

Astérisque

YVES GUIVARC'H

MICHAEL KEANE

Un théorème de renouvellement pour les groupes nilpotents

Astérisque, tome 4 (1973), p. 37-40

http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__37_0

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN THEOREME DE RENOUVELLEMENT

POUR LES GROUPES NILPOTENTS

par Y. GUIVARCH et M. KEANE

Soit G un groupe localement compact, nilpotent et à génération compacte. Notons par $K(G)$ le sous-groupe maximal compact (voir l'exposé précédent [3] pour les notations). Soit μ une probabilité apériodique sur G telle que $MA(\mu)$ soit transiente. Posons

$$\mathcal{U} = \sum_{n \geq 0} \mu^n$$

Alors \mathcal{U} est une mesure de Radon sur G dont les translatées sont bornées. Supposons de plus que

(*) Si ν est une mesure de Radon sur G dont les translatées sont bornées, et si $\nu * \mu = \nu$, alors $\nu = c^{te} \cdot \lambda$ (la mesure de Haar).

Cette hypothèse est vérifiée si le support de μ est compact ou si $(G/K(G))$ est abélien ; on ignore si elle est vraie en général ([2]).

Théorème.-

Le théorème de renouvellement est vrai pour $MA(\mu)$, i.e. :

(1) Si $G/K(G) \cong \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , alors les limites vagues

$$\lambda_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta_x * \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \lambda_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \delta_x * \mathcal{U}$$

existent ; on a $\lambda_+ = c_+ \cdot \lambda$, $\lambda_- = c_- \cdot \lambda$, et

$$c_+ \cdot c_- = 0.$$

(2) Si $G/K(G) \not\cong \mathbb{R}$, \mathbb{Z} ou 0 , alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \delta_x * \mathcal{U} = 0.$$

Pour la démonstration, nous admettons le théorème suivant, qui est facile à vérifier.

Théorème.-

Si le théorème de renouvellement est vrai pour $G/K(G)$, alors il est vrai pour G .

Il reste donc à démontrer la partie (2) du théorème dans le cas où G est non-abélien (le cas abélien est bien connu [4], voir aussi [1]). Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme.-

Soit $\theta(x)$ la mesure $\delta_x * \mathcal{U}$ pour $x \in G$. Alors
 $\lim \theta(xy) - \theta(x) = 0$ vaguement quand $x \rightarrow \infty$ par le
 centre de G , la limite étant uniforme pour y dans un compact.

Démonstration.-

Soit x_n une suite dans le centre de G pour laquelle
 $v = \lim_n \theta(x_n)$ existe vaguement. Si K est un compact de G , il
 suffit de montrer que

$\lim_n \theta(x_n y) = v$
 uniformément pour $y \in K$. Soit $f \in \mathcal{C}_K(G)$. Alors

$$\begin{aligned} \theta(x_n)(f) &= \delta_{x_n} * \mathcal{U}(f) \\ &= \delta_{x_n} * (\delta_e + \mathcal{U} * \mu)(f) \\ &= \delta_{x_n}(f) + \delta_{x_n} * \mathcal{U} * \mu(f) \\ &\longrightarrow 0 + v * \mu(f) \end{aligned}$$

Donc $v(f) = v * \mu(f)$ et ceci entraîne $v = c^{te}$. λ d'après (*).
 Il est évident que la convergence est uniforme pour $y \in K$, f étant
 fixée.

Démonstration du théorème.-

Soit $C = G^r$ le dernier terme non-nul de la suite descen-
 dante de G . Par récurrence, nous pouvons supposer que le théorème
 de renouvellement est vrai pour $\bar{G} = G/C$ (qui est de dimension ≥ 2
 si G est non-abélien). Comme dans [3], nous construisons une me-
 sure μ_a sur le groupe $H = \bar{G} \oplus C$; le lemme dans [3] donne que

$$\mu^n(f) \leq \mu_a^n(F)$$

pour chaque f uniforme par section. Si $x \in G$ et si f est uni-
 forme par section, alors la translatée $\delta_x * f$ est uniforme par
 section et la fonction correspondante sur H est $\delta_{\bar{x}} * F$, où \bar{x}
 est l'image de x dans \bar{G} . Donc on a pour $x \in G$,

$$\delta_x * \mathcal{U}(f) \leq \delta_{\bar{x}} * \mathcal{U}_a(F).$$

Ceci implique par récurrence que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \delta_x * \mathcal{U} = 0.$$

(Dans le cas où $\bar{G} \cong \mathbb{R}^2$, \mathbb{Z}^2 ou $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$, il faut passer par μ^2 d'abord, puisque dans ce cas $MA(\mu_a)$ pourrait être récurrente.

Nous ne précisons pas les détails). Maintenant le lemme implique que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \delta_x * \mathcal{U} = 0.$$

LITTERATURE

- [1] BELAICHE-FREMOND C. et SUEUR-PONTIER M.
Théorème de renouvellement pour les groupes abéliens localement compacts
Astérisque 4, 1973
- [2] GUIVARCH Y.
Extension d'un théorème de Choquet et Deny à une classe de groupes non abéliens
Astérisque 4, 1973
- [3] GUIVARCH Y. et KEANE M.
Transience des marches aléatoires sur les groupes nilpotents
Astérisque 4, 1973
- [4] PORT S.C. et STONE C.J.
Potential theory of random walks on abelian groups
Acta Math 122, 1969

Y. GUIVARCH et M. KEANE
E.R.A. n° 250 du C.N.R.S.
Université de RENNES
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX