

Astérisque

MARTIN ZERNER

Sur les perturbations analytiques

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 363-370

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__363_0>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES PERTURBATIONS ANALYTIQUES

par

Martin ZERNER

Université de Nice

Les opérateurs différentiels dont il va être question sont (malheureusement) à coefficients constants sur \mathbf{R}^l .

DEFINITION 1.- Nous appellerons perturbation analytique la donnée d'un voisinage connexe Δ de 0 dans \mathbb{C} et d'une application qui à tout $Z \in \Delta$ fasse correspondre un polynôme P_Z dont les coefficients soient des fonctions analytiques sur Δ et que se vérifie la condition :

(A) Il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine dans \mathbf{R}^l et une fonction $Z \mapsto E_Z$ holomorphe sur Δ à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et telle que :

$$\forall Z \in \Delta \quad P_Z(\partial/\partial x)E_Z = \delta .$$

On connaît les deux résultats suivants. Si les coefficients de P_Z sont analytiques en Z et les opérateurs différentiels $P_Z(\partial/\partial x)$ sont également forts

au sens de HORMANDER [1] alors $Z \rightarrow P_Z$ définit une perturbation analytique (ZERNER [1]). D'autre part, si on renforce la condition (A) en exigeant que Ω soit \mathbb{R}^l tout entier, la condition d'égale force des $P_Z(\partial/\partial x)$ devient nécessaire (TREVES [1]).

L'objet de cette communication est de donner une condition nécessaire en gardant son caractère local à la condition (A).

Dans la suite ξ sera une forme linéaire non nulle sur \mathbb{R}^l et a un vecteur n'appartenant pas au sous-espace :

$$N_\xi = \{y ; \langle y, \xi \rangle = 0\} .$$

DEFINITION 2.- Une distribution T est semi-régulière par rapport à ξ sur un ouvert ω , si elle vérifie au voisinage de chaque point de ω la condition suivante dont on sait (SCHWARTZ [1]) qu'elle est indépendante du choix du vecteur a :

pour tout Φ appartenant à $\mathcal{D}(N_\xi)$, la distribution : $\int_{N_\xi} T(at+y) \Phi(y) dy$ est une fonction indéfiniment différentiable de t .

(Ici et dans la suite j'utilise la notation intégrale, abusive mais commode, pour les distributions et les noyaux-distributions.)

DEFINITION 3.- L'opérateur différentiel P est hypoelliptique en ξ si toute distribution T est semi-régulière par rapport à ξ sur tout ouvert où PT est semi-régulière par rapport à ξ .

Le résultat suivant est un cas particulier, d'ailleurs très facile, de GARDING et MALGRANGE [1] (cf. TREVES [2] ch. 8).

PROPOSITION 1.- Pour que l'opérateur différentiel $P(\partial/\partial x)$ soit hypoelliptique en ξ il faut et il suffit que dans le polynôme en τ $P(\tau\xi+\eta)$, le coefficient

du terme de plus haut degré soit indépendant de η .

Une application de la méthode classique de la parametrix donne :

PROPOSITION 2.- S'il existe un voisinage ouvert Ω de 0 dans \mathbb{R}^d et une distribution E sur Ω semi-régulière par rapport à ξ en dehors de 0 telle que :

$$P(\partial/\partial x)E = \delta ,$$

alors P est hypoelliptique en ξ .

(Il est clair que réciproquement, si P est hypoelliptique en ξ toute solution élémentaire est semi-régulière en dehors de l'origine.)

La proposition suivante va utiliser le concept d'ensemble polaire de la théorie du potentiel. Pour nos besoins, il suffit largement de savoir que dans \mathbb{C} un sous-ensemble de longueur non nulle dans un arc rectifiable est non polaire (a fortiori un ensemble de mesure non nulle est non polaire).

PROPOSITION 3.- Soit $(\Delta, Z \mapsto P_Z)$ une perturbation analytique. Supposons que pour tout Z appartenant à un ensemble non polaire, P_Z soit hypoelliptique en ξ . Alors P_Z est hypoelliptique en ξ pour tout $Z \in \Delta$.

Démonstration. Nous allons montrer que E_Z est semi-régulière par rapport à ξ en dehors de 0 (proposition 2). Soit $\Phi \in \mathcal{D}(N_\xi)$ de support assez petit.

Posons :

$$F(Z) = \int_{N_\xi} E_Z(at+y) \Phi(y) dy .$$

Pour chaque Z , c'est une distribution sur un ouvert U de \mathbb{R} et F est une fonction analytique sur Δ à valeurs dans $\mathcal{D}'(U)$. Soit A un ensemble non-polaire tel que pour $Z \in A$, P_Z soit hypoelliptique en ξ . Pour $Z \in A$, $F(Z)$ est indé-

finiment différentiable sur U si le support de Φ ne contient pas l'origine, sur U privé de 0 s'il la contient. On peut alors appliquer la proposition 3 p. 180 de ZERNER [2]: $F(Z)$ est indéfiniment différentiable sur U si le support de Φ ne contient pas l'origine, sur U privé de 0 s'il la contient, et ce pour tout $Z \in \Delta$.

THEOREME.-

Dans une perturbation analytique, les caractéristiques réelles de P_Z ne dépendent pas de Z , non plus que son ordre.

Démonstration. ξ ne peut être caractéristique que pour tout $Z \in \Delta$ ou pour des points isolés seulement. La proposition 3 s'applique donc et le théorème résultera du :

LEMME 1.

Sous les hypothèses de la proposition 3 on a :

$$P_Z(\tau\xi+\eta) = a(Z)\tau^{m'} + \sum_{n=0}^{m'-1} a_n \tau^n$$

où $a(Z)$ ne s'annule pas et ne dépend pas de η et m' ne dépend pas de Z .

Démonstration. Vu les propositions 1 et 3, il ne reste plus qu'à démontrer que m' ne dépend pas de Z . En raison de l'analyticité des coefficients de P_Z , la seule variation possible est que m' s'abaisse en des points isolés, soit Z_0 l'un d'eux, soient m_0 la valeur que prend m' en Z_0 et $m_1 \gg m_0$ la valeur que prend m' au voisinage de Z_0 .

Choisissons des voisinages ouverts de $0, U$ dans \mathbb{R} et V dans N_ξ .

Posons :

$$\omega = \{t\alpha+y ; t \in U, y \in V\}$$

et supposons U et V choisis de telle façon que

$$\bar{\omega} + \bar{\omega} \subset \Omega .$$

Nous avons besoin maintenant de définir un certain nombre d'espaces fonctionnels.

B^p désignera l'espace des distributions tempérées S sur R telles que le produit par $(1+t^2)^{p/2}$ de la transformée de Fourier \hat{S} de S soit une fonction continue bornée.

B_U^p désignera l'espace des restrictions à U de distributions appartenant à B^p et B_C^p l'espace des distributions appartenant à B^p dont le support est un compact de U .

$\mathcal{D}'(B_U^p)$ désigne l'espace des distributions sur ω qui, en tant que noyaux, appliquent $\mathcal{D}(V)$ dans B_U^p et $\mathcal{E}'(B_C^p)$ la partie de cet espace constituée de distributions à support compact dans ω .

Nous utiliserons trois remarques concernant le rapport entre ces espaces et un opérateur différentiel $P(\partial/\partial x)$ où P vérifie :

$$P(\tau \xi + \eta) = a \tau^{m'} + \sum_{n=0}^{m'-1} a_n \tau^n$$

avec a indépendant de η .

Premièrement un raisonnement désormais classique (SCHWARTZ [2] p. 130) montre que si $Pu \in \mathcal{D}'(B_U^p)$, alors $u \in \mathcal{E}'(B_U^{p+m'})$.

Deuxièmement, et en conséquence, si $E \in \mathcal{S}'(\Omega)$ vérifie $PE = \delta$, alors la convolution par E applique $\mathcal{E}'(B_C^p)$ dans $\mathcal{D}'(B_U^{p+m'})$.

Troisièmement, soient p et q deux nombres. Supposons que toute $u \in \mathcal{E}'(\omega)$

telle que $Pu \in \mathcal{E}'(B_C^p)$ appartienne à $\mathcal{E}'(B_C^{p+q})$. On a alors $q < m'$.

Revenons à notre perturbation analytique. D'après la deuxième remarque ci-dessus, pour Z assez voisin de Z_0 mais distinct de lui, $E_Z \star$ applique $\mathcal{E}'(B_C^p)$ dans $\mathcal{D}'(B_U^{p+m_1})$. Raisonnons par l'absurde en supposant $m_0 < m_1$. Soient $\Phi \in \mathcal{E}'(B_C^p)$ et $\psi \in \mathcal{D}'(V)$. On a pour Z voisin de Z_0 et distinct de lui :

$$\int_{N_\xi} \psi(y) E_Z \star \Phi(at+y) dy \in B_U^{p+m_1}.$$

Soit encore $m_2 \in]m_0, m_1[$; d'après la proposition 2 p. 179 de ZERNER [2]

$$\int_{N_\xi} \psi(y) E_{Z_0} \star \Phi(at+y) dy \in B_U^{p+m_2}.$$

Donc, E_{Z_0} applique $\mathcal{E}'(B_C^p)$ dans $\mathcal{D}'(B_C^{p+m_2})$ et la troisième des remarques ci-dessus nous amène à une contradiction.

Corollaire 1. Dans une perturbation analytique, soit Q_Z la partie principale de P_Z . Supposons que Q_0 soit à coefficients réels et que chacun de ses facteurs irréductibles soit elliptique ou possède un zéro réel où sa différentielle soit réelle non nulle. Alors Q_Z est le produit d'un polynôme fixe par un polynôme elliptique.

Corollaire 2. (Notations du corollaire 1) Si Q_0 est hyperbolique, Q_Z est fixe à un facteur près non nul et ne dépendant que de Z .

Ces deux corollaires s'obtiennent à partir des deux lemmes suivants.

LEMME 2.

Si P_Z est un polynôme à coefficients analytiques en Z et si ses racines réelles sont les mêmes pour tout Z , l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines est indépendant de Z .

Démonstration. Il suffit de la faire pour les polynômes à une indéterminée puisque toutes les dérivées d'une fonction de plusieurs variables peuvent se cal-

culer comme combinaisons linéaires de dérivées "pures" par rapport à des vecteurs.

On peut aussi supposer que la racine étudiée est zéro, qu'elle est d'ordre μ sauf au point $Z=0$ où elle devient d'ordre $\mu \neq \nu$. Le polynôme P_Z/ξ^μ n'a alors pas de racine réelle dans un certain voisinage de 0 pour Z assez petit mais non nul. S'il a une racine nulle pour $Z=0$, cela contredit le théorème de Puiseux.

LEMME 3.

Soient

$$P = x_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(x_2, \dots, x_\ell) x_1^k$$

$$Q = x_1^n + \sum_{k=0}^{n-1} B_k(x_2, \dots, x_\ell) x_1^k$$

deux polynômes irréductibles à coefficients complexes et à ℓ indéterminées. Supposons qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^{\ell-1}$ et une fonction f analytique sur U telle que :

$$P[f(x_2, \dots, x_\ell), x_2, \dots, x_\ell] = Q[f(x_2, \dots, x_\ell), x_2, \dots, x_\ell] = 0 .$$

Alors $P = Q$.

C'est un cas particulier d'un résultat bien connu des spécialistes de géométrie algébrique.

Remarque sur le corollaire 1. Si les caractéristiques réelles de P_0 sont simples, tous les P_Z ont la même force au sens de HORMANDER [1].

Remarque sur le corollaire 2. Si P_0 est hyperbolique, il en est de même des parties principales des Q_Z mais nous n'obtenons pas l'hyperbolicité des P_Z qui équivaut (CHAILLOU [1], SVENSSON [1]), encore à ce que tous les P_Z soient d'égale force.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHAILLOU.- Sur les ensembles bornés A de distributions polynômes inversibles dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$ et d'inverse A^{-1} borné et sur les hypersurfaces Γ -hyperboliques. Thèse Paris 1969 et livre à paraître.
- [1] GARDING et MALGRANGE.- Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques. Math. Scand. 9,5 (1961).
- [1] HORMANDER.- On the theory of general partial differential operators. Acta Math. 94,161 (1955).
- [1] SCHWARTZ.- Distributions semi-régulières et changements de coordonnées. J. Math. pures et appl. 9^{ème} série t. 36 (1957) p. 109-127.
- [2] SCHWARTZ.- Théorie des distributions (Paris, Hermann 1957) tome 1.
- [1] SVENSSON.- Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part. Ark. Mat. 8 (1969), 145-162.
- [1] TREVES.- Un théorème sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants dépendant de paramètres. Bull. Soc. Math. France 90 (1962) p. 473-486.
- [2] TREVES.- Linear partial differential equations with constant coefficients. Existence, approximation and regularity of solutions. (Gordon and Breach, 1966).
- [1] ZERNER.- Solution élémentaire locale d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre. CRAS 248 (1959) p. 3679-3681.
- [2] ZERNER.- Théorie de Hartogs et singularités des distributions. Bull. Soc. Math. France 90 (1962) p. 165-184.