

Astérisque

FRÉDÉRIC PHAM

Courbes discriminantes des singularités planes d'ordre 3

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 363-391

http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__363_0

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COURBES DISCRIMINANTES DES SINGULARITES PLANES D'ORDRE 3

Frédéric PHAM

§ 0 . INTRODUCTION .

Par "singularité" nous entendons un germe de fonction analytique $f_0 \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ ayant un point critique isolé à l'origine. Par "courbe discriminante" d'une singularité nous entendons le germe de courbe plane D décrit dans le plan des (t, u) par les valeurs critiques u d'une déformation "assez générale" à un paramètre t de f_0 : une déformation à un paramètre de f_0 est un élément $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, t\}$ tel que $f(x, 0) = f_0(x)$; la courbe discriminante D d'une telle déformation est la courbe * obtenue en éliminant $x_1, \dots, x_n$ entre les équations

$$\begin{aligned} u &= f(x_1, \dots, x_n) \\ f'_{x_1}(x_1, \dots, x_n, t) &= 0 \\ &\dots \\ f'_{x_n}(x_1, \dots, x_n, t) &= 0 \end{aligned}$$

Si la déformation est choisie "assez générale" (en un sens qu'il est inutile de préciser ici) D est un germe de courbe plane réduite dont le type topologique ne dépend pas du choix de la déformation. C'est ce type topologique que nous nous proposons de déterminer (par des calculs explicites à la Puiseux) pour toute "singularité plane d'ordre 3" c.à.d. toute singularité de la forme

$$f_0 \in \mathbb{C}\{x, y\} \quad , \quad \text{ordre}(f_0) = 3$$

(les singularités planes d'ordre 2 donnent les sections planes des queues d'aronde qui sont bien connues).

De façon tout à fait générale, la courbe discriminante D d'une singularité f_0 peut être considérée comme une section plane générique (passant par l'origine) de l'hypersurface discriminante d'une déformation verselle de f_0 . Grâce aux résultats connus sur la géométrie de ces hypersurfaces (cf. exposés de TEISSIER [1]) on peut faire les remarques générales suivantes ** :

*) Appelée "diagramme de Cerf" par les topologues.
 **) Ces remarques ont été glanées dans des discussions à Cargèse.

- 1°) D est transverse à l'axe des u .
 2°) N'importe quel déplacement du plan de section dans l'espace des paramètres de la déformation verselle fournit une déformation de la courbe D telle que la courbe déformée reste transverse à la direction u dans un voisinage convenable de l'origine (cf. Fig. 1)

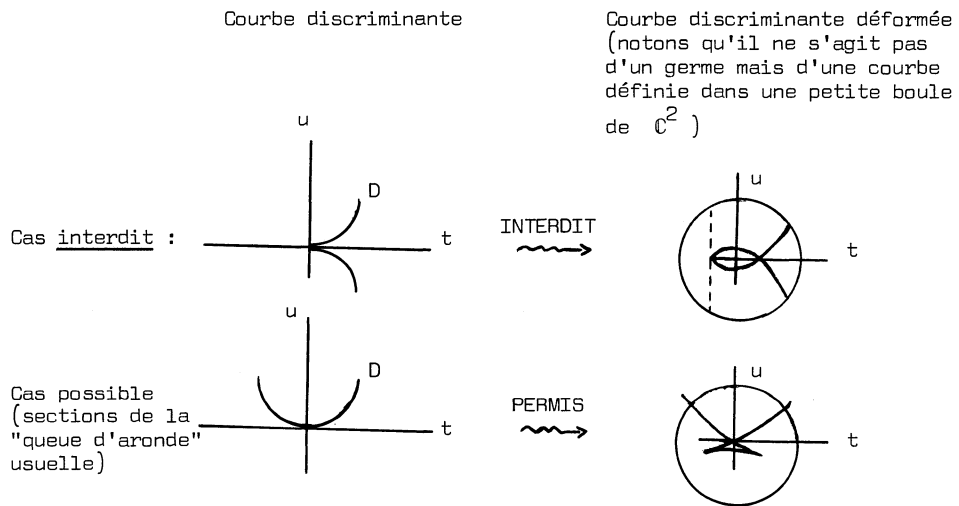


Fig. 1

- 3°) Pour un choix "générique" du déplacement de 2°), la courbe déformée a pour seules singularités des "cusps" (points de rebroussement ordinaires) et des points doubles ordinaires. Pour la distinguer du germe D nous appellerons "courbe discriminante déployée" cette courbe (définie dans une boule convenable de $\mathbb{C}^2$), section plane de l'hypersurface discriminante par un plan générique ne passant pas par l'origine.
- 4°) La multiplicité de D est égale au nombre μ de Milnor de la singularité f_0 :

$$m(D) = \mu(f_0) .$$

5°) Notant aussi D l'équation réduite de D , supposons celle-ci donnée par un polynôme de Weierstrass distingué en u :

$$D \in \mathbb{C}\{t\}[u] .$$

Soit $\Delta = \text{Discr } D \in \mathbb{C}\{t\}$ le discriminant de ce polynôme.

On a la relation suivante :

$$\text{ord } \Delta = \mu(D) + m(D) - 1 = \mu(D) + \mu(f_0) - 1$$

(formule connue [cf. Appendice] reliant l'ordre du discriminant d'un germe de courbe plane à son nombre de Milnor et à sa multiplicité).

6°) Soit d resp. k le nombre de points doubles resp. de cusps de la "courbe discriminante déployée". On a la formule

$$\text{ord } \Delta = 2d + 3k$$

(obtenue comme conséquence de 2°) et 3°), en remarquant qu'une déformation ne change pas le nombre de zéros de Δ comptés avec multiplicité, et que la multiplicité du discriminant d'un point double resp. d'un cusp vaut 2 resp. 3).

Il résulte de ce qui précède que la connaissance du type topologique de la courbe discriminante D , en permettant de calculer $\mu(D)$ donc $\text{ord } \Delta$, donne des renseignements sur le nombre de cusps et de points doubles de la "courbe discriminante déployée". Or, notre calcul montrera l'existence de déformations à type topologique constant de la singularité f_0 au cours desquelles le type topologique de D (et par conséquent $\mu(D)$) varie. On en déduira notamment que le nombre de cusps k de la courbe discriminante déployée n'est pas un invariant topologique de la singularité *. Ce fait me rend sceptique sur la conjecture de BRIESKORN [2] selon laquelle le groupe fondamental du complément de l'hypersurface discriminante d'une déformation verselle serait un invariant topologique de la singularité (comparer à [3]).

Les phénomènes que nous venons d'évoquer font évidemment penser au problème de l' "équisingularité universelle" ([4], [5]). Sans entrer dans les détails de ce

*) Par conséquent, contrairement à ce que TEISSIER avait affirmé un jour à Cargèse, il n'existe pas de formule permettant de calculer k à partir de $\mu(f_0)$.

problème encore mystérieux, notons simplement ici que les "multiplicités jacobiniennes" successives introduites dans [5] comme invariants numériques d'équisingularité universelle sont, dans le cas particulier des singularités planes d'ordre 3, entièrement déterminées par les deux premières d'entre elles, μ et $\sigma - 1$ (avec les notations du § 1); il est donc encourageant de constater que le type topologique de la courbe discriminante s'exprime, dans le tableau du § 1, en fonction des invariants μ et σ .

§ 1. EXPOSE DES RESULTATS.

Toute singularité plane d'ordre 3 est analytiquement équivalente* à une singularité de la forme

$$f_0 = y^3 - P_0 y + Q_0$$

où P_0 et Q_0 sont des éléments de $\mathbb{C}\{x\}$ (qu'on pourra supposer être des polynômes) d'ordre ≥ 2 et ≥ 3 respectivement. Dans les calculs, ces ordres seront notés

$$\begin{aligned} \text{ord } P_0 &= \lambda + 1 & \text{c.à.d.} & \quad \lambda = \text{ord } P'_0 \\ \text{ord } Q_0 &= \nu + 1 & \text{c.à.d.} & \quad \nu = \text{ord } Q'_0. \end{aligned}$$

Il faut bien remarquer que les entiers λ et ν ne sont pas en général des invariants analytiques de la singularité, et n'interviennent que comme intermédiaires de calcul. Les résultats du calcul sont exprimés dans le tableau ci-dessous en fonction de deux autres entiers μ et σ , qui eux sont des invariants analytiques, définis de la façon bizarre suivante :

$$\begin{aligned} \mu &= \text{ord } (3 Q_0'^2 - P_0 P_0'^2) \\ \sigma &= \inf (\lambda + 1, \nu) \end{aligned}$$

Invariance de μ :

Il résultera du calcul que μ n'est autre que la multiplicité de D , c.à.d. ($\S 0, 4^\circ$) le nombre de Milnor de f_0 (exercice : trouver une démonstration directe). μ est donc non seulement un invariant analytique mais même un invariant topologique de f_0 .

*) Tout au moins au sens de la " $\mathcal{K}$ -équivalence" de Mather (isomorphisme analytique de la fibre ($f_0 = 0$)).

Invariance de σ :

Un calcul immédiat montre que la deuxième extension jacobienne de f_0 (idéal engendré par f_0 et par toutes ses dérivées partielles d'ordre ≤ 2) est de la forme $(y, x^{\sigma-1})_0$. Le nombre $\sigma - 1$ est donc la colongueur de cet idéal déduit canoniquement de f_0 , donc c'est un invariant analytique (on verra bientôt que ce n'est pas un invariant topologique).

Ceux qui connaissent la théorie du symbole de Thom-Boardman reconnaîtront immédiatement en σ une façon d'exprimer le symbole de Thom-Boardman de f_0 (celui-ci est égal à $(2, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{\sigma-2 \text{ fois}})$)

Résultats : Type topologique de la courbe discriminante D .

Ce type topologique peut se lire dans le (les) développement(s) de Puiseux de u en fonction de t , dont on se contentera d'écrire les termes caractéristiques.

2 | Dans le tableau ci-dessous l'écriture $t^{\frac{\alpha}{\beta}}$ représente la collection de toutes les racines de l'équation $x^\beta - t^\alpha = 0$ dans une clôture algébrique de $\mathbb{C}((t))$: lorsque α et β ne sont pas premiers entre eux cela correspond à plusieurs développements de Puiseux non conjugués (c.à.d. plusieurs composantes irréductibles de D), et il faut bien se garder d'interpréter $\frac{\alpha}{\beta}$ comme une "fraction" qu'on aurait le droit d'écrire sous forme irréductible.

La dernière colonne du tableau indique le type topologique de la courbe (f_0) : on observera que ce dernier est déterminé par le type topologique de la courbe discriminante mais ne le détermine pas forcément (sauf dans le 3° cas du tableau). Dans les deux derniers cas du tableau, où la courbe (f_0) est forcément réductible, son type topologique est indiqué par la notation $\Gamma_1 \cup_{\beta} \Gamma_2^{\alpha}$, où :

Γ_1 désigne une courbe lisse ;

Γ_2^{α} désigne une courbe de type $y^2 - x^{\alpha} = 0$;

le signe $\cup_{\beta}$ signifie que les deux courbes que l'on unit

ont une multiplicité d'intersection égale à β .

<u>Différents cas</u> nombre de Milnor / symbole μ / σ	Relations éventuelles avec les autres nombres	<u>Type topologique de la</u> <u>courbe discriminante D</u> (termes caractéristiques de ses développements de Puiseux)	<u>Type topologique de la</u> <u>courbe</u> (f_0) (le signe $\sim^{TOP}$ symbolise l'équivalence topologique)
<u>1er cas</u> $\mu < 3\sigma - 2 \implies$	$\mu = 2\nu$	$u = t^{\frac{\nu+1}{\nu}} + t^{\frac{3\sigma}{2\nu}}$	$\implies (f_0) \sim^{TOP} (y^3 - x^{\nu+1})$
<u>2° cas</u> $\mu = 3\sigma - 2 \implies$	$\sigma = \lambda + 1$	$u = t^{\frac{\mu+2}{\mu}}$ c.à.d. $u^\mu - t^{\mu+2} = 0$	$\implies (f_0) \sim^{TOP} (y(y^2 - x^\sigma))$ c.à.d. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2^\sigma$ (<u>contact maximal</u>)
<u>3° cas</u> $\mu > 3\sigma - 2 \implies$	$3\sigma - 2 = 2\nu$ $\sigma = \lambda + 1$	2 branches $\begin{cases} u = t^{\frac{\mu-\nu+1}{\mu-\nu}} \\ u = t^{\frac{\nu+1}{\nu}} \end{cases} \iff$	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2^\rho$ avec $\rho = \sigma + (\mu - 2\nu)$ (<u>contact non maximal</u>)

Calcul de $\mu(D)$: La formule suivante est valable dans les trois cas :

$$(\mu(D)) \qquad \mu(D) = \mu(\mu - 1) + 3(\sigma - 1)$$

Preuve de la formule $((\mu(D)))$

La façon la plus commode de calculer le nombre de Milnor d'une singularité de courbe plane est de le déduire de l'arbre des points infiniment voisins ^{*} de cette singularité, grâce au lemme suivant (démontré en Appendice).

LEMME μ . - Soient Γ_0 un germe de courbe plane réduite, $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille des points infiniment voisins de Γ_0 (A est "l'arbre des points infiniment voisins"), de multiplicités respectives m_α ; alors

$$\mu(\Gamma_0) = \left(\sum_{\alpha \in A} m_\alpha (m_\alpha - 1) \right) - (r - 1)$$

où r désigne le nombre de composantes irréductibles de Γ_0 (nombre de "branches" de l'arbre A).

Il sera parfois commode d'utiliser ce lemme sous la forme équivalente suivante.

LEMME μ' . - Soit Γ_0 un germe de courbe plane réduite de multiplicité m_0 ayant r_0 tangentes distinctes ; soit $\Gamma' = \Gamma'_{0_1} \perp \dots \perp \Gamma'_{0_{r_0}}$ le

"multigerme" de courbe plane, transformée stricte de Γ_0 par l'éclatement de centre O ; alors,

$$\mu(\Gamma_0) - \sum_{k=1}^{r_0} \mu(\Gamma'_{0_k}) = m_0(m_0 - 1) - (r_0 - 1)$$

Appliquons donc ce lemme à la courbe D .

1er cas : L'arbre des points infiniment voisins de D commence par un "tronc unique" constitué par 1 point de multiplicité $\mu = 2v$, suivi de v points de multiplicité 2 ; après quoi, l'éclatement de la succession de points ci-dessus donne une singularité de type $\Gamma_2^{(3\sigma-2)} - \mu$. On trouve donc par application répétée du lemme μ' :

*) Cf. par exemple [6], Chap. 1. On trouvera p. 10 de [6] un énoncé qui n'est autre que le "Lemme μ " dans le cas particulier d'un germe de courbe irréductible ($r=1$). Le nombre de Milnor y apparaît comme 2 fois "la diminution de genre due à la singularité".

$$\mu(D) = 2\nu(2\nu - 1) + \underbrace{2 \times 1 + \dots + 2 \times 1}_{\nu \text{ fois}} + \mu(\Gamma_2^{(3\sigma-2)-\mu})$$

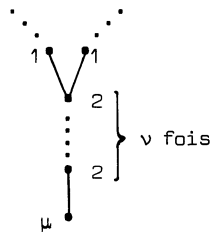
ce qui, compte tenu du fait facile à vérifier que $\mu(\Gamma_2^\alpha) = \alpha - 1$, donne bien la formule $(\mu(D))$ avec $\mu = 2\nu$.

2ème cas : $D : u^\mu - t^{\mu+2} = 0$. Sachant, comme on le vérifie facilement même sans l'aide du lemme μ , que le nombre de Milnor d'une singularité de type $\Gamma_\mu^\alpha \sim (u^\mu - t^\alpha)$ est égal à $(\mu - 1)(\alpha - 1)$, on trouve ici

$$\mu(D) = (\mu - 1)(\mu + 1)$$

ce qui correspond bien à la formule $(\mu(D))$ dans le cas où $3\sigma - 2 = \mu$.

3ème cas : L'arbre des points infiniment voisins de D a la forme suivante



(les chiffres indiquent les multiplicités m_α des points infiniment voisins).

On trouve donc en appliquant le lemme μ :

$$\mu(D) = \mu(\mu - 1) + \underbrace{2 \times 1 + \dots + 2 \times 1}_{\nu \text{ fois}} - 1$$

c.à.d. la formule $(\mu(D))$ avec $3\sigma - 2 = 2\nu$.

COROLLAIRE : Formule donnant $\text{ord } \Delta$.

En appliquant le 5°) du § 0, on déduit de la formule $(\mu(D))$ la formule suivante :

$$(\text{ord } \Delta) \quad \text{ord } \Delta = \mu^2 - 1 + 3(\sigma - 1)$$

Exemples de déformations à type topologique constant au cours desquelles la courbe discriminante change de type topologique :

D'après la formule $(\mu(D))$, il suffit d'exhiber des déformations au cours desquelles μ ne change pas tandis que σ varie.

Exemple 1 :

Comparons les deux singularités suivantes

$$f_0 = y^3 + x^6, \text{ qui correspond au 1er cas } (\mu = 10, \sigma = 5)$$

$$f_s = y^3 + sx^4y + x^6 \quad (s \neq 0, s^3 \neq 27/4) \text{ (2° cas : } \mu = 10, \sigma = 4 \text{)}$$

La seconde est une déformation de la première, déformation à type topologique constant puisque $\mu(f_0) = \mu(f_s) = 10$. Pourtant, les courbes discriminantes $D(f_0)$ et $D(f_s)$ ne sont pas topologiquement équivalentes :

$$D(f_0) : u = t^{\frac{6}{5}} + t^{\frac{15}{10}} \quad (\text{irréductible, deux paires caractéristiques de Puiseux } (6, 5) \text{ et } (15, 2));$$

$$D(f_s) : u = \pm t^{\frac{6}{5}} \quad (\text{deux composantes irréductibles n'ayant chacune qu'une paire caractéristique de Puiseux } (6, 5)).$$

La formule (ord Δ) donne :

$$\text{ord } \Delta(f_0) = 99 + 12 = 111$$

$$\text{ord } \Delta(f_s) = 99 + 9 = 108$$

$$\text{donc } \text{ord } \Delta(f_0) - \text{ord } \Delta(f_s) = 3.$$

Compte tenu du § 0 6°), et de la semi-continuité des nombres d et k lors d'une déformation (semi-continuité facile à déduire du § 0 2°) et 3°)), on en déduit que la courbe discriminante déployée de la singularité f_0 a nécessairement un cusp de plus (et le même nombre de points doubles) que la courbe discriminante déployée de la singularité f_s .

Exemple 2 :

$$f_0 = y^3 + x^7 \quad (\text{1er cas : } \mu = 12, \sigma = 6)$$

$$f_s = y^3 + sx^5y + x^7 \quad (s \neq 0) \quad (\text{1er cas : } \mu = 12, \sigma = 5)$$

$$D(f_0) : u = \begin{cases} t^{\frac{7}{6}} + t^{\frac{9}{6}} \\ t^{\frac{7}{6}} + it^{\frac{9}{6}} \end{cases} \quad (\text{deux composantes irréductibles n'ayant chacune qu'une paire caractéristique de Puiseux } (7, 6))$$

$$D(f_s) : u = t^{\frac{7}{6}} + t^{\frac{15}{12}} \quad (\text{irréductible, deux paires caractéristiques de Puiseux } (7, 6) \text{ et } (15, 2)).$$

$$\text{ord } \Delta(f_0) = 147 + 15 = 162$$

$$\text{ord } \Delta(f_s) = 147 + 12 = 159$$

Là encore, $\text{ord } \Delta(f_0) - \text{ord } \Delta(f_s) = 3$, de sorte que la courbe discriminante déployée acquiert un cusp supplémentaire quand s tend vers 0.

ADDENDUM : Formule donnant le nombre de cusps.

On montrera au § 3 que le nombre de cusps k de la courbe discriminante déployée est donné par la formule

$$k = \mu + \sigma - 2.$$

Compte tenu de la formule $(\text{ord } \Delta)$ ci-dessus, et de la formule $6^\circ)$ du § 0, on en déduit que le nombre d de points doubles de la courbe discriminante déployée est donné par la formule

$$d = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2}.$$

Dans l'exemple 1 ci-dessus cela donne 13 et 12 cusps (pour f_0 et f_s respectivement) et 36 points doubles, dans l'exemple 2 16 et 15 cusps et 55 points doubles !

§ 2 . CALCUL DE LA COURBE DISCRIMINANTE .

C'est un fait général que toute déformation d'une singularité $f_0(x_1, \dots, x_n)$ est analytiquement équivalente (pour n'importe quelle notion raisonnable d'équivalence) à une déformation $f(x_1, \dots, x_n, t)$ linéaire en t et telle que $f(0, \dots, 0, t) = 0$. Nous pouvons, en particulier, supposer ici que la déformation à un paramètre de la singularité

$$f_0 = y^3 - P_0 y + Q_0 \quad (P_0, Q_0 \in \mathbb{C}\{x\} ; \text{ord } P_0 = \lambda + 1 \geq 2 , \\ \text{ord } Q_0 = \nu + 1 \geq 3)$$

est de la forme

$$f = y^3 - Py + Q, \quad \begin{aligned} P &= P_0 + tp \\ Q &= Q_0 + tq \\ P &= P_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots \in \mathbb{C}\{x\} \\ q &= q_1 x + q_2 x^2 + \dots \in \mathbb{C}\{x\} \end{aligned}$$

(pas de terme constant dans q) .

Calculer la courbe discriminante d'une telle déformation signifie éliminer x, y entre les équations

$$(0) \quad u = y^3 - Py + Q$$

$$(1) \quad f'_x = -P'y + Q' = 0$$

$$(2) \quad f'_y = 3y^2 - P = 0$$

L'élimination de y entre (1) et (2) donne

$$(I) \quad 3Q'^2 - PP'^2 = 0$$

que nous considérerons comme une équation à une inconnue x à coefficients dans $\mathbb{C}\{t\}$.

1ère étape : Résoudre l'équation (I).

On remarquera qu'en faisant $t = 0$ dans l'équation (I) on trouve le terme $3Q_0'^2 - P_0P_0'^2$, dont l'ordre en x est le nombre que nous avons appelé μ . L'équation (I) est donc équivalente à un polynôme de Weierstrass de degré μ en x , admettant des racines $x(t)$ dans $\mathbb{C}\{t^{1/\mu}\}$, qu'on pourra calculer explicitement par la méthode de Newton (Puiseux).

Supposons que pour toute racine $x(t)$ de l'équation (I) l'élément $P'(x(t), t) = P'_0(x(t)) + tp'(x(t))$ soit non nul dans $\mathbb{C}\{t^{1/\mu}\}$ (le calcul montrera que c'est bien le cas pour les déformations "génériques" considérées). Alors la division par P' a un sens dans le corps des fractions $\mathbb{C}((t^{1/\mu}))$ de $\mathbb{C}\{t^{1/\mu}\}$, nous permettant d'écrire

$$(1) \quad : \quad y = \frac{Q'}{P'} \quad (\text{dans } \mathbb{C}((t^{1/\mu}))) ;$$

$$(2) \quad : \quad y^2 = \frac{P}{3} \quad (\text{ce qui montre qu'en fait } y \in \mathbb{C}\{t^{1/\mu}\}).$$

En reportant ces deux équations dans

$$(0) \quad : \quad u = (y^2 - P)y + Q \quad \text{on trouve}$$

$$(II) \quad u = -\frac{2}{3} \frac{P}{P'} Q' + Q$$

ce qui constitue la

2ème étape : Reporter les solutions $x = x(t)$ de l'équation (I)
dans l'équation (II) .

On obtient ainsi la courbe discriminante sous forme de développement de Puiseux $u = u(t) \in \mathbb{C}\{t^{1/\mu}\}$.

Chaque étape du calcul nous amènera à postuler certaines inéquations sur les coefficients de bas degré de p et q , ce qui correspondra à des conditions génériques sur le choix de la déformation.

1ère étape
=====

$$(I) \quad 3(Q'_0 + tq')^2 - (P'_0 + tp)(P'_0 + tp')^2 = 0$$

$$\text{c.à.d.} \quad A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 = 0 \quad , \quad \text{avec}$$

	ordre en x
$A_0 = 3Q'_0{}^2 - P'_0 P'_0{}^2$	μ (définition)
$A_1 = 6q'Q'_0 - pP'_0{}^2 - 2p'P'_0 P'_0$	$\inf(v, 2\lambda)$ moyennant une condition générique sur q_1 et p_0
$A_2 = 3q'^2 + O(x)$	<u>unité</u> pourvu que $q_1 \neq 0$ (condition générique)
$A_3 = pp'^2$	<u>unité</u> pourvu que $p_0 p_1 \neq 0$

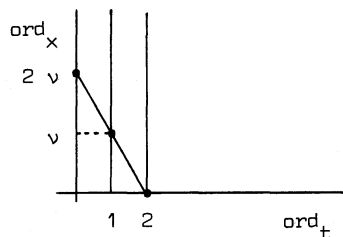
Cas a) $2 \text{ord}_x Q'_0 < 3 \text{ord}_x P'_0 \Leftrightarrow 2v < 3\lambda + 1 \Leftrightarrow \text{ord}_x Q'_0{}^2 < \text{ord}_x P'_0 P'_0{}^2$

Alors,

$$\text{ord}_x A_0 = \mu = 2v$$

$$\text{ord}_x A_1 = v \quad (\text{car } \lambda \geq 1, 2v < 3\lambda + 1 \Rightarrow v < 2\lambda) .$$

Le polygône de Newton de (I) a la forme



et en ne gardant de (I) que les termes situés sur l'unique côté de ce polygône on trouve l'équation "approchée" :

$$(I)_0 : (Q'_0 + tq')^2 = 0$$

qui admet pour solution

$$x_0 = t_1 \cdot a(t_1) \quad (t_1 = t^{1/v}, \quad a = \text{unité de } \mathbb{C}\{t_1\}) .$$

D'après la méthode de Newton, on pourra chercher la solution exacte de (I) sous la forme

$$x = t_1(a(t_1) + x_1) = x_0 + t_1 x_1 .$$

Notons que par cette substitution, le développement de Taylor

$$Q'_0(x) + tq'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (Q_0^{(n+1)}(x_0) + tq^{(n+1)}(x_0)) \frac{(t_1 x_1)^n}{n!}$$

donne, en se rappelant que $t = t_1^v$ et que $Q'_0(x_0) + tq'(x_0) = 0$:

$$Q'_0(x) + tq'(x) = Q_0''(x_0)t_1 x_1 + \dots \approx t_1^{v-1} \cdot t_1 x_1 = t_1^v x_1 ,$$

où le signe $\approx$ veut dire l'égalité modulo multiplication par une unité de $\mathbb{C}\{t_1, x_1\}$.

Ainsi, le terme par lequel commence l'équation (I) s'écrit :

$$3(Q'_0 + tq')^2 \approx t_1^{2v} x_1^2 .$$

Examinons l'autre terme, que nous écrirons

$$(P_0 + tp)(P'_0 + tp')^2 = \sum_{\alpha=0}^3 B_{\alpha} t^{\alpha} .$$

En nous rappelant que $t^\alpha x^\beta \approx t_1^{v\alpha + \beta}$ dressons le tableau

α	B_α	$\beta = \text{ord}_x B_\alpha$	$v\alpha + \beta$
0	$P_0 P_0'^2$	$3\lambda + 1$	$3\lambda + 1$
1	$p p_0'^2 + 2p' p_0 p_0'$	$2\lambda + 1$	$v + 2\lambda + 1$
2	$2pp'p_0' + p'^2 p_0$	λ	$2v + \lambda$
3	pp'^2	0	$3v$

(la colonne β est établie moyennant l'hypothèse générique $p_0 p_1 \neq 0$).

Trois cas sont à distinguer :

si $\lambda < v$ on vérifie que de tous les nombres de la dernière colonne du tableau ci-dessus, $3\lambda + 1$ est le plus petit (strictement) ;

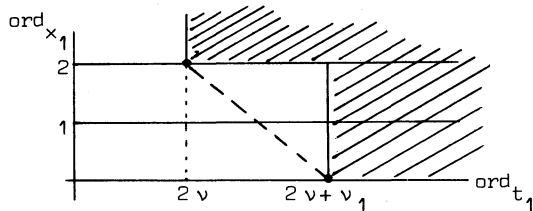
si $\lambda > v$ c'est $3v$ qui est le plus petit (strictement) ;

si $\lambda = v$ les deux nombres $3v = 2v + \lambda$ sont strictement plus petits que les deux autres, et il faut vérifier que les termes de cet ordre ne se compensent pas : or les termes qui donnent une contribution à cet ordre sont

$$2pp'p_0't^2 + pp'^2t^3 = pp't^2(2p_0' + p't) = pp't_1^u(2p_0' + p't_1^v)$$

et l'on voit que moyennant une hypothèse générique sur p_1 il n'y aura pas compensation.

On a ainsi la garantie que dans les trois cas le diagramme de Newton de (I) par rapport aux nouvelles variables t_1, x_1 aura la forme



où l'on a posé

$$v_1 = \inf(v, 3\lambda - 2v + 1) \quad (\text{c.à.d. } 2v + v_1 = \inf(3v, 3\lambda + 1)) .$$

En divisant l'équation (I) par t_1^{2v} on obtient une équation $(I)_1$ dont les termes dominants (termes situés sur le côté du polygône de Newton) peuvent s'écrire $x_1^2 - a_1^2 t_1^{v_1}$ (a_1 coefficient numérique convenable) et qui admet donc pour solution

$$x_1 = a_1 t_1^{v_1/2} + \dots$$

où les ... représentent des termes d'ordre supérieur dans $\mathbb{C}\{t_1^{\frac{1}{2}}\}$; dans le cas où v_1 est pair ($v_1 = 2v_2$) l'écriture ci-dessus doit s'interpréter, dans l'esprit de la convention $\mathcal{Z}$ du § 1, comme symbolisant le couple de solutions

$$x_1 = \begin{cases} a_1 t_1^{v_2} + \dots \\ -a_1 t_1^{v_2} + \dots \end{cases}$$

où les ... représentent maintenant des termes d'ordre supérieur dans $\mathbb{C}\{t_1\}$

Conclusion du cas a) :

$$\mu = 2v \quad x = t^{1/v} (a(t^{1/v}) + x_1) \quad (a \text{ unité de } \mathbb{C}\{t^{1/v}\}) ,$$

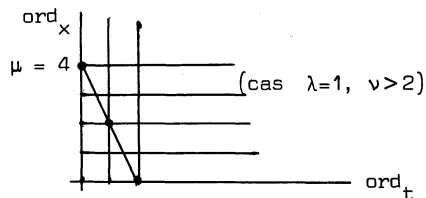
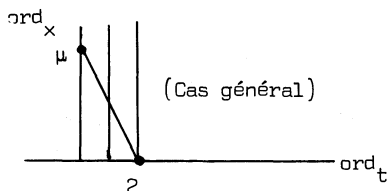
$$x_1 = a_1 t^{v_1/2v} + \dots \quad (\text{avec la convention } \mathcal{Z} \text{ du § 1})$$

$$\text{où } v_1 = \inf(v, 3\lambda - 2v + 1) .$$

Cas b) $2 \text{ ord}_{x_0} Q_0 > 3 \text{ ord}_{x_0} P_0 \Leftrightarrow 2v > 3\lambda + 1 \Leftrightarrow \text{ord}_{x_0} Q_0^2 > \text{ord}_{x_0} P_0^2$

Alors, $\text{ord}_{x_0} A_0 = \mu = 3\lambda + 1$.

Quant à $\text{ord}_{x_1} A_1 = \inf(v, 2\lambda)$, il est de toutes façons $\geq \frac{\mu}{2}$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $\lambda = 1$ ($v > 2$, $\mu = 4$). Le polygône de Newton de (I) a donc la forme



et donne comme équation approchée

$$\begin{aligned} & -P_0 P_0'^2 + 3q_1'^2 t^2 \simeq ax^\mu + 3q_1'^2 t^2 = 0 \quad (\text{cas général}) \\ (I)_0 & -P_0 P_0'^2 - pP_0'^2 t + 3q_1'^2 t^2 \simeq ax^4 + p_0 bx^2 t + 3q_1'^2 t^2 = 0 \quad (\text{cas } \lambda=1, \nu>2) \end{aligned}$$

(où a et b sont des coefficients $\neq 0$ qui ne dépendent que de P_0).

En remarquant que pour un choix générique de p_0 la seconde équation n'est pas un carré parfait, on voit que la solution de (I) peut dans tous les cas se résumer sous la forme

$$x = b t^{2/\mu} + \dots$$

qui lorsque μ est pair ($\mu = 2\mu_1$) symbolise un couple de solutions

$$x = \begin{cases} b_+ t^{1/\mu_1} + \dots \\ b_- t^{1/\mu_1} + \dots \end{cases} \quad (b_+, b_- \text{ constantes non nulles, telles que } \left(\frac{b_+}{b_-}\right)^{\mu_1} \neq 1)$$

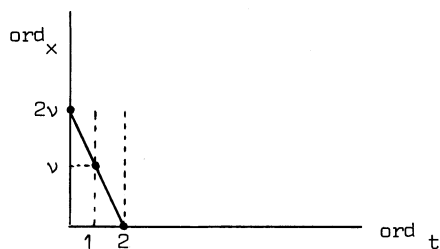
Cas c) $2 \text{ ord}_{x_0} Q_0 = 3 \text{ ord}_{x_0} P_0 \Leftrightarrow 2\nu = 3\lambda + 1 \Leftrightarrow \text{ord}_{x_0} Q_0'^2 = \text{ord}_{x_0} P_0 P_0'^2$

On a l'équation approchée

$$(I)_0 : 3(Q_0' + tq_1')^2 - P_0 P_0'^2 = 0$$

Deux cas sont à distinguer :

si $\mu = 2\nu$ le diagramme de Newton a la forme

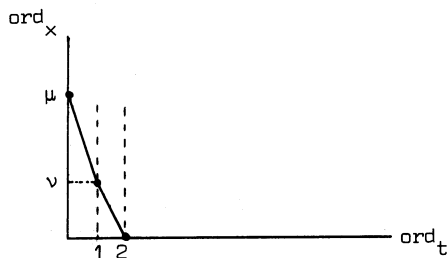


et les termes dominants de $(I)_0$ ne forment en aucun cas un carré parfait de sorte que l'équation (I) admet le couple de solutions

$$x = c_{\pm} t^{1/2\nu} + \dots \quad (c_+, c_- \text{ constantes non nulles, telles que } \left(\frac{c_+}{c_-}\right)^{2\nu} \neq 1)$$

SINGULARITÉS PLANES D'ORDRE 3

si $\mu > 2v$ le diagramme de Newton a la forme



de sorte que l'équation (I) admet le couple de solutions

$$x = \begin{cases} c_1 t^{\frac{1}{\mu-v}} + \dots \\ c_2 t^{\frac{1}{v}} + \dots \end{cases} \quad (c_1 c_2 \neq 0) .$$

2ème étape

$$(II) : \quad u = -\frac{2}{3} \frac{P_0 + tp}{P'_0 + tp'}, \quad (Q'_0 + tq') + (Q_0 + tq)$$

Nous distinguerons deux cas, selon qu'après substitution ($t = \tau^\mu$, $x = x(\tau)$) l'ordre de P'_0 est ou non strictement inférieur à l'ordre de t . Une simple inspection montre que l'inégalité $\text{ord}_\tau P'_0 \geq \text{ord}_\tau t$ n'a lieu que dans le cas a) de la discussion ci-dessus ; or dans ce cas $\text{ord}_\tau t = 2v$ alors que $\text{ord}_\tau P'_0 = 2 \text{ord}_x P'_0 = 2\lambda$, de sorte que $\lambda \geq v$; inversement si $\lambda < v$ on est nécessairement dans le cas b) de sorte que $\text{ord}_\tau P'_0 = 2\lambda < 2v = \text{ord}_\tau t$.

Cas i) : $\text{ord}_\tau P'_0 \geq \text{ord}_\tau t \Leftrightarrow \lambda \geq v$

$$\text{Alors} \quad \frac{P_0 + tp}{P'_0 + tp'} = \frac{p}{p'} + \dots = \frac{p_0}{p_1} + \dots \quad (\text{unité de } \mathbb{C}\{\tau\}) .$$

Comme on est dans le cas a) ,

$$x = x_0 + t_1 x_1, \quad (x_0 \sim t_1 = t^{\frac{1}{v}} = \tau^2, \quad x_1 \sim t^{\frac{v_1}{2v}})$$

il sera commode de considérer $u(\tau)$ comme l'image homomorphique d'un élément de $\mathbb{C}\{t_1, x_1\}$ (ou, ce qui revient au même, d'un élément de $\mathbb{C}\{x_0, x_1\}$) par la substitution $t_1 = \tau^2$ (ou $x_0 = x_0(\tau) \sim \tau^2$), $x_1 = x_1(\tau) \sim \tau^{v_1}$. Ainsi, en notant par le signe d'équivalence $\approx$ le fait que deux éléments de $\mathbb{C}\{\tau\}$ aient pour quotient l'image homomorphique d'une unité de $\mathbb{C}\{t_1, x_1\}$ (ou de $\mathbb{C}\{x_0, x_1\}$), on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} Q'_0 + tq' &\approx tx_1 ; \\ Q_0 + tq &= \underbrace{[Q_0(x_0) + tq(x_0)]}_{\approx t_1^{v+1}} + \sum_{n>1} \underbrace{[Q_0^{(n)}(x_0) + tq^{(n)}(x_0)]}_{\approx t_1^{v-n+1}} \frac{(x_1 t_1)^n}{n!} \\ &\approx t_1^{v+1} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé un développement de Taylor ; l'équivalence $Q_0(x_0) + tq(x_0) \approx t_1^{v+1}$ peut se vérifier de la façon suivante : écrivant $Q_0 = cx^{v+1} + \dots$, on a $Q'_0 + tq' = (v+1)cx^v + tq_1 + \dots$ d'où l'on tire (par définition de x_0) $tq_1 = -(v+1)cx_0^v + \dots$, ce qui donne bien $Q_0(x_0) + tq(x_0) = -vx_0^{v+1} + \dots \approx t_1^{v+1}$.

On voit en définitive que $u(\tau)$ est la somme de deux termes équivalant respectivement (au sens $\approx$) à $tx_1 \approx t^{\frac{2v+v_1}{2v}}$ et à $t_1^{v+1} = t^{\frac{v+1}{v}}$. Il est immédiat d'en déduire que le développement de Puiseux de u est de la forme

$$\begin{aligned} u &= t^{\frac{v+1}{v}} + \dots + t^{\frac{2v+v_1}{2v}} + \dots ; \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad \text{puissances} \qquad \text{puissances supérieures} \\ &\quad \text{supérieures} \qquad \text{de } t^{\frac{1}{2v}} \text{ (cas } v_1 \text{ impair)} \\ &\quad \text{de } t^{\frac{1}{v}} \end{aligned}$$

dans le cas où v_1 est pair, l'écriture ci-dessus doit être interprétée, conformément à la convention de la fin du cas a), comme représentant deux séries de

puissances de $t^{\frac{1}{v}}$ ayant en commun le premier tronçon $t^{\frac{v+1}{v}} + \dots$ et commençant à différer à partir du terme $t^{\frac{2v+v_1}{2v}}$.

Cas ii) : $\text{ord}_\tau P'_0 < \text{ord}_\tau t \Leftrightarrow \lambda < \nu$

$$\text{Alors } \frac{P_0 + tp}{P'_0 + tp'} = \frac{P_0 + tp}{P'_0} \left(1 - \frac{tp'}{P'_0} + \left(\frac{tp'}{P'_0} \right)^2 \dots \right) = \frac{P_0}{P'_0} (1 + g(\tau)) = \frac{x}{\lambda + 1} (1 + g(\tau))$$

où $g(\tau) \sim \frac{t}{P'_0}$ (équivalence dans $\mathbb{C}\{\tau\}$).

On doit ici faire la distinction entre les trois cas a) b) c) de la 1ère étape.

Cas a) : Le même calcul que dans le cas i) montre cette fois que $u(\tau)$ est la somme de deux termes équivalant respectivement (au sens $\approx$) à

$$\frac{P_0}{P'_0} (Q'_0 + tq') \approx x \cdot tx_1 \approx t_1^{\nu+1} x_1 \text{ et à } Q_0 + tq \approx t_1^{\nu+1}. \text{ On en déduit que le } \frac{P_0}{P'_0}$$

développement de Puiseux de u est de la forme

$$u = t^{\frac{\nu+1}{\nu}} + \dots + t^{\frac{2\nu + \nu_1 + 2}{2\nu}} + \dots$$

(avec, lorsque ν_1 est pair, une convention analogue à celle du cas i))

Cas b) : Alors, $x \sim t^{2/\mu} = \tau^2$, et $\text{ord}_\tau Q'_0 = 2\nu > \mu = \text{ord}_\tau t$, de sorte que $Q'_0 + tq' \sim t$. De même (puisque q n'a pas de terme constant) $Q_0 + tq \sim tx$. Les deux termes qui forment $u(\tau)$ sont donc tous les deux équivalents à tx , et il faut vérifier qu'ils ne se compensent pas à l'ordre le plus bas : on a

$$u = (Q_0 + tq) - \frac{2}{3} \frac{P_0 + tp}{P'_0 + tp'} (Q'_0 + tq') \approx tq_1 x - \frac{2}{3} \frac{x}{\lambda + 1} tq_1 = tx \cdot q_1 \left(1 - \frac{2}{3(\lambda + 1)} \right)$$

et la condition $\lambda + 1 \geq 2$ interdit bien à ce dernier terme de s'annuler.

On a donc bien $u \sim tx$, ce qui donne le développement de Puiseux

$$u = t^{\frac{\mu+2}{\mu}} + \dots$$

qu'il faut en réalité interpréter, lorsque μ est pair ($\mu = 2\mu_1$) comme un couple de développements de Puiseux

$$u = \begin{cases} t^{\frac{\mu_1 + 1}{\mu_1}} \\ t^{\frac{\mu_1 + 1}{\mu_1}} \\ \varepsilon t^{\frac{\mu_1 + 1}{\mu_1}} \end{cases} + \dots \quad (\varepsilon \neq 0, \varepsilon^{\mu_1} \neq 1).$$

Cas c) : $2v = 3\lambda + 1$

L'égalité $\frac{P_0 + tq}{P'_0 + tq'} = \frac{P_0}{P'_0} (1 + g(\tau))$ permet de donner de l'expression (II) le

développement suivant :

$$u = \underbrace{(Q_0 - \frac{2}{3} \frac{P_0}{P'_0} Q'_0)}_{u_0} + \underbrace{tq - \frac{2}{3} \frac{P_0}{P'_0} tq'}_{u_1} - \underbrace{\frac{2}{3} \frac{P_0}{P'_0} g(\tau)(Q'_0 + tq')}_{u_2}$$

LEMME . $\text{ord}_x u_0 \geq \mu - v + 1$

En effet, par définition de μ

$$Q_0'^2 = \frac{1}{3} P_0 P_0'^2 + O(x^\mu) = \frac{1}{3} P_0 P_0'^2 (1 + O(x^{\mu-2v})) .$$

Donc

$$Q'_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} P_0^{\frac{1}{2}} P'_0 (1 + O(x^{\mu-2v})) = \frac{1}{\sqrt{3}} P_0^{\frac{1}{2}} P'_0 + O(x^{\mu-v})$$

d'où par intégration

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} P_0^{\frac{3}{2}} + O(x^{\mu-v+1})$$

ce qui, par comparaison avec

$$\frac{2}{3} \frac{P_0}{P'_0} Q'_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} P_0^{\frac{3}{2}} + O(x^{\mu-v+1})$$

donne bien le résultat.

Evaluation de u_1 :

$$u_1 = tq_1 x \left(1 - \frac{2}{3(\lambda+1)}\right) + \dots \sim tx$$

Evaluation de u_2 :

On doit se rappeler que si $\mu > 2v$ l'équation (I) admet deux solutions

$x \sim t^{\frac{1}{\mu-v}}$ resp. $t^{\frac{1}{v}}$. Alors $Q'_0 \sim x^v \sim t^{\frac{v}{\mu-v}}$ resp. t , de sorte que $Q'_0 + tq' \sim x^v$ ($\mu > 2v \Rightarrow \text{ord } Q'_0 < \text{ord } t$ dans le cas de la 1ère solution ; dans le cas de la 2nde solution, un choix générique de q_1 empêchera qu'il y ait compensation).

D'autre part, $g \sim \frac{t}{P'_0} \sim \frac{t}{x^\lambda} \sim x^{\mu-v-\lambda}$ resp. $x^{v-\lambda}$.

On a donc

$$u_2 \sim \frac{P_0}{P_1} g(Q'_0 + tq') \sim x^{\mu-\lambda+1} \text{ resp. } x^{2\nu-\lambda+1} .$$

Comparaison :

Le terme dominant est $u_1 \sim x^{\mu-\nu+1}$ resp. $x^{\nu+1}$.

En effet, l'inégalité $\lambda < \nu$ implique que u_2 soit dans tous les cas négligeable devant u_1 . D'autre part, le terme u_0 pourrait tout au plus entrer en compétition avec la 1ère solution de u_1 (pas la 2nde, car $\mu > 2\nu$) ; mais alors un choix générique de q_1 suffira à empêcher que les deux termes se détruisent.

En résumé, on a le couple de solutions $u \sim x^{\mu-\nu+1}$ resp. $x^{\nu+1}$, c.à.d.

$$u = \begin{cases} t^{\frac{\mu-\nu+1}{\mu-\nu}} + \dots \\ \frac{\nu+1}{t^{\frac{\nu}{\nu}}} + \dots \end{cases} \quad (\text{cas } \mu > 2\nu) .$$

Dans le cas $\mu = 2\nu$ un raisonnement analogue mais beaucoup plus facile donne le couple de solutions

$$u = \begin{cases} \frac{\nu+1}{t^{\frac{\nu}{\nu}}} \\ \epsilon t^{\frac{\nu+1}{\nu}} \end{cases} \quad (\epsilon \neq 0, \quad \epsilon^\nu \neq 1) .$$

Conclusion des deux étapes

Le tableau ci-dessous montre comment les résultats des deux discussions

(I) : cas a), b), c) et (II) : cas i), ii) peuvent être regroupés suivant les trois cas (1er, 2°, 3°) du tableau de résultats du § 1 .

I \ II		Cas i) : $\lambda \geq v$	Cas ii) : $\lambda < v$	
Cas a) :	$2v < 3\lambda + 1$	$\mu = 2v$ $\sigma = v$ $(2v + v_1 = 3v)$	$\mu = 2v$ $\sigma = \lambda + 1$ $(2v + v_1 + 2 = 3\lambda + 3)$	1° cas : $\mu < 3\sigma - 2$
Cas b) :	$2v > 3\lambda + 1$		$\mu = 3\lambda + 1$ $\sigma = \lambda + 1$	2° cas :
Cas c) :	$2v = 3\lambda + 1$		$\mu = 3\lambda + 1 = 2v$ $\sigma = \lambda + 1 = \frac{2}{3}(v + 1)$	$\mu = 3\sigma - 2$
			$\mu > 2v$ $\sigma = \lambda + 1 = \frac{2}{3}(v + 1)$	
				3° cas : $\mu > 3\sigma - 2$

§ 3 . CALCUL DU NOMBRE DE CUSPS .

Le principe du calcul consiste à appliquer la

PROPOSITION (comparer à [1]) :

Le nombre k de cusps de la courbe discriminante déployée d'une singularité $f_0 \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ est égal à la multiplicité d'intersection, dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, des $n + 1$ germes d'hypersurfaces

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} f'_{x_1} = 0 \\ \dots \\ f'_{x_n} = 0 \\ \det(f''_{x_i x_j}) = 0 \end{cases}$$

où $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, t\}$ est une déformation à 1 paramètre assez générale de f_0 .

Preuve de la proposition : conséquence immédiate des trois remarques suivantes :

1°) si au lieu d'une déformation à 1 paramètre on considère une déformation verselle (à q paramètres) de f_0 , les équations (Σ) définissent, dans l'espace $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q$, l'adhérence de la sous-variété des "points-froncs" de la déformation (sous-variété Σ^{n-1} dans les notations de Boardman) ;

2°) considérons dans l'espace des paramètres $\mathbb{C}^q$ le germe de courbe lisse grâce auquel la déformation verselle devient (par changement de base) "déformation à 1 paramètre assez générale" ; si l'on écarte légèrement de l'origine ce germe de courbe lisse, les $n+1$ hypersurfaces (Σ) de la proposition se déplacent de façon à n'avoir plus que des points d'intersection de multiplicité 1 (sections transverses de la sous-variété Σ^{n-1}) ;

3°) comme l'image d'un "point-fronce" est un "cusp", les k points d'intersection des hypersurfaces déplacées de 2°) ont pour images dans le plan (t, u) les cusps de la courbe discriminante déployée.

Dans le cas particulier où f_0 est une singularité plane d'ordre 3, la proposition nous conduit donc à calculer la multiplicité d'intersection, dans $\mathbb{C}^3$, des trois surfaces d'équations

$$(1) \quad f'_x = -P'y + Q' = 0$$

$$(2) \quad f'_y = 3y^2 - P = 0$$

$$(3) \quad f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -6P''y^2 + 6Q''y - P'^2 = 0 \quad .$$

Cela revient à calculer la multiplicité d'intersection de la courbe C définie par les deux équations (1) et (2) (courbe critique) avec la surface S définie par l'équation (3), calcul qui pourrait se faire de la façon suivante : on connaît déjà, grâce au § 2 (1ère étape) les développements de Puiseux

$$x = x(t^{\frac{1}{u}}) \quad , \quad y = \frac{Q'(x(t^{\frac{1}{u}}))}{P'(x(t^{\frac{1}{u}}))} \quad \text{de la courbe } C ; \text{ il suffit alors de substituer}$$

ces développements de Puiseux dans l'équation $S(x, y, t)$ de la surface S pour obtenir la multiplicité d'intersection k par la formule

$$k = \text{ord}_t \prod_{\alpha=1}^{\mu} S(x_{\alpha}(t^{\frac{1}{\mu}}), y_{\alpha}(t^{\frac{1}{\mu}}), t)$$

où l'indice α repère les μ développements de Puiseux de la courbe C .

Plutôt que de faire cette substitution directement (ce qui nous amènerait à une discussion presque aussi pénible que celle du § 2), nous allons employer l'astuce suivante.

La substitution d'un développement de Puiseux comme ci-dessus peut évidemment se décomposer en deux temps :

1°) substituer (1) : $y = \frac{Q'}{P'}$ et (2) : $y^2 = \frac{P}{3}$ dans S , ce qui donne une fraction

$$T = -2 P''P + 6 \frac{Q''Q'}{P'} - P'^2 \in \mathbb{C}((x, t)) ;$$

2°) substituer $x = x_{\alpha}(t^{1/\mu})$ dans cette fraction T .

Comme les $x_{\alpha}(t^{1/\mu})$ sont les développements de Puiseux de la courbe plane

$$I = 3 Q'^2 - P P'^2 = 0$$

(résultant de l'élimination de y entre (1) et (2))

on voit ainsi que le nombre k , multiplicité d'intersection dans $\mathbb{C}\{x, y, t\}$ de C et de S , est aussi égal à la multiplicité d'intersection dans $\mathbb{C}\{x, t\}$ de la courbe (I) et du diviseur (T) :

$$k = \langle C, S \rangle_{\mathbb{C}\{x, y, t\}} = \langle (I), (T) \rangle_{\mathbb{C}\{x, t\}}$$

Or, écrivant ce diviseur (T) comme différence de deux diviseurs positifs :

$$(T) = (J) - (P') ,$$

$$\text{avec} \quad J = -2 P''P'P + 6 Q''Q' - P'^3 ,$$

on remarque que J n'est autre que la dérivée de I par rapport à x : $J = I'$.
Par conséquent

$$k = \langle (I), (I') - (P') \rangle = \langle (I), (I') \rangle - \langle (I), (P') \rangle .$$

Le premier terme $\langle (I), (I') \rangle$ est par définition l'ordre du discriminant de la courbe (I) par rapport à la variable distinguée x (c.à.d. l'ordre du discriminant du polynôme de Weierstrass associé à I dans $\mathbb{C}\{t\}[x]$) ; d'après une formule rappelée en Appendice, cet ordre peut s'écrire

$$\langle (I), (I') \rangle = \mu(I) + \langle (I), (t) \rangle - 1 = \mu(I) - \mu - 1$$

où $\mu(I)$ est le nombre de Milnor de la courbe I et μ celui de la singularité f_0 (on a utilisé le fait que $\langle (I), (t) \rangle$, degré du polynôme de Weierstrass associé à I dans $\mathbb{C}\{t\}[x]$, est égal au nombre μ de Milnor de f_0 : cf. § 2).

Quant au deuxième terme $\langle (I), (P') \rangle$, il est facile à calculer :

$$\begin{aligned} \langle (I), (P') \rangle &= \langle (3Q'^2 - PP'^2), (P') \rangle = \langle (Q'^2), (P') \rangle = \\ &= \langle 2(Q'), (P') \rangle = 2 \langle (Q'), (P') \rangle = \\ &= 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, t\} / (Q'_0 + tq', P'_0 + tp') = \\ &= 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, t\} / (x^\nu + t, x^\lambda + t) \\ &= 2 \inf(\nu, \lambda) \quad . \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$k = \mu(I) + \mu - 1 - 2 \inf(\nu, \lambda)$$

et il ne nous reste plus qu'à calculer $\mu(I)$, ce qui se fait très facilement grâce aux résultats du § 2, 1ère étape.

Le tableau ci-dessous résume la discussion, qui conduit à la formule universelle

$$k = \mu + \sigma - 2 \quad .$$

Le nombre $\mu(I)$ est déduit du type topologique de (I) ; les développements de Puiseux $t = t(x^{\frac{1}{2}})$ de (I) , dont nous avons besoin pour déterminer ce type topologique, se déduisent facilement des calculs du § 2 1ère étape (soit par un raisonnement direct, soit par "inversion" des développements de Puiseux).

Différents cas considérés au § 2	Type topologique de la courbe (I)	$\mu(I)$	$\inf(v, \lambda)$	$\mu(I) - 1 - 2 \inf(v, \lambda)$
a) i)	$t \sim x^v + \dots + x^{\frac{3v}{2}} + \dots$ donc même type topologique que $t^2 - x^{3v} = 0$	$3v - 1$	v	$v - 2 = \sigma - 2$
a) ii)	$t \sim x^v + \dots + x^{\frac{3\lambda+1}{2}} + \dots$ donc même type topologique que $t^2 - x^{3\lambda+1} = 0$	3λ	λ	$\lambda - 1 = \sigma - 2$
b)	$t^2 - x^\mu = 0$	$\mu - 1$ $(= 3\lambda)$	λ	$\lambda - 1 = \sigma - 2$
c)	$(t - x^{\mu-v})(t - x^v) = 0$	$2v - 1$ $(= 3\lambda)$	λ	$\lambda - 1 = \sigma - 2$

APPENDICE : FORMULES CONNUES ET DIGNES DE L'ÊTRE D'AVANTAGE

1°) Ordre du discriminant d'une singularité de courbe plane.

Soit (f) un germe de courbe plane réduite donné par un polynôme de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ de degré n
 $(n = \langle (f), (x) \rangle = \text{multiplicité d'intersection de } (f) \text{ avec l'axe des } y ; \text{ on ne suppose pas que } n \text{ soit égal à la multiplicité de } (f))$.

Soit δ l'ordre du discriminant de ce polynôme
 $(\delta = \langle (f), (f'_y) \rangle)$.

Alors on a la formule

$$\delta = \mu + n - 1$$

où μ est le nombre de Milnor du germe de courbe (f) .

Cette formule est un cas particulier d'une jolie formule de TEISSIER (Thèse, 2° partie, Chap. II, Théorème 5 ; voir aussi [1] Chap. II, Prop. 1.2).

2°) Effet d'un éclatement sur une multiplicité d'intersection.

Soient (f) et (g) deux germes (en 0) de courbes planes, $(\hat{f})$ et $(\hat{g})$ leurs "transformées strictes" par l'éclatement de centre 0. Il est très facile de démontrer la formule suivante

$$\langle (\hat{f}), (\hat{g}) \rangle = \langle (f), (g) \rangle - m(f) m(g)$$

où $m(f)$ resp. $m(g)$ désigne la multiplicité de (f) resp. (g) .

3°) Effet d'un éclatement sur l'ordre du discriminant.

Soit (f) un germe de courbe plane comme dans 1°), ayant r tangentes distinctes dont aucune ne coïncide avec l'axe des y (de sorte que $n = \text{multiplicité de } f$). En prenant $\hat{x} = x$ et $\hat{y} = \frac{y}{x}$ comme coordonnées de l'éclatement de centre 0, la transformée stricte $(\hat{f})$ de (f) est toute entière contenue dans le domaine des coordonnées $(\hat{x}, \hat{y})$, et peut être représentée par l'équation

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^{-n} f(\hat{x}, \hat{x}\hat{y})$$

Dérivant cette équation par rapport à $\hat{y}$

$$\hat{f}'_{\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^{-n+1} f'_y(\hat{x}, \hat{x}\hat{y})$$

on voit que $\hat{f}'_{\hat{y}}$ est la transformée stricte de f'_y (puisque $n-1 = m(f'_y)$).

Par conséquent, on trouve en appliquant 2°) aux deux germes (f) et (f'_y) :

$$\delta = n(n-1) + \sum_{k=1}^r \hat{\delta}_k$$

où $\delta = \langle (f), (f'_y) \rangle$ est l'ordre du discriminant de f par rapport à y ,
tandis que

$\hat{\delta}_k = \langle (\hat{f}), (\hat{f}'_{\hat{y}}) \rangle_{0_k}$ est l'ordre, au point 0_k de la transformée stricte

(point correspondant à la k -ième tangente), du discriminant de $\hat{f}$ par rapport à $\hat{y}$.

4°) Corollaire : preuve du lemme μ énoncé au § 1.

Il suffit évidemment de démontrer le lemme μ' (cf. § 1), ce qui est immédiat par application de 1°) et 3°).

On a au point 0 :

$$\delta = \mu + n - 1 \quad (n = \text{multiplicité de } f).$$

De même, on a au point 0_k de la courbe éclatée

$$\hat{\delta}_k = \hat{\mu}_k + \hat{n}_k - 1 \quad (\hat{\mu}_k = \text{nombre de Milnor de } \hat{f} \text{ au point } 0_k ;$$

$$\hat{n}_k = \langle (\hat{f}), (\hat{x}) \rangle_{0_k}, \text{ multiplicité d'inter-}$$

section de $(\hat{f})$ avec le diviseur exceptionnel au point 0_k).

Or, en remarquant que le degré en y du polynôme f est égal au degré en $\hat{y}$ du polynôme $\hat{f}$, on voit que

$$n = \langle (\hat{f}), (\hat{x}) \rangle = \sum_{k=1}^r \langle (\hat{f}), (\hat{x}) \rangle_{0_k} = \sum_{k=1}^r \hat{n}_k.$$

Ainsi, la formule 3°) implique immédiatement la formule cherchée

$$\mu = n(n-1) + \sum_{k=1}^r \hat{\mu}_k - (r-1)$$

B I B L I O G R A P H I E

- [1] B. TEISSIER in Singularités à Cargèse ;
cf. aussi : Thèse, 2^o partie (Paris 1973).
- [2] E. BRIESKORN in Singularités à Cargèse.
- [3] D. CHENIOT Le groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface projective complexe.
in Singularités à Cargèse.
- [4] F. PHAM Remarque sur l'équisingularité universelle.
(prétirage, Nice 1970).
- [5] F. PHAM Classification des singularités (exposé à la 12^o Rencontre entre Mathématiciens et Physiciens, Strasbourg 1971).
- [6] O. ZARISKI Algebraic Surfaces (Springer Verlag 1971).

NOTE

Après les calculs aveugles présentés ici, je trouve réconfortant d'apprendre que Lê Dũng Tráng aurait des idées lui permettant de calculer pour toute singularité plane le nombre k de cusps et le nombre d de points doubles de la courbe discriminante déployée ; d'après lui, les formules générales seraient

$$k = \mu + \mu' - 1$$

et
$$d = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} + (m - 3) \mu' ,$$

où μ' = multiplicité de la 2^{ème} extension jacobienne (au sens de [5]),
et m = ordre de la singularité.

Ces formules sont évidemment en accord avec les miennes, puisqu'ici $\mu' = \sigma - 1$
et $m = 3$.