D. REVUZ

Quasi - compacité de certains opérateurs liés aux chaînes de Harris

Astérisque, tome 4 (1973), p. 127-136
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__127_0>

QUASI - COMPACITE DE CERTAINS OPERATEURS

LIES AUX CHAINES DE HARRIS

par D. REVUZ (*)

(Paris)

Equipe de Recherche n° 1 :
" Processus stochastique et applications "
associée à la Section n° 1 :
" Mathématiques - Informatique " du C.N.R.S.

Dans un article qui a circulé de façon privée, Horowitz a donné pour les probabilités de transition des chaînes de Harris une intéressante condition équivalente à la quasi - compacité. Ceci permet de regarder d'une nouvelle façon les ensembles " bornés " de ces chaînes ([1] , [5] , [9]).

Ce qui suit vise à donner les démonstrations d'Horowitz dans le cadre " concret " des probabilités de transition plutôt que - à la manière d'Horowitz - dans le cadre " abstrait " des contractions positives d'un espace L^1.

Dans [7] , Neveu a introduit dans l'étude des chaînes de Harris une classe de fonctions dites " spéciales " qui semble bien constituer la bonne et ultime généralisation des " bornés " précédents. Nous allons utiliser la condition d'Horowitz pour montrer que le fait d'être spéciale est lié à une propriété de quasi - compacité. Ces résultats sont aussi obtenus par Brunel [2] dans le cadre " abstrait " et par des méthodes différentes.

I - LE THEOREME D'HOROWITZ. -

1. Dans tout ce qui suit, nous considérerons une chaîne récurrente au sens de Harris, de mesure invariante m et de probabilité de transition P , définie sur l'espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$ que l'on suppose de type dénombrable. On appelle $b\underline{\underline{E}}$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur E ; P définit une contraction positive de cet espace.

Une forme linéaire et continue (pour la convergence uniforme) sur $\mathcal{B}\,\underline{\underline{E}}$ sera appelée une moyenne. On appellera <u>moyenne pure</u> une moyenne étrangère à toutes les mesures bornées sur $(E,\underline{\underline{E}})$; on rappelle que toute moyenne admet une décomposition minimale unique en une mesure bornée et une moyenne pure. Une moyenne φ est dite invariante si pour tout $f \in \mathcal{B}\,\underline{\underline{E}}$ on a

$$< \varphi , f > \; = \; < \varphi , Pf > .$$

On notera φP la moyenne $f \longrightarrow < \varphi , Pf >$.

Introduisons enfin la notation suivante : lorsque m est bornée, on note $\overset{o}{\mathcal{C}}\,\underline{\underline{E}}$ l'espace des fonctions bornées d'intégrale nulle pour m :

$$\mathcal{C}^{o}\underline{\underline{E}} = \{ f \in \mathcal{C}\underline{\underline{E}} \;.\; \int f\, dm = 0 \}.$$

2. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème que nous avons en vue dont la plupart des idées sont dues à Horowitz.

<u>Théorème</u> : <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>P est quasi - compacte</u> ;

ii) <u>Les opérateurs</u> $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} P_k$ <u>convergent en norme vers un opérateur de rang 1</u> ;

iii) <u>Il n'existe pas de moyenne pure positive invariante par P</u> ;

iv) <u>La mesure</u> m <u>est bornée et</u> $(I-P)\,\mathcal{C}\,\underline{\underline{E}} = \overline{(I-P)\mathcal{C}\underline{\underline{E}}} = \mathcal{C}^{o}\underline{\underline{E}}$;

v) <u>La mesure</u> m <u>est bornée et c'est la seule moyenne invariante par P</u>.

Démonstration :

Elle va être faite suivant le schéma ci dessous :

$$\begin{tikzcd} i) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & ii) \arrow[r, Rightarrow] & iii) \arrow[r, Rightarrow] & i) \\ iv) \arrow[r, Rightarrow] & v) \arrow[ur, Rightarrow] & & \end{tikzcd}$$

i) $\Longrightarrow$ ii).

Cette implication est due à Yosida et Kakutani et est démontrée dans [8] .

ii) $\Longrightarrow$ iii).

Si $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} P_k$ converge en norme vers un opérateur de rang 1 cet opérateur ne peut être que de la forme $f \longrightarrow \langle \nu , f \rangle$ où ν est une mesure bornée positive.

Si φ est une moyenne pure positive, il existe un ensemble A tel que $\varphi(A) = 0$ et $m(A) > 0$. Si φ était invariante, on aurait pour tout n,

$$< \varphi, n^{-1} \sum_{k=1}^{n} P_k (x,A) > = 0,$$

ce qui est impossible puisque la fonction à droite est minorée par une constante positive à partir d'un certain rang.

iii) $\Longrightarrow$ i).

La démonstration de ce point est assez longue.

On commence par constater suivant Horowitz que si P n'admet pas de moyenne pure positive invariante, il en est de même de P_k. En effet, si φ est une telle moyenne et $\varphi = \varphi P_k$, la moyenne $\sum_{0}^{k-1} \varphi P_n$ est invariante par P et n'est donc pas une moyenne pure. Il existe donc un entier $0 < n < k$ tel que φP_n ne soit pas une moyenne pure. Alors $\varphi = \varphi P_k = \varphi P_n \cdot P_{k-n}$ ne serait pas une moyenne pure ce qui est contradictoire.

Maintenant, X étant de Harris, donc irréductible, on sait (cf. [4] ou [7] par exemple) qu'il existe un entier n tel que P_n soit la somme d'un noyau intégral et d'un autre noyau. D'après les résultats de Mokobodsky [6], il existe des ensembles $A_k \in \underline{\underline{E}}$ de m - mesure arbitrairement grande et tels que le produit à gauche du noyau intégral par I_{A_k} (opérateur de multiplication par 1_{A_k}) soit compact de $\mathcal{C}\,\underline{\underline{E}}$ dans lui - même. On peut donc écrire :

$$P_n = Q + R$$

où Q est un opérateur compact et $m(\{R\,1 < 1\}) > 0$. D'après [8], nous aurons donc terminé notre démonstration si nous montrons qu'il existe un entier k tel que $||R^k|| < 1$.

Soit alors ν une moyenne invariante par $R(\nu R = \nu)$ et $\nu^+ - \nu^-$ sa décomposition minimale en parties positive et négative. Comme $\nu^+ - \nu^- = \nu^+R - \nu^-R$ on a $\nu^+R \geq \nu^+$ et donc

$$\nu^+P \geq \nu^+R \geq \nu^+ .$$

Pour $f \in \mathcal{C}\,\underline{\underline{E}}_+$, la suite $\nu^+ P_n f$ est donc croissante et majorée par $||\nu^+||\;||f||$; sa limite que nous écrirons $< \nu',f >$ définit une moyenne positive et P - invariante. Soit $\nu_1' + \nu_2'$ la décomposition minimale de ν' en une mesure bornée ν_1' et une moyenne pure ν_2'. De l'égalité

$$\nu_1' + \nu_2' = \nu_1' P + \nu_2' P$$

on tire $\nu_1' \geq \nu_1' P$ et donc $\nu_1' = \nu_1' P$ puisque P est de Harris. Il en résulte que $\nu_2' = \nu_2' P$ et donc que $\nu_2' = 0$

d'après l'hypothèse iii). La moyenne ν' est donc une mesure proportionnelle à m et sa masse totale $< \nu', 1 >$ est égale à $< \nu^+, 1 >$. Comme $m\{R\,1 < 1\} < 0$, on a donc

$$< \nu^+, 1 > \; < \nu'_1, R\,1 > \; \geq \; < \nu^+, R\,1 >$$

ce qui est contradictoire. On a donc $\nu^+ = 0$. On aurait de même $\nu^- = 0$ et donc $\nu = 0$. Le noyau R n'admet pas de moyenne invariante.

On déduit de ce qui précède que $\overline{(I-R)\,\mathcal{C}\,\underline{\underline{E}}} = \mathcal{C}\,\underline{\underline{E}}$; en effet, une forme linéaire qui s'annule sur ce sous-espace fermé est R-invariante. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $g \in \mathcal{C}\,\underline{\underline{E}}$ et telle que $||g - Rg - 1|| \leq \varepsilon$. On a donc

$$||n^{-1} \sum_{k=1}^{n} R^k 1|| \leq ||n^{-1} \sum_{k=1}^{n} R^k(1-g+Rg)|| + ||n^{-1} \sum_{k=1}^{n} R^k(g-Rg)||$$

$$\leq \varepsilon + 2\, ||g||\, n^{-1} ;$$

il en résulte que $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} R^k 1$ tend vers zéro uniformément et comme $R^k 1$ décroît avec k, ceci prouve bien que $||R^k 1|| < 1$ à partir d'un certain rang.

i) $\longrightarrow$ iv).

Si P est quasi-compacte, m est bornée (cf. [8]).

Il est alors clair que $(I-P)\,\mathcal{C}^0\,\underline{\underline{E}} \subset \mathcal{C}^0\underline{\underline{E}}$. Mais les seuls points du spectre de P situés sur le disque unité sont des valeurs propres comme cela est montré dans [10] ; or P étant de Harris, 1 n'est pas valeur propre lorsque P opère sur $\mathcal{C}^0\underline{\underline{E}}$; l'opérateur $I - P$ admet donc un inverse borné sur $\mathcal{C}^0\underline{\underline{E}}$.

iv) $\Longrightarrow$ v).

Les moyennes invariantes s'annulent sur $\overline{(I-P)\mathcal{C}\,\underline{\underline{E}}}$. Si cet espace est égal à $\mathcal{C}^o\underline{\underline{E}}$, la mesure m est la seule moyenne invariante.

v) $\longrightarrow$ iii).

C'est évident.

Remarque.

On a montré en passant que si $\overline{(I - P)\,\mathcal{C}\,\underline{\underline{E}}} = \mathcal{C}^o\,\underline{\underline{E}}$ on a déjà $(I - P)\,\mathcal{C}\,\underline{\underline{E}} = \mathcal{C}^o\,\underline{\underline{E}}$, car la première condition entraîne **v)** qui entraîne iii) qui entraîne la quasi - compacité qui entraîne $(I - P)\mathcal{C}\,\underline{\underline{E}} = \mathcal{C}^o\,\underline{\underline{E}}$.

II - APPLICATION AUX FONCTIONS SPECIALES. -

Les fonctions spéciales ont été définies par Neveu dans [7] . Nous supposerons connus les résultats et les méthodes de cet article dont nous allons reprendre les notations.

1. Proposition.

Si X est de Harris les deux conditions suivantes sont équivalentes:

i) P est quasi - compact ;

ii) Toutes les fonctions positives bornées sont spéciales.

Démonstration :

i) $\Longrightarrow$ ii)

Si f est spéciale, pour tout entier n , la fonction $f_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} P_k f$ est spéciale et la suite de ces fonctions converge uniformément vers < m,f > . Si f n'est pas négligeable, il existe donc un rang n tel que f_n soit minorée par une constante > 0, et par suite comme le cône des fonctions spéciales est héréditaire à gauche, toutes les fonctions bornées sont spéciales.

ii) $\longrightarrow$ i).

Si la fonction 1 est spéciale, il résulte de [7] (prop. IV.9) que la probabilité de transition $c\,U_c$ est quasi - compacte pour $c \in\,]\,0,1\,[$ et donc n'admet aucune moyenne pure positive invariante. Or, d'après l'équation résolvante,

$$U_c = P + P\,(1 - c)\,U_c$$

si φ était une moyenne pure positive invariante par P on aurait

$$\varphi\,U_c = \varphi + (1 - c)\,\varphi\,U_c$$

et φ serait $c\,U_c$ - invariante ce qui est impossible ; P est donc quasi - compacte.

Ceci permet de donner des fonctions spéciales la caractérisation suivante, due à Brunel ([1]) dans le cas des " bornés " :

2. <u>Théorème</u> :

<u>Si $f \in \mathcal{E}\,\underline{E}$ et $0 \leq f \leq 1$, f est spéciale si et seulement si $U_f I_f$ est quasi - compacte</u>.

(I_f est l'opérateur de multiplication par f).

<u>Démonstration</u> :

On pose $Q = U_f\, I_f$; c'est la probabilité de transition de la chaîne obtenue à partir de X dans le " changement de temps " associé à f . La probabilité de transition Q est de Harris, la mesure invariante correspondante étant $f.\,m$.

Si $0 \leq h \leq 1$, l'opérateur U_h calculé à partir de U_h^Q est égal à

$$U_h^Q = \sum_{n \geq 0} (U_f \, I_f \, I_{1-h})^n \, U_f \, I_f = U_{hf} \, I_f \, .$$

Si $g \in \mathcal{C}\underline{\underline{E}}$, $f\,g$ est P - spéciale et donc U_{hf} (fg) est bornée sur E , donc U_h^Q (g) est bornée. Les fonctions bornées sont donc Q - spéciales et Q est donc quasi - compacte.

Inversement, si Q est quasi - compacte et si $h_o \in H$ et est telle que $U_{h_o} \geq 1 \otimes m_o$, on a

$$U_{ho} \, (f) \leq U^Q_{hof} \, (f) = U^Q_{ho} \, (1) \, ,$$

et cette dernière fonction est bornée ce qui prouve que f est spéciale.

[1] A. BRUNEL
" Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey. Extension à ce cas d'un théorème ergodique de M. Métivier ".
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie - 19 - 323-329 (1971)

[2] A. BRUNEL
A paraître

[3] S. HOROWITZ
" Transition probabilities and contractions of L_∞ "
A paraître

[4] N. JAIN et B. JAMISON
" Contribution to Doeblin ' s theory of Markov processes "
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. 8 - 19-40 (1967)

[5] M. METIVIER
" Existence of an invariant measure and an Ornstein ' s ergodic theorem "
Ann. Math. Stat. 40, 79-96 (1969)

[6] G. MOKOBODSKY
" Noyaux absolument mesurables ou basiques et opérateurs nucléaires "
Séminaire Goulaouic - Schwartz - 1971 1972.
Ecole Polytechnique. Paris.

[7] J. NEVEU
" Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris "
A paraître. Ann. Inst. Fourier.

[8] J. NEVEU
" Bases mathématiques du calcul des Probabilités "
Masson Edit.

[9] S. OREY
" Recurrent Markov chains "
Pacific J. Of Math.

[10] K. YOSIDA
" Quasi - completely continuous linear functional operators "
Jap. J. Math. 15 - 297-301 (1939)

D. REVUZ
Laboratoire de Probabilités
Université de PARIS VI
9, quai St Bernard - Tour 56
PARIS - 5ème -