cap \mu_{\alpha,\beta}^{-1}(S)$ est une union de tores parallèles et non noués (*) dans D^3 ; il y en a autant que de points d'intersection de $\gamma_\alpha^{-1} \gamma_\beta$ avec S .

Conclusion : Forme simple pour l'application f .

Après une homotopie convenable de $f : M \rightarrow N$, on peut supposer que f a une FORME SIMPLE, c'est-à-dire que

(*) Un tore est non noué dans D^3 s'il y borde un domaine isomorphe à $D^2 \times S^1$ dont l'âme est non nouée. Deux tores disjoints sont parallèles et ils y bordent un domaine isomorphe à $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$.

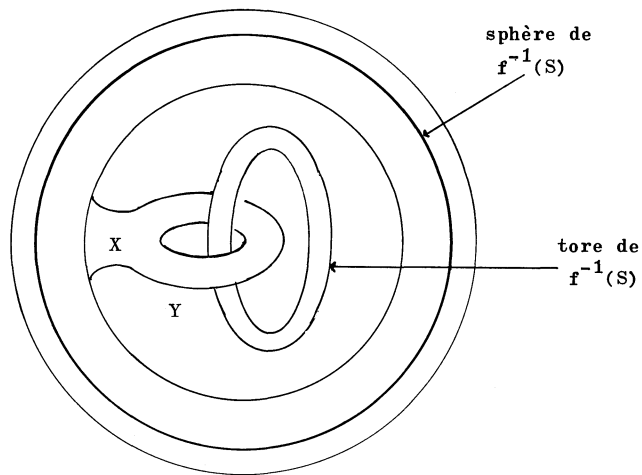
1) $f|_{R:R \rightarrow S}$ est un isomorphisme et $f^{-1}(S) - R$ est contenu dans une réunion de boules d'intérieurs disjoints,

$$B_1^1, \dots, B_1^{n_1} \subset M_1 \text{ et } B_2^1, \dots, B_2^{n_2} \subset M_2 ,$$

2) pour $i = 1, 2$, $1 \leq j \leq n_i$, $f(\partial B_i^j) = \{y_i\} \in \text{int} N_i$,

3) $f^{-1}(S) \cap B_i^j$ est une union de sphères et de tores parallèles et non noués ^(*); dans le tore plein bordé par une composante torique de $f^{-1}(S)$, on ne trouve que des composantes toriques,

4) $f(f^{-1}(S) - R) = \{y_0\} \in S$.



(allure de la préimage pour $f = \mu_{\alpha, \beta}$)

(*) Voir (*) page précédente.

Pour prouver la proposition 3.1, il suffit de montrer qu'il existe un processus pour diminuer le nombre des composantes sphériques de $f^{-1}(S) - R$ et un autre processus pour transformer une composante torique en composante sphérique, chacun de ces deux processus fournissant une nouvelle application de "forme simple".

3.5 - Elimination des sphères.

S'il existe une sphère dans $f^{-1}(S) - R$, il en existe une Σ qui est joignable à R par un arc γ tel que $\text{int } \gamma \cap f^{-1}(S) = \emptyset$. Si $\Sigma \subset M_i$, on a $f(\gamma) \subset N_i$. D'après la surjectivité de $f_{\#} : \pi_1(M_i) \rightarrow \pi_1(N_i)$, on peut choisir γ pour que $f(\gamma)$ représente l'élément trivial de $\pi_1(N_i, S)$; on peut alors réaliser la somme connexe de R avec Σ le long de γ par une homotopie de f . Pour la première fois, on rencontre une opération qui modifie R ; d'ailleurs il ne s'agit pour R que d'une isotopie, puisque Σ est le bord d'une boule $V(\Sigma)$. L'opération a donc essentiellement consisté à faire passer dans M_i , ($i' \neq i$) toutes les composantes de $f^{-1}(S)$ intérieures à $V(\Sigma)$. Le résultat est évidemment une application de forme simple pour laquelle la préimage de S a moins de composantes.

3.6 - Transformation d'un tore en sphère.

Lorsque l'on a éliminé par la procédé 3.5 toutes les composantes sphériques de $f^{-1}(S) - R$, on choisit dans $f^{-1}(S) \cap M_i$ un tore T joignable à R par un chemin ne recoupant pas $f^{-1}(S)$. Ce tore est contenu dans une boule B_i ; on a les propriétés suivantes :

$$1) f(\partial B_i) = \{y_i\} \in \text{int } N_i, \quad f(T) = \{y_0\} \in S,$$

2) $T = \partial V(T)$ où $V(T)$ est un tore plein non noué dans B_i ; c'est-à-dire qu'il existe un disque Δ plongé dans $B_i - \text{int } V(T)$, dont le bord est un générateur de T et tel que $\text{int } \Delta \cap f^{-1}(S) = \emptyset$. On a $f(\Delta, \partial \Delta) \subset (N_i, y_0)$. La chirurgie de T par le disque Δ le transforme en une sphère; mais cet-

te opération n'est réalisable par une homotopie de f que si $f(\Delta)$ est trivial dans $\pi_2(N_1, S)$. Pour effectuer sur T une chirurgie réalisable par une homotopie de f on cherche un disque Δ' dans $M_i - \text{int } V(T)$ vérifiant les conditions suivantes :

- a) $\partial\Delta' = \partial\Delta$,
- b) $f(\Delta')$ est trivial dans $\pi_2(N_1, y_0)$,
- c) $\text{int } \Delta' \cap f^{-1}(S) = \emptyset$,
- d) Δ' est plongé.

Cherchons d'abord quels sont tous les disques singuliers de $M_i - \text{int } V(T)$ vérifiant a), b) et c). Pour cela considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_2(M_i, x_i) & \xrightarrow{\quad \text{-----} \quad} & \pi_2(N_1, y_0) \\
 \swarrow \rho & & \searrow \varphi \\
 & \pi_2(M_i - \text{int } V(T), x_i) & \\
 \swarrow \rho' & \downarrow j & \searrow \varphi' \\
 & \pi_2(M_i - \text{int } V(T), T, x_i) &
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, x_i est un point base choisi sur $\partial\Delta$; j est le monomorphisme induit par l'inclusion ; φ et φ' sont des épimorphismes induits par f et $\varphi = \varphi'j$. Les morphismes ρ et ρ' sont induits par une application de M_i dans M_i , homotope à l'identité et rétractant B_i sur x_i ; on a $\rho = \rho'j$ et ce sont des épimorphismes ; enfin φ se factorise par ρ .

Soit $\omega \in \pi_2(M_i - \text{int } V(T), x_i)$ tel que $\varphi(\omega) = \varphi'([\Delta])$ et posons $u = -\rho(\omega)$. Alors tout disque singulier Δ' de $M_i - \text{int } V(T)$, tel que $\partial\Delta' = \partial\Delta$ et $\rho'(\Delta') = u$, vérifie $\varphi'([\Delta']) = 0$. La démonstration de la proposition 3.1 s'achève avec le lemme suivant :

Lemme :

On suppose que M_i est $\mathbb{P}^2$ -insécable. Alors, pour tout $u \in \pi_2(M_i, x_i)$, il existe un disque paramétré Δ' , plongé dans $M_i - \text{int } V(T)$, tel que

$\partial\Delta' = \partial\Delta$ (égalité de bords orientés) et $\rho'([\Delta']) = u$.

Remarque. L'hypothèse faite sur M_i est nécessaire. En effet, si u est l'image d'un générateur de $\pi_2(\mathbb{P}^2)$ induit par un plongement à fibré normal trivial de $\mathbb{P}^2$ dans M_i , et si Δ' est un disque singulier tel que $\partial\Delta' = \partial\Delta$ et $\rho'([\Delta']) = u$, alors, au mieux, Δ' a une ligne double à la source [H7].

Preuve. Soit $\hat{M}_i = M_i \cup_R D^3$. Considérons une décomposition $V_1 \# \dots \# V_n$ de $\hat{M}_i$ en variétés indécomposables ; par hypothèse sur M_i , celles-ci sont automatiquement $\mathbb{P}^2$ -insécables ; d'après le "sphere theorem", $\pi_2(V_k) = 0$ ou bien V_k est un fibré sur S^1 de fibre S^2 . De cela on déduit facilement que $\pi_2(M_i)$ est engendré comme $\mathbb{Z}[\pi_1(M_i)]$ -module par une famille de sphères plongées [S10]. Pour prouver le lemme il suffit maintenant de prouver l'affirmation suivante :

Soit Δ' un disque paramétré plongé dans $M_i - \text{int } V(T)$ tel que $\partial\Delta' = \partial\Delta$.
Soit Σ une sphère paramétrée plongée dans $M_i - V(T)$. Soit γ un arc joignant x_i à $x'_i \in \Sigma$ dans $M_i - \text{int } V(T)$. Alors il existe un disque paramétré Δ'' , plongé dans $M_i - \text{int } V(T)$, tel que $\partial\Delta'' = \partial\Delta$ et

$$\rho'([\Delta'']) = \rho'([\Delta']) + \gamma \cdot [\Sigma].$$

On met γ en position générale par rapport à Σ et à Δ' de sorte qu'en x_i il quitte Δ' du côté positif et qu'en x'_i il arrive à Σ du côté positif. Si en plus on a $\text{int } \gamma \cap (\Sigma \cup \Delta') = \emptyset$, on pose $\Delta'' = \Delta' \#_\gamma \Sigma$, qui est plongé, naturellement paramétré et qui vérifie la formule.

Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, on remarque que $V(T) \cup \Delta'$ a un voisinage régulier difféomorphe à D^3 . Donc il existe un difféomorphisme F_1 de M_i , isotope à l'identité modulo un voisinage de x_i , tel que $F_1(\text{int } \gamma) \cap (V(t) \cup \Delta') = \emptyset$. Posons $\Sigma_1 = F_1(\Sigma)$ et $\gamma_1 = F_1(\gamma)$. Ensuite il existe un difféomorphisme F_2 de M_i , isotope à l'identité modulo un voisinage de x'_i , tel que

$$(\text{int } \gamma_1 \cup V(T) \cup \Delta') \cap F_2(\Sigma_1) = \emptyset.$$

On pose alors $\Delta'' = \Delta' \#_{\gamma_1} F_2(\Sigma_1)$. On observe que Δ'' est plongé et que, dans $\pi_2(M_i, x_i)$, on a $\gamma_1 \cdot [F_2(\Sigma_1)] = \gamma_1 \cdot [\Sigma_1] = \gamma \cdot [\Sigma]$; donc $\rho'([\Delta'']) = \rho'([\Delta']) + \gamma \cdot [\Sigma]$. $\triangleleft$

§ 4. Difféomorphismes entre sommes connexes

(Démonstration du théorème 1.5)

4.1 - La classe des variétés fermées $\mathbb{P}^2$ -insécables de dimension 3 satisfaisant à la conjecture de Poincaré, notée $\mathcal{C}$ est stable pour l'opération de somme connexe (A I 4). Dans cette classe, on s'intéresse aux sous-classes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ définies de la façon suivante :

Une variété N appartient à $\mathcal{C}_0$ (resp. $\mathcal{C}_1$) si, pour toute variété $M \subset \mathcal{C}$, toute équivalence d'homotopie de M dans N est homotope à un difféomorphisme (resp. unique à isotopie près).

La classe $\mathcal{C}_1$ (a fortiori $\mathcal{C}_0$) n'est pas vide : d'après les théorèmes II 2.1 et II 6.1, elle contient les variétés $\mathbb{P}^2$ -irréductibles suffisamment grandes; d'autre part, c'est un exercice de prouver qu'elle contient les fibres sur S^1 de fibre S^2 .

Théorème :

La classe $\mathcal{C}_0$ est stable pour l'opération de somme connexe. En particulier, dans les conditions du théorème 1.5, toute équivalence d'homotopie est homotope à un difféomorphisme.

Démonstration. Soient $N = N_1 \# N_2$, où $N_1, N_2 \in \mathcal{C}_0$, et $f : M \rightarrow N$ une équivalence d'homotopie, où $M \in \mathcal{C}$. D'après le principe de scindement d'une équivalence d'homotopie (1.4), on peut écrire $M = M_1 \# M_2$ et supposer que f est de la forme $f_1 \# f_2$, où, pour $i = 1, 2$, $f_i : M_i \rightarrow N_i$ est

une équivalence d'homotopie. Puisque $M_i \in \mathcal{C}$ et que $N_i \in \mathcal{C}_0$, il existe une homotopie h_i de f_i jusqu'à un difféomorphisme. Par le même argument que celui utilisé pour la proposition 2.4, on voit que l'on peut choisir h_1 et h_2 de telle sorte qu'elles se recollent pour donner une homotopie de $f_1 \# f_2$ jusqu'à un difféomorphisme. $\langle \rangle$

4.2 - Conjecture. La classe $\mathcal{C}_1$ est stable pour l'opération de somme connexe.

Le théorème 1.5 vient à l'appui de cette conjecture. Pour achever la démonstration de ce théorème, il reste à prouver que si $N = N_0 \# N_1 \# \dots \# N_q$, où N_i est soit une variété $\mathbb{P}^2$ -irréductible suffisamment grande soit un S^2 -fibré sur S^1 , alors tout difféomorphisme f de N homotope à l'identité est isotope à l'identité.

Notons $S_1, \dots, S_q$ les q sphères de somme connexe de N . On sait que $f|_{S_1}$ est homotope à $\text{Id}|_{S_1}$. D'après le théorème III 1.4, il existe une isotopie à f qui ramène au cas où $f|_{S_1} = \text{Id}|_{S_1}$. Pour continuer le redressement des sphères, il faut savoir que $f|_{S_2}$ est homotope à $\text{Id}|_{S_2}$ dans $N - S_1$, etc... . Cela résulte du lemme suivant :

Lemme :

Soit V une variété de dimension 3 et S une sphère plongée dans V non homotope à zéro. Soit $h : S^2 \times [0,1] \rightarrow V$ une application telle que

- 1) $h(S^2 \times \{0,1\}) \subset V - S$,
- 2) $h|_{S^2 \times \{0\}}$ soit un plongement d'image non homotope à zéro et non

homotope à S .

Alors $h|_{S^2 \times \{0\}}$ et $h|_{S^2 \times \{1\}}$ sont homotopes dans $V - S$.

Preuve. On suppose que h est transversale sur S et on note Σ une composante de $h^{-1}(S)$. Deux cas se présentent :

- 1) $\Sigma = \partial W$ où W est une sous-variété de $S^2 \times [0,1]$.

Si $\tilde{N}$ est un revêtement universel de N et $\tilde{S}$ un relèvement de S , $h|_W$ se relève en une application $(W, \partial W) \rightarrow (\tilde{N}, \tilde{S})$. Puisque $\tilde{S}$ n'a pas de multiple homologue à zéro [S2], cette dernière application est de degré 0 de ∂W dans $\tilde{S}$. Donc $\deg(h : \partial W \rightarrow S) = 0$. A ce moment il est facile de changer h sur un voisinage de W en une application qui ne rencontre pas S : on a éliminé Σ de $h^{-1}(S)$.

2) Σ sépare $S^2 \times \{0\}$ de $S^2 \times \{1\}$.

Notons W la sous-variété de $S^2 \times [0, 1]$ bordée par $S^2 \times \{0\}$ et Σ . On a un relèvement $\tilde{h} : (W, \Sigma) \rightarrow (\tilde{N}, \tilde{S})$ de $h|_W$ et $\tilde{h}(S^2 \times \{0\})$ est une sphère plongée non homologue à zéro dans N ; alors, d'après [S2], elle est homologue à $\tilde{S}$, ce qui signifie que $h(S^2 \times \{0\})$ est homotope à S . D'après l'hypothèse, la situation du 2) ne peut donc arriver. $\langle \rangle$

Pour la suite, il est plus commode de supposer que $N_0 \cong S^3$ et que, pour tout $i \geq 1$, N_i est connecté à N_0 par la sphère S_i . Pour $1 \leq i \leq k$, N_i est un S^2 -fibré sur S^1 et S'_i est une fibre ; pour $i \geq k+1$, N_i est $\mathbb{P}^2$ -irréductible et suffisamment grande. D'après ce qui précède, on peut supposer que le difféomorphisme f de N est tel que, pour tout i $f|_{S_i} = \text{Id}|_{S_i}$ et $f|_{S'_i} = \text{Id}|_{S'_i}$. De plus, f n'échange les côtés d'aucune de ces sphères ; c'est évident homologiquement pour S'_i ; pour S_i on peut utiliser l'argument du groupe fondamental invoqué ci-dessous. Ainsi

$$f = f_0 \# \dots \# f_q$$

où f_0 est un difféomorphisme de S^3 coïncidant avec l'identité sur q boules et où, pour $i \geq 1$, f_i est un difféomorphisme de N_i coïncidant avec l'identité sur une boule B_i et sur S'_i si $i \leq k$.

On a $\pi_1(N) \cong \pi_1(N_1, B_1) * \dots * \pi_1(N_q, B_q)$. Puisque f est homotope à l'identité, $f_{\#}$ est une conjugaison intérieure. Mais aucune conjugaison in-

térieure autre que l'identité ne laisse invariant tous les facteurs d'un produit libre. Donc pour tout $i \geq 1$, f_i induit l'identité sur $\pi_1(N_i, B_i)$.

1er cas : $i \geq k+1$.

Puisque N_i est asphérique (II 1.6), il existe une homotopie h_i de f_i jusqu'à $\text{Id}|_{N_i}$, constante sur le centre x_i de B_i . D'après le théorème II 6.1, on peut déformer h_i en une isotopie qui laisse B_i invariante. C'est dire que, mod B_i , f_i est isotope à une rotation parallèlement à ∂B_i (III 4.2 et App. II).

2ème cas : $1 \leq i \leq k$.

Puisque f_i est l'identité sur B_i et sur une fibre, on peut couper $N_i - \text{int} B_i$ le long de cette fibre et considérer que f_i est un difféomorphisme d'une boule à deux trous. On déduit alors du théorème de Cerf [C2] que, mod B_i , f_i est isotope à un difféomorphisme de rotation parallèlement au système de sphères formé de ∂B_i et de S'_i . De la même façon, on voit que f_0 est isotope à un difféomorphisme de rotation parallèlement à $S_1 \cup \dots \cup S_q$.

On peut donc affirmer que, si f est homotope à l'identité, f est isotope à un difféomorphisme de rotation parallèlement aux sphères $S_1, \dots, S_q, S'_1, \dots, S'_k$, c'est-à-dire avec les notations de III 4.2,

$$f \approx H_{S_1}(\alpha_1) \circ \dots \circ H_{S_q}(\alpha_q) \circ H_{S'_1}(\alpha'_1) \circ \dots \circ H_{S'_k}(\alpha'_k).$$

où $\alpha_i, \alpha'_j \in \pi_1(SO(3))$.

On voit facilement que, pour $1 \leq i \leq k$, $H_{S_j}(\alpha_i)$ est isotope à l'identité et que H_{S_q} est isotope à

$$H_{S_1}(\alpha_q) \circ \dots \circ H_{S_k}(\alpha_q) \circ H_{S_{k+1}}(\alpha_q) \circ \dots \circ H_{S_{q-1}}(\alpha_q).$$

On peut donc supposer que $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et α_q sont triviaux. D'autre part, le système $(S_{k+1}, \dots, S_{q-1}, S'_1, \dots, S'_k)$ vérifie les conditions du théorème

de Hendriks [H6] :

$$H_{S_{k+1}}(\alpha_{k+1}) \circ \dots \circ H_{S_{q-1}}(\alpha_{q-1}) \circ H_{S_1}(\alpha_1') \circ \dots \circ H_{S_k}(\alpha_k')$$

n'est homotope à l'identité que si $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_{q-1} = \alpha_1' = \dots = \alpha_k' = 0$, auquel cas, ce difféomorphisme est clairement isotope à l'identité. Ceci achève la démonstration du théorème 1.5.

La technique de Hendriks est éloignée de toutes celles évoquées dans ce cours ; elle s'inscrit dans la lignée des travaux de Hopf [H10] et de Pontrjagin [P2] ; je n'en dirai pas plus. Cependant, je peux montrer que $\alpha_1' = \dots = \alpha_k' = 0$ par une démonstration simple ressemblant à celle que je connais pour l'injectivité de $J : \pi_1(SO(3)) \rightarrow \pi_3(S^2)$ (voir App. II) ; malheureusement, elle ne s'étend pas au cas des rotations parallèlement à des sphères qui chacune sépare N .

TOPOLOGIE DE LA DIMENSION TROIS

Appendice I

LES VARIÉTÉS SATISFAISANT A LA CONJECTURE DE POINCARÉ

ET LES VARIÉTÉS $\mathbb{P}^2$ -INSÉCABLES

Dans cet appendice V est une variété de dimension 3 et $p : \tilde{V} \rightarrow V$ est un revêtement universel.

1 - Proposition :

1) Soit $S \subset V$ une variété plongée homotope à zéro ; alors S est le bord d'une sous-variété compacte contractile.

2) Soient $S, S' \subset V$ deux sphères plongées disjointes, homotopes mais non homotopes à zéro ; alors $S \cup S'$ borde un h-cobordisme.

Remarque. Cette proposition est spécifique de la dimension 3. En grande dimension, dans certaines conditions homologiques, une sphère de codimension 1 peut être homotope à zéro sans border de variété contractile.

Démonstration. 1) Soit $\tilde{S}$ un relèvement de S dans $\tilde{V}$; cette sphère y est homologue à zéro, donc borde une sous-variété compacte A , qui est 1-connexe donc contractile. Quitte à changer de relèvement, on peut supposer que $\text{int } A \cap p^{-1}(S) = \emptyset$. Alors $p|_A$ est un plongement dont l'image est bordée par S .

2) Soient $\tilde{S}$ et $\tilde{S}'$ deux relèvements homotopes dans $\tilde{V}$; $S \cup S' = \partial A$ où A est une sous-variété compacte de $\tilde{V}$; elle est connexe sinon $\tilde{S}$ et $\tilde{S}'$ seraient homologues à zéro (i.e. S et S' homotopes à zéro). A est 1-connexe ; c'est un h-cobordisme. Quitte à changer les relèvements, on peut supposer que $\text{int } A \cap p^{-1}(S \cup S') = \emptyset$. Alors $p|_A$ est un plongement dont l'image est bordée par S et S' . $\triangleleft$

De façon analogue on prouve que, si $q : V' \rightarrow V$ est un revêtement et

si V' est irréductible (toute sphère plongée y borde une boule), alors V est irréductible.

2 - Définition :

V satisfait à la conjecture de Poincaré si toute sous-variété compacte contractile de V est difféomorphe à la boule D^3 . Abréviation : V est (C.P.).

Il résulte du théorème de décomposition de Kneser [K2] que toute variété de dimension 3 compacte a le type d'homotopie d'une variété (C.P.) et, par conséquent, que si G est le groupe fondamental d'une variété de dimension 3 compacte, G est aussi le groupe fondamental d'une variété (C.P.).

3 - Proposition :

1) Soit $q : V' \rightarrow V$ un revêtement. Si V' est (C.P.), alors V est (C.P.).

2) Si V est une sous-variété de V' et si V' est (C.P.), V est aussi (C.P.).

3) On suppose que V est obtenue en attachant à V' une anse triviale sur une composante du bord. Si V' est (C.P.), alors V est (C.P.).

4) Si V est irréductible et n'est pas une homotopie-sphère, V est (C.P.).

Démonstration. 1) Toute sous-variété compacte contractile de V se relève dans V' .

2) Evident par définition.

3) On a $V = V' \cup A$, où A est une anse triviale. Si l'indice de A est différent de 3, on peut attacher à V une anse B qui tue A . Alors $V \cup B$ est difféomorphe à V' . Si $A = D^3$, toute sous-variété stricte de V est isotope à une sous-variété de V' . Dans les deux cas l'affirmation résulte de 2).

4) Soit Δ une sous-variété compacte contractile de V . Par hypothèse $S = \partial\Delta$ borde une boule D^3 . Ou bien $\Delta = D^3$ ou bien $V = D \cup_S \Delta$ et dans ce cas V est une homotopie-sphère. $\triangleleft$

Remarque importante : La réciproque du 1) semble être une question très difficile. Elle aurait par exemple pour conséquence un théorème du h-cobordisme d'origine $\mathbb{P}^2$ (problème posé par Stallings dans [S3]). Soit en effet une paire $(V, \mathbb{P}^2)$, où $\mathbb{P}^2$ est une composante de ∂V telle que $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow V$ soit une équivalence d'homotopie. On suppose que V est (C.P.). Le revêtement universel $\tilde{V}$ est un h-cobordisme bordé par deux sphères. Si $\tilde{V}$ est (C.P.), $\tilde{V} \cong S^2 \times [0, 1]$. D'après le théorème de Livesay [L1], $V \cong \mathbb{P}^2 \times [0, 1]$.

Corollaire :

Si V est somme connexe de S^2 -fibrés sur S^1 , V est (C.P.).

En effet $\tilde{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. $\triangleleft$

4 - Proposition :

Si V_1 et V_2 sont (C.P.) et si V est obtenu en recollant V_1 et V_2 le long de certaines sphères du bord, alors V est (C.P.).

Dans [G3], Gross a donné des résultats plus généraux de ce genre.

Démonstration. Soient Δ une variété compacte contractile de V et $\Sigma = \partial\Delta$.

1er cas : On suppose $\Sigma \subset V_1$ (ou $\Sigma \subset V_2$).

Si $\Delta \subset V_1$, on a $\Delta \cong D^3$. Sinon, $\Delta = V_2 \cup (\Delta \cap V_1)$ et, dans ce cas, ∂V_2 et $\partial(\Delta \cap V_1)$ sont formés de sphères. Donc V_2 et $\Delta \cap V_1$ sont 1-connexes. Etant (C.P.), ce sont des réunions de boules éventuellement trouées (appliquer les 2) et 3) de la proposition 3). Donc Δ est elle-même une boule.

2ème cas : $\Sigma \cap \partial V_1 \neq \emptyset$.

Notons $\{S_j; j \in J\}$ la famille des sphères dont la réunion est $V_1 \cap V_2$. On suppose que Σ est transversale à cette famille. Soit γ une courbe d'intersection de Σ avec $\cup S_j$, minimale sur Σ , c'est-à-dire que $\gamma = \partial D$, où D est un disque de Σ tel que $\text{int } D \cap (\cup S_j) = \emptyset$. Disons que $\gamma \subset S_{j_0}$ et que $D \subset V_2$. Ce disque est l'âme d'une anse triviale A attachée à V_1 le long du bord. Notons $V'_1 = V_1 \cup A$ et $V'_2 = \overline{V_2 - A}$; d'après la proposition 3, ces deux variétés sont (C.P.) ; d'autre part

$$\text{card } \pi_0(\Sigma \cap V'_1 \cap V'_2) < \text{card } \pi_0(\Sigma \cap V_1 \cap V_2).$$

En itérant ce processus, on se ramène au cas 1. $\langle \rangle$

5 - Définition :

Une variété $\mathbb{P}^2$ -insécable est une variété de dimension 3 n'admettant aucun plongement de $\mathbb{P}^2$ à fibré normal trivial.

Remarques : 1) Cette propriété est un invariant du type d'homotopie, d'après un théorème de Hirsch-Smale (voir V 1.3).

2) Puisque $\mathbb{P}^2$ n'est pas un bord, s'il existe un plongement $\varphi: \mathbb{P}^2 \rightarrow V^3$ et si $\partial V^3 = \emptyset$, il existe alors une courbe simple γ dans V coupant $\varphi(\mathbb{P}^2)$ en un seul point. Si $\varphi(\mathbb{P}^2)$ est à fibré normal trivial, γ représente un élément d'ordre infini dans $\pi_1(V)$.

3) Dans la situation du 2), φ induit une injection $\pi_2(\mathbb{P}^2) \rightarrow \pi_2(V)$.

Exemples. Toutes les variétés orientables sont $\mathbb{P}^2$ -insécables. Toutes les variétés fermées à groupe fondamental fini sont $\mathbb{P}^2$ -insécables ; d'ailleurs elles sont toutes orientables. Enfin les variétés sphériques sont $\mathbb{P}^2$ -insécables puisqu'un groupe de dimension cohomologique finie n'a pas d'élément d'ordre fini.

Proposition :

Soit Σ une surface incompressible dans une variété V (i.e. $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(V)$ est injectif et Σ est à fibré normal trivial). Soit $\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow V$ un plongement à fibré normal trivial. Alors il en existe un autre ne rencontrant pas Σ .

Corollaire :

- 1) Si V_1 et V_2 sont $\mathbb{P}^2$ -insécables, alors $V_1 \# V_2$ l'est aussi.
- 2) Si V est un fibré sur S^1 dont la fibre Σ est distincte de $\mathbb{P}^2$, alors V est $\mathbb{P}^2$ -insécable (en effet $\Sigma \times [0,1]$ est $\mathbb{P}^2$ -insécable).

Démonstration de la proposition. Soit γ une courbe d'intersection de $\varphi(\mathbb{P}^2)$ avec Σ . Puisque Σ est à fibré normal trivial, $\gamma = \partial D$ où D est un disque de $\varphi(\mathbb{P}^2)$. D'autre part, par incompressibilité de Σ , $\gamma = \partial D'$ où D' est un disque de Σ . On peut supposer que $\text{int } D' \cap \varphi(\mathbb{P}^2) = \emptyset$. Alors $(\varphi(\mathbb{P}^2) - D) \cup D'$ est isotope (après arrondissement de l'arête) à un plongement de $\mathbb{P}^2$ ayant moins de courbes d'intersection avec Σ . <>

ROTATIONS

Appendice II

ROTATIONS PARALLÈLEMENT A UN SYSTÈME DE SPHÈRES

Soit V une variété de dimension 3 et S une sphère plongée dans V .
Pour tout $\alpha \in \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, on définit à isotopie près un difféomorphisme $H_S(\alpha)$ de V de la façon suivante : soit $U \cong S^2 \times [0,1]$ un voisinage collier de S ; on pose

$$\begin{aligned} \text{pour } y \notin U, & \quad H_S(\alpha)(y) = y, \\ \text{pour } (x, t) \in U, & \quad H_S(\alpha)(x, t) = (\bar{\alpha}_t(x), t), \end{aligned}$$

où $\bar{\alpha} : ([0,1], \{0,1\}) \rightarrow (SO(3), Id.)$ représente α . La classe d'isotopie de $H_S(\alpha)$ ne dépend que de α et de la classe d'isotopie de S (non orientée).

Définition :

Soit $\mathcal{F} = (S_0, \dots, S_n)$ un système de sphères plongées disjointes dans
 V et soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^{n+1}$. On appelle

$$H_{\mathcal{F}}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = H_{S_0}(\alpha_0) \circ \dots \circ H_{S_n}(\alpha_n)$$

un difféomorphisme de rotation parallèlement au système $\mathcal{F}$.

Conjecture. Tout difféomorphisme de rotation parallèlement à un système de sphères est isotope à l'identité dès qu'il est homotope à l'identité.

Dans [H6], Hendriks a donné des conditions sur $\mathcal{F}$ grâce auxquelles on peut affirmer que $H_{\mathcal{F}}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ n'est homotope à l'identité que si $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$, auquel cas le difféomorphisme est évidemment isotope à l'identité. Ici je veux indiquer un cas particulier qui a le mérite d'une démonstration facile.

Proposition :

Si S_0 ne sépare pas $V - (S_1 \cup \dots \cup S_n)$ et si $H_{\mathcal{F}}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est homo-

tope à l'identité, alors $\alpha_0 = 0$.

Démonstration. On pose $H_{\mathcal{F}}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = H$ et on écrit $V = E \# V'$ où E est un fibré sur S^1 dont S_0 est une fibre et où $S_1, \dots, S_n \subset V'$.

1er cas : V est orientable, donc E est trivial.

Il existe alors une rétraction $\rho : V \rightarrow S^2$, transversale sur un point q_0 de S^2 telle que $\gamma = \rho^{-1}(q_0)$ soit une section du fibré E et que $\rho|_E \cap V$ soit la restriction d'une trivialisation de E . On note T_0 la trivialisation du fibré normal $\nu(\gamma; V)$ définie par ρ . On peut toujours supposer que H laisse fixe la section γ de E ; il suffit pour cela de relever α_0 dans $\pi_1(SO(2))$. On a $\rho H \sim \rho H_{S_0}(\alpha_0)$ et $(\rho H_{S_0}(\alpha_0))^{-1}(q_0) = \gamma$. Cette courbe est munie par $\rho H_{S_0}(\alpha_0)$ d'une trivialisation normale T_1 dont la classe d'homotopie se déduit de celle de T_0 par l'action de α_0 . Si H est homotope à l'identité, (γ, T_0) et (γ, T_1) sont normalement cobordants. D'après le lemme suivant T_0 et T_1 sont stablement homotopes donc $\alpha_0 = 0$.

Lemme :

Soit γ une courbe à fibré normal trivial dans une variété orientable de dimension 3. Soient T_0 et T_1 deux trivialisations de $\nu(\gamma; V)$. Si (γ, T_0) et (γ, T_1) sont normalement cobordants, alors T_0 et T_1 sont stablement homotopes.

Preuve du lemme. Il existe par hypothèse une surface W plongée dans $V \times [0, 1]$ munie d'une trivialisation normale T telle que

$$(W, T) \cap V \times \{0\} = (\gamma, T_0)$$

et

$$(W, T) \cap V \times \{1\} = (\gamma, T_1).$$

Soit $\hat{W} \subset V \times \mathbb{R}$ la surface orientable fermée obtenue en attachant deux disques D_0 et D_1 à W le long de $\gamma \times \{0\}$ et de $\gamma \times \{1\}$. Puisque V est parallélisable [W6], $\nu(\hat{W}; V \times \mathbb{R})$ est stablement trivial ; donc

$v(\mathbb{W}; V \times \mathbb{R}^2)$ admet une trivialisation θ . On note $\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}$ les stabilisées des trivialisations T_0, T_1, T . Etant donné que $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$, ou bien $\bar{T}_0 = \bar{T}_1$ et on a fini, ou bien on peut supposer que $\bar{T}_0$ se prolonge au-dessus de D_0 . Il s'agit alors de voir que $\bar{T}_1$ se prolonge au-dessus de D_1 .

Pour tout lacet $C \subset W \cup D_0$, les trivialisations $\bar{T}|_C$ et $\theta|_C$ diffèrent d'un élément $\alpha_C \in \pi_1(SO(3))$ et, si $C \sim C'$, $\alpha_C = \alpha_{C'}$. Or la classe d'homotopie de ∂D_1 est un produit de commutateurs dans $\pi_1(W \cup D_0)$; donc $\bar{T}$ et θ coïncident à homotopie près sur ∂D_1 . C'est dire que $\bar{T}_1$ se prolonge au-dessus de D_1 . $\diamond$

2ème cas : V est non orientable.

On note $p : \tilde{V} \rightarrow V$ le revêtement à deux feuillets des orientations, τ le générateur du groupe de transformations, $\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_n$ un relèvement de $S_0, \dots, S_n$ et $\tilde{H}$ un relèvement de H ; on peut prendre

$$\tilde{H} = H_{\tilde{S}_0}(\alpha_0) \circ H_{\tau \tilde{S}_0}(\alpha_0) \circ \dots \circ H_{\tilde{S}_n}(\alpha_n) \circ H_{\tau \tilde{S}_n}(\alpha_n).$$

Pour ce choix, $\tilde{H}$ conserve l'orientation de $\tilde{V}$ et τ la renverse. Donc $\tilde{H}$ n'est pas homotope à τ . Si H est homotope à l'identité, $\tilde{H}$ est homotope à l'identité.

1) E est trivial.

Alors $p^{-1}(V \cap E)$ est formé de deux exemplaires de $V \cap E$; donc $\tilde{S}_0$ ne sépare pas $\tilde{V} - (\tau \tilde{S}_0 \cup \tilde{S}_1 \cup \tau \tilde{S}_1 \cup \dots)$. D'après le premier cas, $\alpha_0 = 0$.

2) E est non orientable.

Soient x_0 un point de $V \cap (E - S_0)$ et B une petite boule centrée en x_0 ; on a $H|_B = \text{Id}|_B$.

Lemme :

Si H est homotope à l'identité, alors il existe une homotopie

$h : V \times [0, 1] \rightarrow V$ telle que $h|_{V \times \{0\}} = \text{Id}|_V$, $h|_{V \times \{1\}} = H$ et que, pour

tout $t \in [0,1]$, $h_t^{-1}(B) = B$ et $h_t|_B$ soit un difféomorphisme laissant x_0 fixe.

Preuve du lemme. Il s'agit de voir que l'on peut choisir h transversale sur x_0 de sorte que $h^{-1}(x_0)$ soit formé d'un arc joignant $x_0 \times \{0\}$ à $x_0 \times \{1\}$, dont la classe $\dot{\alpha}$ dans $\pi_1(V, x_0)$ est triviale. Comme en V 2.4 on peut effectivement choisir h pour que $h^{-1}(x_0)$ soit formé d'un arc ; remarquons que $\dot{\alpha}^{-1}$ est la classe du lacet $\{h_t(x_0); t \in [0,1]\}$.

(a) $V = E$; $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

J'affirme qu'alors $\dot{\alpha} \in 2\mathbb{Z}$. Si $\dot{\alpha}$ était impair, le relèvement du lacet $h_t(x_0)$, à partir d'un point base $\tilde{x}_0$ de $\tilde{V}$ au-dessus de x_0 , finirait en $\tau(\tilde{x}_0)$. Or il doit finir en $\tilde{H}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$.

Considérons alors l'action naturelle $\omega : S^1 \times E \rightarrow E$ (la monodromie correspondant à un demi-tour). La classe d'homotopie du lacet $(\omega(t, x_0); t \in S^1)$ est $+2$. Regardant ω comme une homotopie de l'identité à l'identité, on voit qu'en composant h et $\dot{\alpha}/2$ fois ω , on construit une homotopie h' de Id à H pour laquelle, après déformation convenable, on peut imposer $h'^{-1}(x_0) = x_0 \times [0,1]$.

(b) $V \neq E$; $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z} * \pi_1(V')$.

La conjugaison définie par $\dot{\alpha}$ sur $\pi_1(V, x_0)$ est l'identité puisque H induit l'identité sur le groupe fondamental. Or $\pi_1(V, x_0)$ est sans centre, donc $\dot{\alpha}$ est trivial. $\langle \rangle$

Soit $\tilde{B}$ un relèvement de B dans $\tilde{V}$. Soit φ un difféomorphisme de S^2 sur $\partial\tilde{B}$. Posons

$$W = (\tilde{V} - \text{int}(\tilde{B} \cup \tau\tilde{B})) \cup S^2 \times [0,1] / \{ \forall x \in S^2, x \times \{0\} = \varphi(x), x \times \{1\} = \tau\varphi(x) \}.$$

Puisque τ renverse l'orientation, W est orientable. Définissons un difféomorphisme K de W par les formules suivantes :

$$\text{pour } x \in W \cap \tilde{V}, \quad K(x) = \tilde{H}(x) \quad \text{et, pour } x \in S^2 \times [0,1], \quad K(x) = x ;$$

ROTATIONS

c'est un difféomorphisme de rotation. D'après le lemme précédent, si H est
est homotope à l'identité, K l'est aussi. Or $\tilde{S}_0$ ne sépare pas
 $W = (\tau\tilde{S}_0 \cup \tilde{S}_1 \cup \tau\tilde{S}_1 \cup \dots)$. D'après le premier cas, $\alpha_0 = 0$.

Cqfd.

Appendice III

COHOMOLOGIE DU REVÊTEMENT UNIVERSEL D'UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION 3
ET COHOMOLOGIE DE SON GROUPE FONDAMENTAL

1 - Notations :

Etant donné un groupe G , on désigne par $\overline{\mathbb{Z}[G]}$ l'anneau des fonctions définies sur G à valeurs dans $\mathbb{Z}$; c'est aussi l'anneau des combinaisons formelles d'éléments de G à coefficients entiers; $\mu : G \rightarrow \mathbb{Z}$ est identifiée à $\sum_{g \in G} \mu(g)g$. On en fait un G -module à droite en posant, pour $\gamma \in G$,

$$(1.1) \quad (\mu\gamma)(g) = \mu(g\gamma^{-1})$$

ou

$$\mu\gamma = \sum_{g \in G} \mu(g)g\gamma.$$

Le support $\text{supp } \mu$ est l'ensemble $\{g \in G \mid \mu(g) \neq 0\}$. On a

$$(1.2) \quad \text{supp } \mu\gamma = (\text{supp } \mu) \cdot \gamma.$$

On note $\mathbb{Z}[G]$ le sous- G -module des fonctions à support fini (compact).

On définit de même $\overline{\mathbb{Z}_2[G]}$ et $\mathbb{Z}_2[G]$. L'application "support" établit un G -isomorphisme de $\overline{\mathbb{Z}_2[G]}$ sur l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(G)$ des parties de G et de $\mathbb{Z}_2[G]$ sur la sous-algèbre $\mathcal{P}_f(G)$ des parties finies, ces deux algèbres étant regardées comme G -modules à droite.

Soit $p : (\tilde{V}, y_0) \rightarrow (V, x_0)$ un revêtement universel pointé. On posera $G = \pi_1(V, x_0)$; celui-ci agit naturellement à gauche sur $\tilde{V}$. Mais il existe aussi sur la fibre $F = p^{-1}(x_0)$ une action de G à droite : si $y \in F$, $\gamma \in \pi_1(V, x_0)$, alors $y \cdot \gamma$ est l'extrémité du relèvement à partir de y d'un lacet représentant γ . Je note $[\gamma]$ la permutation ainsi définie sur F ; il faut remarquer que $[\gamma\gamma'] = [\gamma'] \circ [\gamma]$.

Enfin considérons les groupes de cohomologie $H_{\sim}^0(F; \mathbb{Z})$, c'est-à-dire

$H^0(F; \mathbb{Z})$, $H_c^0(F; \mathbb{Z})$ (cohomologie à support compact), $H_\infty^0(F; \mathbb{Z})$ (cohomologie à l'infini); le choix du point base y_0 fournit une identification^(*) de ces groupes respectivement avec $\overline{\mathbb{Z}[G]}$, $\mathbb{Z}[G]$, $\overline{\mathbb{Z}[G]}/\mathbb{Z}[G]$; de même on a une identification^(*) de $H^0(F; \mathbb{Z}_2)$, $H_c^0(F; \mathbb{Z}_2)$, $H_\infty^0(F; \mathbb{Z}_2)$ respectivement avec $\mathcal{P}(G)$, $\mathcal{P}_f(G)$ et avec l'algèbre de Boole quotient $\mathcal{P}(G)/\mathcal{P}_f(G)$ ^(**). Comme en (1.1), on fait agir G à droite sur $H_\infty^0(F; \mathbb{Z})$: si $\xi \in H_\infty^0(F; \mathbb{Z})$, $\gamma \in \pi_1(V, x_0)$, on pose

$$(1.3) \quad \xi \cdot \gamma = [\gamma^{-1}]^*(\xi).$$

Cette action permet de construire sur V des systèmes de coefficients locaux $H_\infty^0(F; \mathbb{Z})$.

2 - Proposition :

Il existe un isomorphisme naturel de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^0(G; H_c^0(F; \mathbb{Z})) & \rightarrow & H^0(G; H^0(F; \mathbb{Z})) & \rightarrow & H^0(G; H_\infty^0(F; \mathbb{Z})) & \rightarrow & H^1(G; H_c^0(F; \mathbb{Z})) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 0 \rightarrow & H_c^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}) & \rightarrow & H_\infty^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}) & \rightarrow & H_c^1(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \rightarrow 0
 \end{array}$$

Explication de la naturalité. Soit $f: (V, x_0) \rightarrow (V', x'_0)$ une application continue de variétés pointées induisant un isomorphisme

$$\varphi: G = \pi_1(V, x_0) \rightarrow G' = \pi_1(V', x'_0).$$

L'application f se relève aux revêtements universels en $\tilde{f}: (\tilde{V}, y_0) \rightarrow (\tilde{V}', y'_0)$ qui est un (G, G') -morphisme de la fibre F sur la fibre F' :

$$\forall y \in F, \quad \forall g \in G, \quad \tilde{f}(y \cdot g) = \tilde{f}(y) \cdot \varphi(g).$$

On a donc un isomorphisme $\tilde{\Phi}$ composé de

(*) Cette identification respecte aussi la structure multiplicative.

(**) $H^0(G; \mathcal{P}(G)/\mathcal{P}_f(G))$ est aussi une algèbre de Boole ; son spectre est l'espace des bouts de G (voir [11]).

$$H^*(G'; H^0(F'; \mathbb{Z})) \xrightarrow{\varphi^*} H^*(G; H^0(F'; \mathbb{Z})) \xrightarrow{\tilde{f}^*} H^*(G; H^0(F; \mathbb{Z})) .$$

Alors la naturalité signifie que l'isomorphisme annoncé rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^*(G'; H^0(F'; \mathbb{Z})) & \xrightarrow{\Phi} & H^*(G; H^0(F; \mathbb{Z})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\tilde{V}') & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H^*(\tilde{V}) . \end{array}$$

Démonstration (*). Considérons la suite spectrale de la fibration p (à fibre discrète). Si elle veut bien fournir l'isomorphisme cherché, celui-ci sera automatiquement muni des propriétés de naturalité (voir Séminaire Cartan 1950/51, exposé 9) ; c'est l'avantage de cette démonstration. Elle commence à $E_2^{r+s, s} = H^s(V; \underbrace{H^r(F; \mathbb{Z})})$. Le seul terme non nul étant $E_2^{s, s}$, on en déduit des isomorphismes

$$E_2^{s, s} \cong E_3^{s, s} \cong \dots \cong E_\infty^{s, s} .$$

En particulier le groupe associé (par la filtration) à $H^s(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ ne comprend qu'un seul terme et il est isomorphe à $H^s(V; \underbrace{H^0(F; \mathbb{Z})})$. D'autre part la suite longue associée à

$$0 \rightarrow H_c^0(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H_\infty^0(F; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

subsiste à chaque étape de la suite spectrale. Enfin, pour $s \leq 1$,

$$H^s(V; H^0(F; \mathbb{Z})) = H^s(G; H^0(F; \mathbb{Z})) ;$$

en effet, on peut réaliser un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$ dont le 2-squelette soit celui de V . <>

Remarques. 1) La compacité de V intervient pour affirmer que le choix de la famille de supports ne se répercute que sur la fibre.

(*) Elle m'a été suggérée par J.P. Serre.

2) Le choix du point base y_0 dans $\tilde{V}$ permet de remplacer dans cette proposition $H^0(F; \mathbb{Z})$ par $\overline{\mathbb{Z}[G]}$. . . Mais alors la naturalité s'entend par rapport aux applications $f : (V, x_0) \rightarrow (V, x_0)$ qui induisent l'identité sur le groupe fondamental pour que leurs relèvements dans $\tilde{V}$ respectent l'identification de la fibre base avec G ; ceci implique que $\tilde{f}$ induit l'identité sur $H_{\sim}^s(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ pour $s \leq 1$.

3) L'isomorphisme $H^s(G; H_{\sim}^0(F; \mathbb{Z})) \rightarrow H_{\sim}^s(\tilde{V}; \mathbb{Z})$, pour $s \leq 1$, commute aux transformations de revêtement. C'est une forme de la naturalité.

3 - Corollaire.

1) Etant donnés le point base y_0 dans $\tilde{V}$ et une orientation $[\tilde{V}]$ de $\tilde{V}$, il existe un isomorphisme naturel

$$\Delta(y_0, [\tilde{V}]) : \pi_2(V, x_0) \xrightarrow{\cong} H^1(G; \mathbb{Z}[G])^{(*)}$$

Naturalité : Si $f : (V, x_0) \rightarrow (V', x'_0)$ est de degré $+1^{(**)}$ et induit un isomorphisme $\varphi : G = \pi_1(V, x_0) \rightarrow G' = \pi_1(V', x'_0)$ et si $\tilde{f} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$ est un relèvement de f , alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(V, x_0) & \xrightarrow{\Delta(y_0, [\tilde{V}])} & H^1(G; \mathbb{Z}[G]) \\ f_{\#}, 2 \downarrow & & \uparrow \varphi^* \\ \pi_2(V', x'_0) & \xrightarrow{\Delta(y'_0, [\tilde{V}'])} & H^1(G'; \mathbb{Z}[G']) \end{array}$$

où $y'_0 = \tilde{f}(y_0)$ et $[\tilde{V}'] = \tilde{f}_*([\tilde{V}])$.

En particulier, $f_{\#}, 2$ est un isomorphisme et f est une équivalence d'homotopie.

(*) Il résulte de la naturalité que $\Delta(y_0, [\tilde{V}])$ est indépendant de y_0 et de $[\tilde{V}]$ au signe près.

(**) Dans le cas non-orientable, cela veut dire que $\tilde{f} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$ est de degré $+1$.

2) Si $f: (V, x_0) \rightarrow (V, x_0)$ est de degré +1 et induit l'identité sur
 $\pi_1(V, x_0)$, alors f induit l'identité sur $\pi_2(V, x_0)$.

Démonstration. 1) $\Delta(y_0, [\tilde{V}])$ est obtenu par composition de l'isomorphisme de Hurewicz $\pi_2(V, x_0) \rightarrow H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z})$, suivi de l'isomorphisme de la dualité de Poincaré $H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^1(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ et de l'isomorphisme de la proposition 2 $H_c^1(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^1(G; \mathbb{Z}[G])$. La naturalité est bien connue pour Hurewicz et Poincaré et énoncée à la proposition 2 pour le dernier isomorphisme. On en déduit que $f: V \rightarrow V$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie ; c'est donc une équivalence d'homotopie d'après un théorème de Whitehead.

2) On a $\varphi^* = \text{Id.}$; d'après le 1),

$$\Delta(y_0, [\tilde{V}]) = \varphi^* \circ \Delta(y_0, [\tilde{V}]) \circ f_{\#, 2}.$$

Donc $f_{\#, 2} = \text{Id.}$ $\diamond$

4 - Interprétation géométrique des isomorphismes

$$H^0(G; \mathcal{P}(G) / \mathcal{P}_F(G)) \rightarrow H_\infty^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2) \text{ et } H^1(G; \mathbb{Z}[G]) \rightarrow H_c^1(\tilde{V}; \mathbb{Z}).$$

4.1 - On choisit dans V une structure de CW-complexe dont les squelettes définissent la filtration servant à la suite spectrale utilisée pour la proposition 2. Son 0-squelette est réduit au point base x_0 . Son 1-squelette est un bouquet de cercles en x_0 qui détermine une famille de générateurs $g_1, \dots, g_n$ pour G . On relève cette structure en une structure de CW-complexe sur $\tilde{V}$: le 0-squelette est la fibre-base F ; les arêtes ont leurs extrémités dans la fibre-base et sont de la forme $(y, y.g_i)$.

4.2 - Une classe dans $H^0(G; \mathcal{P}(G) / \mathcal{P}_F(G))$ est représentée par une partie A de G , quasi-invariante à droite, c'est-à-dire telle que, pour tout $g \in G$, la différence symétrique $A + A.g$ est une partie finie de G . Identifions A à la partie de F $y_0.A$; A est alors le support d'une 0-cochaîne α , à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$, définie sur F , mais aussi sur $\tilde{V}$ puisque $F = \tilde{V}^{[0]}$

(l'isomorphisme de notre suite spectrale totalement dégénérée exprime exactement ce fait). Le cobord $\delta\alpha$, calculé sur $\tilde{V}$, est à support compact car il n'y a qu'un nombre fini d'arêtes ayant une extrémité dans A et l'autre dans $F - A$. Donc α est un 0-cocycle à l'infini de $\tilde{V}$, dont la classe est celle associée à la classe de A par l'isomorphisme

$$H^0(G; \mathcal{P}(G) / \mathcal{P}_f(G)) \rightarrow H^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}_2) .$$

4.3 - Soit $\xi \in C^1(G; \mathbb{Z}[G])$ une 1-cochaîne sur G . Par restriction à la famille de générateurs $g_1, \dots, g_m$ et en identifiant $\mathbb{Z}[G]$ à $H_c^0(F; \mathbb{Z})$, on peut considérer ξ comme une 1-cochaîne sur V à coefficients dans le système local $\underbrace{H^0(F; \mathbb{Z})}_c$. On lui associe le 1-cochaîne $\tilde{\xi} \in C^1(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ définie comme suit : pour une arête $(g, g\gamma)$, on pose

$$\tilde{\xi}(g, g\gamma) = \xi_\gamma(g\gamma) ;$$

elle est à support compact. Si ξ est un cocycle c'est que

$$\xi_{\gamma\gamma'} = \xi_\gamma \cdot \gamma' + \xi_{\gamma'} ,$$

cette relation implique

$$\tilde{\xi}(g, g\gamma) + \tilde{\xi}(g\gamma, g\gamma\gamma') = \tilde{\xi}(g, g\gamma\gamma') ,$$

qui signifie que $\tilde{\xi}$ est un cocycle. L'isomorphisme $H^1(G; \mathbb{Z}[G]) \rightarrow H_c^1(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ associe à la classe de ξ celle de $\tilde{\xi}$.

Remarque. Puisque $H^1(G; \overline{\mathbb{Z}[G]}) = 0$, si ξ est un cocycle, il existe $\mu \in G^0(G; \overline{\mathbb{Z}[G]})$ telle que $\delta\mu = \xi$, c'est-à-dire :

$$\xi_\gamma = \mu - \mu \cdot \gamma$$

ou

$$\xi_\gamma(g) = \mu(g) - \mu(g\gamma^{-1})$$

μ étant regardée comme une application de G dans $\mathbb{Z}$. Elle définit donc une 0-cochaîne $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{V}$. Avec la formule habituelle du cobord, on a

$\delta\tilde{\mu}(g, g\gamma) = \tilde{\mu}(g\gamma) - \tilde{\mu}(g)$. On vérifie que $\tilde{\xi} = \delta\tilde{\mu}$.

5 - Un exemple :

Supposons que $V = V_1 \cup_S V_2$, où S est une sphère orientée plongée dans V passant par le point base x_0 . L'identité de S représente alors $[S] \in \pi_2(V, x_0)$. On oriente S transversalement pour que les normales positives rentrent dans V_1 ; avec les conventions habituelles, on a ainsi fixé une orientation de V en x_0 . Soient $\tilde{S}$ un relèvement orienté de S par y_0 dans $\tilde{V}$ et $[\tilde{S}] \in H_2(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ la classe d'homologie ainsi réalisée. On oriente $\tilde{V}$ pour que la projection p envoie l'orientation de $\tilde{V}$ en y_0 sur celle de V en x_0 .

Supposons maintenant que V_1 et V_2 ne soient pas 1-connexes : $\pi_1(V_1, x_0) = G_1$, $\pi_1(V_2, x_0) = G_2$ et $G = G_1 \star G_2$. On choisit le 1-squelette de V de sorte que les arêtes soient dans V_1 ou dans V_2 ; il s'ensuit une partition de la famille de générateurs $g_1, \dots, g_n$ de G : $g_1, \dots, g_{n_1}$ engendrent G_1 , $g_{n_1+1}, \dots, g_n$ engendrent G_2 .

Soit $\tilde{\xi} \in C^1(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ la 1-cochaîne définie par $\tilde{\xi}(y_0, y_0 \cdot g_i) = 1$ si $1 \leq i \leq n_1$, $\tilde{\xi}$ étant nulle sur toutes les autres arêtes. On voit que $\tilde{\xi}$ est un cocycle qui représente la classe duale de $[\tilde{S}]$. L'élément de $H^1(G; \mathbb{Z}[G])$ correspondant à la classe de $\tilde{\xi}$ est représenté par le cocycle ξ défini de la façon suivante : on considère la partie C_1 de G formé des éléments non triviaux dont l'écriture irréductible commence dans G_1 ; alors, pour $g, \gamma \in G$,

$$\begin{aligned} \xi_\gamma(g) &= +1 \quad \text{si } g \in C_1 \cdot C_1 \cdot \gamma \\ (5.1) \quad &= -1 \quad \text{si } g \in C_1 \cdot \gamma \cdot C_1 \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \text{La classe de } \xi \text{ est } \Delta(y_0, [\tilde{V}])([S]).$$

Remarque. La partie C_1 , regardée comme partie de la fibre F , coïncide avec la partie de F qui se trouve dans $\tilde{V}$ du côté des normales positives à $\tilde{S}$. Le cocycle $\tilde{\xi}$ est le cobord de la cochaîne $\tilde{\mu}$ qui prend la valeur 1 sur tous les sommets appartenant à C_1 et la valeur 0 sur les autres. De même ξ est le cobord de $\mu \in C^0(G; \mathbb{Z}[G])$, où

$$\begin{aligned}\mu(g) &= 1 & \text{si } g \in C_1 \\ \mu(g) &= 0 & \text{si } g \in G - C_1.\end{aligned}$$

6 - Le théorème de Specker [30].

$\pi_2(V, x_0)$ est sans torsion.

Démonstration. On suppose que $\tilde{V}$ n'est pas fermée, sinon $\pi_2(V, x_0) = 0$. En démontrant le corollaire 3 1) on a indiqué un isomorphisme

$$\pi_2(V, x_0) \cong H_c^1(\tilde{V}; \mathbb{Z}).$$

D'après la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho} H_{\infty}^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^1(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

il suffit de voir que $H_{\infty}^0(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ est sans torsion et que ρ envoie le générateur de $H^0(\tilde{V}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ sur un élément indivisible de $H_{\infty}^0(\tilde{V}; \mathbb{Z})$. Or $H_{\infty}^0(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ est un sous-module de $C^0(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ contenant $H^0(\tilde{V}; \mathbb{Z})$ et le générateur de ce dernier est la cochaîne qui prend la valeur 1 sur tous les sommets. $\triangleleft$

Post-scriptum. J'espère que le nombre de fautes de signe ne dépasse pas dans ce qui précède la moyenne habituelle que l'on rencontre dans les diagrammes prétendus commutatifs de la littérature cohomologique. De toutes façons un métathéorème affirme que, jusqu'à un certain point, les fautes de signe sont sans importance.

RÉFÉRENCES

- [C1] CERF J., Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), p. 227-380.
- [C2] CERF J., Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$), Lect. Notes in Math. 53, Springer, 1968.
- [C3] CAPPELL S., A splitting theorem for manifolds and surgery groups, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), p. 281-286.
- [C4] CAPPELL S., Splitting obstructions for Hermitian forms and manifolds with $\mathbb{Z}_2 \subset \pi_1$, IHES, Bures/Yvette, 1973 (preprint).
- [C5] CERF J., La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et la théorie de la pseudo-isotopie, Pub. Math. n° 39, IHES, 1970.
- [E1] EPSTEIN D.B.A., Projective planes in 3-manifold, Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961), p. 469-484.
- [E2] EPSTEIN D.B.A., Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math. 115 (1966), p. 83-107.
- [F1] FEUSTEL C.D., A splitting theorem for closed orientable 3-manifolds, Topology 11 (1972), p. 151-158.
- [G1] GLUCK H., The embedding of two-spheres in four-spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), p. 586-589.
- [G2] GRUSHKO I., On the bases of a free product of groups, Mat. Sbornik 8 (1940), p. 169-182.
- [G3] GROSS J.L., Manifolds in which the Poincaré conjecture is true, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), p. 177-190.
- [G4] GRAMAIN A., Sur le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 6 (1973), p. 53-66.
- [H1] HEIL W., On $\mathbb{P}^2$ -irreducible 3-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), p. 772-775.

- [H2] HAKEN W., Ein Verfahren zur Aufsplattung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten, Math. Z. 76 (1961), p. 427-467.
- [H3] HAKEN W., Über das Homöomorphie problem der 3-Mannigfaltigkeiten I., Math. Z. 80 (1962), p. 89-120.
- [H4] HIRSCH M., SMALE S., On involutions of 3-sphere, Amer. J. Math. 81 (1959), p. 893-900.
- [H5] HATCHER A., WAGONER J., Pseudo-Isotopies for compact manifolds, Astérisque vol. 6, Soc. Math. France, 1973.
- [H6] HENDRIKS H., Applications de la théorie d'obstruction en dimension 3, C.R. Acad. Sci. Paris 276 Série A (1973), p. 1101-1104.
- [H7] HENDRIKS H., Une obstruction pour scinder une équivalence d'homotopie en dimension 3, (à paraître).
- [H8] HENDRIKS H., LAUDENBACH F. Scindement d'une équivalence d'homotopie en dimension 3, C.R. Acad. Sci. Paris 276 série A (1973), p. 1275-1278.
- [H8'] (Détails à paraître).
- [H9] HILTON P.J., On the homotopy groups of the union of spheres, J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 154-171.
- [H10] HOPF H., Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104 (1931), p. 637-665.
- [K1] KUROSH A.G., The theory of groups, vol. II, Chelsea Pub. Comp., New York, 1960 (p. 26).
- [K2] KNESER H., Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, JB. Deutsch. Math. Verein. 38 (1929), p. 248-260.
- [L1] LIVESAY G., Involutions with two fixed points on the three-sphere, Ann. of Math. (2) 78 (1963), p. 582-593.
- [L2] LAUDENBACH F., Disjonction homotopique et disjonction isotopique : la première obstruction, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. (4) 5 (1972), p. 397-422.
- [L3] LAUDENBACH F., Sur les 2-sphères d'une variété de dimension 3, Ann. of Math. 97 (1973), p. 57-81.

- [L4] LAUDENBACH F., POENARU V., A note on 4-dimensional handlebodies, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), p. 337-344.
- [M1] MILNOR J., Microbundles I., Topology 3 (1964) Suppl. I, p. 53-80.
- [M2] MILNOR J., A unique decomposition theorem for 3-manifolds, Amer. J. Math. 84 (1962), p. 1-7.
- [M3] MAGNUS W., KARRASS A., SOLITAR D., Combinatorial group theory, Interscience, 1966.
- [M4] MOÏSE E., Affine structures in 3-manifolds V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, Ann. of Math. 56 (1952), p. 96-114.
- [M5] MORLET C., Topologie des variétés semi-linéaires, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série 1 (1968), p. 313-394.
- [M6] MORLET C., Plongements et automorphismes de variétés, Cours Peccot, Collège de France, Paris, 1969.
- [M7] MILNOR J., Whitehead torsion, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), p. 358-426.
- [N1] NIELSEN J., Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen, Math. fys. Meddelelser Kgl. Danske Vidensk Selsk. XV 1 (1937), p. 1-75.
- [P1] PAPAKYRIAKOPOULOS C., On Dehn's lemma and the asphericity of knots, Ann. of Math. 66 (1957), p. 1-26.
- [P2] PONTRJAGIN L.S., A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere, Mat. Sbornik (9) 51 (1941), p. 331-363.
- [R1] RHAM G. de, MAUMARY S., KERVAIRE M., Torsion et type simple d'homotopie, Lect. Notes in Math. 48, Springer, 1967.
- [S1] SCOTT G.P., On sufficiently large 3-manifolds, Quart. J. Math. Oxford (2) 23 (1972), p. 159-172.

- [S2] SPECKER E., Die erste Cohomologiegruppe von $\overset{II}{\text{Überlagerungen}}$ und Homotopie - Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, Comment. Math. Helv. 23 (1949), p. 303-333.
- [S3] STALLINGS J., On fibering certain 3-manifolds, Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice Hall, 1962.
- [S4] STALLINGS J., On the loop theorem, Ann. of Math. 72 (1960), p. 12-19.
- [S5] STALLINGS J., Group theory and three-dimensional manifolds, Yale Univ. Press, 1971.
- [S6] STALLINGS J., Whitehead torsion of free products, Ann. of Math. 82 (1965), p. 354-363.
- [S7] STALLINGS J., A topological proof of Grushko's theorem on free products, Math. Z. 90 (1965), p. 1-8.
- [S8] SMALE S., Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), p. 621-626.
- [S9] SHAPIRO A., WHITEHEAD J.H.C.. A proof and extension of Dehn's lemma, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), p. 174-178.
- [S10] SWARUP G.A., On embedded spheres in 3-manifolds, Math. Ann. 203 (1973), p. 89-102.
- [S11] SIEBENMANN L., Le fibré tangent, cours Orsay 1966-67, notes publiées par le Centre Mathématique de l'Ecole Polytechnique.
- [W1] WALDHAUSEN F., On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), p. 56-88.
- [W2] WALDHAUSEN F., Whitehead groups of generalized free products, Proc. conf. alg. K-theory, Seattle 1972, Lect. Notes in Math., Springer , 1973.
- [W3] WALDHAUSEN F., Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, Topology 6 (1967), p. 505-517.
- [W4] WALL C.T.C., On simply-connected 4-manifolds, J. London Math. Soc. 39 (1964), p. 141-149.
- [W5] WHITEHEAD J.H.C., On 2-spheres in 3-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 64(1958), p. 161-166.

- [W6] WHITEHEAD J.H.C., The immersion of an open 3-manifold in Euclidean 3-space, *Proc. London Math. Soc.* 11 (1961), p. 81-90.
- [W7] VAN DER WAERDEN B.L., Free products of groups, *Amer. J. Math.* 70 (1948), p. 527-528.

ABSTRACT

This paper is an expended version of a set of lectures (the "cours Pecot") given at Collège de France in the Spring of 1973.

The first part of the paper (chapter II) is an account of Waldhausen's theory of (P_2) -irreducible sufficiently large 3-manifolds. For these manifolds any homotopy equivalence is homotopic to a diffeomorphism and two homotopic diffeomorphisms are isotopic. The presentation given here includes some improvements due to Scott. In II §7, it is shown that (modulo Smale's conjecture $\pi_1(\text{Diff}(D^3 \text{ mod } S^2)) = 0$) a 1-parameter version of Waldhausen's theory is still true : for a Waldhausen manifold V , a loop in $\text{Diff}(V)$ which is trivial in the space of self-homotopy equivalences is already trivial in $\text{Diff}(V)$.

Chapter III is an account of the author's theorem stating that, on a 3-manifold V "satisfying the Poincaré conjecture" (which means that V does not contain any fake 3-disk), two embedded 2-spheres which can be disjointed by a homotopy can also be disjointed by an isotopy [L3]. This theorem implies that any diffeomorphism of $\#_p S^1 \times S^2$ homotopic to the identity (modulo base point) is isotopic to the identity (modulo base point) ; unlike Waldhausen's theorem, this result cannot be parametrized. More precisely, one has an exact sequence

$$0 \rightarrow \bigoplus_p \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(\#_p S^1 \times S^2, x_0)) \rightarrow \text{Aut}(\star_p \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

where the left term comes from rotations around $\text{pt} \times S^2 \subset S^1 \times S^2$.

With respect to [L3], the following new features are included :

- 1) A simple version of the "obstruction theory" is given.
- 2) The following reformulation of a theorem of Laudenbach-Poenaru [L4] :
If W^4 is a compact bounded 4-manifold such that $W^4 \# (\#_q D^2 \times S^2) = \#_{p+q} D^2 \times S^2$,
then $W^4 = \#_p D^2 \times S^2$ and $W^4 \cup (\#_p S^1 \times D^3) = S^4$.

The main theorem of chapter III implies that in a manifold "satisfying the Poincaré conjecture" two embedded 2-spheres which are homotopic are also isotopic.

This result has a purely algebraic counterpart, which is given in chapter IV. Very roughly speaking it is shown that two splittings of a group G as a free product are "the same" if and only if the partitions which these splittings induce on the space of ends of G are the same. (One has to add that the vague statement given above is only "generally" true ; there are a number of exceptions which can be explicitly listed).

Chapter IV contains also the proof of the uniqueness of the solution of the "Kneser problem" (the existence part is a well known theorem of J. Stallings). Let us recall that the "Kneser problem" is the following : one gives a map $\varphi_0 : V \rightarrow K(G_1, 1) \vee_{x_0} K(G_2, 1)$ where V is a closed 3-manifold, $K(G_i, 1)$ Eilenberg-MacLane spaces, $\varphi_0 \# : \pi_1(V) \rightarrow G_1 \star G_2$ an isomorphism. One asks for a homotopy φ_t such that $\varphi_1^{-1}(x_0)$ is an embedded 2-sphere.

This leads us to chapter V (which is an account of a joint work with Hendriks). The main result is a splitting theorem, of which we give here only the following special case : if $\varphi_0 : V \rightarrow W \#_S W'$ is a homotopy equivalence of orientable closed 3-manifolds, φ_0 is homotopic to φ_1 which splits along S .

This is related to the following result, which is proved in [H8 bis] : let V be a closed 3 manifold, which does not contain an 2-sided embedded $\mathbb{P}^2$ and consider $\pi_2(V)$ regarded as a system of local coefficients. Then

$$a) \quad H^2(V; \pi_2(V)) = \mathbb{Z} \text{ or } 0$$

$$b) \quad H^2(V; \pi_2(V)) = \mathbb{Z} \oplus \pi_1(V) \text{ contains a free subgroup of finite index.}$$