

Astérisque

ANDRÉ GALLIGO

CHRISTIAN HOUZEL

Module des singularités isolées d'après Verdier et Grauert

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 139-163

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__139_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__139_0)

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULE DES SINGULARITES ISOLEES
D'APRES VERDIER ET GRAUERT

André GALLIGO - Christian HOUZEL

PLAN

- Introduction
- § 1 Passage du formel à l'analytique
- § 2 Déformations formelles
- § 3 Mise en équations et existence
d'une déformation semi-universelle
- Appendice : Weierstrass préparé à la Grauert

INTRODUCTION . - Ce texte expose les principaux points de la démonstration du résultat de Grauert dans [1] , dans la version repensée par Verdier [2] .

§ 1 . - PASSAGE DU FORMEL A L'ANALYTIQUE

DEFINITION 1 . - Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_q)$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$, I un idéal de $\mathbb{C}\{x\}$ et $R \in \mathbb{C}\{x, u, \phi, \psi\}$, on note m l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x\}$.

On appelle solution analytique du système d'équation $R \equiv 0$ (modulo I) la donnée d'un couple (φ, ψ) , $\varphi \in \mathbb{C}\{x\}$, $\psi \in \mathbb{C}\{x, u\}$ tel que $R(x, u, \varphi(x), \psi(x, u)) \equiv 0$ (modulo I) .

On appelle solution à l'ordre i du système d'équation $R \equiv 0$ (modulo I) la donnée d'un couple (φ, ψ) , $\varphi \in \mathbb{C}[x]$, $\psi \in \mathbb{C}\{u\}[x]$ tel que les degrés totaux de φ et de ψ en x soient inférieurs ou égaux à i et que

$$R(x, u, \varphi(x), \psi(x, u)) \equiv 0 \text{ modulo } (I + m^{i+1}) .$$

PROPOSITION 1 (H. GRAUERT - J.L. VERDIER) . - Soit $i_0 \in \mathbb{N}$; avec les notations précédentes, si le système d'équation $R \equiv 0$ (modulo I) admet une solution à l'ordre i_0 et si toute solution (φ_1, ψ_1) à l'ordre i , $i \geq i_0$, se prolonge en une solution $(\varphi_1 + \delta_1, \psi_1 + \gamma_1)$ à l'ordre $i+1$ avec $\delta_1 \in \mathbb{C}[x]$ et $\gamma_1 \in \mathbb{C}\{u\}[x]$ deux polynômes homogènes de degré $i+1$ en x , alors le système admet une solution analytique

Remarques préliminaires à la démonstration

1. (Théorème de préparation de Weierstrass cf [1] , [3] ou l'appendice).

Soit I un idéal de $\mathbb{C}\{x\}$ il existe un domaine $E(I)$ de $\mathbb{N}^n$ tel que

toute série g de $\mathbb{C}\{x,u\}$ soit congrue modulo I à une unique série $\text{red}(g)$ de $\mathbb{C}\{x,u\}$ telle que tous les exposants des monômes en x de $\text{red}(g)$ soient à l'extérieur de $E(I)$.

De plus, si $j^q(g)$ désigne la série g tronquée à l'ordre $q+1$ en x , on a $\text{red}(j^q(g)) = j^q(\text{red}(g))$.

2. Si (φ, ψ) est une solution du système $R \equiv 0$ (modulo I), alors $(\text{red}(\varphi), \text{red}(\psi))$ est aussi une solution. Ceci nous permet de ne considérer que les solutions (φ, ψ) avec φ et ψ réduites relativement à I , donc qui ont les exposants de leurs monômes en x à l'extérieur de $E(I)$.

Démonstration . - Soit (φ_1, ψ_1) une solution à l'ordre i avec φ_1 et ψ_1 réduites relativement à I ; deux polynômes $\delta_1 \in \mathbb{C}[x]$ et $\gamma_1 \in \mathbb{C}\{u\}[x]$ homogènes de degré total $i+1$ en x , réduits relativement à I , sont tels que $(\varphi_1 + \delta_1, \psi_1 + \gamma_1)$ soit une solution à l'ordre $i+1$ qui prolonge donc (φ_1, ψ_1) si et seulement si :

$$\text{red}[R(x, u, \varphi_1(x) + \delta_1(x), \psi_1(x, u) + \gamma_1(x, u))] \equiv 0 \text{ modulo } \mathfrak{m}^{i+2}$$

soit, en écrivant le développement de Taylor de R et en notant R_1 la partie homogène en x de degré $i+1$ de $\text{red}[R(x, u, \varphi_1(x), \psi_1(x, u))]$.

$$R_1 + \frac{\partial R}{\partial \varphi} \Big|_{x=0} \cdot \delta_1(x) + \frac{\partial R}{\partial \psi} \Big|_{x=0} \cdot \gamma_1(x, u) = 0.$$

En écrivant l'égalité des coefficients des polynômes réduits (on note avec la même lettre un polynôme et l'ensemble de ses coefficients), on obtient l'équation $-R_1 = \beta(\delta_1, \gamma_1)$ où β est le morphisme linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}\{u\}^s & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}\{u\}^s \\ (\delta_1, \gamma_1) & \xrightarrow{\quad} & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \Big|_{x=0} \cdot \delta_1 + \frac{\partial R}{\partial \psi} \Big|_{x=0} \cdot \gamma_1 \end{array}$$

car les coefficients de δ_1 varient dans un espace vectoriel $\mathbb{C}^s$ et ceux de γ_1 et de R_1 dans des modules libres $\mathbb{C}\{u\}^s$ (précisément

$s = H_A^1(i+2) - H_A^1(i+1)$ où H_A^1 désigne la fonction d'Hilbert Samuel de $A = k\{x\}_{/I}$).

Pour construire une solution convergente du système, on aimerait pouvoir choisir à chaque étape des (δ_1, γ_1) vérifiant l'équation et dont on majorerait la norme judicieusement, pour cela, on utilise le :

LEMME 1 (Cartan, cf [9]) . - Soit $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^j \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^k \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$ une présentation finie au-dessus d'un ouvert U , contenant 0 , de $\mathbb{C}^q$ d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$. Il existe un système fondamental de polycylindres compacts tels que pour chacun d'eux K , $0 \in \mathring{K} \subset U$, le morphisme induit par α

$$B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^j) \xrightarrow{\hat{\alpha}} B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^k)$$

soit d'image fermée et le morphisme $\text{Coker } \hat{\alpha} \longrightarrow \mathcal{F}_0$ soit injectif ;

$B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^j)$ désigne l'espace des fonctions continues sur K et holomorphes sur 0 qui, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

Appliquons ce lemme à notre situation ; soit U un ouvert de $\mathbb{C}^q$ sur lequel convergent les séries $\frac{\partial R}{\partial \Phi}(0, u, \varphi_1(0), \psi_1(0, u))$ et $\frac{\partial R}{\partial \Psi}(0, u, \varphi_1(0), \psi_1(0, u))$ qui ne dépendent pas de i puisque $\varphi_1(0) = \varphi_0$ et $\psi_1(0, u) = \psi_0$, on a les morphismes de faisceaux au-dessus de U :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s \quad \text{et} \quad \mathbb{C}^s \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s.$$

$$\gamma_1 \longmapsto \left. \frac{\partial R}{\partial \Psi} \right|_{x=0 \cdot \gamma_1} \quad (\delta_1, \gamma_1) \longmapsto \left. \frac{\partial R}{\partial \Psi} \right|_{x=0 \cdot \gamma_1} + \left. \frac{\partial R}{\partial \Phi} \right|_{x=0 \cdot \gamma_1}$$

soit K un polycylindre privilégié (du lemme), on a :

$$B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s) \xrightarrow{\hat{\alpha}} B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s) \quad \text{et} \quad \mathbb{C}^s \times B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s) \xrightarrow{\hat{\beta}} B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s).$$

L'image de $\hat{\beta}$ est la somme de l'image de $\mathbb{C}^s \times \{0\}$, qui est un sous-espace vectoriel de dimension finie, et de l'image de $\hat{\alpha}$, qui est fermée ; elle est donc un sous-espace vectoriel fermé de $B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}^s)$.

De plus, on a les suites exactes de faisceaux

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & B(K)^S & \longrightarrow & \mathfrak{C}^S & \xrightarrow{B(K)^S} & \mathfrak{C}^S \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \hat{\alpha} & & \downarrow \hat{\beta} & & \downarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & B(K)^S & \longrightarrow & B(K)^S & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \text{Coker } \hat{\alpha} & \longrightarrow & \text{Coker } \hat{\beta} & \longrightarrow & 0 & &
 \end{array}$$

en considérant aussi les fibres en 0 du diagramme correspondant avec α et β :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{C}^t & \longrightarrow & \text{Coker } \hat{\alpha} & \longrightarrow & \text{Coker } \hat{\beta} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{C}^t & \longrightarrow & \text{Coker } \alpha_0 & \longrightarrow & \text{Coker } \beta_0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

on obtient donc que $\text{Coker } \hat{\beta} \longrightarrow \text{Coker } \beta_0$ est injective.

Comme la solution (φ_1, δ_1) se prolonge (par hypothèse) en une solution à l'ordre $i+1$, $R_1 \in \text{Im } \beta_0$ et il provient donc d'un élément $\hat{R}_1$ de $\text{Im } \hat{\beta}$.

D'autre part $\hat{\beta}$ induit l'isomorphisme d'espaces de Banach :

$$\hat{\beta} : \mathfrak{C}^S \times B(K, \mathcal{O}_{\mathfrak{C}^Q})^S / \ker \hat{\beta} \xrightarrow{\sim} \text{Im } \hat{\beta}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } ||\hat{\beta}^{-1}(\hat{R}_1)|| &= \inf \{ ||(\delta_1, \gamma_1)|| / (\delta_1, \gamma_1) \in \hat{\beta}^{-1}(\hat{R}_1) \} \\
 &\leq ||\hat{\beta}^{-1}|| \cdot ||\hat{R}_1||
 \end{aligned}$$

donc il existe un couple (δ_1, γ_1) tel que

$$\beta(\delta_1, \gamma_1) = R_1, \quad ||\delta_1|| \leq L ||R_1|| \quad \text{et} \quad ||\gamma_1|| \leq L ||R_1||$$

où L est une constante indépendante de i .

On termine la démonstration en remarquant que

$$||R_i|| \leq ||R(x, u, \varphi_i, \psi_i)||, \text{ que}$$

$$||R(x, u, \varphi_i + \delta_i, \psi_i + \gamma_i) - R(x, u, \varphi_i, \psi_i)|| \leq M \cdot ||(\delta_i, \gamma_i)||$$

$$\text{donc que } ||R_i|| \leq ||R(x, u, \varphi_i, \psi_i)|| \leq N \cdot r^i$$

où L, M, N et r sont des constantes indépendantes de i . On en déduit que $||\delta_i|| \leq (L, N) r^i$ et $||\gamma_i|| \leq (L, N) r^i$ ce qui entraîne que les séries

$$\varphi = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} \delta_I x^I \text{ et } \psi = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} \gamma_I x^I \text{ convergent. C.Q.F.D.}$$

§ 2. - DEFORMATIONS FORMELLES D'UN GERME D'ESPACE ANALYTIQUE

Soit X_0 un germe d'espace analytique plongé dans $\mathbb{C}^n$.

Pour définir les déformations formelles de X_0 , introduisons :

La catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ des $\mathbb{C}$ -algèbres quotients d'algèbres de la forme $\mathbb{C}[[T_1, \dots, T_2]]$.

La catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathbb{C}$ -algèbres artiniennes (i.e. de dimension finie en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) ; c'est une sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{C}}$.

La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ des $\mathbb{C}$ -algèbres quotients d'algèbres de la forme $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}[[T_1, \dots, T_2]]$.

Soient $\hat{\mathcal{C}}^\circ$, $\mathcal{C}^\circ$, $\tilde{\mathcal{C}}^\circ$ les catégories opposées de ces catégories. Elles sont munies de produits fibrés et leurs objets seront notés $\text{Spec } A$ avec $A \in \hat{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}$ ou $\tilde{\mathcal{C}}$. On notera $\mathfrak{m}_A$ l'idéal maximal de A .

DEFINITION 1 . - On appelle déformation formelle de base $\hat{S}$ la donnée d'un diagramme cartésien du type

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \hat{S} \end{array} \quad \text{plat}$$

où $\hat{X} \in \tilde{\mathcal{C}}^\circ$ et $\hat{S} \in \hat{\mathcal{C}}^\circ$.

(cartésien signifie que $X_0 = \hat{X} \times_S \text{Spec } \mathbb{C}$).

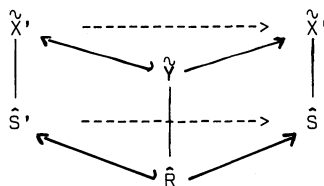
Pour abréger, on désignera la déformation par $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ ou même par $\tilde{X}$.

Deux déformations $\tilde{X}$ et $\tilde{X}'$ de X_0 de base $\hat{S}$ sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\tilde{X}$ sur $\tilde{X}'$ au-dessus de $\hat{S}$ qui induise l'identité sur X_0 .

Soit $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ une déformation de X_0 et $h : \hat{S}' \longrightarrow \hat{S}$ un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}$ on dit que la déformation $\tilde{X}' = \tilde{X} \times_{\hat{S}} \hat{S}'$ de X_0 de base $\hat{S}'$ est obtenue par changement de base.

DEFINITION 2 . - On dit que la déformation $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ de X_0 est formellement semi-universelle si toute déformation $\tilde{X}' \longrightarrow \hat{S}'$ de X_0 s'en déduit par un changement de base $h : \hat{S}' \longrightarrow \hat{S}$ unique au premier ordre (c.a.d. que si $\hat{S} = \text{Spec } A$ et $\hat{S}' = \text{Spec } A'$, $h^* : A/\mathfrak{m}_A^2 \longrightarrow A'/\mathfrak{m}_{A'}^2$ est unique).

DEFINITION 3 . - On dit que la déformation $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ de X_0 est formellement quasi-universelle si elle est formellement semi-universelle et si de plus tout diagramme cartésien du type suivant :



où $\tilde{X}' \longrightarrow \hat{S}'$ et $\tilde{Y} \longrightarrow \hat{R}$ sont des déformations de X_0 , se complète suivant les flèches en pointillé en un diagramme cartésien.

THEOREME 1 . - (M. Schlessinger) . Si X_0 est un germe d'espace analytique et à singularité isolée (plus généralement si $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}}^1(L_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) < \infty$)

où L_{X_0} est le complexe cotangent à X_0), il existe une déformation formelle de X_0 , $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ qui est formellement quasi-universelle.

§ 3 . - MISE EN EQUATION

Remarque 1 . - Toute algèbre A de $\hat{\mathcal{C}}$ et tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\hat{\mathcal{C}}$ peuvent être considérés comme limites inductives d'algèbres et de morphismes de $\mathcal{C}$ en posant : $A = \varinjlim_q A/\mathfrak{m}_A^q$ $f = \varinjlim_q f_q$ avec

$$f_q : A/\mathfrak{m}_A^q \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B^q$$

Remarque 2 . - Toute déformation formelle de X_0 peut donc être considérée comme la limite projective de déformations de X_0 :

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \hookrightarrow & X_1 & \hookrightarrow & X_2 & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow X_i \hookrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow S_i \longrightarrow \dots \end{array}$$

avec si $\hat{S} = \text{Spec } \mathbb{C}[[T]]/J$, $T = (T_1, \dots, T_2)$, $\mathfrak{m} = (T)$,

$$S_q = \text{Spec } \mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}^{q+1} \text{ et } X_q = \hat{X} \times_{\hat{S}} S_q$$

Les idéaux $J_q = J + \mathfrak{m}^{q+1}/\mathfrak{m}^{q+1}$ de $\mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}^{q+1}$ sont tels que pour tout $q \in \mathbb{N}$, J_{q+1} est un relèvement de J_q .

DEFINITION 1 . - Soit K un idéal de $\mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}_q$ (avec les notations précédentes), on dit qu'un système de générateurs $(g_1, \dots, g_k)$ de K est minimal si K n'admet pas de système de générateurs à $k-1$ éléments. On dit qu'un idéal L de $\mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}_{q+1}$ est un relèvement minimal de K si $\chi(L) = K$ et si tout idéal H contenu dans L tel que $\chi(H) = K$ est égal à L ; χ désigne ici la surjection canonique $\chi : \mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}_{q+1} \longrightarrow \mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}_q$.

Propriété . - Soit K un idéal de $\mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}_q$ et soit $(g_1, \dots, g_k)$ un système minimal de générateurs de K . Un idéal L de $\mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}_{q+1}$ est un

relèvement minimal de K si et seulement si il admet un système de générateurs $\{G_1, \dots, G_k\}$ formé par des relèvements G_i des g_i . Si L et L' sont deux relèvements minimaux de K , alors

$$L \cap (\mathfrak{M}^q / \mathfrak{M}^{q+1}) = L' \cap (\mathfrak{M}^q / \mathfrak{M}^{q+1})$$

Démonstration . - Si L est un relèvement minimal de K , toute famille d'éléments $G_1, \dots, G_k$ avec $G_i \in \chi^{-1}(g_i) \cap L$ engendre L . Réciproquement, soit L un idéal de $\mathbb{C}[[T]]$ engendré par des éléments $G_1, \dots, G_k$ tels que $\chi(G_i) = g_i$ et soit L' un relèvement minimal de K contenu dans L , L' est engendré par des éléments $G'_1, \dots, G'_k$ tels que $\chi(G'_i) = g_i$. Comme $L' \subset L$,

on peut écrire, pour $i = 1, \dots, k$, $G'_i = \sum_{\ell=1}^k A_{i\ell} G_\ell$ avec $A_{i\ell} \in \mathbb{C}[[T]] / \mathfrak{M}^{q+1}$

d'où $\sum_{\ell=1}^k (\chi(A_{i\ell}^\ell) - \delta_i^\ell) g_\ell = 0$, comme le système de générateurs (g_i) est minimal, pour tout $\ell = 1, \dots, k$, $\chi(A_{i\ell}^\ell) - \delta_i^\ell$ n'est pas inversible donc $\chi(A_{i1}^\ell)(0) - \delta_i^\ell = 0$ et $\chi(A_{i1}^\ell)(0) = A_{i1}^\ell(0) = \delta_i^\ell$, donc la matrice des A_{i1}^ℓ est inversible et $L = L'$.

Soient $L = (G_1, \dots, G_k)$ et $L' = (G'_1, \dots, G'_k)$ deux relèvements minimaux de K , si $g \in L \cap (\mathfrak{M}^q / \mathfrak{M}^{q+1})$ et $g = \sum_{i=1}^k A_i G_i$ alors $\chi(g) = \sum_{i=1}^k \chi(A_i) g_i = 0$

donc $\chi(A_i)(0) = A_i(0) = 0$ et

$$\sum_{i=1}^k A_i G'_i - \sum_{i=1}^k A_i G_i = \sum_{i=1}^k A_i (G'_i - G_i) \in \mathfrak{M} \cdot (\mathfrak{M}^q / \mathfrak{M}^{q+1}) = \{0\}$$

donc $g \in L'$.

Remarque 3 . - Soit J un idéal de $\mathbb{C}[[T]]$, la suite des

$J_q = J + \mathfrak{M}^q / \mathfrak{M}^{q+1}$ est formée à partir d'un certain rang par des relèvements minimaux.

En effet, tout système de générateurs de J_{q+1} induit canoniquement un

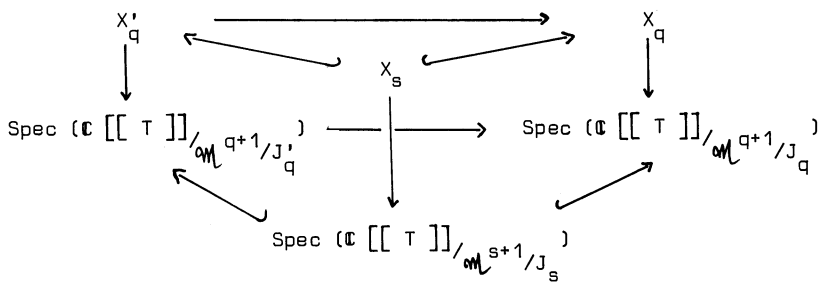
système de générateurs de J_q , donc la suite des nombres minimums de générateurs des J_q est croissante et bornée par le nombre minimum de générateurs de J , elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang.

LEMME 1 . - (Stabilité structurelle formelle) - Soit $\tilde{X} \rightarrow \hat{S}$ une déformation de X_0 qui est formellement quasi-universelle (voir § 1), il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq s$:

Si une déformation $\tilde{X}' \rightarrow \hat{S}' = \text{Spec } \mathbb{C}[[T]]_{/\mathcal{M}_{q+1}/J'}$ coïncide à l'ordre s avec $\tilde{X} \rightarrow \hat{S}$ et est telle que les $J'_\ell = J'_\ell + \mathcal{M}_{\ell+1}/\mathcal{M}_{\ell+1}$ sont des relèvements minimaux les uns des autres pour $s \leq \ell \leq q$ alors $X'_q \rightarrow S'_q$ est isomorphe à $X_q \rightarrow S_q$. De plus, il existe un relèvement minimal J'_{q+1} de J'_q et une déformation $X'_{q+1} \rightarrow S'_{q+1} = \text{Spec } \mathbb{C}[[T]]_{/\mathcal{M}_{q+2}/J'_{q+1}}$ qui prolonge $X'_q \rightarrow S'_q$

(i.e. $X'_q = X'_{q+1} \times_{S'_{q+1}} S'_q$).

Démonstration . - La remarque 3 fournit le rang s à partir duquel la suite des idéaux J_q est formée par des relèvements minimaux. La quasi-universalité de $\tilde{X} \rightarrow \hat{S}$, compte tenu que $X_s \rightarrow S_s$ coïncide avec $X'_s \rightarrow S'_s$, s'exprime par le diagramme cartésien :



Notre but est de montrer que la flèche horizontale du bas est un isomorphisme. Or, $\mathbb{C}[[T]]_{/\mathcal{M}_{q+1}/J'_q} \simeq \mathbb{C}[[T]]_{/\mathcal{M}_{q+1}/J_q}$ puisque J'_q et J_q sont obtenus par une suite de relèvements minimaux ; d'autre part,

$\mathbb{C}[[T]]/\mathcal{M}^{q+1}/J_q \longrightarrow \mathbb{C}[[T]]/\mathcal{M}^{q+1}/J'_q$ est surjective, puisqu'elle induit l'identité à l'ordre $s \geq 1$, donc c'est un isomorphisme (ce sont des $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de même dimension finie).

Cet isomorphisme provient d'un automorphisme de $\mathbb{C}[[T]]/\mathcal{M}^{q+1}$ que l'on prolonge arbitrairement en un automorphisme γ de $\mathbb{C}[[T]]/\mathcal{M}^{q+2}$, on pose alors $J'_{q+1} = \gamma(J_{q+1})$, $S'_{q+1} = \text{Spec } \mathbb{C}[[T]]/\mathcal{M}^{q+2}/J'_{q+1}$ et $X'_{q+1} = X_{q+1} \times_{S_{q+1}} S'_{q+1}$ est une déformation de X_0 qui prolonge $X_q \longrightarrow S_q$.

1^{ère} Mise en équations

Le § 2 affirme l'existence d'une déformation formelle $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ de X_0 qui est formellement quasi-universelle ; explicitons cette donnée :

$X_0 = \text{Spec } \mathbb{C}\{x\}/I_0$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\hat{S} = \varprojlim S_q$, $\tilde{X} = \varprojlim X_q$ avec

$S_q = \text{Spec } \mathbb{C}[[T]]/\mathcal{M}^{q+1}/S_q$ et $X_q = \text{Spec } \mathbb{C}\{x\}[[T]]/\mathcal{M}^{q+1}/I_{q+1}$,

$$\mathcal{M} = (T) = (T_1, \dots, T_2),$$

$J_q = (g_q^1, \dots, g_q^k)$ et $I_q = (f_q^1, \dots, f_q^l)$

(on peut prendre les mêmes l et k pour tous les q car le nombre minimum de générateurs des idéaux J_q et I_q croît avec q , donc est stationnaire).

Comme les déformations $X_q \longrightarrow S_q$ de X_0 sont plates, tout système de générateurs des relations entre les générateurs $f_0 = (f_0^1, \dots, f_0^l)$ qui s'écrit comme une matrice $L_0 \in \mathbb{C}\{x\}^{\ell m}$ se relève en un système de relations

$L_q \in (\mathbb{C}\{x\}[[T]]/\mathcal{M}^{q+1})^{\ell m}$ entre les générateurs $f_q = (f_q^1, \dots, f_q^l)$ soit

$L_q \cdot f_q \equiv 0 \pmod{(J_q)}$ i.e. il existe $M_q \in (\mathbb{C}[[T]]/\mathcal{M}^{q+1})^{km}$ tel que

$$L_q \cdot f_q = M_q \cdot g_q.$$

PROPOSITION 2 . - Soit s l'entier défini par le lemme et soit $\mathcal{S}$ le système d'équations

$$\mathcal{S} : \begin{cases} g = g_s \mod \mathcal{M}^{s+1} \\ f = f_s \mod \mathcal{M}^{s+1} \\ L.f = M.g \\ L = L_s \mod \mathcal{M}^{s+1} \end{cases}$$

Pour tout $q \geq s$, (g_q, f_q, L_q, M_q) est une solution du système

$\mathcal{S}$ modulo $\mathcal{M}^{q+1}$. Toute solution (g'_q, f'_q, L'_q, M'_q) du système

$\mathcal{S}$ modulo $\mathcal{M}^{q+1}$ définit une déformation $X'_q \longrightarrow S'_q$ isomorphe à $X_q \longrightarrow S_q$

et se prolonge en une solution $(g'_{q+1}, f'_{q+1}, L'_{q+1}, M'_{q+1})$ du système

$\mathcal{S}$ modulo $\mathcal{M}^{q+2}$.

Démonstration . - Immédiate à partir du Lemme

COROLLAIRE . - Il existe un germe de déformation analytique $X \longrightarrow S$ du germe d'espace analytique X_0 , telle que la déformation formelle correspondante $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ soit formellement quasi-universelle.

Démonstration . - Il suffit d'appliquer la proposition 1 du § 1.

Nous allons montrer que $X \longrightarrow S$ est aussi analytiquement semi-universelle, grâce à une :

2^{ème} Mise en équations

Soit $X' \longrightarrow S'$ un germe de déformation de X_0 , puisque $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ est quasi-universelle, pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $h_q : S'_q \longrightarrow S_q$ avec $\gamma_q : X'_q \xrightarrow{\sim} X_q \times_{S_q} S'_q$ il existe $h_{q+1} : S'_{q+1} \longrightarrow S_{q+1}$ avec

$\gamma_{q+1} : X'_{q+1} \xrightarrow{\sim} X_{q+1} \times_{S_{q+1}} S'_{q+1}$ qui prolongent h_q et γ_q .

Soit en notant $S' = \text{Spec } \mathbb{C}\{u\}_{/J}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ et $X' = \mathbb{C}\{x, u\}_{/I}$, $I' = (f'_1, \dots, f'_k) = (f')$ il existe

- un r-uple de séries $h = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} h_{\mu} u^{\mu} \in \mathbb{C}[[u]]^r$ qui induit

$h^* : \mathbb{C}[[T]] \longrightarrow \mathbb{C}[[u]]$ avec $h^*(J) \subset J'$,

- un n -uplet de séries $x = \sum_{|\mu|=1}^{\infty} c_{\mu}(x) u^{\mu} \in \mathbb{C}\{x\}[[u]]$ qui définit un automorphisme de $\mathbb{C}\{x\}[[u]]$,

- une matrice $\ell \times \ell$ de séries $1 - \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A_{\mu}(x) u^{\mu} \in \mathbb{C}\{x\}[[u]]^{k^2}$

qui définit un changement de générateurs de l'idéal I' qui vérifient le système d'équations :

$$\mathcal{C} \left\{ \begin{array}{l} (1 - \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A_{\mu} u^{\mu}) \circ f'(x - \sum_{|\mu|=1}^{\infty} c_{\mu}(x) u^{\mu}, u) = f(x, \sum_{|\mu|=1}^{\infty} h_{\mu} u^{\mu}) \bmod J' \\ \text{et} \quad g(\sum_{|\mu|=1}^{\infty} h_{\mu} u^{\mu}) \in J' \end{array} \right.$$

De plus, toute solution à l'ordre q de ce système $\mathcal{C}$ se relève en une solution à l'ordre $q+1$ de ce système $\mathcal{C}$.

La proposition 1 du § 1 montra alors qu'il existe une solution convergente du système $\mathcal{C}$ ce qui démontre le :

THEOREME 2 . - Si X_0 est un germe d'espace analytique réduit et à singularité isolée (plus généralement si $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}_{\sigma_{X_0}}^1(L_{X_0}, \sigma_{X_0}) < \infty$) il existe un germe de déformation analytique de X_0 qui est semi-universelle.

APPENDICE : WEIERSTRASS PREPARE A LA GRAUERT

THEOREME de préparation . -

Il s'agit d'une formule de division du type $f = \sum q_v g_v + r$ par rapport à plusieurs fonctions $(g_v)_v$, avec un reste r dont les monômes sont assujettis à des majorations de degrés par rapport à plusieurs variables $(t_1, \dots, t_m)$. (Il peut y avoir en plus d'autres variables, par exemple $(y_1, \dots, y_q)$).

On ordonne les exposants $v = (v_1, \dots, v_m)$ par le bon ordre suivant sur $\mathbb{N}^n$:

$$\mu < v \iff |\mu| < |v| \quad \text{ou}$$

$$|\mu| = |v| \text{ et } \exists i \in [1, m] \text{ tq } \mu_i < v_i \text{ et}$$

$$\mu_j = v_j \text{ pour } j > i .$$

Si K est un anneau, on définit l'ordre de la série $f = \sum a_v t^v \in K[[t]]$ par $\text{ord}(f) = \inf \{v/a \neq 0\} \in \mathbb{N}^n \cup \{\infty\}$, on a immédiatement :

$$\text{ord}(f + g) \geq \inf(\text{ord}(f), \text{ord}(g)) \text{ et } \text{ord}(f.g) = \text{ord}(f) + \text{ord}(g) .$$

Décrivons maintenant les restrictions sur les restes :

DEFINITION 1 . -

a) On appelle système de réduction de dimension m , la donnée d'une suite d'applications $S = (s_1, \dots, s_m)$; $s_1 \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{N}}^*$,

$$s_2 : [0, s_1[\longrightarrow \bar{\mathbb{N}}^*, \dots, s_{i+1} : \{v \in \mathbb{N}^i / \text{pour } j = 1, \dots, i ;$$

$$0 \leq v_j < s_j(v_1, \dots, v_{j-1})\} \longrightarrow \bar{\mathbb{N}}^* \dots, \text{telles que :}$$

$$s_i(v) = \infty \Rightarrow s_{i+1}(v, n) = \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

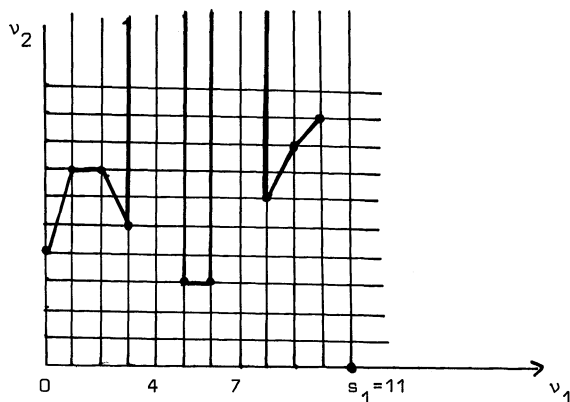
$$b) v = (v_1, \dots, v_i) < S \iff 0 \leq v_j < s_j(v_1, \dots, v_{j-1}) \text{ pour } j = 1, \dots, i .$$

On note $R_i(S) = \{v \in \mathbb{N}^i / v < S\}$, c'est un "hypographe" de $\mathbb{N}^i$.

c) On dit que $v = (v_1, \dots, v_i]$ est fini pour S si $i < m$, $v < S$ et $s_{i+1}(v) < \infty$. On pose alors $\bar{v} = (v, s_{i+1}(v)) \in \mathbb{N}^{i+1}$ et on note $F(S)$ l'ensemble des multiindices finis pour S .

d) On dit que $v = (v_1, \dots, v_i]$ est maximal pour S si $v < S$, $s_i(v_1, \dots, v_{i-1}) < \infty$ et $(s_{i+1}(v) = \infty \text{ ou } i = m)$. On note $M(S)$ l'ensemble des multiindices maximaux pour S .

Exemple . -



$S = (s_1, s_2)$ $s_1 = 11$, s_2 donné par son graphe

$F(S) = \{\emptyset\} \cup ([0, 11[- \{4, 7\})$

(l'axe exclu)

$M(S) = \{4, 7\} \cup \text{hypographe de } s_2|_{[0, 11[- \{4, 7\}}$

DEFINITION 2 . - On dit que $f = \sum a_v t^v \in K[[t]]$ est réduite relativement à S si $(a \neq 0 \Leftrightarrow v < S)$. On note $K[[t]]_S$ le sous module des séries réduites relativement à S .

Remarque . - On peut aussi considérer des séries tronquées en degrés plus grand que k , on impose alors à S la condition supplémentaire :
 $v \text{ fini} \implies |v| < k$.

Notation . - Pour tout multiindice v de dimension i , on pose
 $t_v = (t_{i+1}, \dots, t_m)$.

LEMME 1 . - L'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{v \in M(S)} K[[t_v]] & \xrightarrow{\quad} & K[[t]]_S \\ (f_v) & \xrightarrow{\quad} & \sum f_v t^v \end{array} .$$

Preuve . - Il suffit de relire la définition d'un multiindice maximal.

LEMME 2 . - L'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc} K[[t]]_S \oplus \bigoplus_{v \in F(S)} K[[t_v]] & \xrightarrow{\quad} & K[[t]] \\ (r, q) & \xrightarrow{\quad} & f = \sum q_v t^{\bar{v}} + r \end{array}$$

de plus, $\text{ord}(f) = \inf(\text{ord}(r); \text{ord}(q_v) + \bar{v})$.

Démonstration . - Par récurrence sur $d_S = \sup \{\dim v / v \in F(S)\}$.

. $d_S = 0$ alors $F(S) = \{\emptyset\}$ et $s_1 < \infty$ mais $s_2 = \infty$; il suffit d'écrire la formule de division par $t_1^{s_1}$:

$$\begin{array}{ccc} K[[t]]_S \oplus K[[t_\emptyset]] & \xrightarrow{\quad} & K[[t]] \\ (r, q) & \xrightarrow{\quad} & f = q t_1^{s_1} + r \end{array}$$

. $d = d_S \geq 1$. On suppose la proposition vraie pour $d-1$ et on définit $S' = (s'_1, \dots, s'_m)$ par $s'_i = s_i$ si $i \leq d$ et $s'_i = \infty$ si $i > d$, de sorte

que $d_{S'} = d-1$, $F(S') = F(S) \cap \{v/\dim v < d\}$ et $M(S')$

$M(S') = M(S) \cap \{v/\dim v \leq d\} \cup F(S) - F(S')$. On remarque que

$F(S) - F(S') = M(S') \cap \{v/\dim v = d\} = M(S) \cap \{v/\dim v = d\}$ que si

$v \in F(S) - F(S')$ $K[[t_v]] = K[[t_{d+2}, \dots, t_m]][[t_{d+1}]] = K'[[t_{d+1}]]$ et que la division par $t_{d+1}^{s_{d+1}(v)}$ donne une bijection :

$$\begin{array}{ccc} K'[[t_{d+1}]]_{s_{d+1}(v)} \oplus K'[[t_{d+1}]] & \longrightarrow & K'[[t_{d+1}]] \\ (r, q) & \longmapsto & f = q t_{d+1}^{s_{d+1}(v)} + r. \end{array}$$

Ceci dit, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire toute $f \in K[[t]]$ de façon unique :

$$f = \sum_{v \in F(S')} q_v t^{\bar{v}} + r \quad \text{avec} \quad \text{ord}(f) = \inf(\text{ord}(r), \text{ord}(q_v) + \bar{v})$$

$$\text{or } r = \sum_{v \in M(S')} r_v t^v = \sum_{v \in M(S)} r_v t^v + \sum_{v \in F(S) - F(S')} (r'_v + q_v t_{d+1}^{s_{d+1}(v)}) t^v$$

avec $\text{ord}(r_v t^v) = \inf(\text{ord}(r'_v t^v), \text{ord}(q_v) + \bar{v})$ et

$$f = \sum_{F(S)} q_v t^{\bar{v}} + \sum_{\substack{v \in M(S) \\ \dim v \leq d}} r_v t^v + \sum_{F(S) - F(S')} r'_v t^v.$$

Le reste est bien dans $K[[t]]_S$ grâce à la définition des r'_v .

Remarque . - Pour les séries tronquées, on tronque les q_v à un ordre un peu plus grand pour garder l'unicité.

On suppose maintenant que K est une algèbre de Banach et on définit sur $K[[t]]$ les semi-normes usuelles $||\sum a_v t^v||_\rho = \sum ||a_v|| \rho^v$ où $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$. On pose $K(\rho) = \{f \in K[[t]] / ||f||_\rho < \infty\}$, c'est une algèbre de Banach. Notons que $K(\rho, \rho') = K(\rho)(\rho')$. On pose $K(\rho)_S = K[[t]]_S \cap K(\rho)$. Les lemmes 1 et 2 admettent alors les corollaires suivants :

LEMME 1' . - $\bigoplus_{v \in M(S)} K(\rho_v) \xrightarrow{\sim} K(\rho)_S$ (isométrie)

$$f_v \longmapsto \sum f_v t^v$$

(on pose par définition $||\{f_v\}|| = \sum ||f_v|| \rho^v$) .

LEMME 2' . - $K(\rho)_S \oplus \bigoplus_{v \in F(S)} K(\rho_v) \xrightarrow{\tilde{\tau}} K(\rho)$ (isométrie)

$$(r, q_v) \longmapsto f = \sum q_v t^{\bar{v}} + r$$

(on pose par définition $||(r, q_v)|| = ||r|| + \sum ||q_v|| \rho^{\bar{v}}$)

est un isomorphisme métrique.

THEOREME 1 . - Soit S un système de réduction et soit $g = (g_v) \in K(\rho)^{F(S)}$ et soit $t^* = (t^{\bar{v}})$. On suppose qu'il existe une matrice inversible $A = (\alpha_{vv'})_{v,v' \in F(S)}$ à coefficients dans $K(\rho)$ telle que $h = A^{-1}g - t^*$ vérifie les inégalités $||\{h_v\}||_\rho < \rho^{\bar{v}}$, alors l'application suivante est un isomorphisme (non isométrique) d'espaces de Banach :

$$K(\rho)_S \oplus \bigoplus_{v \in F(S)} F(\rho_v) \xrightarrow{\gamma} K(\rho)$$

$$(r, q) \longmapsto f = \sum q_v g_v + r .$$

De plus $\text{ord}(f) = \inf (\text{ord}(r), \text{ord}(q) + \bar{v})$. On appelle r la réduction de f relativement à S .

Démonstration . - On élimine A grâce à l'automorphisme

$$\bigoplus_{v \in F(S)} K(\rho_v) \xrightarrow{\quad} \bigoplus_{v \in F(S)} K(\rho_v)$$

$$(q_v) \longmapsto \sum_{v'} q_v \alpha_{vv'} .$$

Alors $g_v = t^{\bar{v}} + h_v$, $\gamma = \tau + \eta$ où $\eta : (r, q_v) \longmapsto \sum q_v h_v$

$\gamma = \tau(1 + \tau^{-1} \eta)$, il suffit de voir que $||\tau^{-1} \eta|| < 1$. Or

$$||\{h_v\}||_\rho \leq \lambda \rho^{\bar{v}} \text{ avec } \lambda < 1 \text{ et}$$

$$\tau^{-1} n : (r, q_v) \longmapsto \sum q_v h_v = \sum q'_v t^{\bar{v}} + r' \longrightarrow (r', q'_v)$$

$$\begin{aligned} ||\tau^{-1} n(r, q_v)|| &= \sum ||q_v h_v|| \leq \sum ||q_v|| \cdot ||h_v|| \leq \lambda \sum ||q_v|| \rho^{\bar{v}} \\ &\leq \lambda ||(r, q_v)|| \end{aligned}$$

donc $||\tau^{-1} n|| \leq \lambda < 1$.

COROLLAIRE 1 . - Soit $g = (g_v)_{v \in F(S)} \in \mathbb{C}\{y, t\}^{F(S)}$. On suppose que $g_v(0, t)$ est d'ordre $\bar{v}$ pour tout $v \in F(S)$. Alors pour tout $f \in \mathbb{C}\{y, t\}$, il existe $(q_v), r \in \mathbb{C}\{y, t\}$ uniques telles que r soit S -réduite par rapport aux variables t , que q_v ne dépend que des variables y et t_v et que $f = \sum_v q_v g_v + r$. De plus, $\text{ord}(f) = \inf(\text{ord}(r), \text{ord}(q_v) + \bar{v})$.

Démonstration . - On a $g_v(y, t) = \sum_{\mu} a_{v, \mu}(y) t^{\mu}$ avec $a_{v, \mu}(0) = 0$ si $\mu < \bar{v}$ et $a_{v, \mu}(0) \neq 0$ si $\mu = \bar{v}$. Il existe $\rho' = (\rho'_1, \dots, \rho'_q)$ tel que tous les $a_{v, \bar{v}}(y)$ soient inversibles dans $\mathbb{C}(\rho')$. Soient A la matrice diagonale $(a_{v, \bar{v}}(y))$ et $h_v = \sum_{\mu \neq \bar{v}} a_{v, \bar{v}}(y)^{-1} a_{v, \mu}(y) t^{\mu}$ on a $g = A \cdot (t^{\bar{v}} + h_v)_v$ et $||h_v||_{\rho, \rho'} = \sum_{\mu \neq \bar{v}} ||a_{v, \bar{v}}^{-1} a_{v, \mu}||_{\rho} \rho^{\mu} = \sum_{\mu \neq \bar{v}} b_{\mu}(\rho') \rho^{\mu} = \varphi(\rho, \rho')$ et on termine grâce au lemme facile :

LEMME . - Si $\varphi(\rho, \rho')$ est une fonction continue par rapport à (ρ, ρ') et telle que $\varphi(\rho, \rho) < \rho^{\bar{v}}$ alors il existe $\delta_0 > 0$ et pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$ un $\delta' > 0$ tels que $\varphi(\rho, \rho') < \rho^{\bar{v}}$ pour $\rho \leq \delta$ et $\rho' \leq \delta'$.

COROLLAIRE 2 . - Soit $g = (g_v)$ comme dans le corollaire 1. Alors il existe $p = (p_v)$ et $A = (a_{v, v})$ une matrice inversible tels que $g = Ap$ et que pour tout $v \in F(S)$, $p_v = t^{\bar{v}} + r_v$ où r_v est réduite et d'ordre strictement supérieur à v . On dit que p_v est un polynôme de Weierstrass.

On écrit $t^{\bar{v}} = \sum q_{v\mu} g_{\mu} - r_v$ avec r_v réduite et $\bar{v} = \text{ord}(t^{\bar{v}}) = \inf(\text{ord } q_{v\mu} + \bar{\mu}, \text{ord } r_v)$, d'où $\text{ord } r_v > \bar{v}$ (puisque $\bar{v} \nmid \delta$), soit $p = t^{\bar{v}} + r_v = \sum_{\mu} q_{v\mu} g_{\mu}$ "polynôme de Weierstrass". Comme $\text{ord } p_v = \bar{v}$, on peut aussi diviser par les p_v , et écrire :

$$\begin{aligned} g_v &= \sum_{\mu} q'_{v\mu} p_{\mu} + r'_v \quad \text{avec } r'_v \text{ réduite} \\ &= \sum_{\mu, \rho} q'_{v\mu} q_{\mu\rho} g_{\rho} + r'_v \end{aligned}$$

l'unicité de la division de g_v par les (g_{ρ}) permet d'écrire :

$\sum_{\mu} q'_{v\mu} q_{\mu\rho} = \delta_{v\rho}$ et $r'_v = 0$. Ainsi la matrice $A = (q'_{v\mu})$ inverse de $(q_{\mu\rho})$ et les polynômes de Weierstrass $p_v = t^{\bar{v}} + r_v$ conviennent

Remarque 1 . - Soit $k \subset K$ un sous anneau tel que $G_m(k) = k \cap G_m(K)$, où $G_m(k)$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de k ; si les g_v et f appartiennent à $k[[t]]$, alors il en est de même de r et des q_v .

En effet, les coefficients de ces séries se calculent par des déterminants à coefficients dans k (systèmes d'équations linéaires de Cramer).

On applique cette remarque à $K = \mathbb{C}(\rho')$ et $k \subset \mathbb{C}(\rho')$ l'anneau des fractions rationnelles en les (y_1) régulières dans le polydisque de polyrayon ρ' .

2 . - On a les mêmes résultats avec des séries tronquées.

Notation . Pour toute $M \in GL(m, \mathbb{C})$ et toute $f \in \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_m\}$ on note f^M l'élément de $\mathbb{C}\{t_1, \dots, t_m\}$ tel que, pour tout t , $f^M(t) = f(Mt)$.

THEOREME 2 . - Soit I un idéal propre de $\mathbb{C}\{t\}$, $t = (t_1, \dots, t_m)$, on lui associe de manière canonique

- Un système de réduction S
- Un ouvert de Zariski non vide U de $GL(m, \mathbb{C})$
- Après avoir effectué un changement linéaire de coordonnées de manière que $1 \in U$, une suite de polynômes de Weierstrass $(p_v)_{v \in \bar{v}} \in F(S)$ (c.a.d. $p_v = t^{\bar{v}} + r_v$, r_v réduite relativement à S et $\text{ord}(r_v) > \bar{v}$) tels que :

- 1) $\forall v \in \bar{v} \quad p_v \in I$
- 2) $\forall f \in I, \forall M \in U$ on a $(f^M \text{ réduite relativement à } S) \iff (f = 0)$.

Démonstration . - Par récurrence, on construit : un système de réduction S_r , un ouvert de Zariski non vide $U_r \subset \text{Gl}(m, \mathbb{C})$ et une suite $p_v^r \in \mathbb{C}\{t$, $v \in F(S_r)$ tels que :

- 0) $\text{card } F(S_r) = r$
- 1) $\forall v \in F(S_r)$, $p_v^r \in I$ et p_v^r est un polynôme de Weierstrass relativement à S_r .
- 2) $\forall f \in I$, $\forall M \in U_r$ on a $(f^M \text{ réduite relativement à } S_r) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (f = 0 \text{ ou } \text{ord}(f^M) > \sup \{\bar{v} / v \in F(S_r)\})$.

Pour $r = 0$, $S_0 = \{\infty\}$ et $U_0 = \text{Gl}(m, \mathbb{C})$.

On va faire la construction de manière que $U_r \supset U_{r+1}$ et $S_r \leq S_{r+1}$ c.a.d. $\forall v \in F(S_r)$, $s_1^{r+1}(v) = s_1^r(v)$ pour tout i . (Ce qui implique $F(S_r) \subset F(S_{r+1})$)
 De plus, on aura $S_r < S_{r+1}$ sauf dans le cas où $f \in I$ et f^M réduite relativement à S_r implique $f = 0$. Enfin, nous noterons $\text{red}_r^M(f^M)$ le reste de la division de f^M par les p_v^M (ce reste est réduit relativement à S_r). Nous aurons alors terminé grâce au lemme trivial :

LEMME . - Toute suite croissante de systèmes de réduction est stationnaire.

Supposons donc S_r ; U_r ; (p^r) , $v \in F(S_r)$ construits. Si pour $f \in I$ et $M \in U_r$, f^M réduite relativement à S_r implique $f = 0$, on s'arrête. Sinon, soit μ le minimum des ordres des f^M pour $f \in I$ et $M \in U_r$ qui sont réduites relativement à S_r . Il existe donc une $f \in I$ et une $M_0 \in U_r$ telles que $f^{M_0} = g = \text{red}_r^{M_0}(f^{M_0}) = at^\mu + h$ avec $\text{ord}(h) > \mu > \sup \{\bar{v} / v \in F(S_r)\}$ (d'après 2_r). On peut supposer $a = 1$, quitte à diviser f par a qui est non nul. De même, pour toute $M \in U_r$, on a $g(M) = \text{red}_r^M(f^M) = a(M)t^\mu + h(M)$; d'après la remarque 1, comme f^M et les p_v^M sont des fonctions rationnelles des coefficients de M , il en est de même de $h(M)$. On définit alors U_{r+1} et S_{r+1} par :

$U_{r+1} = \{M \in U_r / \frac{h(M)}{a(M)} \text{ est régulière}\}$, c'est un ouvert de Zariski non vide.

$$a) \quad s_j^{r+1}(v) = s_j^r(v) \quad \text{pour } v \in F(S_r)$$

- b) $s_i^{r+1}(\mu') = \mu_i$ où $(\mu', \mu_i) = \mu$ défini plus haut.
 c) $s_j^{r+1}(v) = \infty$ si $v \notin F(S_r)$ et $v \neq \mu'$.

Il faut voir que S_{r+1} est bien défini et que c'est un système de réduction : soit que $\mu' \notin F(S_r)$ (car on a $\mu_i < s_i^r(\mu')$ puisque g est réduite relativement à S_r) et que $\mu'' = (\mu_1, \dots, \mu_{i-2}) \in F(S_r)$ autrement dit il faut voir que μ est maximal pour S_r .

En effet, si $s_i^r(\mu') < \infty$ on aurait $|\mu| < |\mu'|$ et $\mu' \in F(S_r)$ ce qui serait absurde d'après (2_r) . Si $s_{i-1}^r(\mu'') = \infty$ on peut considérer la matrice

$$N = 1 + b \begin{matrix} E_{i-1,i} \\ \in \text{Gl}(n, \mathbb{C}) \end{matrix}$$

$$g = t^\mu + \sum_{\lambda > \mu} \alpha_\lambda t^\lambda \quad \text{et} \quad g^N = t^{\mu''} t_{i-1}^{\mu_{i-1}-1} [b^{\mu_{i-1}-1} + \sum_{\lambda_{i-1} > \mu_{i-1}} \alpha_\lambda b^{\lambda_{i-1}-1}] + \dots$$

$$(\lambda'', \lambda_{i-1} + \lambda_i) = (\mu'', \mu_{i-1} + \mu_i)$$

donc si b n'est pas racine du polynôme d'ordre μ_{i-1} ci-dessus et si

$$NM_0 \in U_{r+1}, \quad \text{ord}(g^N) = (\mu'', \mu_{i-1} + \mu_i) < S \quad \text{ce qui serait absurde puisqu'alors}$$

$$\text{ord}(\text{red}_r^{NM_0}(g^N)) = (\mu'', \mu_{i-1} + \mu_i, 0) < \mu.$$

Enfin, il est clair que $S_{r-1} < S_r$. On peut supposer que l'identité $\text{Id} \in U_{r+1}$ (ce qui revient à changer les coordonnées) et on pose

$$p_v^{r+1} = \text{red}_{r+1}^{\text{Id}}(p_v^r) + t^{\bar{v}} \quad \text{pour } v \in F(S_r)$$

et

$$p_\mu^{r+1} = \text{red}_{r+1}^{\text{Id}}(g) + t^\mu.$$

Remarques . - 1) Dans le cas $I = (f)$, on obtient le théorème de préparation de Weierstrass classique ; S est alors la donnée de $s_1 = |\text{ord}(f)|$,
 $s_2 = \dots = s_m = \infty$.

2) On a le même théorème pour un idéal de séries tronquées $\bar{I} \subset \mathbb{C}\{t\} / \mathfrak{m}^{k+1}$. $\bar{I}$ se relève en un idéal I de $\mathbb{C}\{t\}$ pour lequel on effectue la construction précédente et on s'arrête lorsque : $f \in I$ et $M \in U_r$, f^M réduite relativement à S_r implique $|\text{ord}(f)| > k$.

3) Si $\bar{g} \in \mathbb{C}\{t\}/I$ le théorème permet de dire qu'après changement linéaire générique des coordonnées il existe un représentant plus beau que les autres unique $g \in \mathbb{C}\{t\}$ de $\bar{g}$, c'est celui qui est réduit relativement à S c.a.d. celui dont tous les exposants de ses monômes sont dans l'hypographe de N^m $\mathcal{H}(I) = \{v \in N^m / v < S\}$.

4) D'après la construction précédente, on a

$\mathcal{H}(I + \mathfrak{m}^{k+1}) = \mathcal{H}(I) \cap \mathcal{H}(\mathfrak{m}^{k+1})$. On en déduit que la connaissance de la " Multiplicité " S de l'idéal I , donc celle de $\mathcal{H}(I)$ détermine la connaissance de la fonction de Samuel de I :

$$H(k) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\}/I + \mathfrak{m}^{k+1} = \text{card}(\mathcal{H}(I + \mathfrak{m}^{k+1}))$$

$$5) \text{ D'après le lemme 1, } \mathcal{H}(I) = \bigsqcup_{v \in M(S)} (v, 0) + 0 \times \mathbb{N}^{m-\dim v},$$

donc si on décompose $M(S) = \bigsqcup_i M_i(S)$ avec $M_i(S) = \{v \in M(S) / m - \dim v = i\}$ on voit que pour k assez grand ($k > \max \bar{v} / v \in F(S)$) on obtient

$$H(k+1) - H(k) = \sum_i \text{card}(M_i(S)) \cdot \frac{k(k+1) \dots (k+i-2)}{(i-1)!} . \text{ On retrouve}$$

ainsi que pour k assez grand $H(k)$ est un polynôme en k de degré

$i_0 = \max \{i = m - \dim v / v \in M(S)\}$ et dont le coefficient du terme de plus haut degré est $\frac{1}{i_0!} \text{card}(M_{i_0}(S))$.

COROLLAIRE . - Soient I un idéal de $\mathbb{C}\{t\}/\mathfrak{m}^{k+1}$ et I_0 son image dans $\mathbb{C}\{t\}/\mathfrak{m}^k$, on leur associe (S, p_v) et (S^0, p_v^0) . Alors $S_0 \leq S$ et

$$\begin{aligned} p_v &\equiv p_v^0 \pmod{\mathfrak{m}^k} & \text{pour } v \in F(S_0) \\ p_v &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^k} & \text{pour } v \in F(S) - F(S_0) \end{aligned}$$

Donc S et (p_v) se stabilisent dans un système projectif.

COROLLAIRE . - Supposons qu'avec les notations précédentes $S = S_0$ et soit $\tilde{I}$ un idéal de $\mathbb{C}\{t\}/\mathfrak{m}^{k+1}$ engendré par des polynômes de Weierstrass $\tilde{p}_v$ qui

relèvent les p_v^0 . Si $\tilde{I}$ est un relèvement minimal de I_0 , alors $\tilde{I}$ admet S_0 comme système de réduction et donc $\tilde{R}_v$ comme système de polynômes de Weierstrass.

Démonstration . - Soit I' un relèvement minimal de I_0 contenu dans I . On a vu, au début, que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\} / (\mathfrak{M}^{k+1}, I') = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\} / (\mathfrak{M}^{k+1}, I_0) \leq \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\} / (\mathfrak{M}^{k+1}, I)$. D'après le corollaire $S_0 \leq \tilde{S}$, donc $S_0 = \tilde{S}$.

COROLLAIRE . - Soient I un idéal de $\mathbb{C}\{t\} / \mathfrak{M}^k$, $p_v = t^{\bar{v}} + \sum a_{v\mu} t^\mu$, $v \in F(S)$ un système de polynômes de Weierstrass et $\Phi \subset F(S)$ tel que $(p_v)_{v \in \Phi}$ est un système minimal de générateurs de I . Pour tout $\ell > k$, les relèvements minimaux $J \subset \mathbb{C}\{t\} / \mathfrak{M}^\ell$ de I sont paramétrés par $(A_{v\mu})_{v \in \Phi, 0 < \mu < v}$ où $p_v = t^{\bar{v}} + \sum A_{v\mu} t^\mu$, $v \in F(S)$ est le système de polynômes qui relève (p_v) .

Démonstration . - On a pour tout $v' \in F(S)$, $p_{v'} = \sum_{v \in \Phi} c_{v,v'} p_v$, $c_{v,v'} \in \mathbb{C}\{t\} / \mathfrak{M}^{k+1-|v|}$. Si J et J' sont deux relèvements minimaux de I dans $\mathbb{C}\{t\} / \mathfrak{M}^\ell$ qui coïncident modulo $\mathfrak{M}^{\ell-1}$, soient

$$\begin{aligned} p_v &= t^{\bar{v}} + A_v & \text{et} & & p'_v &= t^{\bar{v}} + A'_v, & \text{avec} \\ A_v &= \sum A_{v\mu} t^\mu & \text{et} & & A'_v &= \sum A'_{v\mu} t^\mu, \end{aligned}$$

les polynômes de Weierstrass correspondants.

On considère $\tilde{p}_v = \sum c_{v,v'} p_{v'} = t^{\bar{v}} + b_v$ et $\tilde{p}'_v = \sum c_{v,v'} p'_{v'} = t^{\bar{v}} + b'_v$

on a $b_v - A_v = \sum c_{v,v'} p_{v'} - p_v \in J$ donc $\text{red } b_v = A_v$ de même $\text{red } b'_v = A'_v$ d'où

$$\begin{aligned} \tilde{P}'_v - \tilde{P}_v &= \sum c_{v,v} (P'_v - P_v) = b_v - b'_v \\ &= \sum_{\substack{v' \\ |\mu| = \ell-1}} c_{v,v'}(0) (A'_{v\mu} - A_{v\mu}) \quad (\text{car } J \equiv J' \pmod{\mathfrak{m}^{\ell-1}}) \end{aligned}$$

Ce deuxième membre est réduit (puisque $A'_{v\mu}$ et $A_{v\mu}$ le sont) donc il est égal à $\text{red } b'_v - \text{red } b_v = A'_v - A_v$.

Alors pour tout μ tel que $|\mu| = \ell-1$

$$A_{v,\mu} - \sum c_{v,v}(0) A_{v\mu} = A'_{v,\mu} - \sum c_{v,v}(0) A'_{v\mu} = c_v^{\text{te}}.$$

Par récurrence sur ℓ on voit donc que les $A_{v\mu}$ $v \in \Phi$ et $0 < \mu < v$ paramétrisent les relèvements minimaux de I .

REFERENCES

- [1] H. GRAUERT, Über die Deformation isolierter singularitäten analytischer Mengen, Inventiones Math. 15 (1972), pp. 171-198.
- [2] J.L. VERDIER, Déformations de singularités isolées en Géométrie analytique Séminaire Douady-Verdier, E.N.S. 1971-72.
- [3] A. GALLIGO, Sur le théorème de préparation de Weierstrass pour un idéal de $k\{x_1, \dots, x_n\}$.