

# *Astérisque*

C. BELAICHE-FREMOND

M. SUEUR-PONTIER

**Théorème de renouvellement pour les groupes  
abéliens localement compacts**

*Astérisque*, tome 4 (1973), p. 17-25

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1973\\_\\_4\\_\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__17_0)

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THEOREME DE RENOUVELLEMENT

POUR LES GROUPES ABELIENS LOCALEMENT COMPACTS

par

C. BELAICHE-FREMOND (\*) et M. SUEUR-PONTIER

(Paris)

(\*) Equipe de recherche n° 1  
" Processus stochastiques et applications "  
dépendant de la section n° 1 Mathématiques et Informatique  
associée au C.N.R.S.

Dans cet article, nous donnons une démonstration du théorème de renouvellement pour les groupes abéliens localement compacts qui n'utilise pas d'analyse harmonique ([5]), mais des outils probabilistes : théorie du potentiel et principe du maximum. Nous nous sommes inspirés également des démonstrations de C. Herz ([2]) et de D. Revuz ([6]).

Soit  $G$  un groupe abélien localement compact et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$ . On suppose que le sous groupe fermé engendré par le support de  $\mu$  est égal à  $G$ . On considère la marche aléatoire définie par  $\mu$ , c'est à dire la chaîne de Markov de probabilité de transition  $\varepsilon * \mu$ . Nous considérons le cas où cette marche est transiente, le potentiel associé à la mesure  $\mu$ , c'est à dire  $v = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_x * \mu^n$  est alors une mesure de Radon. On désigne par  $\lambda$  la mesure de Haar sur  $G$  et par  $C_k(G)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $G$ , et  $C_k^+(G)$  l'ensemble des fonctions continues positives à support compact dans  $G$ . Pour toute fonction  $f$  de  $C_k(G)$ , l'expression  $v f(x)$  représente  $v(x, f)$ , où  $v(x, \cdot)$  est la mesure produit de convolution  $\varepsilon_x * 0$ , pour tout  $x$  de  $G$ .

Lemme 1.-

Pour toute fonction  $f$  de  $C_k(G)$  et pour tout compact  $K$  de  $G$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} [v f(x+y) - v f(x)] = 0$ , uniformément en  $y$  dans  $K$ .

Lemme 2.-

Pour toute fonction  $f$  de  $C_k^+(G)$ , le produit  $v f(x) v f(-x)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers l'infini. De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon$  tel qu'on ait l'inégalité :

$$v f(x) - v f(y) \leq [v f(x+y) + \varepsilon] \quad || v f ||$$

pour tout  $x$  hors de  $K_\varepsilon$  et pour tout  $y$  de  $G$ .

Lemme 3.-

Pour toute fonction  $f$  de  $C_K^+(G)$ , l'ensemble  $\{v(x, f), x \in G\}$  admet au plus une valeur d'adhérence strictement positive quand  $x$  tend vers l'infini.

La démonstration de ces lemmes est, à très peu de choses près, la même que dans Herz ([2], prop. 3, 4 et 5) ou dans Revuz ([6], chapitre V).

Le lemme 3 admet le corollaire suivant dont la démonstration utilise le théorème de Choquet - Deny :

Corollaire 4.-

Pour la topologie vague, l'ensemble  $\{v(x, \cdot), x \in G\}$  admet comme valeurs d'adhérence quand  $x$  tend vers l'infini, soit la seule valeur 0, soit les valeurs 0 et  $C \cdot \lambda$  avec  $C > 0$ .

On peut alors donner les définitions suivantes :

une marche aléatoire transiente est dite de type I si elle est définie par une probabilité  $\mu$  dont le potentiel  $v$  est tel que  $v(x, \cdot)$  converge vaguement vers zéro quand  $x$  tend vers l'infini. Elle est dite de type II sinon.

Les lemmes qui suivent sont énoncés dans [5], mais la démonstration en est différente.

Lemme 5.-

Si le groupe  $G$  admet un sous - groupe ouvert  $G_1$ , compactement engendré mais non compact, tel que  $G/G_1$  soit infini, alors toute probabilité  $\mu$  définit une marche de type I.

Démonstration :

Supposons que  $\mu$  définisse une marche de type II. Il existe alors une constante  $C$  strictement positive telle que  $C \cdot \lambda$  soit valeur d'adhérence de  $\{ \varepsilon_x * v \}$  quand  $x$  tend vers l'infini. Soit donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite tendant vers l'infini telle que  $\varepsilon_{x_n} * v$  converge vaguement vers  $C \cdot \lambda$ . Nous allons montrer que ceci est impossible en distinguant deux cas :

1°) Supposons qu'une infinité de classes modulo  $G_1$  contiennent au moins un élément de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On peut alors extraire une sous suite que nous appelons encore  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tendant vers l'infini et telle que les classes  $x_n + G_1$  soient disjointes. Par ailleurs, comme  $G_1$  est compactement engendré mais non compact, d'après [4], il existe un élément  $x$  de  $G_1$  tel que  $n x$  tende vers l'infini. Alors, pour  $f$  dans  $C_K^+(G)$ , d'après le lemme 2

$$v f (n x) - v f (-n x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Quitte à changer  $x$  en  $-x$ , on en déduit qu'il existe une suite d'entiers  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$v f (k_n x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Pour  $n_0$  fixé,  $v f (k_n x + x_{n_0})$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini puisque cette quantité a même limite que  $v f (k_n x)$  d'après le lemme 1.

Donc, pour tout  $n$ , il existe un entier  $h_n$  tel que

$$v f (x_n + h_n x) \leq C/2 \lambda (f) .$$

L'ensemble des entiers  $k > 0$  tels que  $v f (x_n + k x) > C/2 \lambda (f)$  est non vide pour  $n$  fixé assez grand puisque  $v f (x_n)$  tend vers

$C \lambda(f)$  par hypothèse, et est majoré par  $h_n$ . On peut donc poser :

$$l_n = \sup \{ k > 0, v f (x_n + k x) > C/2 \lambda (f) \} .$$

Dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned} \nu f(x_n + \ell_n x) &> C/2 \lambda(f) \\ \nu f[x_n + (\ell_n + 1)x] &\leq C/2 \lambda(f), \end{aligned}$$

ce qui, si  $C > 0$ , est contradictoire avec le fait que

$\nu f(x_n + \ell_n x) - \nu f(x_n + \ell_n x + x)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini (car  $x_n + kx$  tend uniformément en  $k$  vers l'infini quand  $n \rightarrow \infty$  grâce à l'hypothèse que le sous groupe  $G_1$  est ouvert).

2°) Il faut donc supposer maintenant qu'une classe modulo  $G_1$ , soit  $x_0 + G_1$ , contient une infinité d'éléments de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ceux ci peuvent s'écrire  $x_n = x_0 + y_n$ , la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers l'infini dans  $G_1$  et vérifiant

$$\nu f(y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C \lambda(f)$$

puisque  $\nu f(x_n) - \nu f(y_n) \rightarrow 0$ .

Les éléments  $y_n$  sont non compacts à partir d'un certain rang, puisque dans le groupe  $G_1$  compactement engendré, l'ensemble des éléments compacts est compact. Donc, pour  $n$  fixé assez grand, la suite  $ky_n$  tend vers l'infini avec  $k$ . Pour  $n$  fixé, la suite  $\varepsilon_{ky_n} \star \nu$  admet au plus  $C \cdot \lambda$  et 0 comme valeurs d'adhérence. Si pour tout  $n$ , elle n'admet que 0 comme valeur d'adhérence, elle tend vers zéro et on peut trouver un entier  $k_n$  tel que :

$$\nu f(k_n y_n) > C/2 \lambda(f) \text{ et } \nu f[(k_n + 1)y_n] \leq C/2 \lambda(f)$$

puisque par hypothèse  $\nu f(y_n)$  tend vers  $C \lambda(f)$ . Donc, en prenant au besoin une suite extraite, on peut dire que  $\nu f(k_n y_n)$  tend vers  $C \lambda(f)$  et  $\nu f[(k_n + 1)y_n]$  vers zéro. Prenant  $n$  assez grand pour que  $y_n$  soit hors du compact  $K_\varepsilon$  du lemme 2, on a :

$$\nu f(k_n y_n) - \nu f(y_n) \leq M [\varepsilon + \nu f[(k_n + 1)y_n]]$$

Le premier membre de cette inégalité tend vers  $C \lambda(f)^2$ , et le second membre vers  $M \varepsilon$ , on aboutit à une contradiction.

Donc, la suite  $\varepsilon_{ky_{n_0}} * v$  admet aussi  $C \cdot \lambda$  comme valeur d'adhérence pour un entier  $n_0$ . Par suite,  $(z_n)_n \in \mathbb{N}$  tendant vers l'infini, telle que les classes  $z_n + G_1$  soient disjointes et telle que  $v f(z_n)$  tende vers zéro. Posant alors  $y_{n_0} = x$ ,  $v f(kx)$  admet  $C \lambda(f)$  pour valeur d'adhérence, et en remarquant que  $z_n + kx$  tend uniformément en  $k$  vers l'infini avec  $n$ , un raisonnement analogue à celui de 1° aboutit à une contradiction.

Lemme 6.-

Si le groupe  $G$  peut se mettre sous la forme  $\mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2} \oplus H$ , où  $H$  est un sous groupe compact et  $d_1 + d_2 > 1$ , toute probabilité  $\mu$  définit une marche de type I.

On peut se ramener au cas où  $G = \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$ , car pour toute fonction  $f$  de  $C_k^+(G)$ , les fonctions  $v f(x+h)$  et  $v f(x)$  ont même comportement quand  $x$  tend vers l'infini dans  $\mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$  d'après le lemme 1.

Si on a  $d_2 \geq 1$ , on est immédiatement ramené au lemme précédent en considérant dans  $G$  le sous groupe  $\mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2-1}$ .

Sinon, on a  $d_2 = 0$ ,  $d_1 > 1$ . Si la fonction continue,  $v f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ , admettait deux valeurs d'adhérence distinctes 0 et  $b$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existerait une boule  $S_{d_1-1}$  de rayon assez grand où la fonction prendrait toutes les valeurs comprises entre  $\varepsilon$  et  $b - \varepsilon$  et  $v f(x)$  admettrait une infinité de valeurs d'adhérence en contradiction avec le corollaire 4.

Lemme 7.-

Si tous les éléments de  $G$  sont compacts toute probabilité  $\mu$  définit une marche de type I.

Démonstration (d'après [4] , p. 259-260)

Supposons la marche de type II et soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $\varepsilon z_n \star v$  converge vers  $C \lambda$  ( $C > 0$ ). Pour tout  $n$ , l'adhérence de  $\{k z_n, k > 0\}$  est un semi groupe compact donc un sous groupe de  $G$ , et par conséquent contient  $-z_n$ . C'est dire qu'il existe une suite  $(k_p)_{p \in \mathbb{N}}$  d'entiers telle que  $k_p z_n$  converge vers  $-z_n$  lorsque  $p$  tend vers l'infini.

Soit  $f$  dans  $C_k^+(G)$ . Comme  $v f$  est uniformément continue, pour tout  $n$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un entier  $k_n$  tel que

$$v f(k_n z_n) \leq v f(-z_n) + \varepsilon/n$$

D'après le lemme 2,  $v f(-z_n)$  tend vers zéro, puisque  $v f(z_n)$  tend vers  $C \lambda(f)$  et par conséquent  $v f(k_n z_n)$  tend vers zéro. Soit  $M > \max(\|v f\|, C \lambda(f)/4)$ . Au moins à partir d'un certain rang, on peut définir un entier  $h_n$  par

$$h_n = \sup \{k; 0 < k \leq h_n - 1, v f(k z_n) \geq \frac{[C \lambda(f)]}{4 M}\}$$

On a alors :

$$v f(h_n z_n) \geq \frac{|C \lambda(f)|^2}{4 M}$$

$$v f((h_{n+1}) z_n) < \frac{[C \lambda(f)]^2}{4 M}$$

D'après le lemme 2, on a pour  $n$  assez grand

$$v f(z_n) v f(h_n z_n) \leq M [\varepsilon + v f((h_{n+1}) z_n)]$$

et de plus

$$v f(z_n) \geq C \lambda(f) / 2. \text{ Donc}$$

$$v f(h_n z_n) \leq \frac{2 M}{C \lambda(f)} [\varepsilon + v f((h_{n+1}) z_n)]$$

$$\leq \frac{2 M \varepsilon}{C \lambda(f)} + \frac{C \lambda(f)}{2} \leq 2 \varepsilon + \frac{C \lambda(f)}{2}$$

$$\text{et } v f((h_{n+1}) z_n) \geq \frac{C \lambda(f)}{2 M} v f(h_n z_n) - \varepsilon \geq \frac{[C \lambda(f)]^3}{8 M^2} - \varepsilon.$$

En choisissant  $\varepsilon$  assez petit, on peut trouver des constantes  $a, b, c$  et  $d$  telles que pour  $n$  assez grand, on ait :



$$0 < a \leq v f (h_n z_n) \leq b < C \lambda (f)$$

$$0 < c \leq v f ((h_n+1)z_n) \leq d < c \lambda (f)$$

On peut extraire de l'une des deux suites  $(h_n z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $((h_n+1)z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous suite  $g_n$  qui converge vers l'infini, car, sinon, la suite  $(z_n)$  ne convergerait pas vers l'infini. Mais la suite  $v f (y_n)$  ne peut avoir pour valeurs d'adhérence que 0 et  $C \lambda (f)$ , ce qui est contradictoire.

On montre alors comme dans [4] la proposition suivante.

Proposition 8.-

Lorsque la probabilité  $\mu$  définit une marche de type II, le groupe  $G$  est nécessairement de la forme  $\mathbb{R} \oplus H$ , ou  $\mathbb{Z} \oplus H$ , où  $H$  est un sous groupe compact.

On peut alors montrer le théorème de renouvellement.

Théorème 9.-

Si les mesures  $v(x, \cdot)$  ne convergent pas vers zéro quand  $x$  tend vers l'infini, le groupe  $G$  est de la forme  $\mathbb{R} \oplus H$  (ou  $\mathbb{Z} \oplus H$ ), où  $H$  est un sous groupe compact de  $G$ .

De plus, si on désigne par  $\Psi$  la projection canonique de  $G$  sur  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{Z}$ ) et si on note  $m = \int \Psi(x) \mu(dx)$ ,  $m$  est fini et non nul.

Si  $m > 0$  (resp.  $< 0$ ),  $v(x, \cdot)$  converge vaguement vers  $m^{-1} \lambda$  (resp. 0) lorsque  $\Psi(x)$  tend vers  $-\infty$ , et vers 0 (resp.  $(m)^{-1} \lambda$ ) lorsque  $\Psi(x)$  tend vers  $+\infty$ .

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du résultat correspondant montré par C. Herz ([2]) et D. Revuz ([6]).

BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] W. FELLER  
" An introduction to probability theory and its application "  
II, Wiley, 1962
- [2] Carl. S. HERZ  
" Théorème de renouvellement "  
Annales de l'Institut Fourier. Grenoble. 15.1. (1965)  
PP. 169-188
- [3] E. HEWITT and K.A. ROSS  
" Abstract harmonic analysis "  
I. Academic Press. N.Y. (1963)
- [4] A. KESTEN and F. SPITZER  
" Random walks on countably infinite abelian groups "  
Acta Mathematica 74 (1963)
- [5] S.C. PORT and C.J. STONE  
" Potential theory of random walks on abelian groups "  
Acta Mathematica 122 : 1-2 (1969)
- [6] D. REVUZ  
" Cours multigraphié de 3ème cycle " (1970)  
Chapitre V