

Astérisque

LOUIS BOUTET DE MONVEL

Opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre infini

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 128-134

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__128_0>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

OPERATEURS PSEUDO - DIFFERENTIELS ANALYTIQUES

D'ORDRE INFINI

par

Louis Boutet de Monvel

Cet exposé résume les résultats d'un article qui doit paraître dans les Annales de l'Institut Fourier ([2]). Je renvoie à cet article pour les démonstrations. On trouvera aussi une définition des opérateurs pseudo - différentiels d'ordre infini dans le chapitre II du livre de M. Kawai ([4]).

On attend des opérateurs pseudo - différentiels (o pd.), d'ordre fini ou non, les propriétés suivantes :

- 1 - Ils transforment une fonction à support compact (plus généralement une fonctionnelle analytique à support compact) en une hyperfonction, et diminuent le support singulier analytique
- 2 - Ils se composent raisonnablement, et donnent lieu à un calcul symbolique analogue à celui des opd. " classiques " (pour la définition de ces derniers, je renvoie à [3] et à sa bibliographie).

I - DEFINITION DES OPERATEURS.-

Soit X un ouvert de \mathbb{R}^N . On appelle symbole analytique sur $X \times \mathbb{R}^N$ une fonction $a(x, \xi)$ sur $X \times \mathbb{R}^N$ telle que

(1.1) Pour tout compact $K \subset X$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que a se prolonge en une fonction holomorphe dans le domaine complexe (ouvert dans $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^n$) $d(x,K) < \varepsilon$, $|\operatorname{Im} \xi| < \varepsilon (1 + |\operatorname{Re} \xi|)$; et pour tout $\lambda > 0$, $a \exp - \lambda |\xi|$ est borné dans ce domaine.

On dit que a est de degré fini $\leq m$ si $a(1 + |\xi|)^{-m}$ est borné dans les domaines ci dessus (pour ε assez petit).

Par exemple, la fonction $\sum a_\alpha(x) \xi^\alpha$ est un symbole analytique si $\sum a_\alpha(x) \xi^\alpha$ est holomorphe dans $U \times \mathbb{C}^n$, où U est un voisinage complexe de X . La fonction $\exp i c(x) (1 + |\xi|^2)^\sigma$ est un symbole analytique (de degré infini) si c est analytique et si $\sigma < 1/2$.

Si a est un symbole analytique sur $X \times X \times \mathbb{R}^n$, de degré fini $< -n$, on lui associe l'opd. P_a défini par

$$(1.2) \quad \int P_a f \cdot g = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x,y,\xi) f(y) g(x) dx dy d\xi$$

pour $f, g \in \mathcal{D}(X)$. Si les supports singuliers analytiques de f et g sont disjoints, il existe trois champs de vecteurs $x'(x,y,\xi)$, $y'(x,y,\xi)$, $\xi'(x,y,\xi)$, homogènes de degrés respectifs $0, 0, 1$, tels que

(1.3) x' (resp. y') est nul près du support singulier analytique de g (resp. f). Et avec $x^t = x + itx'$, $y^t = y + ity'$, $\xi^t = \xi + it\xi'$ on a $\operatorname{Im} \langle x^t - y^t, \xi^t \rangle > 0$ pour $\xi \neq 0$, et $a(x^t, y^t, \xi^t) f(y^t) g(x^t)$ est bien défini pour $t > 0$ assez petit.

Posons alors $dx^t dy^t d\xi^t = dx_1^t \wedge dx_2^t \wedge \dots \wedge d\xi_n^t$. La formule de Cauchy montre qu'on a encore, pour t petit,

$$(1.4) \int P_a f.g = (2\pi)^{-n} \int \exp-i\langle x^t - y^t, \xi^t \rangle a(x^t, y^t, \xi^t) f(x^t) g(x^t) dx^t dy^t d\xi^t$$

Or, dans cette nouvelle intégrale, l'exponentielle décroît exponentiellement pour $\xi \rightarrow \infty$, et l'intégrale converge encore si a est n'importe quel symbole analytique. Ceci fournit la définition de l'opd. P_a , et permet de montrer que P_a se prolonge aux fonctionnelles analytiques à support compact et diminue le support singulier analytique.

II - PROPRIETES DE CES OPERATEURS.

(2.1) La définition indiquée ci dessus est invariante par changement analytique de coordonnées.

(2.2) Le transposé d'un opd. analytique en est un autre.

(2.3) Si $a(x, y, \xi)$ est un symbole analytique, il existe un symbole analytique $b(x, \xi)$ indépendant de y (unique mod. la relation d'équivalence de III) tel que les opd. P_a et P_b diffèrent par un opérateur à noyau analytique.

P_a et P_b diffèrent par un opérateur à noyau analytique.

(2.4) (composition)

Soient P et Q deux opd. analytiques sur X , $X' \subset X$ un ouvert relativement compact, et $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ égale à 1 dans X' . Alors $P \varphi Q|_{X'}$ est un opd. analytique sur X' . (Si f est à support dans X' , $Q(f)$ est analytique hors d'un compact de X' , donc $\varphi Q(f)$ et $P\varphi Q(f)$ sont bien définis).

(2.5) Soit P un opd. analytique. On appelle parametrix analytique de P un opd. analytique Q tel que, avec la notation de (2.4), $P\psi Q|_{X'}$ et $Q\psi P|_{X'}$ diffèrent de l'opérateur identité par un opérateur à noyau analytique sur X' . Si P possède une parametrix analytique, et si f est une fonctionnelle analytique (à support compact), f est analytique dans tout ouvert où $P(f)$ l'est.

(2.6) Si P est opd. analytique de degré fini m , elliptique au sens que P est défini par un symbole $a(x,y,\xi)$ de degré m tel que $a(x,x,\xi)$ domine $|\xi|^m$ pour $|\xi| \rightarrow \infty$, alors P possède une parametrix analytique.

III - CALCUL SYMBOLIQUE.-

Soit Λ une fonction > 0 telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\Lambda(r) \exp - \epsilon r$ soit bornée.

(3.1) On appelle symbole analytique formel d'ordre Λ une série $\sum a_k$ de symboles analytiques (sur $X \times \mathbb{R}^n$) tels que pour tout compact $K \subset X$, il existe $\epsilon > 0$ tel que les a_k soient tous holomorphes dans le domaine complexe

$$d(x,K) < \epsilon, \quad |\xi| > \epsilon, \quad |\operatorname{im} \xi| < \epsilon |\operatorname{re} \xi|, \quad \text{et } y \text{ vérifient}$$

$$|a_k| \leq (1/\epsilon)^{k+1} k! (1 + |\xi|)^{-k} \Lambda(|\xi|)$$

(3.2) On dit que deux symboles formels d'ordre Λ , $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont équivalents (et on écrit $\sum a_k \sim \sum b_k$) si pour tout compact $K \subset X$, il existe $\epsilon > 0$ tel que les a_k, b_k soient tous holomorphes dans le domaine complexe de (3.1) et y vérifient

$$\left| \sum_{K < N} a_k - b_k \right| \leq (1/\epsilon)^{N+1} N! (1 + |\xi|)^{-N} \Lambda(|\xi|)$$

Si a est un symbole analytique, on l'identifie au

symbole formel Σa_k où $a_0 = a$, $a_k = 0$ si $k \neq 0$. On a alors $a \sim 0$ si et seulement si a est à décroissance exponentielle (en ξ).

Si Σa_k et Σb_k sont deux symboles analytiques formels, on note $(\Sigma a_k)_0 (\Sigma b_k)$ le symbole formel (analytique d'après (3.5))

$$(\Sigma a_k)_0 (\Sigma b_k) = \sum_{k,l,\gamma} (i^{-|\gamma|} / \gamma!) \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\gamma a_k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\gamma b_l$$

On a les résultats suivants :

(3.3) Théorème :

Soit Σa_k un symbole analytique formel. Il existe un symbole analytique a tel que $a \sim \Sigma a_k$.

(3.4) (Norme formelle)

Soit $K \subset X$ un compact, et $\epsilon > 0$. Posons

$$N_\Lambda^{K,\epsilon} (\Sigma a_k, T) = \sum_{k,\alpha,\beta} c_{k,\alpha,\beta} a_{k,\alpha,\beta} T^{2k+|\alpha|+|\beta|}$$

avec $c_{k,\alpha,\beta} = 2(2n)^{-k} k! (k+|\alpha|)!^{-1} (k+|\beta|)!^{-1}$

$$a_{k,\alpha,\beta} = \sup_{\substack{x \in K \\ |\xi| > 1/\epsilon}} (1+|\xi|)^k \Lambda^{-1} (|\xi|)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta a_k |$$

Il revient au même de dire que Σa_k est un symbole formel analytique, ou que, pour tout compact $K \subset X$, il existe $\epsilon > 0$ et Λ comme ci dessus tels que $N_\Lambda^{K,\epsilon} (\Sigma a_k, T)$ soit une série convergente.

(3.5) Théorème :

On a $N_{\Lambda\Lambda} ((\Sigma a_k)_0 (\Sigma b_k), T) \ll N_\Lambda ((\Sigma a_k), T) N_\Lambda ((\Sigma b_k), T)$ (où \ll signifie que le coefficient de T^q dans le membre de droite majore le coefficient de T^q dans le membre de gauche).

Enfin

(3.6) Si P_a , P_b , P_c sont trois opd. analytiques, où $a = a(x, \xi)$; $b = b(x, \xi)$; $c = c(x, \xi)$ sont des symboles analytiques indépendants de y et si (avec la notation de (2.3)) $P_a \not\sim P_b$ et P_c diffèrent par un opérateur à noyau analytique, on a $c \sim a \circ b$.

Les théorèmes (3.3) et (3.5) se trouvent déjà essentiellement dans [1]. Ils rendent le maniement des opd. analytiques presque aussi facile que celui des opd. " classiques " ; en particulier, une fois démontrés ces théorèmes, les assertions de II, et (3.6) se démontrent en gros comme dans [3]. Démontrons par exemple (2.6) : grâce à (3.3), (3.6), il suffit de montrer qu'il existe un symbole analytique formel inverse de a pour la loi \circ . Or avec l'hypothèse de (2.6), $1 - a \circ a^{-1} = h$ est un symbole analytique formel de degré 0 sans terme h_0 (en fait h est de degré -1). Alors $N_1(h, T)$ est une série convergente sans terme constant, et $N_1(\Sigma h^n, T) \ll \Sigma N_1(h, T)^n$ est une série convergente.

(Je n'ai pas de critère d'ellipticité raisonnable pour les opérateurs d'ordre infini, à coefficients variables, faute d'une définition utilisable de la partie principale du symbole. Par exemple, si a est le symbole $\exp ic(x) |\xi|^6$, $a \circ a^{-1} - 1$ n'est pas en général un symbole formel de degré fini < 0 , bien que chacun de ses termes le soit si $\sigma < 1/2$).

- [1] L. Boutet de Monvel et P. Krée
" Pseudo - differential operators and Gevrey classes "
Ann. Inst. Fourier 17, 1(1967) 295-323
- [2] L. Boutet de Monvel
" Opérateurs pseudo différentiels analytiques d'ordre
infini "
A paraître dans Ann. Inst. Fourier (1972)
- [3] L. Hörmander
" Fourier integral operators I "
Acta Math. 127 (1971) 79-183
- [4] M. Kawai
" Micro functions and pseudo - differential equations "
A paraître. Lecture Notes, Springer

Louis Boutet de Monvel
Université de Paris VII