YVES GUIVARC'H
MICHAEL KEANE

Un théorème de renouvellement pour les groupes nilpotents

Astérisque, tome 4 (1973), p. 37-40
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__37_0>

UN THEOREME DE RENOUVELLEMENT

POUR LES GROUPES NILPOTENTS

par Y. GUIVARC'H et M. KEANE

Soit G un groupe localement compact, nilpotent et à génération compacte. Notons par $K(G)$ le sous-groupe maximal compact (voir l'exposé précédent [3] pour les notations). Soit μ une probabilité apériodique sur G telle que $MA(\mu)$ soit transiente. Posons

$$\mathcal{U} = \sum_{n \geq 0} \mu^n$$

Alors $\mathcal{U}$ est une mesure de Radon sur G dont les translatées sont bornées. Supposons de plus que

(*) Si ν est une mesure de Radon sur G dont les translatées sont bornées, et si $\nu * \mu = \nu$, alors $\nu = c^{te} . \lambda$ (la mesure de Haar).

Cette hypothèse est vérifiée si le support de μ est compact ou si $(G/_{K(G)})$ est abélien ; on ignore si elle est vraie en général ([2]).

<u>Théorème</u>.-

Le théorème de renouvellement est vrai pour $MA(\mu)$, i.e. :

(1) Si $G/_{K(G)} \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, alors les limites vagues

$$\lambda_+ = \lim_{x \to +\infty} \delta_x * \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \lambda_- = \lim_{x \to -\infty} \delta_x * \mathcal{U}$$

existent ; on a $\lambda_+ = c_+ . \lambda$, $\lambda_- = c_- . \lambda$, et $c_+ . c_- = 0$.

(2) Si $G/_{K(G)} \ncong \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ou 0, alors

$$\lim_{x \to \infty} \delta_x * \mathcal{U} = 0.$$

Pour la démonstration, nous admettons le théorème suivant, qui est facile à vérifier.

<u>Théorème</u>.-

Si le théorème de renouvellement est vrai pour $G/_{K(G)}$, alors il est vrai pour G.

Il reste donc à démontrer la partie (2) du théorème dans le cas où G est non-abélien (le cas abélien est bien connu [4] , voir aussi [1]). Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme.-

Soit $\theta(x)$ la mesure $\delta_x * \mathcal{U}$ pour $x \in G$. Alors

$\lim \theta(xy) - \theta(x) = 0$ vaguement quand $x \to \infty$ par le centre de G, la limite étant uniforme pour y dans un compact.

Démonstration.-

Soit x_n une suite dans le centre de G pour laquelle $\nu = \lim_n \theta(x_n)$ existe vaguement. Si K est un compact de G, il suffit de montrer que

$$\lim_n \theta(x_n y) = \nu$$

uniformément pour $y \in K$. Soit $f \in \mathcal{C}_K(G)$. Alors

$$\begin{aligned} \theta(x_n)(f) &= \delta_{x_n} * \mathcal{U}(f) \\ &= \delta_{x_n} * (\delta_e + \mathcal{U} * \mu)(f) \\ &= \delta_{x_n}(f) + \delta_{x_n} * \mathcal{U} * \mu(f) \\ &\longrightarrow 0 + \nu * \mu \quad (f) \end{aligned}$$

Donc $\nu(f) = \nu * \mu(f)$ et ceci entraîne $\nu = c^{te} . \lambda$ d'après (*). Il est évident que la convergence est uniforme pour $y \in K$, f étant fixée.

Démonstration du théorème.-

Soit $C = G^r$ le dernier terme non-nul de la suite descendante de G. Par récurrence, nous pouvons supposer que le théorème de renouvellement est vrai pour $\bar{G} = G/_C$ (qui est de dimension ≥ 2 si G est non-abélien). Comme dans [3], nous construisons une mesure μ_a sur le groupe $H = \bar{G} \oplus C$; le lemme dans [3] donne que

$$\mu^n(f) \leq \mu_a^n(F)$$

pour chaque f uniforme par section. Si $x \in G$ et si f est uniforme par section, alors la translatée $\delta_x * f$ est uniforme par section et la fonction correspondante sur H est $\delta_{\bar{x}} * F$, où $\bar{x}$ est l'image de x dans $\bar{G}$. Donc on a pour $x \in G$,

$$\delta_x * \mathcal{U}(f) \leq \delta_{\bar{x}} * \mathcal{U}_a(F).$$

Ceci implique par récurrence que

$$\lim_{\bar{x}\to\infty} \delta_x * \mathcal{U} = 0.$$

(Dans le cas où $\tilde{G} \cong \mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$, il faut passer par μ^2 d'abord, puisque dans ce cas $MA(\mu_a)$ pourrait être récurrente. Nous ne précisons pas les détails). Maintenant le lemme implique que

$$\lim_{x\to\infty} \delta_x * \mathcal{U} = 0.$$

LITTERATURE

[1] BELAICHE-FREMOND C. et SUEUR-PONTIER M.
Théorème de renouvellement pour les groupes abéliens localement compacts
Astérisque 4, 1973

[2] GUIVARC'H Y.
Extension d'un théorème de Choquet et Deny à une classe de groupes non abéliens
Astérisque 4, 1973

[3] GUIVARC'H Y. et KEANE M.
Transience des marches aléatoires sur les groupes nilpotents
Astérisque 4, 1973

[4] PORT S.C. et STONE C.J.
Potential theory of random walks on abelian groups
Acta Math 122, 1969

Y. GUIVARC'H et M. KEANE
E.R.A. n° 250 du C.N.R.S.
Université de RENNES
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX