

Astérisque

JACQUES CHAZARAIN

**Une classe d'opérateurs à caractéristiques de
multiplicité constante**

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 135-142

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__135_0>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CLASSE D'OPERATEURS A CARACTERISTIQUES

DE

MULTIPLICITE CONSTANTE

(Jacques CHAZARAIN)

Université de NICE.

INTRODUCTION

On étend à une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples des résultats déjà connus pour les opérateurs réels de type principal.

Dans la première partie, on considère les opérateurs à multiplicité constante et ayant une partie principale hyperbolique. Pour que le problème de Cauchy soit bien posé on est conduit à introduire une hypothèse sur les termes d'ordre inférieur, alors avec cette condition, dite de Lévi, on démontre que les noyaux qui résolvent le problème de Cauchy se construisent à partir d'opérateurs intégraux de Fourier.

Dans la deuxième partie, on considère plus généralement des opérateurs réels à multiplicité constante et vérifiant la condition de Lévi. Dans ces conditions on montre que le spectre singulier des distributions u solutions de $Pu = 0$ est constitué de bandes bicaractéristiques, résultat déjà démontré par Duistermaat et Hörmander [6] pour les opérateurs à caractéristiques simples.

I. OPERATEURS HYPERBOLIQUES A MULTIPLICITE CONSTANTE.

a) Enoncé du théorème 1.

Soit X' une variété C^∞ connexe de dimension $n-1$ et $X = \mathbb{R} \times X'$ la variété produit, $x = (x_0, x')$ le point générique de X et $\xi = (\xi_0, \xi')$ un vecteur cotangent en x . On utilise sans les rappeler les notations de Hörmander [8] pour les opérateurs intégraux de Fourier.

On dit qu'un opérateur différentiel $P(x, D)$ à coefficients $C^\infty(X)$ et à partie principale réelle p vérifie l'hypothèse (H) si on a

- (H) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ les hypersurfaces } X_{t_0} = \{x; x_0 = t_0\} \text{ ne sont pas caractéristiques} \\ \bullet \text{ les racines en } \xi_0 \text{ de l'équation } p(x, \xi_0, \xi') = 0 \text{ sont réelles} \\ \text{et de multiplicité constante pour } (x, \xi') \in \mathbb{R} \times T^{\#}(X') \setminus 0. \end{array} \right.$

Notons $\lambda_\alpha(x, \xi')$ $\alpha = 1, \dots, \bar{\alpha}$ les racines distinctes deux à deux et r_α les multiplicités, de sorte que $r_1 + \dots + r_{\bar{\alpha}} = m = \text{degré de } p$ (on suppose que le terme D_0^m a pour coefficient 1 dans P).

On considère le problème de Cauchy sous la forme suivante :

- (*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{étant données des fonctions } f \in C^\infty(X) \text{ et } g_j \in C^\infty(X') \quad j=0, \dots, m-1 \\ \text{trouver } u \in C^\infty(X) \text{ solution de } Pu = f \text{ et } D_0^j u|_{x_0=t_0} = g_j. \end{array} \right.$

En général ce problème n'admet pas une solution et une seule à moins que les termes d'ordre inférieur de P vérifient une condition (Lévi [10], A. Lax [9], Yamaguti [16], Mizohata-Ohya [11] [12], Flaschka-Strang [7], Ohya [13]) que l'on appellera condition de Lévi (L). Notons que dans les fonctions analytiques et pour des coefficients analytiques le problème (*) est bien posé sans hypothèses supplémentaires (cf. Bony-Shapira [1]), mais de même que le théorème de Cauchy-Kowaleski est malheureusement faux dans les fonctions C^∞ il en est de même du problème (*). Introduisons maintenant la condition de Lévi sous une forme voisine de celle utilisée par Flaschka-Strang [7].

Définition 1. L'opérateur P satisfait à la condition de Lévi $(L_{y,\eta})$ en $(y,\eta) \in p^{-1}(0) \subset T^*(X) \setminus 0$ si : étant donnée une phase $\varphi(x)$ solution de $\partial/\partial x_0 \varphi - \lambda_\alpha(x, \partial_x \varphi) = 0$ au voisinage de y avec $d\varphi(y) = \eta$ on a

$$(1) \quad e^{-it\varphi} P(a e^{it\varphi}) = o(t^{m-r_\alpha}) \quad t \rightarrow +\infty$$

où $a \in C_0^\infty$ et a a son support dans un voisinage de y où φ est solution avec $d\varphi \neq 0$. L'opérateur P vérifie la condition de Lévi (L) si $(L_{y,\eta})$ est satisfaite en tout point de $p^{-1}(0)$.

On peut alors énoncer le principal résultat de cette partie

Théorème 1. Soit P un opérateur de degré m qui vérifie les conditions (H) et (L) alors il existe des opérateurs intégraux de Fourier

$$E_\mu \in I^{\bar{m}_\mu - 1/4}(X, X'; \mathbb{C}) \quad \mu = 0, \dots, m-1$$

tels que

$$(2) \quad P.E_\mu \equiv 0 \quad \text{et} \quad \gamma_j.E_\mu \equiv \delta_{j,\mu}.I \quad \mu, j = 0, \dots, m-1$$

pour une relation canonique convenable C et où $\bar{m}_\mu = r - 1 - \mu$ avec $r = \max_\alpha r_\alpha$ et γ_j désigne l'opérateur de trace sur X' de la dérivée D_0^j (t_0 est fixé aussi on identifie X_{t_0} avec X').

b) Idée de la démonstration du théorème 1.

L'indice μ étant fixé on l'omet dans ce paragraphe, ainsi $E_\mu = E$. Précisons tout d'abord la relation canonique C . Pour t_0 fixé et $\alpha = 1, \dots, \bar{\alpha}$ on définit la relation

$$C_\alpha(t_0) = \{ (x, \xi, y', \eta') ; (x, \xi) \text{ et } (t_0, y', \lambda_\alpha(t_0, y', \eta'), \eta') \}$$

sont sur une même bande bicaractéristique de $q_\alpha = \xi_0 - \lambda_\alpha(x, \xi)$ }

et l'on pose $C = \bigcup_\alpha C_\alpha(t_0)$.

On construit E sous la forme $F_1 + \dots + F_{\alpha}$ avec

$$F_{\alpha} \in I^{\alpha - 1/4}(X, X'; C_{\alpha}(t_0)) \quad m_{\alpha} = r_{\alpha} - 1 \quad \text{et l'on}$$

détermine $F_{\alpha} \sim \sum_{k \geq 0} F_{\alpha}^{(k)}$ par un développement asymptotique avec des opérateurs

$$F_{\alpha}^{(k)} \quad \text{tels que} \quad \sum_{k \leq h} P_{\alpha} F_{\alpha}^{(k)} \in I^{m + m_{\alpha} - \frac{1}{4} - r_{\alpha} - h - 1} \quad . \text{ En}$$

conséquence le point essentiel réside dans l'étude de produit de la forme $P.F_{\alpha}$ et en particulier dans le calcul du symbole principal du composé car cela donnera les équations de transport. D'après la définition des opérateurs intégraux de Fourier on se ramène à l'étude de la structure du développement asymptotique en t de (1). Pour cela on écrit ce développement sous la forme suivante

$$(3) \quad e^{-it\varphi} P(a e^{it\varphi}) \sim t^m T_0(P, \varphi)_a + \dots + t^{m-j} T_j(P, \varphi)_a + \dots$$

où l'on vérifie que $T_j(P, \varphi)$ désigne un opérateur différentiel de degré j qui dépend de P et φ et dont la partie principale T_j^0 est donnée par

$$T_j^0(P, \varphi)(x, \eta) = \sum_{|\alpha| = j} p^{(\alpha)}(x, d\varphi) \frac{\eta^{\alpha}}{\alpha!} \quad .$$

Cela étant remarqué, on démontre ensuite que la condition de Lévi est équivalente à la notion d'opérateur bien décomposable introduite et étudiée par De Paris [5].

On en déduit que si φ est une phase pour le symbole q_{α} alors les opérateurs $T_j(P, \varphi)$ sont nuls pour $j < r_{\alpha}$ et l'opérateur $T_{r_{\alpha}}(P, \varphi)$ est un opérateur de dérivation (de degré exactement égal à r_{α}) dans la direction sur X du champ bicaractéristique $H_{q_{\alpha}}$ associé à q_{α} , de façon précise on a

$$(4) \quad T_{r_{\alpha}} = \sum_{j=0}^{r_{\alpha}} \ell_j(L_{q_{\alpha}})^j \quad \text{où} \quad L_{q_{\alpha}} = \sum_k \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

avec $\ell_j \in C^{\infty}$ et $\ell_{r_{\alpha}} \neq 0$. Ceci permet de démontrer que le composé de

P et d'un opérateur $F \in I^{d}(X, X'; C_{\alpha}(t_0))$ est un opérateur $P.F \in I^{m+d-r_{\alpha}}$ dont le symbole principal est donné par l'expression

$$(5) \quad \left(c_0(H_{q_{\alpha}}^{r_{\alpha}}) + c_1(H_{q_{\alpha}}^{r_{\alpha}-1}) + \dots + c_{r_{\alpha}} \right)_a$$

où $\sim$ désigne le symbole principal de F et $H \sim$ l'opérateur de dérivation dans la direction du champ hamiltonien associé au symbole $\tilde{q}_\alpha(x, \xi, y', \eta') = q_\alpha(x, \xi)$ sur $T^*(X) \times T^*(X')$, ce résultat est à rapprocher du théorème 5.3.1 de Duistermaat & Hörmander [6].

Finalement la construction des opérateurs $F_\alpha^{(k)}$ se ramène à la résolution d'une succession d'équations différentielles de degré r_α dont les données initiales sont déterminées successivement par les conditions de Cauchy sur X_{t_0} .

c) Corollaires.

Du théorème 1 on déduit que :

- 1) le problème de Cauchy (*) admet une solution unique
- 2) pour $f \in H^s(X)$ et $g_j \in H^{s+m-j-1}(X')$ il y a une solution unique $u \in H^{s+m-r}(X)$ (où s est un entier $\geq r$ et X' supposée compacte)
- 3) si u est une distribution solution de $Pu = 0$ on a, en posant $g = (\gamma_j u)_{j=0, \dots, m-1}$; $WF(u) \subset \bigcup_\alpha C_\alpha(t_0) \cap WF(g)$
($\gamma_j u$ existe car X_{t_0} n'est pas caractéristique pour P , voir Hörmander [8] au sujet du wave front = spectre singulier = WF).

Terminons par des remarques :

Remarque 1. Le théorème 1 reste valable quand P est pseudo-différentiel en les variables spatiales x' .

Remarque 2. Sous l'hypothèse (H) la nécessité de la condition de Lévisemble très probable pour que le problème de Cauchy soit bien posé. Cependant à notre connaissance cette nécessité n'a été démontré que dans divers cas particuliers :

- $n = 2$ (A. Lax [9])
- coefficients constants (se déduit du travail de Svansson [15])
- multiplicité au plus double (Mizohata-Ohya [12]), notons que dans ce cas la condition de Lévi se formule bien au moyen du symbole sous-caractéristique

$$c_p(x, \xi) = p_{m-1}(x, \xi) - \frac{1}{2i} \sum_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, \xi)$$

par l'équivalence

$$(L) \iff (c_p = 0 \text{ sur les variétés } q_\alpha^{-1}(0) \text{ pour toute racine double } \lambda_\alpha)$$

- on trouvera également des résultats dans Flaschka-Strang [7] et De Paris [5].

II. SPECTRE SINGULIER DES SOLUTIONS DES EQUATIONS SATISFAISANT LA CONDITION DE LEVI.

a) Enoncé du théorème 2.

Soit une variété C^∞ , $P \in L_1^n(X)$ un opérateur propre dont le symbole admet un développement en composantes homogènes. Soit u une distribution on pose $Pu = f$ et l'on sait que $WF(u) \subset p^{-1}(o) \cup WF(f)$, on se propose de préciser la structure de l'ensemble $WF(u) \setminus WF(f)$.

On dit que l'opérateur P est à multiplicité constante s'il vérifie la condition

$$(M) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{le symbole principal } p \text{ se factorise sous la forme } p = q_1^{r_1} \dots q_\alpha^{r_\alpha} \text{ où} \\ \text{les } q_\alpha \text{ sont des symboles reels de type principal et les variétés } q_\alpha^{-1}(o) \\ \text{sont disjointes dans } T^*(X) \setminus 0. \end{array} \right.$$

La définition de la condition de Lévi se généralise de façon évidente aux opérateurs vérifiant (M) en disant de façon rapide que l'on a

$$(L) \quad e^{-it\varphi} P(a e^{it\varphi}) = O(t^{m-r_\alpha}) \quad t \rightarrow +\infty$$

quand φ est une phase relative au facteur q_α .

On peut alors énoncer le

Théorème 2. Soit $P \in L_1^n(X)$ un opérateur propre vérifiant les conditions (M) et (L). Alors pour $u \in \mathcal{D}'(X)$ et $Pu = f$ l'ensemble $WF(u) \setminus WF(f)$ est inclus dans $p^{-1}(o)$ et est invariant par le flot bicaractéristique (étant entendu que sur $q_j^{-1}(o)$ on prend le flot associé au champ H_{q_j}).

b) Idée de la démonstration.

Soit $(x^0, \xi^0) \in WF(u) \setminus WF(f)$, il suffit de montrer que sur la bicaractéristique qui le contient il y a un voisinage de ce point inclus dans $WF(u) \setminus WF(f)$. La méthode consiste à se ramener au cas de l'opérateur D_n pour lequel le résultat est simple à démontrer. Comme on ne change pas le problème en composant P avec un opérateur elliptique on peut supposer que p est de la forme $q(x, \xi)^r$ au voisinage de (x^0, ξ^0) où q est un symbole reel de type principal vérifiant $o = q(x^0, \xi^0)$ et de degré 1. D'après Duistermaat-Hörmander [6] il existe une transformation canonique T d'un voisinage conique de (x^0, ξ^0) sur un voisinage conique de $(z^0, \zeta^0) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$ telle que $(z_n \circ T)(x, \xi) = q(x, \xi)$ et l'application de la proposition 6.1.4 de [6] montre l'existence d'opérateurs

intégraux de Fourier

$$A \in I^0(X, \mathbb{R}^n; \Gamma') \quad \text{et} \quad B \in I^0(\mathbb{R}^n, X; (\Gamma^{-1})')$$

tels que

$$(x^0, \xi^0) \notin WF(AB-I) \quad \text{et} \quad (z^0, \zeta^0) \notin WF(BA-I)$$

où Γ est une partie conique fermée du graphe de T .

Soit $\tilde{P}$ l'opérateur transmué $\tilde{P} = BPA \in L^r(\mathbb{R}^n)$, son symbole principal est par construction égal à ζ_n^r , et l'on vérifie que la distribution $v = Bu$ est telle que $(z^0, \zeta^0) \in WF(v)$ et $(z^0, \zeta^0) \notin WF(\tilde{P}v)$. Précisons la structure de l'opérateur $\tilde{P}$; pour cela, on montre qu'il vérifie la condition de Lévi au voisinage de (z^0, ζ^0) . Cette démonstration se fait en utilisant la forme ci-après de la condition de Lévi. D'après le caractère local de la condition de Lévi, on montre que l'opérateur P vérifie la condition (L_{z^0, ζ^0}) si et seulement si

$$P.A \in I^{m-r, \alpha}(X, X; K_\alpha) \quad \text{pour tout} \quad A \in I^0(X, X; K_\alpha) \\ \text{et tout} \quad \alpha = 1, \dots, \bar{\alpha},$$

où K_α désigne une partie conique fermée incluse dans la relation bicaractéristique associée à q_α au voisinage de (z^0, ζ^0) .

La condition de Lévi implique que P peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{P} = D_n^r + \sum_{j=0}^{r-1} B_j(z, D) D_n^j \quad \text{avec} \quad B_j \in L^0.$$

Pour se débarrasser de D_n dans les opérateurs $B_j(z, D)$, on étend au cadre C^∞ une forme du théorème de préparation de Weierstrass démontré par Sato-Kawai-Kashiwara [14] pour les opérateurs pseudo-différentiels analytiques; de façon précise, on montre que $\tilde{P}$ peut s'écrire

$$\tilde{P} \equiv Q(x, D) \left(D_n^r + \sum_{j=0}^{r-1} B'_j(z, D') D_n^j \right)$$

où S est elliptique de degré zéro et $B'_j(z, D') \in L^0(\mathbb{R}^{n-1})$ et dépend du paramètre x_n .

Reste enfin à se ramener à une équation du type $D_n u = f$; pour cela, il est commode, selon une suggestion de T. Kawai, de se ramener à un système du premier ordre, ce qui permet ensuite d'adapter la technique de Sato-Kawai-Kashiwara ([14] § 5.2), en posant :

$$U = (u, D_n u, \dots, D_n^{r-1} u) \quad F = (0, \dots, f)$$

$$A(x, D') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ -B'_0, \dots, -B'_{r-1} \end{pmatrix}$$

il vient l'équation

$$(D_n + A(x, D')) U = F.$$

Comme $A(x, D')$ est de degré zéro on peut construire des opérateurs pseudo-différentiels de degré zéro $R(x, D')$ et $S(x, D')$ tels que

$$(D_n - A).R \equiv R.D_n \quad \text{et} \quad S.(D_n - A) \equiv D_n.S \quad \text{et} \quad RS \equiv S.R \equiv I$$

Par conséquent l'équation $\tilde{P}u = f$ se ramène à la forme $D_n U = F$, ce qui termine cette esquisse de démonstration.

NOTA. Les résultats indiqués dans la partie I sont annoncés sous une forme primitive dans [2] et démontrés en détail dans [3]. Les résultats de la partie II seront publiés dans [4] où l'on étudiera également les questions de résolubilité pour ce type d'opérateur à multiplicité constante.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. M. Bony - P. Shapira, Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, ce colloque.
- [2] J. Chazarain, Le problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques non stricts qui satisfont à la condition de Lévi, CRAS p. 1218 (décembre 71).
- [3] J. Chazarain, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, à paraître.
- [4] J. Chazarain, Sur une classe d'opérateurs à multiplicité constante, en préparation.
- [5] J.C. De Paris, Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples ; lien avec l'hyperbolicité, J. Math. Pures et Appl. 50 (1971).
- [6] J.J. Duistermaat - L. Hörmander, Fourier Integral Operators II, Acta Math. 128 (1972).
- [7] H. Flaschka - G. Strang, The correctness of the Cauchy problem, Adv. in Math. 6 (1971).
- [8] L. Hörmander, Fourier Integral Operators I, Acta Math. 127 (1971).
- [9] A. Lax, On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956).
- [10] E.E. Lévi, Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. di Mat. 16 (1909).
- [11] S. Mizohata - Y. Ohya, Sur la condition de E.E. Lévi concernant des équations hyperboliques, RIMS vol 4 n°2 (1968) Kyoto Univ.
- [12] S. Mizohata - Y. Ohya, Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples, II Jap. J. of Math. vol n°40 (1971).
- [13] Y. Ohya, On E.E. Lévi's Functions for Hyperbolic Equations with Triple Characteristics, Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972).
- [14] M. Sato - T. Kawai - M. Kashiwara, Foundation of the theory of pseudo-differential equations, Proc. Katata Conf. part II (1971) to appear in Lecture Notes.
- [15] S.L. Svansson, Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal parts, Ark. Math. 8 (1970).
- [16] M. Yamaguti, Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrales singulières, Mem. Coll. Sci. Kyoto 32 (1959).

