

Astérisque

JEAN LASCOUX

Avant-propos à Saito

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 193-194

http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__193_0

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AVANT-PROPOS A SAITO

Jean LASCOUX

Comme Cargèse et son église grecque, la monodromie associée à certaines équations différentielles a une histoire ancienne et riche. Mais nous ne retiendrons de ce passé que la contribution de Gauss telle que l'a fixée la physique mathématique anglaise dans ce monument : Whittaker E.T. and Watson G.N. (1927), A course of Modern Analysis, Cambridge.

Gauss s'intéressait à la fonction hypergéométrique $F(a, b, c, z)$, définie par son développement en série $F(a, b, c, z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1) b(b+1)}{1 \cdot 2 c(c+1)} z^2 + \dots$. Par prolongement analytique, on découvre que $F(a, b, c, z)$ est holomorphe, uniforme dans le plan complexe privé de la coupure $(1, \infty)$. Elle satisfait l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} F + \{a+b+1\} z \frac{dF}{dz} - ab F = 0$$

Les points singuliers de cette équation différentielle sont $(0, 1, \infty)$. Ils sont du type régulier-singulier !

Je rappelle que pour une équation du type de Fuchs $\frac{d^2}{dz^2} u + p(z) \frac{d}{dz} u + q(z) u = 0$ un point c est dit régulier-singulier si $p(z)(z-c)$ et $q(z)(z-c)^2$ sont holomorphes dans un voisinage de c .

La solution régulière à l'origine admet une représentation intégrale qui s'écrit

$$\int_1^\infty t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} (t-z)^{-a} dt$$

Nous allons nous restreindre à l'opérateur différentiel qui engendre la connexion de Gauss-Manin : en posant $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 1$ on obtient

$$L_z = z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-2z) \frac{d}{dz} - \frac{1}{4},$$

et la représentation intégrale se spécialise en

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-z)}}$$

On est donc conduit à étudier la famille de courbes elliptiques $y^2 = x(x-1)(x-z)$. Cette famille dégénère pour trois valeurs du paramètre z , à savoir $z = 0$, $z = 1$ et $z = \infty$.

La courbe elliptique de la famille porte deux cycles de dimension un (notons-les e_1, e_2), et, par "dualité" une forme différentielle algébrique de première espèce $\omega = \frac{dx}{y}$. Appliquons l'opérateur L_z à ω

$$L_z \omega = \{z(1-z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1-2z) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{4}\} \omega = d\left(\frac{y}{(x-z)^2}\right).$$

C'est le miracle cherché : l'opérateur différentiel par rapport au paramètre z , transforme la forme fermée ω en une forme exacte ! Ainsi, les deux périodes classiques $F_1(z) = \int_{e_1} \omega$ et $F_2(z) = \int_{e_2} \omega$ sont deux solutions de

l'équation différentielle de Gauss

$$L_z F = 0.$$

Manin, qui s'intéresse aux diviseurs sur la courbe elliptique, considère aussi l'intégrale de ω le long d'un chemin joignant deux points de la courbe, mais il est temps que je laisse la parole à Saito, me taisant d'autant plus volontiers que le grand article de Katz a paru entre-temps aux *Inventiones Mathematicae* (Vol. 18, 1972, p. 1).