

# *Astérisque*

AST

## **Présentation de l'ouvrage**

*Astérisque*, tome 7-8 (1973), p. 1-11

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1973\\_\\_7-8\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__1_0)>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# TABLE DES MATIERES

|                                       |                                                                                                  | Pages |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| H. HIRONAKA                           | Introduction aux ensembles sous-analytiques.<br>(rédigé par A. HIRSCHOWITZ et P. LE BARZ)        | 13    |
| O. ZARISKI                            | Quatre exposés sur la saturation.<br>(Notes prises par J.J. RISLER)                              | 21    |
| J.P. SPEDER                           | L'équisingularité à la Zariski implique les conditions de Whitney.                               | 41    |
| J.P. SPEDER                           | Eclatements jacobiens et conditions de Whitney.                                                  | 47    |
| J. BRIANÇON                           | Weierstrass préparé à la Hironaka.                                                               | 67    |
| M. LEJEUNE,<br>B. TEISSIER            | } Transversalité, polygone de Newton et installations.<br>(Notes prises par Margherita GALBIATI) | 75    |
| M. SCHAPS                             | Déformations non singulières de courbes gauches.                                                 | 121   |
| J. BRIANÇON<br>A. GALLIGO             | } Déformations distinguées d'un point de $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{R}^2$ .                      | 129   |
| A. GALLIGO<br>C. HOUZEL               | } Déformations semi-universelles de germes d'espaces analytiques (d'après Verdier et Grauert).   | 139   |
| A. GALLIGO                            | Sur le théorème de préparation de Weierstrass pour un idéal de $k\{x_1, \dots, x_n\}$ .          | 165   |
| $\hat{L}\hat{E}$ D. T.                | Topologie des singularités des hypersurfaces complexes.                                          | 171   |
| $\hat{L}\hat{E}$ D. T.                | Un critère d'équisingularité.                                                                    | 183   |
| J. LASCOUX                            | Avant-propos à Saito.                                                                            | 193   |
| K. SAITO                              | Calcul algébrique de la monodromie.                                                              | 195   |
| K. UENO                               | Families of curves of genus two.                                                                 | 213   |
| H. POPP                               | Introduction to the algebraic theory of fundamental groups.                                      | 223   |
| D. CHENIOT                            | Le groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface projective complexe.                  | 241   |
| $\hat{L}\hat{E}$ D. T.,<br>D. CHENIOT | } Remarques sur les deux exposés précédents.                                                     | 253   |
| F. LAZZERI                            | Morse theory on singular spaces.                                                                 | 263   |
| F. LAZZERI                            | A theorem on the monodromy of isolated singularities.                                            | 269   |
| $\hat{L}\hat{E}$ D. T.                | Une application du calcul de Fox : le contre-exemple d'A'Campo.                                  | 277   |
| B. TEISSIER                           | Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney.                                   | 285   |

|                                          |                                                               |     |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----|
| F. PHAM                                  | Courbes discriminantes des singularités planes<br>d'ordre 3 . | 363 |
| E. BRIESKORN                             | Vue d'ensemble sur les problèmes de monodromie.               | 393 |
| H. HIRONAKA                              | La voûte étoilée.                                             | 415 |
| H. HIRONAKA<br>M. LEJEUNE<br>B. TEISSIER | } Platificateur local en géométrie analytique.                | 441 |

## S I N G U L A R I T E S      A      C A R G E S E



" Dès l'arrivée à Cargèse, une singularité attire l'oeil ..."

(Guide de la Corse mystérieuse)

Ce volume couvre la plupart des sujets abordés lors de la rencontre sur les " Singularités en Géométrie analytique ", organisée à l'Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse du 14 Août au 2 Septembre 1972, sous les auspices de l' "Année mathématique française". En fait, l' "organisation" a surtout consisté à rassembler dans un cadre agréable des gens dont on était sûr, en raison de leur grande convergence d'intérêts, qu'ils auraient beaucoup de choses à se dire. Les seuls exposés prévus à l'avance étaient ceux de Zariski sur la "saturation" et d'Hironaka sur les "ensembles sous-analytiques". L'organisation des autres exposés s'est faite spontanément, les participants assemblés ayant trouvé commode de constituer quatre "groupes de travail", dont les responsables peuvent être considérés, en fait, comme les véritables organisateurs de la rencontre :

- |                                        |                                                  |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1°) <u>Résolution des singularités</u> | (responsables <u>Lejeune</u> , <u>Teissier</u> ) |
| 2°) <u>Déformations</u>                | (resp. <u>Houzel</u> )                           |
| 3°) <u>Equisingularité</u>             | (resp. <u>Lê</u> )                               |
| 4°) <u>Monodromie</u>                  | (resp. <u>Saito</u> )                            |

Devinette : Comment les textes du recueil se répartissent-ils suivant les quatre groupes ci-dessus ?

## EN GUISE DE PRESENTATION DES TEXTES

---

[Les lignes qui suivent n'ont d'autre ambition que de donner une apparence d'ordre à la table des matières].

Les exposés d'Hironaka sur les "ensembles sous-analytiques" ont constitué un véritable cours (un exposé par jour ou presque) dont le texte publié ici n'est qu'un résumé. Par contre, les exposés de Zariski sur la saturation sont reproduits ici assez fidèlement : il s'agit d'une esquisse des principales idées contenues dans (ou suggérées par) la série d'articles de l'auteur, parus ou à paraître dans l'*American Journal of Mathematics* : "Studies in Equisingularity" I, II et (surtout) III, et "General Theory of Saturation" I, II et III . Les autres textes peuvent s'organiser ainsi :

... dans le sillage de Zariski :

- \* Le premier texte de Speder ("l'équisingularité à la Zariski implique Whitney") démontre une conjecture de Zariski (conjecture qui a conduit Zariski à introduire la notion de saturation) ; le second texte développe une technique d' "éclatement d'idéaux jacobiens", inspirée par des idées d'Hironaka, qui a servi à Speder pour démontrer ladite conjecture (on retrouvera cette technique dans le texte de Teissier intitulé "cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney").

... autour du théorème de préparation de Weierstrass :

- \* Le texte de Briançon donne une démonstration originale d'une généralisation du théorème de préparation de Weierstrass, généralisation inventée par Hironaka en vue de "préparer" la résolution des singularités d'espaces analytiques complexes. C'est en cherchant à parfaire cette "préparation" que Lejeune et Teissier ont été amenés à échafauder d'impressionnantes "installations" (texte suivant).

- \* Le texte de Schaps est un résumé de sa thèse, qui montre qu'un schéma de Cohen Macaulay de codimension 2 (par exemple un point dans le plan, ou dans  $\mathbb{C}^3$  une courbe gauche sans composante immergée) admet une déformation plate dont la fibre générique est lisse.  
Le texte suivant de Briançon et Galligo redémontre le même résultat en ce qui concerne les points dans le plan, en construisant explicitement la déformation grâce à la technique de préparation de Weierstrass-Hironaka mentionnée plus haut.
- \* Le texte de Galligo et Houzel expose comment une autre généralisation du théorème de préparation de Weierstrass a permis à Grauert de démontrer l'existence de déformations semi-universelles de germes d'espaces analytiques (la version exposée ici n'est pas la version originale de Grauert mais une version repensée par Verdier).  
Enfin le texte de Galligo montre comment "Weierstrass préparé à la Grauert" a au fond le même goût que "Weierstrass préparé à la Hironaka".

... sur la trace des cycles évanouissants :

- \* Le premier texte de Lê rappelle les résultats classiques de Milnor sur la topologie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, et en profite pour démontrer que le "nombre  $\mu$  de Milnor" (nombre de cycles évanouissants) est un invariant du type topologique de plongement du germe d'hypersurface - résultat "bien connu" mais apparemment introuvable.  
Le second texte de Lê expose le critère d'équisingularité de Lê et Ramanujam, célèbre parmi les spécialistes sous le nom évocateur de " $\mu$  constant".
- \* Le texte de Saito, qui expose ses résultats récents sur la "connexion de Gauss-Manin" (généralisant aux intersections complètes les résultats analogues de Brieskorn sur la monodromie des hypersurfaces), est précédé d'un bref avant-propos de Lascoux qui rappelle ce que le nom de Gauss vient faire dans l'histoire.
- \* Le texte de Ueno expose des résultats nouveaux, obtenus après ses conférences de Cargèse, sur le rôle que joue la notion de "courbe stable" (de Deligne et Mumford) dans l'étude des familles de courbes de genre 2 .

- \* Les trois textes suivants étudient le groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface complexe
  - 1°) par des méthodes algébriques (Popp : il s'agit d'un résumé de résultats exposés plus en détail dans son livre - Lecture Notes in Mathematics 176 (1970))
  - 2°) par des méthodes topologiques (Chéniot : il s'agit d'une mise en forme claire et moderne d'idées anciennes de Zariski (1937) et Van Kampen (1933))
  - 3°) le troisième texte s'efforce, à la suite des deux exposés ci-dessus, de comparer les résultats obtenus par ces deux méthodes (Lê et Chéniot).

- \* Le premier des deux textes très courts de Lazzeri, "Morse theory on singular spaces", expose (sans démonstrations) une généralisation de la théorie de Morse aux variétés différentiables "avec singularités isolées" (le sens de cette dernière expression est précisé dans le texte).

Le second texte démontre, grâce à l'étude géométrique de l'hypersurface discriminante d'une déformation verselle, "un théorème sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurface", avec comme joli corollaire le résultat baptisé " $\Sigma \mu_i$  constant" par les spécialistes de " $\mu$  constant".

- \* Le court texte de Lê qui vient ensuite expose le contre-exemple d'A'Campo (une singularité de courbe plane dont la monodromie n'est pas semi-simple) comme application des méthodes algébriques de Fox en théorie des noeuds.
- \* "Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney" est la rédaction de résultats par lesquels Teissier tient en haleine ses auditoires depuis un an ; ce texte administre la preuve éclatante que de l'algèbre, convenablement graduée, peut conduire à une vision harmonieuse des singularités.
- \* "Courbes discriminantes ..." est le résultat d'une frénésie calculatoire (postérieure à la rencontre) provoquée chez Pham par certaines idées de Teissier (ci-dessus) et de Brieskorn (ci-après).
- \* C'est pour conclure la partie "monodromie" de la rencontre que Brieskorn nous a exposé sa "vue d'ensemble sur les problèmes de monodromie", survolant les problèmes déjà résolus (certains l'ont été pendant la rencontre !), et

proposant une liste impressionnante de problèmes à résoudre.

... et pour finir :

"La voûte étoilée" nous a été présentée par Hironaka, le dernier jour de la rencontre, comme un rêve poétique ; le texte présenté ici atteste que ce rêve est devenu réalité, et qu'il a des prolongements terrestres, comme par exemple le "platificateur local" d'Hironaka, Lejeune et Teissier (résultat obtenu après la rencontre, et qui s'appuie sur les "installations").

SUR LE DEROULEMENT DE LA RENCONTRE, ET LE CADRE DE VIE A

## L'INSTITUT D'ETUDES SCIENTIFIQUES DE CARGESE

L'Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse est depuis longtemps célèbre parmi les physiciens qui y organisent chaque année des Ecoles d'Eté de renommée internationale. Depuis 1972 il s'est doté de statuts, qui le rattachent administrativement à l'Université de Nice, et de bâtiments neufs, comprenant un amphithéâtre de 70 places, une grande salle de travail, une bibliothèque (pour le moment surtout orientée vers la Physique), une douzaine de bureaux (dont certains sont aménagés en chambres), le tout très bien équipé.

L'Institut souhaite s'ouvrir plus largement vers d'autres disciplines que la Physique, notamment vers les Mathématiques. Les gens désirant y organiser des colloques peuvent obtenir tous renseignements auprès du Directeur, M. Maurice Lévy, Professeur à l'Université de Paris VI (Laboratoire de Physique Théorique, 12, Quai Saint Bernard, 75005 Paris).

Les participants peuvent soit loger au village de Cargèse à un peu plus d'1 km de l'Institut (très pittoresque, nombreux hôtels, chambres chez l'habitant ; il faut réserver longtemps à l'avance en saison), soit planter leur tente sur le terrain qui entoure l'Institut. Cette dernière solution a conquis beaucoup d'adeptes, qui trouvent que les allées et venues entre les tentes, la mer, et les salles de travail, font l'un des charmes de la vie à l'Institut.

La session d'Août 1972 sur les Singularités comptait une cinquantaine de participants. Les groupes de travail organisaient des réunions de discussion, et des exposés dont le sujet était affiché quelques jours à l'avance. Les exposés des différents groupes ne se chevauchaient pas, de sorte que tous pouvaient y assister. En fait, comme les sujets traités étaient tous plus ou moins liés (la séparation en groupes de travail correspondant à des modes d'approche différents plutôt qu'à des domaines différents), et comme les organisateurs des groupes de travail étaient des gens très dynamiques, il était parfois difficile à la plupart d'entre nous d'assister à tous les exposés susceptibles de nous

intéresser : certains groupes de travail organisaient même des séances nocturnes !

Outre ces soirées studieuses, je voudrais signaler deux soirées auxquelles participaient des habitants et notabilités du village de Cargèse : toutes deux avaient pour thème le Viêt-Nam, qui connaissait alors les plus violents bombardements de toute la guerre. La première était une causerie de M<sup>e</sup> Hoang Quốc Tân \*) sur la situation au Sud Viêt-Nam. La seconde était un "reportage" de Lê Dũng Tráng sur son récent voyage à Hanoï.

Pour répondre au vœu des participants qu'une trace demeure de ces soirées, j'en tiens un compte-rendu à la disposition de toutes les personnes intéressées. Je me bornerai ici à mentionner les thèmes développés.

#### Causerie de M<sup>e</sup> Hoang Quốc Tân :

Bref rappel historique de l'intervention américaine au Sud Viêt-Nam. Les origines du Front National de Libération du Sud Viêt-Nam ; son programme, ses objectifs. Quelques données sur la guerre de destruction massive menée par les Etats-Unis. Clefs pour une solution du problème Sud-Viêtnamien.

#### Causerie de Lê Dũng Tráng :

Récit de son voyage en République Démocratique du Viêt-Nam. Vitalité de l'enseignement et de la recherche mathématique à Hanoï, en dépit de la guerre et du manque de documents. Appel à développer les échanges scientifiques avec les instituts d'enseignement et de recherche de la R.D.V.N.

Adresses :

1°) (recherche) :

Institut de Mathématiques du Comité d'Etat des Sciences

39 Trần Hưng Đạo HANOÏ R.D.V.N.

2°) (éducation, pédagogie) :

Institut de Pédagogie de Hanoï

HANOÏ R.D.V.N.

---

\*) Docteur en Droit, Diplômé d'Etudes Supérieures de Sciences Politiques, Avocat à la Cour d'Appel de Saïgon.

## REMERCIEMENTS

\*\*\*\*\*

### - Ont collaboré à la rédaction et préparation de ce volume :

- |                |                                                                                                        |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| J. BRIANÇON    | Département de Mathématiques - Université de Nice<br>Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX - FRANCE          |
| E. BRIESKORN   | Mathematisches Institut der Universität Göttingen<br>34 GÖTTINGEN - Bunsenstrasse 3-5 - R.F.A.         |
| A. CHENCINER   | Centre de Mathématiques - Ecole Polytechnique<br>17, rue Descartes - 75005 PARIS - FRANCE              |
| D. CHENIOT     | Département de Mathématiques - Université de Nice<br>Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX - FRANCE          |
| M. GALBIATI    | Istituto Matematico "Leonida Tonelli"<br>Via Derna 1 - 56100 PISA - ITALIE                             |
| A. GALLIGO     | Département de Mathématiques - Université de Nice<br>Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX - FRANCE          |
| J. GIRAUD      | Département de Mathématiques - Université Paris-Sud<br>Centre d'Orsay - 91400 ORSAY - FRANCE           |
| C. HAŞ BEY     | 65, Avenue du Général Leclerc<br>14170 SAINT PIERRE SUR DIVES - FRANCE                                 |
| H. HIRONAKA    | Department of Mathematics - Harvard University<br>2 Divinity Avenue - CAMBRIDGE - Mass. 02138 - U.S.A. |
| A. HIRSCHOWITZ | Département de Mathématiques - Université de Nice<br>Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX - FRANCE          |
| C. HOUZEL      | Département de Mathématiques - Université de Nice<br>Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX - FRANCE          |
| F. KMETY       | 14, Rue Lebrun - 75013 PARIS - FRANCE                                                                  |
| J. LASCOUX     | Centre de Mathématiques - Ecole Polytechnique<br>17 rue Descartes - 75005 PARIS - FRANCE               |
| F. LAZZERI     | Istituto Matematico "Leonida Tonelli"<br>Via Derna 1 - 56100 PISA - ITALIE                             |
| LE D. T.       | Centre de Mathématiques - Ecole Polytechnique<br>17, rue Descartes - 75005 PARIS - FRANCE              |
| P. LE BARZ     | Département de Mathématiques - Université de Nice<br>Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX - FRANCE          |
| M. LEJEUNE     | Centre de Mathématiques - Ecole Polytechnique<br>17, rue Descartes - 75005 PARIS - FRANCE              |
| F. PHAM        | Département de Mathématiques - Université de Nice<br>Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX - FRANCE          |

|             |                                                                                                        |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| H. POPP     | Institut für Mathematik und Informatik<br>Universität Mannheim - MANNHEIM - R.F.A.                     |
| J.J. RISLER | Centre de Mathématiques - Ecole Polytechnique<br>17, rue Descartes - 75005 PARIS - FRANCE              |
| K. SAITO    | Mathematisches Institut der Universität Göttingen<br>34 GÖTTINGEN - Bunsenstrasse 3-5 - R.F.A.         |
| M. SCHAPS   | Department of Mathematics - University of Tel Aviv<br>TEL AVIV - ISRAEL                                |
| J.P. SPEDER | Département de Mathématique - Université de Nice<br>Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX - FRANCE           |
| B. TEISSIER | Centre de Mathématiques - Ecole Polytechnique<br>17, rue Descartes - 75005 PARIS - FRANCE              |
| K. UENO     | Institut für Mathematik und Informatik<br>Universität Mannheim - MANNHEIM - R.F.A.                     |
| O. ZARISKI  | Department of Mathematics - Harvard University<br>2 Divinity Avenue - CAMBRIDGE - Mass. 02138 - U.S.A. |

- La frappe des manuscrits a été assurée par le Département de Mathématiques de l'Université de Nice et par le Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.
- La rencontre a bénéficié des subventions et de la collaboration des organismes suivants :  
 Le Comité des Colloques de l'Année mathématique française  
 L'organisation du Congrès International des Mathématiciens 1970  
 L'Université de Nice  
 Le Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique  
 La Société Nicoletti (Nice).
- Enfin et surtout, je tiens à remercier tous les participants à la rencontre, dont la bonne humeur et l'esprit d'initiative ont pallié les insuffisances de l'organisation.

Nice, Eté 1973

F. PHAM