

Astérisque

PIERRE BOLLEY

Régularité de certains espaces de distributions

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 98-107

http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__98_0

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REGULARITE DE CERTAINS ESPACES DE DISTRIBUTIONS

par

Pierre BOLLEY (*)

(Université de Rennes)

§ 0. L'objet essentiel de cette étude est le problème suivant : étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, des opérateurs différentiels $P_1, \dots, P_N$ d'ordre $\leq m$ et un entier k de $\mathbb{Z}$, à quelles conditions toute distribution T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $P_\ell T$ appartienne à l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ pour $\ell=1, \dots, N$ appartient à l'espace de Sobolev $H^{m+k}(\Omega)$? On donne une condition nécessaire et suffisante sur le système des opérateurs P_ℓ pour $\ell=1, \dots, N$ pour qu'il en soit ainsi. C'est la condition nécessaire et suffisante de coercivité des formes sesquilinéaires, intégrro-différentielles, formellement positives construites à partir des opérateurs P_ℓ pour $\ell=1, \dots, N$, donnée par N. ARONSZAJN [1] ; on retrouve en particulier que cette condition est suffisante. (cf : § I). Cette étude se généralise à des formes intégrro-différentielles, formellement positives et dégénérées sur le bord de l'ouvert. (cf : § II). On donne aussi quelques résultats de régularité pour des systèmes de distributions ; comme corollaire, on obtient une généralisation de l'inégalité de Korn pour le système de l'élasticité. (cf : § III).

Plusieurs prolongements peuvent être donnés à cette étude ; une publication plus complète et plus détaillée sera faite ultérieurement.

Enfin, signalons que ce problème de régularité a été en partie abordé ; en voici deux exemples classiques :

(*) Ce travail a été fait en collaboration avec Jacques Camus.

- J. DENY et J.L. LIONS [4] donnent plusieurs caractérisations des ouverts Ω pour lesquels toute distribution T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $D^\alpha T$ appartienne à $L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| = 1$, appartient à $L^2(\Omega)$.

- N. ARONSZAJN et K.T. SMITH [6] donnent le résultat suivant : soient Ω un ouvert borné ayant la propriété du cône strict, $P_\ell(\xi)$ pour $\ell=1, \dots, N$ des polynômes homogènes de degré m à coefficients constants n'ayant pas de zéro complexe commun autre que 0 ; alors toute distribution T de $L^2(\Omega)$ telle que $P_\ell T$ appartienne à $L^2(\Omega)$ pour $\ell=1, \dots, N$, appartient à $H^m(\Omega)$. Mais il faut remarquer que, a priori, T possède une certaine régularité : T est une distribution de $L^2(\Omega)$.

Ces résultats montrent que le problème a été abordé de deux manières différentes : dans [4] le système d'opérateurs étant fixé, on cherche des conditions sur l'ouvert Ω , alors que dans [1], [6] l'ouvert Ω étant fixé, on cherche des conditions sur le système d'opérateurs. C'est ce deuxième point de vue que l'on adopte dans cette étude.

§ I. Dans ce qui suit, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\bar{\Omega}$ étant une variété à bord de classe C^∞ , de bord Γ .

Etant donné un entier m de $\mathbb{N}$, on considère N opérateurs différentiels $P_\ell \equiv P_\ell(x; D)$ pour $\ell=1, \dots, N$ d'ordre $\leq m$ à coefficients dans $C^\infty(\bar{\Omega})$. La partie principale d'ordre m de P_ℓ est notée P'_ℓ .

Théorème 1 : avec les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe un entier k de $\mathbb{Z}$ tel que $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; P_\ell T \in H^k(\Omega), \ell=1, \dots, N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$.
- (ii) pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; P_\ell T \in H^k(\Omega), \ell=1, \dots, N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$.

(iii) le système des opérateurs P_ℓ pour $\ell=1, \dots, N$ vérifie les conditions :

(A) pour tout x appartenant à Ω , pour tout ξ appartenant à $\mathbb{R}^N - \{0\}$ on a :

$$\sum_{\ell=1}^N |P'_\ell(x; \xi)|^2 \neq 0.$$

(B) pour tout x appartenant à Γ , pour tout ξ appartenant à $\mathbb{C}^N - \{0\}$

de la forme $\xi = \xi_1 + \tau \xi_2$ avec ξ_1 appartenant à $\mathbb{R}^N$ et tangent en x

à Γ , ξ_2 vecteur normal unitaire en x à Γ et τ appartenant à $\mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{\ell=1}^N |P'_\ell(x; \xi)|^2 \neq 0.$$

Donnons tout de suite un exemple qui fournit une caractérisation intéressante de l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$:

$$H^m(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; D_i^m T \in L^2(\Omega) \text{ } i=1, \dots, n\}.$$

Remarque 1 :

si les opérateurs P_ℓ sont à coefficients constants, le système des conditions (A) et (B) est équivalent à la condition unique :

(C) pour tout ξ appartenant à $\mathbb{C}^N - \{0\}$, on a $\sum_{\ell=1}^N |P'_\ell(\xi)|^2 \neq 0$.

Démonstration du théorème 1 :

* les conditions (A) et (B) sont suffisantes :

Plus précisément, on va montrer que si les conditions (A) et (B) sont vérifiées, l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; P_\ell T \in H^k(\Omega), \ell=1, \dots, N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$ pour tout k appartenant à $\mathbb{Z}$.

La démonstration est basée sur une méthode de dualité faisant intervenir un opérateur elliptique dégénéré.

On se donne une fonction φ de classe C^∞ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N ; \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^N ; \varphi(x) = 0\} \\ \text{grad } \varphi(x) \neq 0 \text{ pour } x \text{ appartenant à } \Gamma, \end{cases}$$

où $\text{grad } \varphi(x)$ est le vecteur gradient associé à $\varphi(x)$. On note $P_\ell^* \equiv P_\ell^*(x; D)$ l'opérateur adjoint formel de P_ℓ . Pour h appartenant à $\mathbb{N}$, on considère l'opérateur L défini sur Ω par :

$$Lu(x) \equiv L(x; D) \{u(x)\} \equiv \sum_{\ell=1}^N P_\ell^*(x; D) \{ \varphi(x)^{2m+h} P_\ell(x; D) \{u(x)\} \}$$

et l'espace de Sobolev avec poids $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$ défini par :

$$W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) ; \varphi^{2m+h} u \in H^{2m+h}(\Omega)\}$$

et muni de la norme canonique.

En supposant que le système des opérateurs P_ℓ pour $\ell=1, \dots, N$ vérifie les conditions (A) et (B), on déduit de [3] que l'opérateur L est un opérateur à indice de $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$ dans $H_0^h(\Omega)$. Par suite, L est un isomorphisme algébrique et topologique de l'orthogonal H dans $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$ du noyau de L dans $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$, muni de la norme induite par celle de $W_{2m+h}^{2m+h}(\Omega)$, sur un sous-espace M fermé et de codimension finie p dans $H_0^h(\Omega)$, muni de la norme induite par celle de $H_0^h(\Omega)$. Il existe p fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, telles que :

$$H_0^h(\Omega) = M \oplus \mathbb{C} \varphi_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \varphi_p.$$

De là, on déduit que l'espace $L(\mathcal{D}(\Omega) \cap H) \oplus \mathbb{C} \varphi_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \varphi_p$ est dense dans $H_0^h(\Omega)$. En conclusion, on a construit un sous espace particulier de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est dense dans $H_0^h(\Omega)$. On va voir que ce sous espace est fondamental pour démontrer que si les conditions (A) et (B) sont vérifiées, alors pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; P_\ell T \in H^k(\Omega), \ell=1, \dots, N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$.

En effet, supposons tout d'abord $k \leq -m$ et soit T appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $P_\ell T$ appartienne à $H^k(\Omega)$ pour $\ell=1, \dots, N$. On va démontrer que T appartient à $H^{k+m}(\Omega)$ dual de $H_0^{-k-m}(\Omega)$. Pour cela, on introduit l'opérateur L précédent et correspondant à $h = -k-m$.

Soit $\phi = Lu + \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$ avec u appartenant à $\mathcal{D}(\Omega) \cap H$ et λ_i appartenant à $\mathbb{C}$ pour $i=1, \dots, p$. On forme :

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{\ell=1}^N \langle P_{\ell} T, \psi^{m-k} P_{\ell} u \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle T, \psi_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$$

Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$|\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_1 \left(\sum_{\ell=1}^N \|\psi^{m-k} P_{\ell} u\|_{H_0^{-k}(\Omega)} + \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \right)$$

D'après les propriétés de l'espace $W_{m-k}^{m-k}(\Omega)$, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$|\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_2 \left(\|u\|_{W_{m-k}^{m-k}(\Omega)} + \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \right)$$

Comme L est un isomorphisme de H sur M , il existe une constante $C_3 > 0$ telle que :

$$|\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_3 \left(\|Lu\|_{H_0^{-m-k}(\Omega)} + \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \right)$$

D'après la décomposition de $H_0^{-m-k}(\Omega)$, il existe une constante $C_4 > 0$ telle que :

$$|\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}| \leq C_4 \|\phi\|_{H_0^{-m-k}(\Omega)}.$$

D'où l'on en déduit que T appartient à $H^{m+k}(\Omega)$. C'est ce qu'on voulait. Lorsque $k > -m$, on procède par récurrence pour démontrer que $D^{\alpha} T$ appartient à $L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m+k$.

Remarque 2 : de façon générale, la méthode de dualité introduite précédemment permet de résoudre des problèmes de régularité du type étudié ici dès qu'on sait associer à l'ouvert Ω et au système d'opérateurs P_{ℓ} pour $\ell=1, \dots, N$, un opérateur L convenable. Donnons un exemple où l'ouvert Ω n'est pas régulier : dans $\mathbb{R}^2$ soit un ouvert Ω borné dont la frontière est formée d'un nombre fini d'arcs réguliers tels qu'en chaque point de raccord de ces arcs, les tangentes soient distinctes ; alors pour un tel ouvert, on montre que l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; D_i T \in H^{-1}(\Omega), i=1,2\}$ coïncide avec $L^2(\Omega)$. Mais il faut bien remarquer que si l'on supprime l'hypothèse faite sur les tangentes on n'est plus assuré de ce résultat.

* les conditions (A) et (B) sont nécessaires.

Plus précisément, on va montrer que s'il existe k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; P_\ell T \in H^k(\Omega) \ell=1, \dots, N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$ alors les conditions (A) et (B) sont réalisées.

En effet, s'il existe k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; P_\ell T \in H^k(\Omega) \ell=1, \dots, N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que pour tout T appartenant à $H^{m+k}(\Omega)$ on ait l'estimation a priori suivante :

$$\|T\|_{H^{m+k}(\Omega)} \leq C_k \left(\sum_{\ell=1}^N \|P_\ell T\|_{H^k(\Omega)} + \|T\|_{H^k(\Omega)} \right)$$

De là, on déduit que la forme intégrale-différentielle a définie sur $H^{m+k}(\Omega) \times H^{m+k}(\Omega)$ par :

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha|=K} \sum_{\ell=1}^N \int_{\Omega} D^\alpha P_\ell u(x) \overline{D^\alpha P v(x)} dx$$

est coercive sur $H^{m+K}(\Omega)$ (relativement à $L^2(\Omega)$) au sens de N. ARONSZAJN [1], où $K = \sup \{0, k\}$. De la condition nécessaire de coercivité donnée dans [1], on déduit que les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

Ce qui termine la démonstration du théorème 1.

Remarque 3 :

Comme on vient de le montrer, l'étude de la régularité de l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; P_\ell T \in H^k(\Omega), \ell=1, \dots, N\}$ est étroitement liée à l'étude de la coercivité d'une certaine forme intégrale-différentielle. Regroupant les résultats obtenus précédemment, on obtient :

Théorème 2 : pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; P_\ell T \in H^k(\Omega), \ell=1, \dots, N\}$ coïncide avec $H^{m+k}(\Omega)$.

(ii) la forme $a(u,v) = \sum_{|\alpha|=K} \sum_{\ell=1}^N \int_{\Omega} D^{\alpha} P_{\ell} u \cdot \overline{D^{\alpha} P_{\ell} v} \, dx$ est coercive sur $H^{m+K}(\Omega)$ (relativement à $L^2(\Omega)$) où $K = \sup \{0, k\}$.

(iii) les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

Rappelons que l'on a montré que (iii) entraîne (i) par la méthode de dualité associée à un opérateur L elliptique et dégénéré, que (i) entraîne (ii) par une estimation a priori et enfin que (ii) entraîne (iii) par la condition nécessaire de N. ARONSAJN [1]. Remarquons que l'on retrouve, sous des hypothèses de régularité convenables, la condition suffisante de N. ARONSAJN [1] par une méthode totalement différente.

§ II. On utilise les notations du § I. La méthode de dualité introduite précédemment permet d'étudier la régularité de l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi^r P_{\ell} T \in H^k(\Omega), \ell=1, \dots, N\}$ où k est un entier de $\mathbb{Z}$ et r un nombre réel, et permet de retrouver la condition suffisante de coercivité de formes intégral-différentielles, formellement positives, dégénérées sur le bord de l'ouvert Ω donnée dans [2].

On ne donne ici qu'un seul théorème :

Théorème 3 : pour tout nombre réel $r \geq 0$, les conditions suivantes sont

équivalentes :

(i) l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \varphi^r P_{\ell} T \in L^2(\Omega), \ell=1, \dots, N\}$ coïncide avec

$$W_r^m(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \varphi^r D^{\alpha} T \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

(ii) la forme $a(u,v) = \sum_{\ell=1}^N \int_{\Omega} \varphi^{2r}(x) P_{\ell} u(x) \overline{P_{\ell} v(x)} \, dx$ est coercive sur

$$W_r^m(\Omega) \text{ (relativement à } W_r^0(\Omega) \text{)}.$$

(iii) les conditions (A) et (B) sont vérifiées.

§ III. On donne maintenant quelques résultats de régularité pour des systèmes de distributions comme corollaire du théorème I ; pour cela, on se limite à des opérateurs différentiels à coefficients constants.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\bar{\Omega}$ étant une variété à bord de classe C^∞ . Soient $P_i^j \equiv P_i^j(0)$ pour $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$ des opérateurs différentiels à coefficients constants d'ordre m_j . On note $P_i'^j$ la partie homogène d'ordre m_j de P_i^j .

Théorème 4 : les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un entier k de $\mathbb{Z}$ tel que l'espace :

$$\{(T_1, \dots, T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M, \sum_{j=1}^M P_i^j T_j \in H^k(\Omega), i=1, \dots, N\}$$

coïncide avec $\prod_{j=1}^M H^{m_j+k}(\Omega)$.

(ii) pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, l'espace :

$$\{(T_1, \dots, T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M, \sum_{j=1}^M P_i^j T_j \in H^k(\Omega), i=1, \dots, N\}$$

coïncide avec $\prod_{j=1}^M H^{m_j+k}(\Omega)$.

(iii) le système des opérateurs P_i^j pour $i=1, \dots, N$ et $j=1, \dots, M$ vérifie la condition suivante :

(D) pour tout ξ appartenant à $\mathbb{C}^n - \{0\}$, le rang de la matrice $(P_i'^j(\xi))_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}}$ est égal à M .

Pour terminer, on donne une généralisation de l'inégalité de Korn :

Théorème 5 : pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, pour tout $(T_1, \dots, T_n)$ appartenant à

$(\mathcal{D}'(\Omega))^n$ tel que $D_i T_j + D_j T_i$ appartienne à $H^k(\Omega)$ pour $1 \leq i, j \leq n$, on a :

(i) T_j appartient à $H^{k+1}(\Omega)$ pour $j=1, \dots, n$

$$(ii) \sum_{j=1}^n \|T_j\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C_k \left(\sum_{i,j=1}^n \|D_i T_j + D_j T_i\|_{H^k(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|T_j\|_{H^k(\Omega)} \right)$$

(où C_k est une constante indépendante de $(T_1, \dots, T_n)$).

Grâce à un système d'opérateurs introduits par DE FIGUEIREDO [5],
ce résultat peut être amélioré sous la forme suivante :

étant donnés des nombres complexes λ_i^j pour $i=1, \dots, n-1$ et $j=1, \dots, n$
on a :

Théorème 6 : pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, les conditions suivantes sont équiva-
lentes :

(i) pour tout $(T_1, \dots, T_n)$ appartenant à $(\mathcal{D}'(\Omega))^n$ tel que $D_j T_j$ pour
 $j=1, \dots, n$ et $(\sum_{j=1}^n \lambda_i^j D_j) (\sum_{h=1}^n \lambda_i^h T_h)$ pour $i=1, \dots, n-1$, appartiennent
à $H^k(\Omega)$, on a :

1) T_j appartient à $H^{k+1}(\Omega)$ pour $j=1, \dots, n$

$$2) \sum_{j=1}^n \|T_j\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C_k \left(\sum_{j=1}^n \|D_j T_j\|_{H^k(\Omega)} + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \left(\sum_{j=1}^n \lambda_i^j D_j \right) \left(\sum_{h=1}^n \lambda_i^h T_h \right) \right\|_{H^k(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|T_j\|_{H^k(\Omega)} \right)$$

(où C_k est une constante indépendante de $(T_1, \dots, T_n)$)

(ii) les mineurs de la matrice $(\lambda_i^j)_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, n-1}}$ sont tous non nuls.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. ARONSZAJN : On coercive integro-differential quadratic forms ;
Techn. Report n° 14, Univ. of Kansas, (1954), 94-106.

- [2] P. BOERO; R. PAVEC : Coercivité de formes sesquilinéaires intégrales
différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids ;
C.R.A.S. Paris, t 270, (1970), 1416-1419.

- [3] P. BOLLEY; J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés
à plusieurs variables ; à paraître.

- [4] J. DENY; J.L. LIONS : Les espaces du type de Beppo Levi ;
Ann. Inst. Fourier, 5, (1955) 305-370.

- [5] D.G. de FIGUEIREDO : The coerciveness problem for forms over vector valued
functions ; C.P.A.M, Vol XVI, (1963), 63-94.

- [6] K.T. SMITH : Inequalities for formally positive integro-differential
forms ; Bull. Am. Math. Soc., 67, (1961), 368-370.