Astérisque

M. S. BAOUENDI

C. GOULAOUIC

Problèmes de Cauchy relatifs à une surface initiale caractéristique - applications

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 160-170

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__160_0>

PROBLEMES DE CAUCHY RELATIFS A UNE SURFACE INITIALE

CARACTERISTIQUE - APPLICATIONS

par

M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Purdue University
Université d'Orsay

On démontre une extension des théorèmes de CAUCHY-KOVALEWSKY et HOLMGREN au cas de surfaces initiales caractéristiques ; on en déduit des résultats de régularité analytique pour des opérateurs changeant de type.

Soit un opérateur différentiel $\mathcal{P}$ à coefficients analytiques dans un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et une hypersurface S analytique et caractéristique pour $\mathcal{P}$; on donne des hypothèses suffisantes et une méthode pour obtenir des théorèmes d'existence et d'unicité pour le problème de CAUCHY pour $\mathcal{P}$ relativement à la surface initiale S ; on donne ici seulement, les résultats essentiels sans discuter les hypothèses minimales et sans détailler les démonstrations ; des résultats plus complets sont donnés dans [2] .

I.- Notations et principaux résultats.-

On se place tout de suite dans la situation où $\mathcal{O}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$; on désigne par $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ le point courant de $\mathbb{R}^{n+1}$ et la surface initiale S est $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ t = 0\}$.

Soit un opérateur différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(t,x,D_t,D_x) \qquad \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{pour } \alpha = (\alpha_1,..\alpha_n)\right)$$

à coefficients analytiques (*) dans $\mathcal{O}$, et on suppose que le coefficient de D_t^m n'est pas identiquement nul (**) et que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \mathcal{P}(t,x,D_t,D_x) = t^k D_t^m + a_{m-1}(x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-k}(x) D_t^{m-k} +$$

$$+ \sum_{\substack{p<m \\ p+|\beta|\leq m}} t^{\max(0,k+p+1-m)} D_t^p \ a_{p,\beta}(t,x) D_x^\beta$$

avec k et m entiers et $0 \leq k \leq m$ et les coefficients a_j et $a_{p,\beta}$ analytiques.

On dira qu'un tel opérateur est du type de FUCHS pour $t=0$; on appellera partie principale fuchsienne de $\mathcal{P}$ l'opérateur :

$$(2) \qquad t^k D_t^m + \ldots\ldots + a_{m-k} D_t^{m-k} \ .$$

L'équation caractéristique associée à (2) est :

$$(3) \qquad \lambda(\lambda-1)\ldots.(\lambda-m+1) + a_{m-1}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+2)\ldots + a_{m-k}\lambda\ldots(\lambda-m+k+1) = 0$$

Les racines de (3) (appelées racines caractéristiques) sont notées :

$$\lambda_1,\ldots,\lambda_k \ , \ \lambda_{k+1} = 0,\ldots, \ \lambda_m = m-k-1$$

Nous avons alors essentiellement les résultats suivants :

(*) Il est possible de supposer seulement l'analyticité en x et la continuité en t .

(**) Il serait possible de lever aussi cette restriction et de traiter les "problèmes de GOURSAT" correspondants.

THEOREME 1.-

Supposons que :

$$\lambda_j(0) \notin \mathbb{N} \quad \text{(ensemble des entiers naturels)}$$

$$\text{pour } 1 \leqslant j \leqslant k .$$

Soient $u_0, \ldots, u_{m-k-1}$ des fonctions analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction anlytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Il existe une fonction analytique u unique telle que l'on ait dans un voisinage de 0 :

$$\mathcal{P}u = f$$

$$D_t^j u(0,.) = u_j \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m-k-1 .$$

THEOREME 2.-

Soit h un entier positif tel que $\mathrm{Re}\,(\lambda_j(0)) < h$ pour $j=1,\ldots,m$.
Soit u une fonction de classe C^h dans un voisinage de 0, nulle pour $t<0$ et vérifiant $\mathcal{P}u = 0$ dans un voisinage de 0.
Alors u est nulle dans un voisinage de 0.

Le 1^er^ théorème est une généralisation du théorème de CAUCHY-KOVALEWSKY (qui correspond à $k=0$) et contient aussi des résultats de HASEGAWA [4] (qui correspondent à $k=1$). Remarquons que le cas d'une surface initiale non caractéristique avec des points caractéristiques, comme dans [6] par exemple, n'entre pas dans cette étude.

Le 2^ème^ théorème est une généralisation du théorème de HOLMGREN ; on pourrait le prouver pour une fonction u qui serait de classe C^h seulement en t et à valeurs distributions en x ; mais il est toujours nécessaire de faire une hypothèse de régularité à priori sur u (par exemple la fonction d'HEAVISIDE Y sur $\mathbb{R}$ vérifie $(tD_t^2 + D_t)\, Y = 0$)! .

Rappelons que les méthodes usuelles utilisées pour prouver le théorème classique de HOLMGREN (relatif à une surface non caractéristique) utilisent une "convexification" : on se ramène au cas où la fonction u est déjà nulle dans un ouvert $\mathcal{O} - \mathcal{O}_+$ où $\mathcal{O}_+$ est strictement convexe, puis on utilise une intégration par parties et le théorème de CAUCHY-KOVALEWSKY ou bien l'unicité d'une solution continue en t à valeurs dans les fonctionnelles analytiques pour le problème de CAUCHY relatif à $t=0$, comme dans TREVES [9].

Il semble impossible d'utiliser ici cette méthode qui perturbe profondément la nature du problème de CAUCHY et fait apparaître des difficultés inextricables. Nous allons en fait utiliser une adaptation de la méthode de TREVES [9] qui évite la "convexification".

II.- Méthode abstraite pour le problème de CAUCHY.-

II.1- Cette méthode a été dégagée par YAMANAKA [10], OVAJANNIKOV [8] et TREVES [9] ; rappelons brièvement l'essentiel :

Soit une famille $(X_s)_{s>0}$ d'espaces de BANACH sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ayant la propriété

$$X_s \hookrightarrow X_r \quad \text{pour } r > s > 0 \quad \text{(avec injection de norme 1)}$$

(une telle famille est appelée une chaîne croissante (*) d'espaces de BANACH) ; soient $T>0$ et $(A(t))_{t \in [0,T]}$ une famille d'opérateurs linéaires qui, pour tous $r > s > 0$ sont continus de X_s dans X_r, vérifient une hypothèse de continuité en t et sont de type p (réel > 0), c'est à dire :

$$\|A(t)\|_{\mathcal{L}(X_s,X_r)} \leqslant \frac{M}{(r-s)^p} ,$$

où M est indépendant de t,r,s.

(*) On peut aussi considérer des chaînes décroissantes.

Le résultat suivant est bien connu (cf [8][9][10])

> Soient $s_o > 0$ et $(A(t))_{t \in [0,T]}$ une famille d'opérateurs de type 1.
> Pour tout $s > s_o$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
> Pour tout $f \in C^o([0,T],X_{s_o})$ et pour tout $u_o \in X_{s_o}$, il existe u unique dans $C^o([0,\varepsilon],X_s)$ verifiant :
>
> $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = f & \text{dans } C^o([0,\varepsilon],X_s) \\ u(0) = u_o . \end{cases}$$

Avant d'étendre ce résultat abstrait, nous allons préciser les chaînes $(X_s)_{s>0}$ que nous utiliserons.

II.2.-<u>Chaîne</u> $F_s(\Omega)$

Soient Ω un ensemble borné de R^n ; pour $s > 0$, on note

$$\Omega_s = \bigcup_{a \in \Omega} B(a,s) \quad \text{où}$$

$$B(a,s) = \{ z \in \mathbb{C}^n \; ; \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i - a_i| < s \} .$$

On désigne par $E_s(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de $\bar{\Omega}_s$ dans $\mathbb{C}$ et homolorphes dans Ω_s ; on munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{E_s(\Omega)} = \sup_{z \in \bar{\Omega}_s} |f(z)|$$

qui en fait un espace de BANACH.

Pour simplifier les problèmes ultérieurs de densité, on considère plutôt l'espace $F_s(\Omega)$ qui est l'adhérence dans $E_s(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ des fonctions analytiques dans $\mathbb{C}^n$.

On a évidemment, pour $r > s > 0$,

$$F_r(\Omega) \hookrightarrow F_s(\Omega) \quad ,$$

l'injection étant de norme 1 et d'image dense.

L'introduction de ces espaces est justifiée par le résultat suivant :

LEMME 1.

Soient $r > s > 0$ et $f \in F_s(\Omega)$; pour tout $u \in F_r(\Omega)$, on a :

$$\|f \frac{\partial u}{\partial z_i}\|_{F_s(\Omega)} \leq \frac{1}{r-s} \|f\|_{F_s(\Omega)} \|u\|_{F_r(\Omega)}$$

La démonstration de ce lemme est une simple application de la formule intégrale de CAUCHY associée à des polydisques de rayon $r-s$ dans $\mathbb{C}^n$.

Les espaces (X_s) que nous considérerons par la suite seront de la forme $(F_s(\Omega))$ ou du dual $(F'_s(\Omega))$.

II.3 - Théorème de CAUCHY abstrait pour des équations de FUCHS.-

On considère l'équation (avec $0 \leq k \leq m$)

$$(4) \qquad (t^k D_t^m + \ldots\ldots + a_{m-k} D^{m-k})u = f + \sum_{j=0}^{m-1} t^{\alpha_j} D_t^j B_{m-j} u$$

avec $\alpha_j = \text{Max}\ (0, j+k-m+1)$

et où $a_{m-1}, \ldots\ldots, a_{m-k}$

sont des fonctions qui opérent continuement par multiplication dans une chaîne $(X_s)_{s>0}$ croissante d'espaces de BANACH et les opérateurs $(B_j)_{j=1,\ldots,m}$ sont de type j dans la chaîne $(X_s)_{s>0}$.

Les racines de l'équation caractéristique associée

$$\lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-m+1) + \ldots\ldots + a_{m-k}\lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-m+k+1) = 0$$

sont : $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} = 0, \lambda_{k+2} = 1, \ldots\ldots, \lambda_m = m-k-1$.

On a alors le résultat suivant :

THEOREME 3

On suppose que $(\lambda_j)_{j=1,\ldots k}$ ne prennent pas de valeur dans $\mathbb{N}$;
soit $h \in \mathbb{N}$ et tel que $\text{Re}\ (\lambda_j) < h$ pour $j=1, \ldots\ldots, m$;
soient $s_0 > 0$ et $T > 0$.
Pour tout $s > s_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
Pour tout $f \in C^h([-T,T], X_{s_0})$ et tout $(d_0, \ldots\ldots, d_{m-k-1}) \in (X_{s_0})^{m-k}$,
il existe une fonction u de classe $C^h([-\varepsilon,\varepsilon], X_s)$ unique vérifiant

(4) et telle que

$$D_t^j u(0) = d_j \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant m-k-1 .$$

De plus, si f est analytique (en t), la solution u est aussi analytique.

La démonstration de ce théorème est un raffinement de la méthode des approximations successives et utilise des résultats sur les équations différentielles de FUCHS ; signalons qu'un cas particulier est prouvé dans [3] par une méthode qu'il ne semble pas facile de généraliser.

Il est facile de voir que le théorème 3 implique le théorème 1 en prenant une chaîne $(X_s)_{0<s<s_1}$ définie par $X_{s_1-s} = E_s(\{0\})$ et les $B_{m-j} = \sum_{j+|\beta|<m} a_{j,\beta} D_x^\beta$.

La démonstration du théorème 2 est plus difficile.

III. - Théorème d'unicité locale.-

Précisions d'abord que pour tout Ω borné, l'espace $\mathcal{E}'_{\bar{\Omega}}$(*) s'injecte dans $F'_s(\Omega)$ pour tout $s>0$ par (pour $T \in \mathcal{E}'_{\bar{\Omega}}$) :

$$\forall\ \theta \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \quad , \quad \langle T,\theta\rangle = \langle T,\theta|_{\mathbb{R}^n}\rangle \quad .$$

Etant données les hypothèses du théorème 2,(où on suppose de plus que λ_j ne prend pas de valeurs dans $\mathbb{N}$, pour clarifier ici la démonstration et se ramener au théorème 3) , on choisit une boule ouverte Ω dans $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et $T > 0$ tels que :

$[-T,T] \times \bar{\Omega} \subset \Theta$

La fonction u est de classe C^h et vérifie $u = 0$ dans un voisinage de $[-T,T] \times \bar{\Omega}$, et est nulle dans $[-T,0] \times \bar{\Omega}$

(*) L'espace $\mathcal{E}'_{\bar{\Omega}}$ désigne l'espace des distributions sur un voisinage de $\bar{\Omega}$ à support compact dans $\bar{\Omega}$.

L'hypothèse $\operatorname{Re}(\lambda_j(x)) < h$ est vérifiée pour x dans un voisinage de $\bar{\Omega}$.

Soit maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, valant 1 sur un voisinage de l'origine ; on pose

$$v(t,x) = \varphi(x)\, u(t,x)$$

et on a :

$$\begin{cases} v \in C^h([-T,T] \times \bar{\Omega}),\ D_t^j v(0,x) = 0 \text{ sur } \bar{\Omega} \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant m-k-1 \\ \mathcal{P}v = [\mathcal{P},\varphi]v = f \quad \text{avec} \\ f \in C^h([-T,T], \mathcal{E}'_{\bar{\Omega}}) \\ \operatorname{Supp} f \subset \omega \times [-T,T] \text{ où } \omega \text{ est une couronne contenue} \\ \text{dans } \Omega \text{ et telle que } 0 \notin \bar{\omega}. \end{cases}$$

Pour prouver le théorème 2, il suffit de démontrer le lemme suivant :

<u>LEMME 2</u> :

Pour tout $a \in \Omega - \bar{\omega}$, il existe $\varepsilon(a) > 0$ tel que $v(t,a) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(a)$.

Pour démontrer ce lemme, on procède en 4 étapes :

- On considère $f \in C^h([-T,T], F'_{s_0}(\omega))$ pour $s_0 > 0$ convenable ; le théorème 1 implique que pour $s > s_0$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(s,s_0) > 0$ et une fonction unique $w \in C^h([-\varepsilon,\varepsilon], F'_s(\omega))$ telle que :

$$\begin{cases} (t^k D_t^m + \dots\dots + a_{m-k} D_t^{m-k})w = f + \sum_{j=0}^{m-1} t^{\alpha j} D_t^j B_{m-j} w \\ D_t^j w(0) = 0 \qquad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m-k-1. \end{cases}$$

- •• On peut aussi considérer $f \in C^h([-T,T], F'_{s_0}(\Omega))$ et alors la solution unique du problème de CAUCHY correspondant donnée par le théorème 3 est la fonction $v \in C^h([-\varepsilon,\varepsilon], F'_s(\Omega))$.

... Les identifications effectuées ($F'_s(\omega) \hookrightarrow F'_s(\Omega)$ pour tout $s>0$) impliquent que pour tout $t \in [-\varepsilon,\varepsilon]$, la restriction de $w(t)$ à $F_s(\Omega)$ est $v(t)$.

.... Il suffit maintenant, pour conclure, d'utiliser le lemme suivant :

LEMME 3 :

Soient ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \complement \bar{\omega}$; il existe $s>0$ tel que :
Si V est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^n$ et $W \in F'_s(\omega)$ tels que

$$\forall \theta \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \quad , \quad \langle W,\theta\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\theta(x)\, dx \quad ,$$

alors nécessairement $V(a) = 0$.

La démonstration de ce lemme se fait en utilisant une suite θ_k d'exponentielles qui tendent vers la mesure de DIRAC au point a et qui tendent aussi uniformément vers 0 sur un voisinage complexe $\bar{\omega}_s$ de ω (avec $s > 0$).

IV.- Régularité analytique pour des opérateurs "changeant de type".-

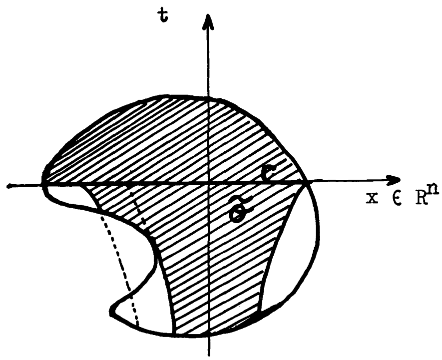
Nous montrons la méthode sur un exemple extrêmement simple et renvoyons à [2] pour des résultats plus généraux.

Soit $\mathcal{P}(t,x,D_t,D_x) = D_t t D_t + \Delta_x$;

Pour un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, on note

$$\Gamma = \{(t,x) \in \mathcal{O} ; \quad t = 0\} \quad \text{et}$$

$\tilde{\mathcal{O}} = \{(t,x) \in \mathcal{O}$; toute caractéristique réelle de $\mathcal{P}$ issue de (t,x) touche Γ et que la portion de caractéristique entre (t,x) et le point de contact avec Γ soit entièrement contenue dans $\mathcal{O}\}$



$\tilde{\mathcal{O}}$ est la partie hachurée de $\mathcal{O}$ dans la figure ci-contre (pour $n=1$)

On a alors le résultat :

THEOREME 4

Soit $u \in C^1(\mathcal{O})$ et telle que $\mathcal{P}u$ soit analytique dans $\mathcal{O}$, alors u est analytique dans $\tilde{\mathcal{O}}$.

Pour prouver ce résultat, on montre d'abord que u est analytique dans $\{(t,x) \in \mathcal{O};\ t > 0\}$ en utilisant des résultats de [1] de régularité analytique jusqu'au bord pour des opérateurs elliptiques dégénérés.

D'après le résultat d'unicité (Théorème 2) ci-dessus, u est donc analytique dans un voisinage de Γ. Enfin, on conclut, en utilisant les résultats connus sur la propagation de l'analycité (voir [7] pour le cas traité ici, ou des résultats plus généraux et récents de ANDERSON et de KAWAI et KASHIWARA.).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC.- Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications; Journal of funct. Anal. vol.9 N°2 (1972) 208-248.-

[2] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC.- CAUCHY problems with characteristic initial data. (à paraître).-

[3] A. DJEBBAR.- Résolution de certains problèmes de CAUCHY caractéristiques; C.R. Acad. Sc. Paris. (à paraître).

[4] Y. HASEGAWA.- On the initial-value problems with data on a double caractéristic : J. Math. Kyoto Univ. 11.2(1971) 357-372.

[5] L.HORMANDER.- Linear partial differential operators, Springer Verlag,1963

[6] J. LERAY.- Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de CAUCHY près de la variété qui porte les données de CAUCHY.(Problème de CAUCHY I). Bull. Soc. Math. France. 85,(1957),389-429. -

[7] S. MIZOHATA.- Analyticity of solutions of hyperbolic systems with analytic coefficients ; C.P.A.M. vol 14 (1961) 547-559.-

[8] L.V. OVCYANNIKOV.- A singular operator in a scale of Banach spaces; Dok. t.163 N° 4 (1965).

[9] F. TREVES.- OVCYANNIKOV theorem and hyperdifferential operators. Inst. de Math. Pura e Applic. Rio de Janeiro (1968)

[10] T. YAMANAKA.- Note on KOWALEVSKAJA's system of partial differential equations ; Comment. Math. Univ. St PAUL ; 9-10 (1960-1961) p.1-20