

# *Astérisque*

PHILIPPE ROBBA

**Fonctions analytiques sur les corps valués  
ultramétriques complets**

*Astérisque*, tome 10 (1973), p. 109-218

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1973\\_\\_10\\_\\_109\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__10__109_0)

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS ANALYTIQUES SUR LES CORPS  
VALUES ULTRAMETRIQUES COMPLETS

par

Philippe ROBBA

---



## P L A N

|                                                                                                          |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 1. - Introduction .....                                                                                  | p. 113 |
| 2. - Notations et terminologie .....                                                                     | p. 115 |
| 3. - Polygone de valuation .....                                                                         | p. 117 |
| 4. - Théorème de décomposition de Mittag-Löffler .....                                                   | p. 120 |
| 5. - Eléments analytiques dans une couronne .....                                                        | p. 127 |
| 6. - Somme, produit, dérivée, limite d'éléments analytiques .....                                        | p. 128 |
| 7. - Fonctions analytiques .....                                                                         | p. 132 |
| 8. - Fonctions analytiques sur les familles enchaînées finies.<br>Prolongement analytique uniforme ..... | p. 136 |
| 9. - Somme de fonctions analytiques .....                                                                | p. 141 |
| 10. - Développement en série de Laurent des fonctions analytiques .....                                  | p. 143 |
| 11. - Limite uniforme de fonctions analytiques .....                                                     | p. 151 |
| 12. - Inverse d'une fonction analytique.<br>Produit de fonctions analytiques .....                       | p. 162 |
| 13. - Fonctions méromorphes .....                                                                        | p. 172 |
| 14. - Composée de deux fonctions analytiques .....                                                       | p. 192 |
| 15. - Prolongement analytique .....                                                                      | p. 194 |
| Annexe .....                                                                                             | p. 214 |
| Index terminologique .....                                                                               | p. 217 |
| Bibliographie .....                                                                                      | p. 218 |



## INTRODUCTION

---

Soit  $K$  un corps valué, ultramétrique, complet et algébriquement clos. Soit  $A$  un sous-ensemble de  $K$ . Si l'on veut édifier une théorie des fonctions analytiques sur  $A$  on sait qu'il n'est pas possible de définir celles-ci par des conditions locales (à cause de la nature ultramétrique de  $K$  : cf. [8]).

Il faut donc définir globalement les fonctions analytiques sur  $A$ . Pour définir celles-ci demandons-nous quelles propriétés il est souhaitable que possède l'espace  $H(A)$  des fonctions analytiques sur  $A$ . Il est raisonnable de demander que la somme et le produit de deux fonctions analytiques sur  $A$ , l'inverse d'une fonction analytique sur  $A$  ne s'annulant pas dans  $A$ , la limite uniforme sur  $A$  d'une suite de fonctions analytiques sur  $A$  soient des fonctions analytiques sur  $A$ . De plus, on demandera que les fonctions analytiques sur  $A$  vérifient le principe du prolongement analytique : si  $f \in H(A)$  s'annule dans une boule contenue dans  $A$ , alors  $f$  est identiquement nulle dans  $A$ .

Il est naturel d'admettre que les fonctions polynômes sont analytiques (elles vérifient certainement le principe du prolongement analytique). Eventuellement, on exigera que les fonctions analytiques sur  $A$  soient indéfiniment dérivables, que leurs dérivées soient des fonctions analytiques et qu'une fonction analytique dans un disque (respectivement une couronne) y soit développable en série de Taylor (respectivement en série de Laurent).

Il résulte de ces conditions que les fractions rationnelles sans pôles dans  $A$  et les limites uniformes sur  $A$  de telles fractions rationnelles sont des fonctions analytiques sur  $A$ . Une limite uniforme sur  $A$  de fractions rationnelles sans pôles dans  $A$  sera appelée un élément analytique. Si on demande que les éléments analytiques sur  $A$  vérifient le principe du prolongement analytique,

on obtient des conditions sur  $A$ . Si les éléments analytiques sur  $A$  vérifient le principe du prolongement analytique on dit que  $A$  est analytique. La classe des ensembles analytiques sera notée  $\mathcal{A}$ . Dans [8] nous avons étudié sous quelles conditions un ensemble était analytique ainsi que quelques propriétés des ensembles analytiques (voir l'annexe).

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier les propriétés des éléments analytiques sur un ensemble  $A \in \mathcal{A}$ . Nous établirons un théorème de décomposition d'un élément analytique suivant ses parties singulières, théorème analogue à celui de Mittag-Löffler. Nous étudierons si les éléments analytiques vérifient les propriétés indiquées dans cette introduction. Nous verrons que ce n'est pas toujours le cas ; nous serons donc obligés d'introduire les fonctions analytiques (§ 7). Il apparaîtra alors que, pour que les fonctions analytiques possèdent les propriétés désirables, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur la nature topologique de  $K$ , à savoir  $K$  devra être maximallement complet (§ 10).

Nous étudierons les fonctions méromorphes pour lesquelles on obtient une factorisation suivant les zéros et les pôles analogue à celle obtenue pour les fonctions analytiques (voir par exemple [7]).

Enfin, nous obtiendrons des critères permettant de savoir si une série de Taylor se prolonge en dehors de son disque de convergence.

C'est M. Krasner [6] l'initiateur de la théorie des fonctions analytiques dans les corps valués ultramétriques. Il a été le premier à donner des définitions convenables des fonctions analytiques et à trouver des techniques pour les étudier. Bien des idées de cet article se trouvent déjà implicitement ou explicitement dans ses travaux.

# NOTATIONS ET TERMINOLOGIE ---

La fin d'une démonstration sera indiquée par  $\parallel$ .

La valeur absolue sur  $K$  sera notée  $|\cdot|$ .

Dire que  $K$  est ultramétrique signifie que

$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|).$$

Il en résulte que si  $|x| \neq |y|$  on a l'égalité dans la formule précédente.

On suppose que le groupe des valeurs est dense dans  $\mathbb{R}^+$ .

On notera  $\overline{K} = K \cup \{\infty\}$ .

On appellera disque ouvert, disque fermé, cercle de centre  $a$  et de rayon  $r$ , et on notera  $D(a, r^-)$ ,  $D(a, r^+)$ ,  $C(a, r)$  les ensembles

$$|x-a| < r, \quad |x-a| \leq r, \quad |x-a| = r.$$

Si  $b \in D(a, r^+)$  (resp.  $C(a, r)$ ),  $D(b, r^-)$  est contenu dans  $D(a, r^+)$  (resp.  $C(a, r)$ ) et est appelé disque intérieur du disque  $D(a, r^+)$  (resp. du cercle  $C(a, r)$ ).

Le complémentaire d'un disque sera appelé disque de centre  $\infty$ .

$D(0, 1^+)$  forme un anneau commutatif unitaire dont  $D(0, 1^-)$  est un idéal maximal.  $D(0, 1^+)/D(0, 1^-)$  est appelé le corps de reste du corps  $K$ . C'est l'ensemble des disques intérieurs du disque unité fermé  $D(0, 1^+)$ . On le note  $\mathfrak{k}$ .



$<$  signifiera soit  $<$  , soit  $\leq$  et lorsque nous parlerons du disque de centre  $a$  et de rayon  $r$  ,  $D(a, r) : |x-a| < r$  cela désignera soit  $D(a, r^-)$  soit  $D(a, r^+)$  .

POLYGONE DE VALUATION D'UN ELEMENT ANALYTIQUE

---

3.1. - Soit  $A$  un sous-ensemble de  $K$  et soit  $y$  un point de  $K$ . Nous noterons  $\text{Im}_y(A)$  l'image de  $A$  dans l'application de  $K$  dans  $\mathbb{R}^+ : x \rightarrow |x-y|$ . Soit  $\overline{\text{Im}_y(A)}$  l'adhérence de  $\text{Im}_y(A)$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Nous dirons que  $A$  est infraconnexe relativement à  $y$  si  $\overline{\text{Im}_y(A)}$  est un intervalle.

Nous dirons que  $A$  est infraconnexe s'il est infraconnexe relativement à tout point de  $K$  [5]. (Un ensemble analytique est infraconnexe [8]).

Nous appellerons projection de  $A$  relativement à  $y$  et nous noterons  $\text{Pr}_y(A)$  l'ensemble des points d'accumulation de  $\text{Im}_y(A)$ . Si  $A$  est infraconnexe,  $\text{Pr}_y(A) = \overline{\text{Im}_y(A)}$  sauf si  $\text{Im}_y(A)$  est réduit à un point auquel cas  $\text{Pr}_y(A)$  est vide.

3.2. - Soit  $P(x)$  un polynôme. On pose, pour  $r$  appartenant au groupe des valeurs,

$$|P|_y(r) = \sup_{|x-y|=r} |P(x)|$$

$|P|_y(r)$  est une fonction continue monômiale par morceaux qui se prolonge sur  $\mathbb{R}^+$  tout entier.

Pour une fraction rationnelle  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , on pose :

$$|R|_y(r) = \frac{|P|_y(r)}{|Q|_y(r)}$$

$|R|_y(r)$  est une fonction continue, monômiale par morceaux (éventuellement avec

exposant négatif) définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $R$  n'a ni zéros ni pôles sur le cercle  $|x-y| = r$ , on a  $|R|_y(x) = |R(x)|$  pour tout  $x$  vérifiant  $|x-y| = r$ .

Le polygone de valuation de  $R$  relatif au point  $y$  est le graphe de l'application  $\text{Log } r \rightarrow \text{Log } |R|_y(r)$ .

La pente du polygone à gauche (resp. à droite) du point d'abscisse  $\text{Log } r$  représente la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles situés dans le disque  $|x-y| < r$  (resp.  $|x-y| \leq r$ ). Le changement de pente au point d'abscisse  $\text{Log } r$  représente donc la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles situés sur le cercle  $|x-y| = r$ .

Le polygone de valuation d'un polynôme est donc convexe.

Soit  $R_n(x)$  une suite de fractions rationnelles sans pôles dans  $A$  convergent uniformément vers  $f$  sur  $A$ . On pose pour  $r \in \text{Pr}_y(A)$

$$|f|_y(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n|_y(r).$$

On vérifie que cette limite existe et ne dépend pas de la suite  $R_n$  choisie.

Le graphe de l'application  $\text{Log } r \rightarrow \text{Log } |f|_y(r)$  est le polygone de valuation de  $f$  relatif au point  $y$ .

Toutes ces propriétés sont faciles à démontrer. On en trouvera les démonstrations par exemple dans [5] § 3, ou [8] ch. II.

3. 3. - La fonction de valuation  $|f|$  possède les propriétés suivantes :

3. 3. 1. - Soient  $y$  et  $z$  deux points de  $K$  et  $r = |y-z|$ , alors

$$|f|_y(r) = |f|_z(r),$$

lorsque les deux termes de cette égalité sont définis.

3.3.2. - Si  $f$  est un élément analytique dans le disque  $D(y, r)$ , on a :

$$|f|_y(r) = \sup_{x \in C(y, r)} |f(x)|$$

3.3.3. - Si  $f$  est un élément analytique sur  $A$ , si  $r \in \text{Pr}_y(A)$  et si le cercle  $C(y, r)$  est contenu dans  $A$ , on a :

$$|f|_y(r) = \sup_{x \in C(y, r)} |f(x)| .$$

3.3.4. - Si  $\sup_{x \in A} |f(x)| \leq M$ , on a pour  $r \in \text{Pr}_y(A)$  :

$$|f|_y(r) \leq M .$$

3.3.5. - Si  $r_n \in \text{Pr}_y(A)$ ,  $r_n \rightarrow r$  et si pour tout  $n$ ,  $|f|_y(r_n) \neq |g|_y(r_n)$ , on a :

$$|f+g|_y(r) = \max ( |f|_y(r), |g|_y(r) ) .$$

Cela vient de ce que si  $|f|_y(r) \neq |g|_y(r)$ , alors :

$|f+g|_y(r) = \max ( |f|_y(r), |g|_y(r) )$  et de la continuité des fonctions  $|f|_y$ ,  $|g|_y$  et  $|f+g|_y$ .

En particulier si à gauche ou à droite du point d'abscisse  $\text{Log } r$  les polygones de  $f$  et  $g$  ont des pentes différentes on a l'égalité ci-dessus.

THEOREME DE DECOMPOSITION DE MITTAG LOFFLER

---

Nous nous proposons de montrer qu'un élément analytique sur un ensemble infra-connexe est somme de ses parties singulières.

Avant d'énoncer le théorème il nous faut donner quelques nouvelles définitions.

4.1. - Soit  $A$  un ensemble infraconnexe. Un disque  $T$  contenu dans  $\mathbb{C}A$  sera appelé un trou de  $A$  si pour tout disque  $D$  tel que  $T \subset D \subset \mathbb{C}A$  on a :  $T = D$ . On notera  $\mathfrak{T}(A)$  où  $\mathfrak{T}$  la famille des trous de  $A$ . Un disque intérieur d'un trou de  $A$  ou un trou de  $A$  réduit à un point sera appelé trou intérieur de  $A$ . On notera  $\mathfrak{T}^\circ(A)$  ou  $\mathfrak{T}^\circ$  la famille des trous intérieurs de  $A$ .

4.2. - Soit  $E$  un sous-ensemble ouvert de  $\overline{K} = K \cup \{\infty\}$ . Nous noterons  $H(E)$  l'espace vectoriel des éléments analytiques sur  $E$  (cf. définition §.1, nuls à l'infini (cette dernière condition tombe si  $\infty \notin E$ ). On pose, pour  $f \in H(E)$ ,  $\|f\|_E = \sup_{x \in E} f(x)$  (cette dernière quantité peut être infinie, mais ce cas ne se produit que si  $E$  n'est pas fermé).

Dans ce qui suit  $T$  désignera un trou intérieur de l'infraconnexe  $A$

4.3. - LEMME. - Si  $f \in H(A \cup T)$ , on a  $\|f\|_{A \cup T} = \|f\|_A$ .

Soit  $T = D(y, r^-)$ . On a  $\|f\|_T = |f|_y(r)$  (3.3.2).

Si  $A$  n'est pas entièrement contenu dans  $C(y, r)$ ,  $r \in \text{Pr}_y(A)$  et donc

$|f|_y(r) \leq \|f\|_A$  d'après 3.3.4. On en déduit  $\|f\|_T \leq \|f\|_A$  et enfin  
 $\|f\|_{A \cup T} = \sup (\|f\|_T, \|f\|_A) = \|f\|_A$ .

Si  $A \subset C(y, r)$ ,  $\text{Pr}_y A$  est vide et on ne peut appliquer directement 3.3.4. .

Soit alors  $z \in A$ , on a  $|y-z| = r$ ,  $r \in \text{Pr}_z(A)$  et 3.3.4. donne  
 $|f|_z(r) \leq \|f\|_A$ . Mais alors d'après 3.3.1.  $|f|_y(r) = |f|_z(r)$  et on termine comme  
 ci-dessus.

Le cas où  $T$  est un trou de centre  $\infty$  se traite de façon analogue.  $\parallel$

4.4. - LEMME. - Si  $f \in H(\mathbb{C}_T)$ , on a  $\|f\|_{\mathbb{C}_T} = \|f\|_A$ .

Soit  $R = D(y, r^-)$ . 3.3.2. se généralise au cas d'un disque de centre  $\infty$   
 et donne  $|f|_y(r) = \|f\|_{\mathbb{C}_T}$ .

D'autre part, comme on l'a vu au lemme 4.3. on a  $|f|_y(r) \leq \|f\|_A$ .

On a donc :

$$\|f\|_A \leq \|f\|_{\mathbb{C}_T} = |f|_y(r) \leq \|f\|_A.$$

Le cas où  $T$  est un trou de centre  $\infty$  se traite de même.  $\parallel$

4.5. - LEMME. - Soit  $R$  une fraction rationnelle sans pôles dans  $A$ . Notons  $R_T$  la somme des éléments simples de  $R$  correspondant aux pôles de  $R$  situés dans  $T$ . On a alors :

$$\|R_T\|_{\mathbb{C}_T} = \|R_T\|_A \leq \|R\|_A.$$

(La partie polynômiale de  $R$ , y compris le terme constant, sera considérée comme associée à un pôle à l'infini).

Traitons d'abord le cas où  $T$  est le trou intérieur de centre  $\infty$ . Soit  $z \in A$ ,  $\rho$  le diamètre de  $A$ .  $T$  est l'ensemble  $|x-z| > \rho$ .  $\text{Pr}_z(A) = [0, \rho]$ .  $R_T(x)$  n'ayant pas de pôle dans le disque  $D(z, \rho^+)$  le polygone de  $R_T$  relatif à  $z$  a une pente positive ou nulle à droite du point d'abscisse  $\text{Log } \rho$ .  $R(x) - R_T(x)$

n'ayant pas de pôle pour  $|x-z| > \rho$  et tendant vers 0 quand  $x \rightarrow \infty$  son polygone de valuation relatif à  $z$  a une pente strictement négative à droite du point d'abscisse  $\text{Log } \rho$ . Comme  $R = (R - R_T) + R_T$  il résulte alors de 3.3.5. que l'on a

$$|R|_z(\rho) = \max(|R_T|_z(\rho), |R - R_T|_z(\rho)).$$

Comme, en vertu de 3.3.4. on a  $|R|_z(\rho) \leq \|R\|_A$ , on en déduit que  $|R_T|(\rho) \leq \|R\|_A$ . Or, comme  $R_T$  n'a pas de pôles dans  $T$  on a d'après 3.3.2.  $|R_T|_z(\rho) = \|R_T\|_{\mathcal{C}_T}$ ; ce qui nous donne l'inégalité annoncée.

Le cas où  $T$  est un disque borné se traite de façon analogue.  $\parallel$

4.6. - Remarque : Il résulte du lemme 4.3. que, si  $f \in H(A \cup T)$ , et si  $f$  est nulle dans  $A$ , alors  $f$  est nulle dans  $A \cup T$ . Ceci nous permet donc de parler du prolongement analytique dans  $T$  (s'il existe) d'un élément analytique  $f$  sur  $A$ .

4.7. - THEOREME. - Soient  $A$  un ensemble infraconnexe, et  $f$  un élément analytique sur  $A$ . A chaque trou intérieur  $T$  de  $A$  on associe une fonction  $f_T \in H(\mathcal{C}_T)$  appelée partie singulière de  $f$  relative au trou  $T$ , caractérisée par la condition que  $f - f_T$  se prolonge analytiquement dans  $T$ . On a alors :

$$f = \sum_{T \in \mathfrak{T}^\circ} f_T,$$

la série convergeant uniformément sur  $A$ , et de plus

$$\|f\|_A = \sup_{T \in \mathfrak{T}^\circ} \|f_T\|_{\mathcal{C}_T}$$

(i) Prouvons d'abord l'unicité de  $f_T$ . S'il existe deux fonctions  $f_T$  et  $g_T$  vérifiant les conditions indiquées, il existe une fonction  $h$ , définie sur  $\overline{K}$ , telle que  $h = f_T - g_T$  dans  $\mathcal{C}_T$ ,  $h$  est un élément analytique sur  $\mathcal{C}_T$ , un élément analytique sur  $A \cup T$ , et vaut 0 à l'infini.

Soit  $\varepsilon_n$  une suite de nombres tendant vers 0. Il existe deux suites de

fractions rationnelles  $P_n$  et  $Q_n$ , telles que

$$\|h - P_n\|_{\mathcal{C}_T} \leq \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \|h - Q_n\|_{A \cup T} \leq \varepsilon_n.$$

Posons  $\Pi_n = P_n - Q_n$ . On a  $\|\Pi_n\|_A \leq \varepsilon_n$ .

Il résulte du lemme 4.5. que  $\|\Pi_{nT}\|_{\mathcal{C}_T} \leq \varepsilon_n$ .

On déduit alors du lemme 4.3. que

$$\|\Pi_n - \Pi_{nT}\|_{T \cup A} = \|\Pi_n - \Pi_{nT}\|_A \leq \sup(\|\Pi_n\|_A, \|\Pi_{nT}\|_A) \leq \varepsilon_n.$$

Posons  $R_n = P_n - \Pi_{nT} = Q_n + (\Pi_n - \Pi_{nT})$ ;  $R_n$  n'a aucun pôle dans  $\overline{K}$  et on a

$$\|h - R_n\|_{\mathcal{C}_T} \leq \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \|h - R_n\|_{T \cup A} \leq \varepsilon_n$$

et donc  $\|h - R_n\|_{\overline{K}} \leq \varepsilon_n$ .  $h$  est donc un élément analytique sur  $\overline{K}$  et, puisque  $h(\infty) = 0$ , on a donc  $h = 0$ , soit  $f_T = g_T$ .

(ii) Construisons  $f_T$ . Soit  $R_n$  une suite de fractions rationnelles sans pôles dans  $A$ , convergeant uniformément vers  $f$  sur  $A$ .  $R_n$  forme une suite de Cauchy dans  $H(A)$ . Comme  $(R_n - R_m)_T = R_{nT} - R_{mT}$ , il résulte du lemme 4.5. que  $R_{nT}$  forme une suite de Cauchy dans  $H(\mathcal{C}_T)$ , et donc converge vers un élément  $f_T$  de  $H(\mathcal{C}_T)$ . En particulier,  $R_{nT}$  converge uniformément sur  $A$  vers  $f_T$ . Puisque l'on a, pour tout  $n$ ,

$$R_n = \sum_{T \in \mathfrak{T}^o} R_{nT}$$

(il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls), on aura à la limite,

$$f = \sum_{T \in \mathfrak{T}^o} f_T$$

la série convergeant uniformément sur  $A$ . Comme, pour  $T' \neq T$ , on a

$$\|f_{T'}\|_{T \cup A} = \|f_{T'}\|_A,$$

on voit que la série



$$\sum_{\substack{T' \in \mathfrak{X}^\circ \\ T' \neq T}} f_{T'} = f - f_T$$

converge uniformément sur  $A \cup T$ , ce qui prouve que  $f - f_T$  se prolonge analytiquement dans  $T$ . Enfin, comme on a, pour tout  $n$ ,

$$\|R_{nT}\|_{\mathcal{C}^T} \leq \|R_n\|_A,$$

on aura à la limite,

$$\|f_T\|_{\mathcal{C}^T} \leq \|f\|_A,$$

mais comme, d'autre part,

$$\|f\|_A \leq \sup_{T \in \mathfrak{X}^\circ} \|f_T\|_A$$

on doit avoir

$$\|f\|_A = \sup_{T \in \mathfrak{X}^\circ} \|f_T\|_A = \sup_{T \in \mathfrak{X}^\circ} \|f_T\|_{\mathcal{C}^T} \quad . \quad \parallel$$

4.8. - COROLLAIRE. - Si  $A$  et  $B$  sont infraconnexes,  $B \subset A$ ,  $f \in H(A)$  et  $T \in \mathfrak{X}^\circ(B)$ , on a  $(f|_B)_T = \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{X}^\circ(A) \\ T' \subset T}} f_{T'}$ . En particulier si  $T \in \mathfrak{X}^\circ(B) \cap \mathfrak{X}^\circ(A)$  on a  $(f|_B)_T = f_T$ .

En effet  $g_T = \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{X}^\circ(A) \\ T' \subset T}} f_{T'}$  appartient à  $H(\mathcal{C}^T)$ . D'autre part, soit

$h = \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{X}^\circ(A) \\ T' \not\subset T}} f_{T'}$ , on a  $h \in H(A \cup T)$  et  $h = f - g_T$  sur  $A$ . Alors a fortiori  $h \in H(B \cup T)$  et donc  $g_T = (f)_T$ .

4.9. - Remarque : Le théorème 4.7. est évidemment encore vrai lorsqu'on considère la famille  $\mathfrak{X}$  des trous de  $A$  au lieu de  $\mathfrak{X}^\circ$ .

4. 10. - Application : Problème de Mittag-Löffler

Pour chaque trou de l'infraconnexe  $A$ , on se donne un élément  $f_T \in H(\mathcal{C}(T))$ . Existe-t-il un élément analytique  $f$  sur  $A$ , tel que  $f_T$  soit sa partie singulière relative au trou  $T$ ? Le théorème précédent nous dit qu'il faut que la famille  $f_T$  soit sommable dans  $H(A)$ , ce qui équivaut à la condition que  $\|f_T\|_A$  tende vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de  $\mathfrak{X}^\circ$ . On voit que cette condition est suffisante, car  $f = \sum_{T \in \mathfrak{X}^\circ} f_T$  répond au problème posé.

4. 11. - Application : Théorème de Runge

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles infraconnexes,  $A \subset B$ . Pour que les éléments analytiques sur  $A$  puissent être approchés uniformément par des éléments analytiques sur  $B$ , il faut et il suffit que  $A$  ne possède aucun trou intérieur contenu dans  $B$ .

Nécessité :

Supposons que  $A$  possède un trou intérieur  $T$  contenu dans  $B$ . Si  $H(B)$  était dense dans  $H(A)$ , pour tout  $f$  de  $H(A)$  on pourrait trouver  $f_n \in H(B)$  telle que  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur  $A$ . Comme  $f \in H(A \cup T)$  il résulte alors du lemme 4. 3. que la suite  $f_n$  est une suite de Cauchy dans  $H(A)$  et converge donc uniformément sur  $A \cup T$  vers une limite  $F$ . En particulier soit  $a \in T$  et prenons  $f(x) = 1/(x-a)$ . Alors  $(x-a)F(x) \in H(A \cup T)$  (on peut supposer  $A \cup T$  borné), comme  $(x-a)F(x) = 1$  pour  $x \in A$ , il résulte de la remarque 4. 6. que  $(x-a)F(x) = 1$  pour  $x \in T$  ce qui fournit une contradiction quand  $x = a$ .

Suffisance :

Soit  $T \in \mathfrak{X}^\circ(A)$ ; par hypothèse  $T$  n'est pas contenu dans  $B$ , il existe donc  $T' \in \mathfrak{X}^\circ(B)$ ,  $T' \subset T$ . Soit  $a \in T'$ , nous verrons en 5. 1. que tout élément de  $H(\mathcal{C}(T))$  est approximable par les fonctions  $1/(x-a)^n$ ,  $a \in T$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , (développement en série de Laurent, le cas où  $T$  est un trou de centre  $\infty$  s'en déduit par une transformation homographique). Ces fonctions appartiennent à  $H(B)$ . Comme

les fonctions de  $H(A)$  sont approximables par des combinaisons linéaires de fonctions de  $H(\mathbb{C}(T))$ ,  $T \in \mathfrak{I}^s(A)$ , on en déduit qu'elles sont approximables par les fonctions de  $H(B)$ .  $\parallel$

## ELEMENTS ANALYTIQUES DANS UNE COURONNE

5. 1. - THEOREME (Krasner [11]). - Soit  $\Delta$  la couronne :  $\rho < |x-a| < \rho'$  et soit  $f$  un élément analytique sur  $\Delta$ . Alors  $f$  se décompose en série de Laurent

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (x-a)^n$$

convergeant dans  $\Delta$ . De plus, si la couronne fermée  $\Delta' : r \leq |x-a| \leq r'$  est contenue dans  $\Delta$ , la série de Laurent de  $f$  converge uniformément sur  $\Delta'$  (et l'on a de plus  $\|f\|_{\Delta'} = \max(\sup_{n < 0} |c_n| r^n, \sup_{n \geq 0} |c_n| r'^n)$ ).

5. 2. - Si la série de Laurent  $\sum c_n (x-a)^n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\Delta$ ,  $f$  est évidemment un élément analytique sur  $\Delta$ . Si la série ne converge pas uniformément,  $f$  peut ne pas être un élément analytique (exemple  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  dans  $D(0, 1^-)$ ). La définition des fonctions analytiques nous permettra de récupérer ce cas.

5. 3. - Si  $f$  est un élément analytique sur la couronne ouverte  $\Delta$ ,  $\rho < |x-a| < \rho'$  et n'est pas un élément analytique sur la couronne fermée  $\rho \leq |x-a| \leq \rho'$  alors sa série de Laurent ne converge pas uniformément sur  $\Delta$  (exemple  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  dans  $D(0, 1^-)$ ).

SOMME, PRODUIT, DERIVEE, LIMITE D'ELEMENTS ANALYTIQUES

---

Les résultats de ce paragraphe sont immédiats.

6. 1. - PROPOSITION. - Soit  $A$  un sous-ensemble ouvert de  $K$  ; la somme de deux éléments analytiques sur  $A$  est un élément analytique sur  $A$  , la limite uniforme d'une suite d'éléments analytiques sur  $A$  est un élément analytique sur  $A$  , le produit de deux éléments analytiques bornés sur  $A$  est un élément analytique sur  $A$  .

6. 2. - LEMME. - Soient  $A$  un ouvert de  $K$  ,  $f$  un élément analytique sur  $A$  ; alors  $f$  est la somme d'un élément analytique borné de  $A$  et d'une fraction rationnelle dont les pôles sont adhérents à  $A$  . En particulier si  $A$  est fermé et borné,  $f$  est bornée.

En effet, soit  $R(x)$  une fraction rationnelle sans pôles dans  $A$  telle que  $\sup_{x \in A} |f(x) - R(x)| \leq M$  . Soit  $P(x)$  la somme des éléments simples correspondant aux pôles de  $R(x)$  adhérents à  $A$  (si  $A$  est non bornée, on considère que le point  $\infty$  est adhérent à  $A$  et la partie polynomiale de  $R$  est l'élément simple associé à ce pôle). Alors  $R(x) - P(x)$  est borné sur  $A$  et donc  $f(x) - P(x)$  est borné sur  $A$  , de plus d'après la proposition 6. 1. c'est un élément analytique sur  $A$  . ||

6. 3. - Pour prouver que le produit de deux éléments analytiques sur  $A$  est un élément analytique il suffirait, en vertu de la proposition 6. 1. et du lemme, de

montrer que, si  $f$  est analytique et si  $a \notin A$  est adhérent à  $A$ , alors  $\frac{f(x)}{x-a}$  est un élément analytique sur  $A$ . Ce sera le cas si  $a$  est isolé dans  $A$ . Donnons un exemple prouvant que  $\frac{f(x)}{x-a}$  peut ne pas être un élément analytique.

Exemple : Soit  $a_n$  une suite de points tels que  $a_n$  forme une suite strictement décroissante convergeant vers 0, avec  $\prod_k \left| \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} \right| = 0$ . (Par exemple  $a_{n+1} = a_n/2$ ).  $A$  est l'ensemble des  $x$  tels que  $x \neq 0$ .

$\forall n |x - a_n| \geq |a_n|$ . (Remarquons que  $A$  est quasi-connexe [6]). Alors la suite

$$\prod_{k=1}^n \frac{x - a_{2k}}{x - a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{a_{2k-1} - a_{2k}}{x - a_{2k-1}} \right),$$

converge uniformément sur  $A$  vers un élément analytique  $f(x)$ , dont le polygone de valuation relatif à 0 est indiqué sur la figure.

En effet, si

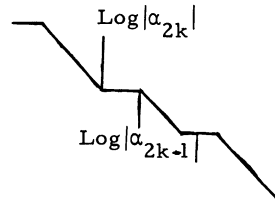
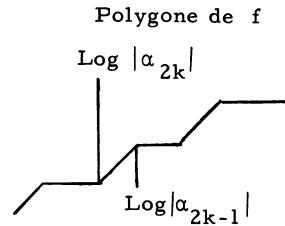
$$\prod_{k=1}^K \left| \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} \right| < \epsilon, \text{ on a pour } x \in A,$$

$$|x| < |a_{2K}|, \text{ et pour } n > K$$

$$\left| \prod_{k=1}^n \frac{x - a_{2k}}{x - a_{2k-1}} \right| < \epsilon; \text{ d'autre part si}$$

$$\left| \frac{a_{2N+1}}{a_{2K}} \right| < \epsilon \text{ on a pour } x \in A, |x| \geq |a_{2K}| \text{ et pour } N \leq n \leq m$$

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^m \frac{x - a_{2k}}{x - a_{2k-1}} - \prod_{k=1}^n \frac{x - a_{2k}}{x - a_{2k-1}} \right| &= \left| \prod_{k=n+1}^m \left( 1 + \frac{a_{2k-1} - a_{2k}}{x - a_{2k-1}} \right) \right| \left| \prod_{k=1}^n \frac{x - a_{2k}}{x - a_{2k-1}} \right| \\ &\leq \frac{|a_{2n+1}|}{|a_{2K}|} < \epsilon. \end{aligned}$$



Polygone de  $f(x)/x$

Alors  $f(x)/x$  a le polygone de valuation indiqué sur la figure et ce polygone ne peut être celui d'un élément analytique sur  $A$ .

6. 4. - LEMME. - Soit  $f(x)$  un élément analytique dans le disque  $D(a, r^+) = D$ , alors  $f$  est dérivable dans  $D$ , sa dérivée  $f'$  est un élément analytique dans  $D$  et on a  $\|f'\|_D \leq \frac{1}{r} \|f\|_D$ .

Pour le prouver il suffit de développer  $f$  en série de Taylor. ||

6. 5. - PROPOSITION. - Si  $A$  est à une distance positive de son complémentaire, ( $A$  est alors ouvert et fermé), et si  $f$  est un élément analytique sur  $A$ ,  $f$  a une dérivée  $f'$  qui est un élément analytique sur  $A$ .

En effet  $f$  possède bien une dérivée puisque localement c'est la somme d'une série de Taylor. Mais si  $r < d(A, \complement A)$  pour tout  $a$  de  $A$ , on a  $D(a, r^+) \subset A$ ; et donc si  $R_n$  converge uniformément sur  $A$  vers  $f$ , d'après le lemme 6. 4., on a :

$$\|f' - R'_n\|_A \leq \frac{1}{r} \|f - R_n\|_A$$

donc  $R'_n$  converge uniformément sur  $A$  vers  $f'$  ce qui prouve que  $f'$  est un élément analytique. ||

6. 6. - Il suffirait de supposer que l'intérieur de l'adhérence de  $A$  est à une distance positive de son complémentaire. Donnons un exemple où la dérivée d'un élément analytique n'est pas un élément analytique.

Exemple : Soit  $a_n$  une suite de points de  $K$  tels que  $|a_n - a_m| = 1$  pour tous  $m$  et  $n$ ,  $m \neq n$ . Soit  $r_n$  une suite de nombres réels  $< 1$  tendant vers  $0$ . Soit  $A$  l'ensemble des  $x$  tels que :  $|x - a_n| \geq r_n$ . (Alors  $A$  est un quasi-connexe [6]). Soit  $\alpha_n$  une suite de points de  $K$  tels que  $\frac{|\alpha_n|}{r_n} \rightarrow 0$ ). Alors la série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{x - a_n}$  converge uniformément sur  $A$  et définit un élément analytique  $f$  sur  $A$ . La dérivée  $f'$  de  $f$  est  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha_n}{(x - a_n)^2}$ ; cette série converge pour tout  $x$  de  $A$  mais ne converge pas uniformément sur  $A$ . Si  $f'$  était un élément analytique sur  $A$  on aurait  $f' = \sum_{T \in \mathcal{T}} f'_T$  la série convergeant uniformément sur  $A$  d'après le théorème 4.7. Or on voit sans peine que les trous intérieurs de  $A$  sont les disques  $D(a_n, r_n^-) = T_n$  et que  $f'_T = \frac{-\alpha_n}{(x - a_n)^2}$ . Cette série ne convergeant pas uniformément sur  $A$ ,  $f'$  n'est pas un élément analytique sur  $A$ .

6.7. - PROPOSITION. - Si  $f$  est un élément analytique sur  $A$  et si  $\inf_{x \in A} |f(x)| > 0$   $1/f$  est un élément analytique sur  $A$ .

En effet, soit  $\inf_{x \in A} |f(x)| = \alpha$ ; si  $R_n(x)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$  et si  $n$  est assez grand pour que  $\sup_{x \in A} |f(x) - R_n(x)| < \alpha$ ,  $R_n$  ne s'annule pas sur  $A$  donc  $1/R_n$  n'a pas de pôles dans  $A$ , de plus, on a :

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{R_n(x)} \right| = \frac{|f(x) - R_n(x)|}{|f(x) \cdot R_n(x)|} \leq \frac{1}{\alpha} |f(x) - R_n(x)|,$$

ce qui prouve que  $1/R_n$  converge uniformément vers  $1/f$  sur  $A$ .  $\parallel$

Remarque : Si  $f$  ne s'annule pas dans  $A$ , il se peut que  $1/f$  ne soit pas un élément analytique sur  $A$ . C'est le cas de l'exemple construit en 6.3..



# FONCTIONS ANALYTIQUES

---

7. 1. - Ainsi qu'il résulte des paragraphes précédents, la notion d'élément analytique est insuffisante puisque la classe des éléments analytiques sur un ensemble  $A$  n'est pas stable pour toutes les opérations algébriques et que, d'autre part, la somme d'une série entière n'est pas forcément un élément analytique dans le disque de convergence. M. Krasner a eu l'idée d'introduire les fonctions analytiques définies comme suit.

$\mathcal{A}$  désigne la classe des ensembles analytiques (cf. introduction).

Une famille  $\mathfrak{F}$  de sous-ensembles de  $X$  est dite enchaînée si pour tous ensembles  $A$  et  $B$  de  $\mathfrak{F}$  il existe une famille finie  $A_1, \dots, A_n$  d'ensembles de  $\mathfrak{F}$  telle que  $A = A_1$ ,  $B = A_n$ ,  $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ .

Une fonction  $f$  sur l'ensemble  $A$  est dite  $\mathcal{A}$ -analytique sur  $A$  s'il existe une famille enchaînée  $(A_i)_{i \in I}$  d'ensembles analytiques telle que  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  et que la restriction de  $f$  à chaque  $A_i$  soit un élément analytique.

7. 2. - THEOREME. - Une fonction  $\mathcal{A}$ -analytique sur  $A$  vérifie le principe du prolongement analytique.

On en trouvera la démonstration (très facile) dans [8].

7.3. - COROLLAIRE. - Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille enchaînée d'ensembles analytiques,  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  est un ensemble analytique.

7.4. - PROPOSITION. - Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille enchaînée d'ensembles analytiques. Soit  $f$  une fonction définie sur  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  telle que la restriction de  $f$  à chaque  $A_i$  soit une fonction  $\mathcal{Q}$ -analytique sur  $A_i$ . Alors  $f$  est une fonction  $\mathcal{Q}$ -analytique sur  $A$ .

En effet, soit  $A_i^j$  les ensembles de  $\mathcal{Q}$  tels que  $A_i = \bigcup_j A_i^j$  et que la restriction de  $f$  à chaque  $A_i^j$  soit un élément analytique, les  $(A_i^j)$  formant une famille enchaînée pour  $i$  fixé. Alors la famille  $(A_i^j)$  est enchaînée et  $A = \bigcup_{i,j} A_i^j$  ce qui prouve que  $f$  est un élément  $\mathcal{Q}$ -analytique sur  $A$ . ||

Nous allons voir que, du fait que la classe  $\mathcal{Q}$  n'est pas stable par intersection finie, on a des difficultés à faire la somme de deux fonctions analytiques (rapprocher la proposition 7.5. et le théorème 9.2.).

7.5. - PROPOSITION. - Il existe  $A \in \mathcal{Q}$  et deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$   $\mathcal{Q}$ -analytiques sur  $A$  telles que  $f_1 + f_2$  ne soit pas  $\mathcal{Q}$ -analytique sur  $A$ .

Soit  $(a_{n,i})_{n \in \mathbb{N}} \ i=1,2$ , une double suite de points de  $K$  telle que  $|a_{n,1}| = |a_{n,2}| = |a_{n,1} - a_{n,2}| = r_n$  et que  $r_n$  forme une suite strictement croissante convergeant vers  $r$  avec  $\sum_{n=1}^{\infty} (\log r - \log r_n) = +\infty$ .

Soit  $(\rho_n)$  la suite de nombres réels tels que

$$\log \rho_n = \log r_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\log r_n - \log r_k).$$

Pour  $0 < \lambda < 1$ , soit  $D_{n,i}^\lambda$  le disque  $|x - a_{n,i}| < \lambda \rho_n$  et soit  $A_i^\lambda = \mathbb{C}[(\bigcup_{n,j \neq i} a_{n,j}) \cup (\bigcup_n D_{n,i}^\lambda)]$ . Alors  $A_i^\lambda$  est analytique (cf. annexe, ex. 2). Par contre  $A_1^\lambda \cap A_2^\lambda$  n'est pas analytique (cf. annexe, ex. 3).

Et on a  $\bigcup_{0 < \lambda < 1} A_1^\lambda = \bigcup_{0 < \lambda < 1} A_2^\lambda = \left( \bigcup_{i=1,2} a_{n,i} \right) = A$ .

Choisissons une suite  $(\alpha_n)$  de points de  $K$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\text{Log } r_n - \text{Log } r_k) &\leq \text{Log } r_n - \text{Log } |\alpha_n| \\ &\leq \frac{5}{3} \sum_{k=1}^{n-1} (\text{Log } r_n - \text{Log } r_k). \end{aligned}$$

Soit  $f_i = \sum_n \frac{\alpha_n}{x - a_{n,i}}$ .

Vu le choix de  $\rho_n$  et  $\alpha_n$ ,  $\frac{|\alpha_n|}{\lambda \rho_n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  ce qui prouve que cette série converge uniformément sur  $A_i$  pour tout  $\lambda$ .  $f_i$  définit donc une fonction analytique sur  $A$ .

Montrons alors que  $f = f_1 + f_2$  n'est pas  $\mathcal{Q}$ -analytique sur  $A$ . Si  $f$  est  $\mathcal{Q}$ -analytique sur  $A$ , il existe  $B \in \mathcal{Q}$ ,  $B \subset A$  avec  $B \cap D(0, r) \neq \emptyset$  et  $B \cap D(0, r^-) \neq \emptyset$ , tel que  $f$  soit un élément analytique sur  $B$ .  $B$  est infraconnexe. On a donc d'après le théorème 4.5. :  $f = \sum_{T \in \mathfrak{X}^\circ} f_T$  où  $\mathfrak{X}^\circ$  est la famille des trous intérieurs de  $B$ , la série convergeant uniformément sur  $B$ . Si  $0 \notin B$  soit  $T_0$  le trou intérieur de centre  $0$ , et pour  $a_{n,i} \notin T_0$  soit  $T_{n,i} = D(a_{n,i}, \rho_{n,i})$  le trou de centre  $a_{n,i}$ .  $T_0$  ne contient qu'un nombre fini de points  $a_{n,i}$ . On voit sans peine que

$$f_{T_0} = \sum_{a_{n,i} \in T_0} \frac{\alpha_n}{x - a_{n,i}} f_{T_{n,i}} = \frac{\alpha_n}{x - a_{n,i}}$$

et que pour  $T \in \mathfrak{X}^\circ$ ;  $T \neq T_0$ ,  $T \neq T_{n,i}$   $f_T = 0$ .

Il en résulte que la série  $\sum_{a_{n,i} \notin T_0} \frac{\alpha_n}{x - a_{n,i}}$  doit converger uniformément sur  $B$  et pour cela il faut que  $\frac{|\alpha_n|}{\rho_{n,i}} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On aura donc pour  $n$  grand  $\text{Log } \rho_{n,i} \geq \text{Log } |\alpha_n| \geq \text{Log } r_n - \frac{5}{3} \sum_{k=1}^{n-1} (\text{Log } r_n - \text{Log } r_k)$  ce qui montre que  $B$  n'est pas analytique (cf. annexe, ex. 3). Il y a contradiction, donc  $f$  n'est pas analytique. ||

7. 6. - On peut même construire deux fonctions  $\mathcal{Q}$ -analytiques dont la somme est nulle au voisinage d'un point mais n'est pas identiquement nulle. (La démonstration longue, technique et peu intéressante, ne sera pas donnée ici).

7. 7. - Il résulte de la proposition 7. 5. que les fonctions  $\mathcal{Q}$ -analytiques ne donnent pas satisfaction. Il faut donc restreindre cette classe de fonctions.

Soit  $\mathcal{B}$  une famille d'ensembles analytiques. On dira que la fonction  $f$  définie sur l'ensemble  $B$  est  $\mathcal{B}$ -analytique s'il existe une famille enchaînée  $(B_i)_{i \in I}$  d'ensembles analytiques appartenant à  $\mathcal{B}$  telle que  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$  et que la restriction de  $f$  à chaque  $B_i$  soit un élément analytique sur  $B_i$ .

Il résulte du théorème 7. 2. que les fonctions  $\mathcal{B}$ -analytiques vérifient le principe du prolongement analytique (puisqu'elles sont  $\mathcal{Q}$ -analytiques). La proposition 7. 4. se généralise facilement :

7. 8. - PROPOSITION. - Soit  $f$  une fonction définie sur  $B = \bigcup B_i$ . Si la restriction de  $f$  à chaque  $B_i$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B_i$ ,  $f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B$ .

Il s'agit de trouver les hypothèses raisonnables à faire sur la famille  $\mathcal{B}$  pour que les fonctions  $\mathcal{B}$ -analytiques vérifient les propriétés algébriques et topologiques indiquées dans l'introduction.

FONCTIONS ANALYTIQUES SUR LES FAMILLES ENCHAÎNÉES FINIES  
 PROLONGEMENT ANALYTIQUE UNIFORME

---

8.1. - Nous dirons que la classe  $\mathfrak{B} \subset \mathcal{A}$  est régulière si

- i) Les couronnes :  $r < |x-a| < r'$  ( $0 \leq r \leq r' \leq +\infty$ ,  $a \in K$ ) appartiennent à  $\mathfrak{B}$ .
- ii) Si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathfrak{B}$ ,  $A \cap B$  appartient à  $\mathfrak{B}$ .
- iii) Si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathfrak{B}$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$  alors  $A \cup B$  appartient à  $\mathfrak{B}$ .

Commentaires :

Nous voulons que les fonctions  $\mathfrak{B}$ -analytiques contiennent les sommes convergentes de séries de Laurent d'où la condition i. D'autre part, c'est parce que l'intersection de deux ensembles analytiques pouvait ne pas être analytique que nous avons pu construire le contre exemple de la proposition 7.5., d'où la condition ii. Enfin, rappelons que si  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$  alors  $A \cup B \in \mathcal{A}$ .

8.2. - Si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathfrak{B}$ ;  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$  sont infraconnexes puisque ce sont des ensembles analytiques. D'autre part, les trous intérieurs de  $A$  et  $B$  sont contenus dans les trous intérieurs de  $A \cap B$  (puisque  $\mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B = \mathcal{C}(A \cap B)$ ). On peut en fait préciser :

LEMME. - Si  $\mathcal{B}$  est régulière et si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{B}$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ , on a  $\mathfrak{I}^\circ_{A \cap B} \subset \mathfrak{I}^\circ_A \cup \mathfrak{I}^\circ_B$ . Autrement dit, un trou intérieur de  $A \cap B$  est soit un trou intérieur de  $A$  soit un trou intérieur de  $B$ .

Soit  $T$  un trou intérieur de  $A \cap B$ . Si  $T$  est réduit à un point, alors il est évident que c'est soit un trou intérieur de  $A$  soit un trou intérieur de  $B$ . Soit alors  $T = D(a, r^-)$ . Soient  $T_A$  et  $T_B$  les trous intérieurs de  $A$  et  $B$  de centre  $a$  (si  $a \in A$ , resp.  $B$ ,  $T_A = \emptyset$ , resp.  $T_B = \emptyset$ ). Soit  $T' = D(a, r'^-)$  le plus grand des deux disques  $T_A$  et  $T_B$ ;  $T' = T_A \cup T_B$ . Comme  $T' \subset T$  on a  $r' \leq r$ . Il faut prouver que  $r' = r$ . Or si  $r' < r$ , soit  $\rho$  avec  $r' < \rho < r$ . Posons  $\Delta = D(a, \rho^-)$ . Alors  $A \cap \Delta \neq \emptyset$ ,  $B \cap \Delta \neq \emptyset$  (car  $r' < \rho$ ) donc  $A \cup \Delta$  et  $B \cup \Delta$  appartiennent à  $\mathcal{B}$ . Mais  $(A \cup \Delta) \cap (B \cup \Delta) = (A \cap B) \cup \Delta$  n'est pas infraconnexe (car  $\rho < r$ ) et donc n'appartient pas à  $\mathcal{B}$ . Il y a donc une contradiction avec les hypothèses.  $\parallel$

8.3. - THEOREME. - Si la classe  $\mathcal{B}$  est régulière et si  $f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur la famille enchaînée finie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ , alors  $f$  est, en fait, un élément analytique sur l'ensemble  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

Il suffit de prouver le théorème pour  $n = 2$ , le résultat général s'obtient alors par récurrence.

Soient donc  $A_1 \in \mathcal{B}$ ,  $A_2 \in \mathcal{B}$ ,  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ,  $f$  une fonction analytique sur  $A_1 \cup A_2$  dont la restriction à  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) est un élément analytique.

Il résulte du lemme 8.2. que l'on a :

$$\mathfrak{I}^\circ(A_1 \cup A_2) \cup \mathfrak{I}^\circ(A_1 \cap A_2) = \mathfrak{I}^\circ(A_1) \cup \mathfrak{I}^\circ(A_2),$$

$$\mathfrak{I}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{I}^\circ(A_1 \cap A_2) = \mathfrak{I}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{I}^\circ(A_2).$$

Nous noterons  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_{12}$ , respectivement les restrictions de  $f$  sur  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_1 \cap A_2$ .

Pour  $T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_1)$ , on pose  $f_T = f_{1T}$ . Cette définition est bien cohérente, car si  $T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_2)$ , alors  $T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cap A_2)$ , et donc  $f_{1T} = f_{12T} = f_{2T}$  (corollaire 4. 8. ).

Si  $T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1)$  et  $T \notin \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2)$ , alors  $T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cap A_2)$  et  $T \cap A_2 \neq \emptyset$ .

Posons

$$g_T = \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2) \\ T' \subset T}} f_{T'} = \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{X}^\circ(A_2) \\ T' \subset T}} f_{2T'}$$

Cette série converge uniformément dans  $\mathcal{C}(T)$ , donc  $g_T \in H(\mathcal{C}(T))$ . De plus, sur  $A_2$ ,

$$f_2 - g_T = \sum_{\substack{T' \not\subset T \\ T' \in \mathfrak{X}^\circ(A_2)}} f_{2T'},$$

cette série convergeant uniformément dans  $A_2 \cup T$ , ce qui prouve que  $g_T = f_{12T}$ , et donc  $g_T = f_{1T}$ .

On voit d'autre part que

$$T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2) \left( \bigcup_{\substack{T' \subset T \\ T' \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2)}} T' \right) = \bigcup_{T' \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_1)} T'.$$

On a donc sur  $A_1$

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1)} f_{1T} = \sum_{T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2)} f_{1T} + \sum_{T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2)} f_{1T} \\ &= \sum_{T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2)} f_{T} + \sum_{T' \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{X}^\circ(A_1)} f_{T'} = \sum_{T \in \mathfrak{X}^\circ(A_1 \cup A_2)} f_T \end{aligned}$$

cette série convergeant uniformément sur  $A_1$ . On voit de même que cette série converge uniformément sur  $A_2$  vers  $f_2$ , donc converge uniformément sur  $A_1 \cup A_2$  vers  $f$ , ce qui prouve que  $f$  est un élément analytique sur  $A_1 \cup A_2$ . ||

8. 4. - COROLLAIRE. - Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $A$ . Il existe une famille filtrante  $(A_i)$  avec  $\bigcup_i A_i = A$ , telle que la restriction de  $f$  à chaque  $A_i$  soit un élément analytique.

En effet, supposons que  $f$  soit définie par la famille enchaînée  $(B_j)_{j \in J}$ . Pour tout sous-ensemble fini  $I$  de  $J$ , tel que la famille  $(B_j)_{j \in J}$  soit enchaînée,  $f$  est un élément analytique sur  $A_i = \bigcup_{j \in J} B_j$ . Soit  $\mathcal{J}$  la famille de ces sous-ensembles. Il est clair que  $\bigcup_{I \in \mathcal{J}} A_I = A$ . Montrons que la famille  $(A_I)_{I \in \mathcal{J}}$  est filtrante. Soient  $I$  et  $I' \in \mathcal{J}$ , et soient  $i \in I$ ,  $j \in I'$  : il existe  $K \in \mathcal{J}$  tel que  $i \in K$  et  $j \in K$ . Alors  $I'' = I \cup I' \cup K$  appartient à  $\mathcal{J}$  et  $(A_I \cup A_{I'}) \subset A_{I''}$ .  $\parallel$

Remarque : Il est clair qu'une famille filtrante est enchaînée.

Dorénavant, dans le cas des familles régulières, nous supposerons que les fonctions  $\mathcal{B}$ -analytiques ont été définies à partir de familles filtrantes.

8. 5. - THEOREME : (principe du prolongement analytique uniforme). - Supposons que  $\mathcal{B}$  soit régulière. Si  $(B_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , est une famille d'ensembles de  $\mathcal{B}$  telle que  $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $B_n \cap B_1 \neq \emptyset$  et si  $f_j$  est un élément analytique sur  $B_j$  tel que  $f_j = f_{j+1}$  sur  $B_j \cap B_{j+1}$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ , alors  $f_1 = f_n$  sur  $B_n \cap B_1$ .

Le théorème est trivial pour  $n = 2$ . Supposons alors la propriété démontrée pour  $n - 1$ . Posons  $A_i = B_i \cup B_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . En vertu du théorème 8. 3. il existe  $g_i$ , élément analytique sur  $A_i$ , tel que  $g_i = f_i$  sur  $B_i$ ,  $g_i = f_{i+1}$  sur  $B_{i+1}$ .  $g_i$  et  $g_{i+1}$ , éléments analytiques sur  $A_i \cap A_{i+1}$  coïncident sur  $B_{i+1} \subset A_i \cap A_{i+1}$ ; comme  $A_i \cap A_{i+1}$  est analytique (car  $\mathcal{B}$  régulière) et  $B_{i+1}$  est un ouvert non vide,  $g_i$  et  $g_{i+1}$  coïncident sur  $A_i \cap A_{i+1}$  tout entier, donc d'après l'hypothèse de récurrence  $g_1 = g_{n-1}$  sur  $A_1 \cap A_{n-1}$ , mais  $B_1 \cap B_n \subset A_1 \cap A_{n-1}$  et dans  $B_1 \cap B_n$   $g_1 = f_1$  et  $g_{n-1} = f_n$ .  $\parallel$

8. 6. - Cette propriété est liée au fait que l'intersection de deux ensembles de  $\mathcal{B}$  est analytique. En effet on a la :



PROPOSITION. - Soient A et B deux ensembles analytiques tels que  $\mathfrak{I}^\circ(A \cap B) \subset \mathfrak{I}^\circ(A) \cup \mathfrak{I}^\circ(B)$  et tels que  $A \cap B$  ne soit pas analytique. Alors il existe un disque  $D \subset A \cap B$  et deux éléments analytiques  $f_A$  et  $f_B$  sur A et B tels que  $f_A = f_B$  sur D l'égalité n'ayant pourtant pas lieu partout dans  $A \cap B$ .

En effet, soit  $f$  un élément analytique sur  $A \cap B$ , nul sur un disque  $D$  de  $A \cap B$  et non identiquement nul dans  $A \cap B$  ( $f$  et  $D$  existent puisque  $A \cap B$  non analytique). On a alors  $f = \sum_{T \in \mathfrak{I}^\circ(A \cap B)} f_T$ , la série convergeant uniformément sur  $A \cap B$ . Comme  $\sup_{x \in A \cap B} |f_T(x)| = \sup_{x \notin T} |f_T(x)|$  on voit que si  $T \in \mathfrak{I}^\circ(A)$  (resp.  $\mathfrak{I}^\circ(B)$ ),  $\sup_{x \in A} |f_T(x)| = \sup_{x \in A \cap B} |f_T(x)|$  (resp.  $\sup_{x \in B} |f_T(x)| = \sup_{x \in A \cap B} |f_T(x)|$ ).

Donc

$$f_A = \sum_{T \in \mathfrak{I}^\circ(A) \cap \mathfrak{I}^\circ(A \cap B)} f_T \quad \text{et} \quad f_B = - \sum_{\substack{T \in \mathfrak{I}^\circ(A \cap B) \cap \mathfrak{I}^\circ(B) \\ T \notin \mathfrak{I}^\circ(A)}} f_T$$

convergent uniformément sur A et B respectivement donc définissent des éléments analytiques sur A et B et l'on a

$$f_A - f_B = f \quad \text{sur} \quad A \cap B. \quad \parallel$$

8. 7. - COROLLAIRE. - Les fonctions  $\mathcal{Q}$ -analytiques ne vérifient pas le principe du prolongement analytique uniforme.

Avec les notations de la proposition 7. 5. nous voyons en effet que les ensembles  $A = \bigcup_n D(a_{n,1}, \rho_n^-)$  et  $B = \bigcup_n D(a_{n,2}, \rho_n^-)$  satisfont aux hypothèses de la proposition 8. 6. . Si l'on prend alors  $B_1 = A$ ,  $B_2 = D$ ,  $B_3 = B$ ,  $f_1 = f_A$ ,  $f_2 = f_A = f_B$ ,  $f_3 = f_B$  (notations du théorème 8. 5.) on n'a pas  $f_3 = f_1$  sur  $B_1 \cap B_3$ .  $\parallel$

SOMME DE FONCTIONS  $\mathfrak{B}$  - ANALYTIQUE  
CAS D'UNE FAMILLE  $\mathfrak{B}$  STABLE PAR INTERSECTION

---

9.1. - Ainsi que nous l'avons indiqué il est souhaitable que la somme de deux fonctions  $\mathfrak{B}$ -analytiques soit  $\mathfrak{B}$ -analytique. Indiquons une propriété liée à celle-ci.

PROPOSITION. - Si pour toute fonction  $f$   $\mathfrak{B}$ -analytique, la restriction de  $f$  à un ensemble  $B$  de  $\mathfrak{B}$  contenu dans le support de  $f$  est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique, alors la somme de deux fonctions  $\mathfrak{B}$ -analytiques du même support est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $\mathfrak{B}$ -analytiques de support  $B$ .

Prenons d'abord le cas où  $f$  est un élément analytique sur  $B$ . Il existe une famille enchaînée  $B_i$  d'ensembles de  $\mathfrak{B}$  telle que  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$  et telle que  $g$  soit un élément analytique sur  $B_i$ . Mais alors  $f+g$  est un élément analytique sur  $B_i$  donc  $f+g$  est une fonction analytique sur  $B$ .

Si  $f$  est alors une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$ , en vertu des hypothèses c'est aussi une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur les  $B_i$ , donc d'après ce que l'on vient de voir  $f+g$  est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B_i$ , en vertu de la proposition 7.8  $f+g$  est donc une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$ .  $\parallel$

9.2. - Si  $\mathfrak{B}$  est une sous-famille de  $\mathcal{Q}$  contenant les couronnes, stable par intersection finie et par réunion de familles finies enchaînées,  $\mathfrak{B}$  sera régulière.

Les résultats du paragraphe précédent sont donc valables, de plus on a :

THEOREME. - Si la classe  $\mathfrak{B}$  est stable par intersection finie, la somme de deux fonctions  $\mathfrak{B}$ -analytiques est  $\mathfrak{B}$ -analytique.

On peut supposer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies par des familles filtrantes  $(A_i)$  et  $(B_j)$ , avec  $A_i \in \mathfrak{B}$ ,  $B_j \in \mathfrak{B}$  et  $A = \bigcup_i A_i$ ,  $A = \bigcup_j B_j$ . Mais alors la famille formée des ensembles  $A_i \cap B_j$  non vides est une famille filtrante engendrant  $A$  et l'on a  $A_i \cap B_j \in \mathfrak{B}$ . Sur un tel  $A_i \cap B_j$  il est clair que  $f+g$  est un élément analytique.  $f+g$  est donc une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $A$ .  $\parallel$

Remarques :

- 1) La famille des quasi-connexes [6] possède ces propriétés.
- 2) Le théorème 9.2. peut être encore vrai même si la famille n'est pas stable par intersection finie (cf. §. 11).

DEVELOPPEMENT EN SERIE DE LAURENT  
DES FONCTIONS ANALYTIQUES

---

10. 1. - Une fonction analytique dans une couronne est-elle somme d'une série de Laurent dans cette couronne ? Paradoxalement ce n'est pas le cas si le corps  $K$  n'est pas maximalelement complet.

$K$  est dit maximalement complet [7] si toute famille emboîtée de disques non vides a une intersection non vide.

Notons que  $\hat{\Omega}_p$ , le complété topologique de la clôture algébrique de  $\Omega_p$ , n'est pas maximalelement complet.

Cette propriété m'a été signalée par E. Motzkin. Comme je ne connais aucune référence pour la démonstration, je donne ici le schéma de celle-ci.

PROPOSITION. - Si  $K$  est séparable et a une valuation dense dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $K$  n'est pas maximalelement complet.

Notons d'abord que pour tout couple  $\rho$  et  $\rho'$ ,  $0 < \rho < \rho'$ , il existe dans tout disque de rayon  $\rho'$  une infinité dénombrable de disques disjoints de rayons  $\rho$  (car la valuation est dense).

Soit alors  $r_k$  une suite strictement décroissante de réels convergeant vers  $r > 0$ . Soit  $D_{n_1}$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}$ , une famille de disques disjoints de rayons  $r_1$ . Construisons par récurrence sur  $k$  la famille de disques  $D_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$  : les  $D_{n_1 n_2 \dots n_k}$  sont, pour  $n_1 \dots n_{k-1}$  fixés, des disques disjoints de rayons

$r_k$  contenus dans le disque  $D_{n_1 n_2 \dots n_{k-1}}$ . Une suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'entiers définit ainsi une famille de disques emboîtés, soit  $D_{n_1 \dots n_k \dots}$  l'intersection des disques de cette famille. Si  $D_{n_1 \dots n_k}$  n'est pas vide c'est un disque de rayon  $r$ . Si  $K$  est maximalement complet, aucun de ces disques n'est vide et on obtient une famille non dénombrable de disques disjoints de rayon  $r > 0$ . Or  $K$  est séparable et on ne peut avoir qu'une infinité dénombrable de tels disques.  $K$  n'est donc pas maximalement complet.

10.2. - PROPOSITION. - Si  $K$  n'est pas maximalement complet, il existe une fonction analytique dans  $K$  tout entier, tendant vers 0 à l'infini, non identiquement nulle et bornée.

Puisque  $K$  n'est pas maximalement complet, il existe une suite de disques emboîtés  $\Delta_m$  tels que  $\bigcap_m \Delta_m = \emptyset$ . Soit  $r_m$  le rayon de  $\Delta_m$ ,  $r_m$  forme une suite décroissante convergeant vers la limite  $\rho > 0$ .

Soit  $u_n$  une suite de nombres  $> 1$  tendant vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Soit  $v_n$  une suite de nombres tels que  $0 < v_n \leq 1$ ,  $v_0 = 1$ , et  $\sum_{n \geq 1} u_n v_n < 1/2$  (1).

Posons  $w_n = \prod_{k=0}^{n-2} v_k$   $n \geq 2$ .

On a  $0 < w_n \leq v_n \leq u_n \cdot v_n$ , la série  $\sum_{n=2}^{\infty} w_n$  est donc convergente, soit  $w$  sa somme.

Choisissons  $\rho_1$  tel que  $\rho < \rho_1 < \rho e^{w/2}$  et posons, pour  $n \geq 2$

$$\rho_n = \rho_1 \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{w} \sum_{k=2}^n w_k}$$

$\rho_n$  est une suite strictement décroissante convergeant vers  $\rho$ .

Pour chaque  $n$  soit  $m$  l'entier tel que  $r_{m+1} < \rho_n \leq r_m$ , et soit  $D_n$  l'unique disque ouvert de diamètre  $\rho_n$  contenant  $\Delta_{m+1}$ . On voit que les disques  $D_n$  sont emboîtés et que de plus  $\bigcap_n D_n = \bigcap_m \Delta_m = \emptyset$ .

Soit  $a_n \in D_{n+1}$ .  $D_n = D(a_n, \rho_n^-)$ .

Choisissons  $\alpha \in K$  tel que  $\rho_1/e < |\alpha| < \rho_2/\sqrt{e} = \frac{\rho_1}{\sqrt{e}} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{w}}$

Nous allons construire par récurrence une suite de fractions rationnelles  $R_n$  telles que  $R_n$  ait un seul pôle en  $a_n$  et que  $R_n(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

On prend  $R_1(x) = \frac{\alpha}{x-a_1}$ .

Supposons alors construite  $R_n$ . On pose  $M_n = \sup_{x \in \mathbb{C}_{D_{n+1}}} |R_n(x)| = |R_n|(\rho_n^-)$ .

Soit  $R_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(x-a_{n+1})^k}$  le développement en série de Laurent de la de la fraction rationnelle  $R_n$  dans  $D_{n+1}$ .

On pose  $s_n = \frac{\text{Log } M_n + u_n}{\text{Log } \rho_n - \text{Log } \rho_{n+1}}$  et  $R_{n+1} = \sum_{k \leq s_n} \frac{\alpha_k}{(x-a_{n+1})^k}$ .

On a  $M_n = \sup_k \frac{|\alpha_k|}{\rho_{n+1}^k}$ ; il en résulte que

$$\|R_n - R_{n+1}\|_{\mathbb{C}_{D_n}} = \sup_{k > s_n} \frac{|\alpha_k|}{\rho_n^k} < M_n \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right)^{s_n} = e^{-u_n}. \quad (3)$$

D'autre part

$$M_{n+1} = \sup_{k \leq s_n} \frac{|\alpha_k|}{\rho_{n+2}^k} \leq M_n \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}}\right)^{s_n} = M_n (M_n e^{u_n})^{v_n}. \quad (4)$$

Montrons par récurrence que  $M_m < 1$  pour tout  $m$ .

Pour  $m = 1$ , on a :  $M_1 = \frac{|\alpha|}{\rho_2} < 1$  d'après (2).

Si  $M_m < 1$  pour  $m \leq n$ , (4) donne  $M_{m+1} \leq M_m e^{u_m v_m}$  pour  $m \leq n$ ; et l'on a donc

$$M_{n+1} \leq M_1 e^{\sum_{m=1}^n u_m v_m} < e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ d'après (1) et (2).}$$

Finalement, comme  $u_n \rightarrow +\infty$  il résulte de (3) que la suite  $R_n$  est une

suite de Cauchy pour la norme uniforme dans  $\bigcap D_m$ , donc converge uniformément dans  $\bigcap D_m$ . Sa limite  $f$  est donc une fonction analytique dans  $\bigcup_m \bigcap D_m = K$ , elle tend vers 0 à l'infini puisque c'est le cas pour tous les  $R_n$ , elle est majorée par 1 puisque les  $R_n$  sont majorées par 1 dans  $\bigcap D_m$  pour  $m \leq n$ , enfin elle n'est pas identiquement nulle car pour  $|x - a_1| = \rho_1$  on a  $|R_1(x)| = \frac{|\alpha|}{\rho_1} > 1/e$ , donc pour tout  $n$   $|R_n(x)| > 1/e$  puisque  $e^{-n} < e$ , et donc  $|f(x)| > 1/e$ .  $\parallel$

### 10.3. - Commentaires :

1) Cette fonction  $f$  ne peut pas être somme d'une série de Taylor dans tout disque  $D(0, r^+)$  car on aurait alors pour  $r$  appartenant au groupe des valeurs,  $\sup_{|x| \leq r} |f(x)| = \sup_{|x|=r} |f(x)|$  et comme  $\sup_{|x|=r} |f(x)| \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$ , on aurait  $f(x) = 0 \quad \forall x$ .

2) La fonction construite est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique, où  $\mathcal{B}$  est la famille des couronnes ce qui est le minimum que l'on puisse demander à la famille  $\mathcal{B}$ . Il n'y a donc pas moyen d'obvier à cette difficulté par un choix convenable de la famille  $\mathcal{B}$ .

3) Cette fonction ne vérifie pas le principe du maximum.

10.4. - THEOREME. - Si  $K$  est maximalement complet, et si  $\mathcal{B}$  est une famille régulière une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur une couronne définie par un système cohérent dénombrable d'éléments analytiques, est développable en série de Laurent dans cette couronne.

Nous utiliserons le :

10.5. - LEMME. - Soit  $I$  un ensemble d'indices, filtrant à droite, et soit  $(E_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$  un système projectif d'ensembles c'est-à-dire que pour  $\alpha \leq \beta$ ,  $\varphi_{\alpha\beta}$  est une application  $E_\beta \rightarrow E_\alpha$  et que pour  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  on a  $\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma}$ . On suppose de plus que les applications  $\varphi_{\alpha\beta}$  sont surjectives. Notons

10. 6. - Démonstration du théorème 10. 4.

Notons  $\Delta$  la couronne  $r < |x-a| < R$ . Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $\Delta$  et soit  $(B_i)$  la famille d'ensembles de  $\mathcal{B}$  telle que  $\Delta = \bigcup B_i$  et que  $f$  soit un élément analytique sur  $B_i$ . Ainsi qu'on l'a vu (corollaire 8. 4.) on peut supposer la famille filtrante à droite. Nous noterons  $\mathfrak{X}^1(B_i)$  la famille des trous  $T$  de  $B_i$  tels que la partie singulière  $f_T$  de l'élément analytique  $f$  sur  $B_i$  relative au trou  $T$  ne soit pas nulle.

Soient  $B_i$  et  $B_j$  deux ensembles de notre famille avec  $B_i \subset B_j$ . Si  $T$  appartient à  $\mathfrak{X}^1(B_j)$ , on a  $T \subset \bigcup B_j \subset B_i$  et donc  $T$  est contenu dans un trou  $T'$  de  $B_i$ . Montrons que  $T' \in \mathfrak{X}^1(B_i)$ .

Notons  $g_{T'} = \sum_{\substack{T \in \mathfrak{X}^0(B_j) \\ T \subset T'}} (f|_{B_j})_T$ ; on a d'après le corollaire 4. 8.

$(f|_{B_i})_{T'} = g_{T'}$ . Or  $g_{T'}$  est un élément analytique sur  $B_j \cup T'$  qui est un ensemble analytique (réunion enchaînée de deux ensembles analytiques), donc si  $(f|_{B_i})_{T'} = 0$  on a  $g_{T'} = 0$  sur  $T'$  et par suite  $g_{T'} = 0$  sur  $B_j \cup T'$ . Or les trous intérieurs de  $B_j \cup T'$  sont précisément les  $T \in \mathfrak{X}^0(B_j)$ ,  $T \subset T'$ ; pour tous ces trous on a donc  $(g_{T'})_T = (f|_{B_j})_T = 0$  ce qui contredit l'hypothèse qu'il existe  $T \in \mathfrak{X}^1(B_j)$  contenu dans  $T'$ .

On a donc ainsi défini une application de  $\mathfrak{X}^1(B_j)$  dans  $\mathfrak{X}^1(B_i)$ .

Montrons que cette application est surjective. Soit  $T' \in \mathfrak{X}^1(B_i)$ . Appelons  $\mathfrak{X}$  l'ensemble (éventuellement vide) des trous de  $B_j$  contenus dans  $T'$ . Il faut prouver que  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{X}^1(B_j) \neq \emptyset$ . Or  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{X}^1(B_j) = \emptyset$  signifie que pour  $T \in \mathfrak{X}$ ,  $f$  se prolonge analytiquement sur  $T \cup B_j$  et donc  $f$  se prolonge analytiquement sur  $B_j \cup (\bigcup_{T \in \mathfrak{X}} T)$  qui contient  $B_i \cup T'$ , ce qui signifie que  $f_{T'} = 0$  et ce dernier résultat contredit l'hypothèse  $T' \in \mathfrak{X}^1(B_i)$ .

La famille  $(B_i)$ , ordonnée par la relation  $\subset$ , est filtrante.

A chaque  $B_i$  on associe l'ensemble  $\mathfrak{X}^1(B_i)$  et pour  $B_i \subset B_j$  on a défini une application  $\mathfrak{X}^1(B_j) \rightarrow \mathfrak{X}^1(B_i)$  surjective.

Considérons une famille cohérente de trous  $T_i \in \mathfrak{X}^1(B_i)$ , c'est-à-dire



$E = \varprojlim (E, \alpha)$  la limite projective du système  $(E_\alpha)$ . Alors si  $I$  possède un sous-ensemble dénombrable cofinal à  $I$ , pour tout  $\alpha$  l'application canonique  $\varphi_\alpha : E \rightarrow E_\alpha$  est surjective (et donc  $E$  n'est pas vide). Autrement dit quel que soit  $\alpha$  et quel que soit  $x \in E_\alpha$ , il existe une famille  $(x_\beta)$  de points de  $E_\beta$  tels que pour  $\beta \leq \gamma$  on ait  $\varphi_{\beta\gamma}(x_\gamma) = x_\beta$  et de plus  $x_\alpha = x$ . On dira que la famille  $(x_\beta)$  est une famille cohérente.

Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la famille cofinale à  $I$ ; c'est-à-dire que quel que soit  $\beta \in I$ , il existe  $n$  tel que  $\beta \leq \alpha_n$ . Puisque  $I$  est filtrant à droite on peut construire par récurrence une suite  $\beta_n$  telle que  $\beta_1 = \alpha$  et telle que pour  $n > 1$  et  $k \leq n$  on ait  $\beta_k \geq \beta_n$  et  $\alpha_k \leq \beta_n$ . La suite  $(\beta_n)$  est alors cofinale à  $I$  et forme une chaîne.

Prenons alors  $x_\alpha = x_{\beta_1} = x$  et choisissons par récurrence le point  $x_{\beta_n} \in E_{\beta_n}$  tel que  $\varphi_{\beta_{n-1}}(x_{\beta_n}) = x_{\beta_{n-1}}$ , ce qui est possible puisque l'application  $\varphi_{\beta_{n-1}\beta_n}$  est surjective.

Pour  $\beta \leq \beta_n$  on prend alors  $x_\beta = \varphi_{\beta\beta_n}(x_{\beta_n})$ . Cette définition est bien consistante puisque si  $\beta \leq \beta_n \leq \beta_m$  on a

$$\varphi_{\beta\beta_n}(x_{\beta_n}) = \varphi_{\beta\beta_n}[\varphi_{\beta_n\beta_m}(x_{\beta_m})] = \varphi_{\beta\beta_m}(x_{\beta_m}).$$

Enfin si  $\beta \leq \gamma \leq \beta_n$ , on a :

$$\varphi_{\beta\gamma}(x_\gamma) = \varphi_{\beta\gamma}[\varphi_{\gamma\beta_n}(x_{\beta_n})] = \varphi_{\beta\beta_n}(x_{\beta_n}) = x_\beta.$$

Comme d'autre part  $x_\alpha = x$ , le lemme est démontré. ||

telle que pour  $B_i \subset B_j$  on ait  $T_j \subset T_i$ . Alors pour deux ensembles  $B_i$  et  $B_j$  quelconques, il existe  $B_k$  avec  $B_i \subset B_k$  et  $B_j \subset B_k$  et donc  $T_k \subset T_i$  et  $T_k \subset T_j$ , donc  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ . Les  $T_i$  forment donc une famille emboîtée de disques non vides, puisque  $K$  est maximalement complet, leur intersection  $T = \bigcap_i T_i$  est un disque non vide. Or comme  $\bigcup_i B_i = \Delta$ , on a  $\bigcap_i T_i \subset \Delta$ . Soit  $x$  appartenant à  $T$ , et  $T'$  le trou de  $\Delta$  contenant  $x$ . Pour tout  $i$ , on a  $T' \subset \Delta \subset B_i$ , et puisque  $x \in T'$  et  $x \notin T_i$ , on a  $T' \subset T_i$ , donc  $T' \subset T$  mais comme  $T$  est un disque contenu dans  $\Delta$ ,  $T = T'$ . Ceci signifie que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathfrak{X}^1(B_i)$  peut s'identifier avec une sous-famille de l'ensemble des trous de  $\Delta$ . Or  $\Delta$  n'a que deux trous : le trou  $|x-a| < r$  et le trou  $|x-a| > R$ .

Comme la famille  $(B_i)$  est dénombrable on peut appliquer le lemme 10.5. Il en résulte que quel que soit  $i$ , il n'y a que deux trous au plus de  $B_i$  relativement auxquels  $f$  a une partie singulière non nulle, à savoir les trous de  $B_i$  contenant les trous de  $\Delta$ .

Soient alors  $x_1$  et  $x_2$  deux points arbitraires de  $\Delta$  avec  $r_1 = |x_1 - a| < |x_2 - a| = r_2$ . Il existe un ensemble  $B_i$  contenant  $x_1$  et  $x_2$ . Comme les trous de  $B_i$  contenant les trous de  $\Delta$  sont contenus dans les disques  $|x-a| < r_1$  et  $|x-a| > r_2$ , en vertu de ce que l'on vient de voir, l'élément analytique  $f$  sur  $B_i$  se prolonge sur toute la couronne  $r_1 \leq |x-a| \leq r_2$  en un élément analytique qui coïncide avec la fonction  $f$ . En vertu du théorème 5.1.  $f$  se décompose donc dans cette couronne en série de Laurent absolument convergente.

On a donc prouvé que pour tout couple de points  $x_1$  et  $x_2$  de  $\Delta$ , avec  $|x_1 - a| < |x_2 - a|$ ,  $f$  est la somme d'une série de Laurent dans la couronne :  $|x_1 - a| \leq |x-a| \leq |x_2 - a|$ ; en vertu de l'unicité du développement en série de Laurent dans une couronne il résulte que ce développement ne dépend pas du couple de points choisis, ce qui prouve que  $f$  est développable en série de Laurent dans la couronne  $\Delta$ . ||

10.7. - COROLLAIRE. - Si  $K$  est maximalement complet, si  $\mathcal{B}$  est une famille régulière et si  $f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $K$ , définie par une famille cohérente dénombrable d'éléments analytiques, et si de plus  $f$  tend vers 0 à l'infini,  $f$  est identiquement nulle.

Pour la démonstration, considérez le commentaire 10.3.1..

10.8. - Remarque : Si la famille d'indices  $I$  ne possède pas de partie cofinale dénombrable, les propriétés démontrées au lemme 10.5. sont en défaut. On trouvera dans Bourbaki, livre I, chapitre 3, §. 1, exercice 32, un exemple où la limite projective est vide.

Si l'on considère une famille  $B_i$  ne possédant pas de partie cofinale dénombrable, il peut a priori arriver que, comme dans l'exemple de la proposition 10.2. les singularités de  $f$  deviennent "invisibles". Nous ne savons pas si en fait une telle situation peut se produire.

Quoi qu'il en soit nous considérons que c'est une limitation "raisonnable" de supposer que les fonctions analytiques sont définies par des familles cohérentes dénombrables (car c'est ce qui se passe lorsqu'on définit explicitement des fonctions analytiques). Nous utiliserons le théorème 10.4. dans le paragraphe 11, nous supposons donc dans ce paragraphe que les fonctions analytiques considérées sont définies sur des familles cohérentes dénombrables. Dans les paragraphes 12, 13 et 14, par contre, nous ne nous limiterons pas à ce cas.

# LIMITE UNIFORME DE FONCTIONS ANALYTIQUES ---

11. 1. - Si  $K$  n'est pas maximalement complet, la limite uniforme d'une suite de fonctions  $\mathcal{B}$ -analytiques peut ne pas être une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique.

Si l'on désigne par  $\mathcal{C}$  la classe des intersections finies de couronnes, nous allons construire une suite de fonctions  $\mathcal{C}$ -analytiques dont la limite n'est même pas  $\mathcal{C}$ -analytique ce qui établira notre assertion.

Considérons l'exemple construit à la proposition 10. 2.

Soit  $(b_n)$  une suite de points de  $K$  tels que  $|a_1 - b_n|$  forme une suite monotone croissante convergeant vers une limite  $r$ , avec  $|a_1 - b_1| > \rho_1$  et telle que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{Log } r - \text{Log } |b_n - a_1|)$  diverge.

Posons  $f_n = \alpha_n f(x - b_n + a_1)$ , où  $f$  est la fonction construite à la proposition 10. 2. et  $\alpha_n$  est une suite convergeant vers 0.

$$\text{Posons } g_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

$g_n$  est une fonction  $\mathcal{C}$ -analytique dans  $K$ , puisque c'est la somme de fonctions  $\mathcal{C}$ -analytiques, (cf. §. 9). De plus on a  $g_{n+1} - g_n = f_{n+1}$  et donc

$$\sup_{x \in K} |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq |\alpha_{n+1}|.$$

Cette quantité tendant vers 0 avec  $n$ , la suite  $g_n$  converge uniformément sur  $K$  vers une fonction  $g$ .

Or, comme  $f_n$  n'est un élément analytique que dans des ensembles

de la forme  $|x - \beta_n| \geq r_n$  avec  $|\beta_n - b_n| < \rho_1$  et  $r_n > \rho$ , comme  $\sum_{m \neq n} f_m$  est un élément analytique sur  $\Delta_n = \bigcap_{m \neq n} (\bigcup D_m)$  avec  $D_m = D(\beta_m, r_m^-)$  et comme  $\Delta_n$  contient  $D_n$  si tous les  $r_m$  sont pris  $< \rho_1$ , on en déduit que  $g$  n'est un élément analytique que dans des ensembles de la forme  $(\bigcup_n D_n)$ . Or un tel ensemble n'est pas analytique ([8], §. 5., exemple 3, et annexe). Donc  $g$  n'est pas  $\mathcal{Q}$ -analytique sur  $K$ .

11.2. - Nous supposons donc que  $K$  est maximalement complet.

Nous allons construire une classe  $\mathcal{G}$  assez vaste d'ensembles analytiques telle que les fonctions  $\mathcal{Q}$ -analytiques vérifient les propriétés algébriques et topologiques indiquées dans l'introduction. (Comme nous l'avons indiqué au §. 10., nous supposons que nos fonctions analytiques sont définies par des familles cohérentes dénombrables).

DEFINITION. - Soient  $A$  un ensemble ouvert,  $x_0$  un point de  $A$ . Soit  $(D_i)$  la famille des disques intérieurs des cercles de centre  $x_0$  : c'est-à-dire que  $D_i$  est de la forme  $D_i = D(a_i, r_i^-)$  avec  $|a_i - x_0| = r_i$ . On dira que  $D_i$  est bien placé relativement à  $x_0$ . Soit  $\Delta_i$  le plus petit disque contenant  $D_i \cap \mathbb{C}A$ , et soit  $\rho_i$  son diamètre (on a  $\rho_i \leq r_i$ ). On dira que  $A$  appartient à  $\mathcal{G}$  s'il vérifie la condition

$$(\mathcal{G}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x_0 \in A, \forall y \in A, \text{ quelle que soit la suite de disques } (D_n) \text{ bien placés relativement à } x_0 \text{ avec } r_n < |x_0 - y|, r_n \text{ formant une suite monotone convergeant vers } r; \text{ pour } N \text{ grand la série} \\ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\log r_n - \log r|}{\log r_n - \log \rho_n} \text{ converge.} \end{array} \right.$$

11.3. - Remarques :

1) Si  $\Delta_n$  est vide ou réduit à un point,  $\log \rho_n = -\infty$  et le terme correspondant de la série est nul. On peut donc se limiter à un choix de  $D_n$  pour lesquels cette situation ne se produit pas.

2) Si  $\Delta_n = D_n$ ,  $\rho_n = r_n$  et si  $r_n = r$  le terme correspondant sera pris nul ; mais si  $r_n \neq r$  il est infini et en disant que la série converge pour  $N$

grand on exprime qu'il n'y a qu'un nombre fini de tels termes.

3) Les ensembles quasi-connexes appartiennent à  $\mathcal{S}$ .

#### 11.4. - Notation :

Soit  $E$  un ensemble de  $\mathcal{S}$ , et soient  $a$  et  $b$  deux points de  $E$ . On dira que  $y$  est bien situé par rapport à  $a$  si  $|y-a| < |b-a|$  et si,  $D_i |x-a_i| < |a_i-a|$  étant le disque bien placé relativement à  $a$  auquel appartient  $y$ ,  $y$  n'appartient pas à  $\Delta_i$  où  $\Delta_i$  est le plus petit disque contenant  $D_i \cap E$ . On notera  $E_{a,b}$  l'ensemble des points bien situés par rapport à  $a$  ou par rapport à  $b$ . Il est clair que  $E_{a,b}$  est contenu dans  $E$ , que la famille des  $E_{a,b}$  pour  $(a,b) \in E \times E$  est enchaînée et recouvre  $E$ .  $E_{a,b}$  est formé des deux disques  $|x-a| < |b-a|$  et  $|x-b| < |b-a|$  d'où l'on a enlevé les disques  $\Delta_i$  qui s'y trouvent. Les trous de  $E_{a,b}$  sont les  $\Delta_i$ , et  $\Delta_i$  est le seul trou situé dans le disque  $D_i$  bien situé par rapport à  $a$  ou  $b$ .

#### 11.5. - LEMME. - $E_{a,b}$ est un ensemble analytique.

En effet, soit  $x_0 \in E_{a,b}$  (on peut le supposer bien situé par rapport à  $a$ ), et soit  $T_n$  une suite convenable de trous de  $E_{a,b}$  (pour la terminologie et les conditions suffisantes d'analyticité, se reporter à l'annexe). Ces trous sont des disques  $\Delta_n = D(a_n, \rho_n)$  et sauf peut-être pour l'un d'entre eux (à savoir celui qui se trouve dans le disque  $D_n$ , bien situé par rapport à  $a$ , auquel appartient  $x_0$ ) on aura  $|x_0 - a_n| = |a - a_n| = r_n$ . A cause de l'hypothèse  $(\mathcal{S})$  la série

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\operatorname{Log} |x_0 - a_n| - \operatorname{Log} r|}{\operatorname{Log} |x_0 - a_n| - \operatorname{Log} \rho_n}$$

converge pour  $N$  grand ce qui prouve l'analyticité de  $E_{a,b}$ . (Annexe, exemple 1).

#### 11.6. - PROPOSITION. - Les ensembles de $\mathcal{S}$ sont analytiques.

Si  $E \in \mathcal{S}$ , c'est la réunion de la famille enchaînée  $E_{a,b}$ ,  $(a,b) \in E \times E$ .  
La proposition résulte alors du lemme 11.5. et du corollaire 7.3. (on pourrait aussi le prouver directement à l'aide de la condition (\*)).  $\parallel$

11.7. - LEMME. - Soient E et F appartenant à  $\mathcal{S}$  d'intersection non vide.

Soient a et b appartenant à  $E \cap F$ . Alors  $E_{a,b} \cap F_{a,b}$  est analytique.

On voit sans peine que les trous de  $E_{a,b} \cap F_{a,b}$  sont, soit des trous de  $E_{a,b}$ , soit des trous de  $F_{a,b}$ . Si l'on a une suite convenable de trous de  $E_{a,b} \cap F_{a,b}$ , soit  $(T_n)$ , on peut construire deux sous-suites  $(n_k)$  et  $(m_j)$  telle que  $(n_k) \cup (m_j) = \mathbb{N}$ ,  $T_{n_k}$  est un trou de  $E_{a,b}$  et  $T_{m_j}$  est un trou de  $F_{a,b}$ . Les suites  $(T_{n_k})$  et  $(T_{m_j})$  forment des suites convenables de trous de  $E_{a,b}$  et  $F_{a,b}$  respectivement. On aura alors :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\log r_n - \log r|}{\log r_n - \log \rho_n} = \sum_{n_k > N} \frac{|\log r_{n_k} - \log r|}{\log r_{n_k} - \log \rho_{n_k}} + \sum_{m_j > N} \frac{|\log r_{m_j} - \log r|}{\log r_{m_j} - \log \rho_{m_j}}$$

et ainsi qu'on l'a vu au lemme 11.5., ces deux séries convergent pour  $k$  et  $j$  grands. Donc la série initiale converge pour  $N$  grand et  $E_{a,b} \cap F_{a,b}$  est analytique.  $\parallel$

11.8. - PROPOSITION. - La réunion  $E = \bigcup_i E_i$  d'une famille enchaînée  $(E_i)$  d'ensembles de  $\mathcal{S}$ , appartient à  $\mathcal{S}$ .

Prouvons le d'abord dans le cas d'une famille à deux éléments. Soient donc  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ ,  $E_1 \in \mathcal{S}$ ,  $E_2 \in \mathcal{S}$ ,  $E = E_1 \cup E_2$ . Soit  $x_0 \in E$ , on peut supposer que  $x_0 \in E_1$ , et soit  $y \in E$ .

Soit une suite de disques  $D_n$  bien placés relativement à  $x_0$  avec  $r_n < |x_0 - y|$ ,  $r_n$  formant une suite monotone convergente vers  $r$ . Si  $r_n$  est

croissante (resp décroissante), l'une des deux situations suivantes se produit

a) Il existe  $z \in E_1$  avec  $|x_o - z| \geq r$  (resp.  $|x_o - z| > r$ )

b) Il existe  $z \in E_2$  avec  $|x_o - z| < r$  (resp.  $|x_o - z| \leq r$ )

car  $E_1 \cap E_2$  est non vide.

Notons  $\Delta_n$ ,  $\Delta_n^1$ ,  $\Delta_n^2$  les plus petits disques contenant  $D_n \cap E$ ,  $D_n \cap E_1$ ,  $D_n \cap E_2$  respectivement et soient  $\rho_n$ ,  $\rho_n^1$  et  $\rho_n^2$  leurs diamètres.

Si le cas a) se produit pour  $n$  assez grand, on a  $r_n < |z - x_o|$  et comme  $D_n \cap E \subset D_n \cap E_1$  on a  $\Delta_n \subset \Delta_n^1$  et donc  $\rho_n < \rho_n^1$ .

La condition ( $\delta$ ) étant vérifiée pour  $E_1$  relativement au couple  $(x_o, z)$  est donc vérifiée a fortiori pour  $E$  puisque l'on a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\log r_n - \log r|}{\log r_n - \log \rho_n} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\log r_n - \log r|}{\log r_n - \log \rho_n^1}$$

Maintenant si a) n'est pas vérifiée, alors  $y$  appartient nécessairement à  $E_2$ , d'autre part on a b) et pour  $n$  grand on a  $r_n > |x_o - z|$ . Alors la suite  $(D_n)$  bien placée relativement à  $x_o$  est une suite bien placée relativement à  $z$  car  $|a_n - z| = \sup(|a_n - x_o|, |x_o - z|) = r_n$ , et comme  $\Delta_n \subset \Delta_n^2$  on a  $\rho_n \leq \rho_n^2$  et donc la condition ( $\delta$ ) est vérifiée pour  $E$  puisqu'elle est vérifiée pour  $E_2$  relativement au couple  $(z, y)$ .

Par récurrence on en déduit que la propriété annoncée est vraie pour toute famille enchaînée finie.

Soit maintenant une famille enchaînée quelconque  $(E_i)$  et soient  $x_o$  et  $y$  appartenant à  $E = \bigcup_i E_i$ . On peut alors trouver une sous-famille finie  $(E_j)$   $1 \leq j \leq n$  avec  $E_j \cap E_{j+1} \neq \emptyset$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ , et  $x_o \in E_1$ ,  $y \in E_n$ . Alors  $F = \bigcup_{1 \leq j \leq n} E_j$  appartient à  $\mathcal{S}$  ainsi qu'on vient de le prouver. Si  $D_n$  est une suite relative à  $(x_o, y)$  et si  $\Delta_n$  et  $\Delta'_n$  sont les plus petits disques contenant  $D_n \cap E$  et  $D_n \cap F$ , de rayons  $\rho_n$  et  $\rho'_n$  on a  $\Delta_n \subset \Delta'_n$  et  $\rho_n \leq \rho'_n$ , donc  $E$  vérifie la condition ( $\delta$ ) relativement au couple  $(x_o, y)$  puisque  $F$  vérifie cette condition. ||



11.9. - PROPOSITION. - La famille  $\mathcal{S}$  est régulière.

Il est évident que les couronnes appartiennent à  $\mathcal{S}$ .

D'autre part il résulte de la proposition 11.8. que les réunions de familles enchaînées finies d'ensembles de  $\mathcal{S}$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ .

Il reste à prouver que si  $E$  et  $F$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ ,  $G = E \cap F \neq \emptyset$  alors  $G = E \cap F$  est analytique. Mais  $G = \bigcup_{(a,b) \in G \times G} E_{a,b} \cap F_{a,b}$ . D'après le lemme 11.7. les ensembles  $E_{a,b} \cap F_{a,b}$  sont analytiques, comme la famille  $(E_{a,b} \cap F_{a,b})$ ,  $(a,b) \in G \times G$ , est enchaînée, l'ensemble  $G$  est analytique d'après le corollaire 7.3.  $\parallel$

Les résultats du paragraphe 8 s'appliquent donc à la famille  $\mathcal{S}$ . On notera que la famille  $\mathcal{S}$  n'est pas stable par intersection. Donnons un critère assurant que l'intersection de deux éléments de  $\mathcal{S}$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ .

11.10. - LEMME. - Soient  $E$  et  $F$  appartenant à  $\mathcal{S}$ , et soit  $G = E \cap F \neq \emptyset$  leur intersection. Si pour tout couple  $(a,b) \in G \times G$ ,  $G_{a,b} = E_{a,b} \cap F_{a,b}$ , alors  $G$  appartient à  $\mathcal{S}$ .

Cette condition signifie que si le disque  $D$  est un disque bien placé relativement à  $a$  situé entre  $a$  et  $b$ ,  $\Delta^E$ ,  $\Delta^F$  et  $\Delta^G$  étant les plus petits disques contenant  $D \cap E$ ,  $D \cap F$ ,  $D \cap G$ , alors si  $\Delta^E \neq \emptyset$  et  $\Delta^F \neq \emptyset$  on a  $\Delta^E \cap \Delta^F \neq \emptyset$ , ce qui implique  $\Delta^G = \Delta^E \cup \Delta^F$ .

Alors si on a la suite de disques  $D_n$  bien placés relativement à  $a$  entre  $a$  et  $b$ , on peut la partager en deux sous-suites  $(D_{n_k})$  et  $(D_{m_j})$  telle que

$\Delta_{n_k}^G = \Delta_{n_k}^E$  et  $\Delta_{m_j}^G = \Delta_{m_j}^F$ . On a donc

$$\sum_{n > N} \frac{|\log r_n - \log r|}{\log r_n - \log \rho_n^G} = \sum_{k > K} \frac{|\log r_{n_k} - \log r|}{\log r_{n_k} - \log \rho_{n_k}^E} + \sum_{j > J} \frac{|\log r_{m_j} - \log r|}{\log r_{m_j} - \log \rho_{m_j}^F}$$

et ces deux séries convergent pour  $K$  et  $J$  grands d'après  $(\mathcal{S})$ .  $\parallel$

11.11. - THEOREME. - Soient  $E$  et  $F \in \mathcal{S}$ ,  $F \subset E$ . Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{S}$ -analytique sur  $E$ , alors  $f$  est  $\mathcal{S}$ -analytique sur  $F$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $\mathcal{S}$ -analytiques sur  $E$ ,  $f+g$  est  $\mathcal{S}$ -analytique.

Ainsi qu'il résulte de la proposition 9.1. la deuxième partie du théorème est une conséquence de la première partie. Nous utiliserons le :

11.12. - LEMME. - Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{S}$ -analytique sur  $E \in \mathcal{S}$ . Il existe une famille filtrante  $(E_i)$  d'éléments de  $\mathcal{S}$  telle que  $\bigcup_i E_i = E$ , que  $f$  soit un élément analytique sur  $E_i$  et que de plus, pour tout couple de points  $(x_0, y)$  de  $E_i$ , tout disque  $D$ , bien placé relativement à  $x_0$ , entre  $x_0$  et  $y$  et contenu dans  $E$ , soit contenu dans  $E_i$ .

On sait déjà que, puisque la famille  $\mathcal{S}$  est régulière,  $f$  peut être définie sur une famille filtrante  $(F_i)$  (corollaire 8.4.).

(Puisqu'on suppose que la base est dénombrable on pourrait même supposer que la famille  $F_i$  est une suite croissante).

Soit  $\mathcal{I}_i$  la famille des trous de  $F_i$ . On a sur  $F_i$

$$f = \sum_{T \in \mathcal{I}_i} f_T$$

la série convergeant uniformément sur  $\bigcup_{f_T \neq 0} T$ .

Or soient  $x_0$  et  $y$  deux points de  $F_i$ , et soit  $D$  un disque, bien placé relativement à  $x_0$ , entre  $x_0$  et  $y$ , tel que  $D$  soit contenu dans  $E$ . Si  $T$  est un trou de  $F_i$  contenu dans  $D$ , comme  $f$  se prolonge dans  $T$  en une fonction  $\mathcal{S}$ -analytique, et comme  $K$  est maximalement complet, il résulte du théorème 10.4. et de ses conséquences que l'on a  $f_T = 0$ . Enfin il est clair que  $F_i \cup D$  vérifie la condition  $(\mathcal{S})$  si  $F_i$  la vérifie.

Si alors l'on considère la famille  $(D_j)$  des disques bien placés entre deux points de  $F_i$ ,  $E_i = F_i \cup (\cup D_j) = \cup (F_i \cup D_j)$  appartient à  $\mathcal{S}$  puisque c'est la réunion d'une famille enchaînée d'éléments de  $\mathcal{S}$  (proposition 11.8.). De plus la série  $\sum_{T \in \mathfrak{I}_i} f_T$  converge uniformément sur  $E_i$ , comme la somme de cette série coïncide avec  $f$  sur  $F_i$ , elle coïncide avec  $f$  sur  $E_i$ , donc  $f$  est un élément analytique sur  $E_i$ .

Les  $E_i$  vérifient bien les conditions de l'énoncé.  $\parallel$

#### 11.13. - Démonstration du théorème 11.11.

Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{S}$ -analytique sur  $E$  et soit  $E_i$  la famille définie au lemme 11.12.. Soit enfin  $F \in \mathcal{S}$ ,  $F \subset E$ .

Alors la famille formée des intersections  $E_i \cap F$  non vides est filtrante, sa réunion est  $F$ , et  $f$  est un élément analytique sur chaque  $E_i \cap F$ . Il reste à prouver que les  $E_i \cap F$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ , ce qui va résulter du lemme 11.10.

$a$  et  $b$  étant deux points de  $E_i \cap F$ , soit  $D$  un disque bien placé entre  $a$  et  $b$ .  $\Delta^E$ ,  $\Delta^{E_i}$  et  $\Delta^F$  étant les plus petits disques contenant  $D \cap E$ ,  $D \cap E_i$ ,  $D \cap F$ , si  $\Delta^E \neq \emptyset$  on a  $\Delta^E \subset \Delta^F$ , d'autre part les conditions du lemme 11.12. signifient que si  $\Delta^{E_i} \neq \emptyset$  alors on a  $\Delta^E \neq \emptyset$  et  $\Delta^E \subset \Delta^{E_i}$ . Donc si  $\Delta^{E_i} \neq \emptyset$  et  $\Delta^F \neq \emptyset$ , on a  $\Delta^{E_i} \cap \Delta^F \supset \Delta^E \neq \emptyset$  et le lemme 11.10. s'applique.  $\parallel$

11.14. - THEOREME. - Soit  $E \in \mathcal{S}$ , soit  $f_n$  une suite de fonctions  $\mathcal{S}$ -analytiques convergeant uniformément sur  $E$  vers une limite  $f$ . Alors  $f$  est une fonction  $\mathcal{S}$ -analytique sur  $E$ .

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où les  $f_n$  sont bornées sur  $E$ . En effet, on peut trouver  $N$  tel que pour  $n > N$  on ait  $|f_n(x) - f_N(x)| \leq 1$  sur  $E$ . Posons alors  $g_n = f_n - f_N$ .  $g_n$  converge uniformément sur  $E$  vers une limite  $g$  et les  $g_n$  sont bornées sur  $E$ . Si on a prouvé que  $g$  est une fonction  $\mathcal{S}$ -analytique sur  $E$ , alors  $f = f_N + g$  en sera une aussi d'après le théorème 11.11..

Nous allons prouver qu'il existe une famille enchaînée fixe  $(E_i)$  de sous-ensembles de  $E$ , appartenant à  $\mathcal{E}$  et engendrant  $E$  telle que toute fonction  $\mathcal{E}$ -analytique bornée sur  $E$  soit un élément analytique sur chaque  $E_i$ .

Admettons provisoirement ce résultat. Alors les  $g_n$  sont des éléments analytiques sur  $E_i$ , donc leur limite uniforme  $g$  aussi (proposition 6.1.), et donc  $g$  est une fonction  $\mathcal{E}$ -analytique sur  $E$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $E$ . Appelons  $D_a$  et  $D_b$  les disques  $D_a = \{x-a\} < |b-a|$  et  $D_b = \{x-b\} < |b-a|$ . Soit  $(D_i^a)$  (resp.  $(D_j^b)$ ) les familles des disques bien placés par rapport à  $a$ , (resp.  $b$ ) et situés dans  $D_a$  (resp.  $D_b$ ). Soit  $\Delta_i^a$  (resp.  $\Delta_j^b$ ) le plus petit disque contenant  $D_i^a \cap E$  (resp.  $D_j^b \cap E$ ). Nous nous limiterons à la famille d'indices pour lesquels  $\Delta_i^a$  (resp.  $\Delta_j^b$ ) n'est pas vide.  $\Delta_i^a$  est le disque :  $|x-a_i| < \rho_i^a$ , avec  $|a-a_i| = r_i^a$ ;  $\Delta_j^b$  est le disque :  $|x-b_j| < \rho_j^b$ , avec  $|b-b_j| = r_j^b$ .

Posons  $\rho_i^{a*} = \sqrt{\rho_i^a r_i^a}$  et  $\rho_j^{b*} = \sqrt{\rho_j^b r_j^b}$  et notons  $\Delta_i^{a*}$  le disque  $|x-a_i| < \rho_i^{a*}$  et  $\Delta_j^{b*}$  le disque  $|x-b_j| < \rho_j^{b*}$ .

Soit  $E_{a,b}^* = (D_a \cap \bigcup_{i \in I} \Delta_i^{a*}) \cup (D_b \cap \bigcup_{j \in J} \Delta_j^{b*})$ . On voit sans peine que l'on a  $E_{a,b}^* \subset E_{a,b} \subset E$  et que d'autre part  $E_{a,b}^* \in \mathcal{E}$  car pour toute suite  $r_n^a$  convergent vers  $r$  on a :

$$\Sigma \frac{|\log r_n^a - \log r|}{\log r_n^a - \log \rho_n^{a*}} < 2 \Sigma \frac{|\log r_n^a - \log r|}{\log r_n^a - \log \rho_n^a} < +\infty$$

et pour toute suite  $r_n^b$  convergent vers  $r'$  on a

$$\Sigma \frac{|\log r_n^b - \log r'|}{\log r_n^b - \log \rho_n^{b*}} < 2 \Sigma \frac{|\log r_n^b - \log r'|}{\log r_n^b - \log \rho_n^b} < +\infty.$$

Enfin il est évident que la famille  $(E_{a,b})_{(a,b) \in E \times E}$  est enchaînée et que l'on a  $\bigcup_{(a,b) \in E \times E} E_{a,b}^* = E$ .

Soit  $h$  une fonction  $\mathcal{G}$ -analytique bornée sur  $E$ . Prouvons que  $h$  est un élément analytique sur  $E_{a,b}^*$ .

Remarquons d'abord que  $h$  est une fonction  $\mathcal{G}$ -analytique sur  $E_{a,b}$  d'après le théorème 11.11.

On peut trouver  $F \in \mathcal{G}$ , avec  $F \subset E_{a,b}$ ,  $a \in F$ ,  $b \in F$  et tel que  $h$  soit un élément analytique sur  $F$ .

Soit  $\mathfrak{I}$  la famille des trous de  $F$ .  $\mathfrak{I}$  se partage en deux familles :  $\mathfrak{I}_1$  est la famille des trous  $T$  de  $F$  qui contiennent des trous  $\Delta$  de  $E_{a,b}$  ;  $\mathfrak{I}_2$  est la famille des trous  $T$  de  $F$  contenus dans  $E_{a,b}$ .

Un trou  $T$  de  $\mathfrak{I}_1$  est pris en sandwich entre un  $D_i^a$  (resp.  $D_j^b$ ) et un  $\Delta_i^a$  (resp.  $\Delta_j^b$ ) on notera ce trou  $T_i^a$  (resp.  $T_j^b$ ) ; on a  $\Delta_i^a \subset T_i^a \subset D_i^a$  (resp.  $\Delta_j^b \subset T_j^b \subset D_j^b$ ).

On a sur  $F : h = \sum_{T \in \mathfrak{I}} h_T$ , la série convergeant uniformément sur  $\bigcup_{h_T \neq 0} T$ . Pour  $T \in \mathfrak{I}_2$  ; on a  $h_T = 0$  car  $h$  se prolonge en une fonction analytique dans  $T \cup F$ , et  $K$  est maximalement complet (conséquence du théorème 10.4.). On a donc sur  $F : h = \sum_{T \in \mathfrak{I}_1} h_T$ , la série convergeant uniformément sur  $\bigcup_{T \in \mathfrak{I}_1} T$ .

Notons que pour  $T \in \mathfrak{I}_1$  :

$$\sup_{x \in T} |h_T(x)| = \sup_{x \in F} |h_T(x)| \leq \sup_{x \in F} |h(x)| \leq \sup_{x \in E_{a,b}} |h(x)|.$$

On remarque d'autre part que  $h_{T_i^a}$  (resp.  $h_{T_j^b}$ ) ne dépend que de  $\Delta_i^a$ , c'est-à-dire que pour un autre  $F' \in \mathcal{G}$ ,  $F' \subset E_{a,b}$ ,  $a \in F'$ ,  $b \in F'$  tel que  $h$  soit un élément analytique sur  $F'$ , si  $T_i^a$  est le trou des  $F'$  contenant  $\Delta_i^a$ ,  $h_{T_i^a} = h_{T_i^a} = h_{\Delta_i^a}$ .

On peut trouver une suite  $F_n$  telle que  $\bigcap T_{i,n}^a = \Delta_i^a$  et donc

$$\sup_{x \in \bigcup \Delta_i^a} |h_{\Delta_i^a}(x)| = \sup_n \sup_{x \in T_{i,n}^a} |h_{\Delta_i^a}(x)| \leq \sup_{x \in E_{a,b}} |h(x)| = m.$$

Mais d'autre part  $s_i^a = \sup_{x \in \mathbb{D}_i^a} |h_{\Delta_i^a}(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{T}_i^a} |h_{\Delta_i^a}(x)| = \sup_{x \in F} |h_{\Delta_i^a}(x)|$   
 et  $s_i^a \rightarrow 0$  puisque la série  $\sum_{T \in \mathfrak{X}_1} h_T$  converge uniformément sur  $F$ .

Le polygone de valuation de  $h_{\Delta_i^a}(x)$  relatif au point  $a_i$  (centre de  $\Delta_i^a$ )  
 étant convexe pour  $r > \rho_i^a$ , on a

$$\text{Log}|h_{\Delta_i^a}|_{a_i}(\rho_i^{a*}) \leq \frac{1}{2}(\text{Log}|h_{\Delta_i^a}|_{a_i}(\rho_i^a) + \text{Log}|h_{\Delta_i^a}|_{a_i}(r_i^a)) \leq \frac{1}{2}(m + s_i^a)$$

et donc

$$s_i^{a*} = |h_{\Delta_i^a}|_{a_i}(\rho_i^{a*}) = \sup_{x \in \mathbb{D}_i^a} |h_{\Delta_i^a}(x)| \leq \sqrt{m s_i^a}.$$

Donc  $s_i^{a*} \rightarrow 0$  ; on voit de même que  $s_j^{b*} = \sup_{x \in \mathbb{D}_j^b} |h_{\Delta_j^b}(x)|$  converge vers  
 0, ce qui prouve que la série  $\sum_{T \in \mathfrak{X}_1} h_T$  converge uniformément sur  $E_{a,b}^*$ . Com-  
 me la somme de cette série coïncide avec  $h$  sur  $F$ , elle coïncide avec  $h$  sur  
 $E_{a,b}^*$  ce qui prouve que  $h$  est un élément analytique sur  $E_{a,b}^*$ . ||

INVERSE D'UNE FONCTION ANALYTIQUE  
PRODUIT DE FONCTIONS ANALYTIQUES

---

12. 1. - La donnée d'un point  $a$  de  $K$  et d'un nombre réel  $\rho$  définit une partition de  $K$  par les disques intérieurs du disque  $|x-a| \leq \rho$  (il n'y en a qu'un si  $\rho$  n'appartient pas au groupe des valeurs) et le disque extérieur de centre  $\infty$  :  $|x-a| > \rho$ . La réunion d'un nombre quelconque de ces disques définit un ensemble analytique.

On appellera  $\mathfrak{R}$  la classe des intersections finies d'ensembles du type précédent.

On voit sans peine qu'un ensemble de  $\mathfrak{R}$  est analytique et même quasi-connexe puisque c'est l'intersection d'un nombre fini de quasi-connexes ; il en résulte donc que l'intersection d'un ensemble analytique  $A$  avec un ensemble  $R$  de  $\mathfrak{R}$  est un ensemble analytique (annexe, exemple 4).

La classe régulière  $\mathfrak{B}$  sera dite complètement régulière si quel que soit l'ensemble  $B$  de  $\mathfrak{B}$  et quel que soit l'ensemble  $R$  de  $\mathfrak{R}$ ,  $B \cap R$  appartient à  $\mathfrak{B}$ . (En particulier  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{B}$  si  $K \in \mathfrak{B}$  ce qu'on peut toujours supposer).

12. 2. - Dans ce paragraphe nous considérons une classe  $\mathfrak{B}$  complètement régulière. On ne perd rien en faisant cette supposition car plus la classe est vaste, plus la classe des fonctions  $\mathfrak{B}$  analytiques est vaste et d'autre part on a la

PROPOSITION. - Si  $\mathfrak{B}$  est une classe régulière, il existe une classe  $\mathfrak{B}'$  complètement régulière contenant  $\mathfrak{B}$ .

Notons  $\mathfrak{B}'$  la classe formée des ensembles du type  $B \cap R$  où  $B \in \mathfrak{B}$  et  $R \in \mathfrak{R}$  et des réunions de familles enchaînées finies d'ensembles de ce type.

Comme  $K \in \mathfrak{R}$ , on a  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$ . De plus d'après ce qu'on vient de voir, les  $B \cap R$  ( $B \in \mathfrak{B}$ ,  $R \in \mathfrak{R}$ ) appartiennent à  $\mathcal{A}$ , donc les réunions de familles enchaînées finies aussi, donc  $\mathfrak{B}' \subset \mathcal{A}$ . Il est évident que les couronnes appartiennent à  $\mathfrak{B}'$  et que les réunions enchaînées finies d'ensembles de  $\mathfrak{B}'$  appartiennent à  $\mathfrak{B}'$ .

Enfin si  $(A_i \cap R_i)_{i \in I}$  ( $A_i \in \mathfrak{B}$ ,  $R_i \in \mathfrak{R}$ ) et  $(B_j \cap Q_j)_{j \in J}$  ( $B_j \in \mathfrak{B}$ ,  $Q_j \in \mathfrak{R}$ ) sont deux familles enchaînées finies, il faut prouver que

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap R_i) \cap \bigcup_{j \in J} (B_j \cap Q_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap R_i \cap B_j \cap Q_j$$

est analytique. Or notons que pour  $(i,j) \in I \times J$ ,  $A_i \cap R_i \cap B_j \cap Q_j$  appartient à  $\mathcal{A}$  puisque  $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$  ( $\mathfrak{B}$  régulière) et  $R_i \cap Q_j \in \mathfrak{R}$ . Si la famille  $(A_i \cap R_i \cap B_j \cap Q_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est enchaînée, alors la propriété est démontrée. Malheureusement, ce cas favorable peut ne pas se produire, et il nous faut établir quelques lemmes supplémentaires pour démontrer cette propriété.

12.3. - Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles analytiques d'intersection non vide, leur réunion est analytique (corollaire 7.3.). Nous allons chercher, plus généralement, à quelle condition la réunion de deux ensembles analytiques est analytique.

DEFINITION. -  $A$  étant un sous-ensemble de  $K$ , nous noterons  $\Delta^A$  le plus petit disque (ouvert ou fermé) contenant  $A$ . Nous dirons que les ensembles analytiques non vides  $A$  et  $B$  sont faiblement enchaînés si l'un des cas suivants se produit :

- a)  $\Delta^A \cap B \neq \emptyset$  et  $\Delta^B \cap A \neq \emptyset$
- b)  $\Delta^A$  est un trou (ou un trou intérieur) de  $B$  et  $\Delta^A \cup B$  ainsi que  $A \cup \mathcal{C}\Delta^A$  sont analytiques
- c)  $\Delta^B$  est un trou (ou un trou intérieur) de  $A$  et  $\Delta^B \cup A$  ainsi que  $B \cup \mathcal{C}\Delta^B$  sont analytiques.



Remarques :

1) Indiquons un cas simple dans lequel le critère  $b$  ou le critère  $c$  est vérifié. Soit  $T = D(a, r^-)$  un trou de  $A$  analytique. Si le cercle  $C(a, r)$  n'est pas vide (et alors  $A \cap C(a, r) \neq \emptyset$  car sinon  $T$  ne serait pas un trou de  $A$ ),  $T \cup A$  est analytique.

En effet, les trous de  $A \cup T$  sont les trous de  $A$  à l'exception du trou  $T$ . Soit  $x_0 \in A \cup T$  et  $T_{nj}$  une suite convenable de trous de  $A \cup T$ . Si  $x_0 \in A$  la condition  $(*)$  (cf. annexe) est vérifiée puisqu'elle est vérifiée pour  $A$ ; si  $x_0 \in T$ , soit  $x'_0 \in C(a, r) \cap A$  alors la condition  $(*)$  relative à  $x_0$  et à la suite  $T_{nj}$  est la même que la condition  $(*)$  relative à  $x'_0$  et à la suite  $T_{nj}$  et elle est donc vérifiée puisque  $A$  est analytique.  $A \cup T$  est donc analytique.

2) Soit  $T = D(a, r^+)$  un trou de  $A$  analytique et  $T'$  le trou intérieur  $T' = D(a, r^-)$ . Alors si  $T' \cup A = (T \cup A) \cap C(a, r)$ , si  $T \cup A$  est analytique, son intersection avec  $C(a, r) \in \mathcal{R}$  l'est aussi. La réciproque résulte de la remarque 1). En effet, si  $C(a, r) \neq \emptyset$  (c'est le seul cas intéressant car autrement  $T = T'$ ), les disques intérieurs  $T_i$  de  $C(a, r)$ ,  $T_i = D(a_i, r^-)$  sont des trous de  $T' \cup A$ , et donc pour chaque  $i$  d'après la remarque précédente  $T_i \cup T' \cup A$  est analytique, et alors  $(\bigcup_i T_i) \cup T' \cup A = T \cup A$  est analytique. Ces résultats se conservent si  $T$  est un trou de centre  $\infty$ .

12. 4. - LEMME. - Soient  $A$  et  $B$  appartenant à  $\mathcal{Q}$ . Pour que  $A \cup B$  soit analytique il faut et il suffit que  $A$  et  $B$  soient faiblement enchaînés.

Soient  $A$  et  $B$  faiblement enchaînés. Supposons qu'ils vérifient la condition  $b$ . Alors les trous de  $A \cup B$  sont formés de la réunion des trous de  $\Delta^A \cup B$  et de ceux de  $A \cup \Delta^A$ . Soit  $x_0 \in A \cup B$  et  $(T_{nj})$  une suite convenable de trous de  $A \cup B$ . Soit d'abord  $x_0 \in A$ . Si la suite des distances  $d(x_0, T_{nj})$  n'est pas constante à partir d'un certain rang, on voit alors que, sauf un nombre fini, les trous  $T_{nj}$  forment ou une suite convenable de trous de  $A \cup \Delta^A$  ou une suite convenable de trous de  $B \cup \Delta^A$  (car la suite des distances  $d(x_0, T_{nj})$  est monotone quand  $n$  croît, et, pour  $T_{nj} \in \mathcal{T}(A \cup \Delta^A)$ ,  $d(x_0, T_{nj}) \leq \text{diamètre de } \Delta^A$

et, pour  $T_{n_j} \in \mathfrak{T}(B \cup \mathcal{C}\Delta^A)$ ,  $d(x_o, T_{n_j}) \geq \text{diamètre de } \Delta^A$ . La condition (\*) est alors vérifiée puisque  $A \cup \mathcal{C}\Delta^A$  et  $B \cup \Delta^A$  sont analytiques. On démontre de même que la condition (\*) est encore vérifiée si  $x_o \in B$ . Finalement la condition (\*) étant toujours vérifiée  $A \cup B$  est analytique.

Si  $A$  et  $B$  vérifient la condition c,  $B$  et  $A$  vérifient la condition b et donc  $A \cup B$  est analytique.

Supposons alors que  $A$  et  $B$  vérifient  $a \in A \cap \Delta^B$  et  $b \in B \cap \Delta^A$ . Posons  $A' = A \cap D(a, |a-b|^-)$ ,  $B' = B \cap D(b, |a-b|^-)$ . Alors  $A'$  et  $A$  sont analytiques ainsi qu'on l'a remarqué plus haut. D'autre part  $\Delta^{A'} = D(a, |a-b|^-)$  car  $D(a, |a-b|^-) \subset \Delta^A$  et  $A$  est infraconnexe. De même  $\Delta^{B'} = D(b, |a-b|^-)$ . La condition b est donc réalisée pour  $A'$  et  $B'$ . En vertu de ce que l'on vient de prouver  $A' \cup B'$  est analytique. Mais comme  $A \cap A' \neq \emptyset$  et  $B \cap B' \neq \emptyset$ ,  $A \cup (A' \cup B') \cup B = A \cup B$  est analytique.

Pour démontrer la réciproque, remarquons d'abord que si  $\Delta^A$  (resp.  $\Delta^B$ ) de diamètre  $r$  est contenu dans un trou  $T$  de  $B$  (resp.  $A$ ) de diamètre  $\rho$  avec  $r < \rho$ , alors  $A \cup B$  n'est pas infraconnexe et donc n'est pas analytique.

Si  $\Delta^A$  (resp.  $\Delta^B$ ) est un trou (ou un trou intérieur) de  $B$  (resp.  $A$ ) et si  $A \cup B$  est analytique, alors on a  $\mathcal{C}\Delta^A \cap B \neq \emptyset$ , (resp.  $\mathcal{C}\Delta^B \cap A \neq \emptyset$ ) et donc  $A \cup \mathcal{C}\Delta^A = (A \cup B) \cup \mathcal{C}\Delta^A$  et  $\Delta^A \cup B = \Delta^A \cup (A \cup B)$  (resp.  $B \cup \mathcal{C}\Delta^B$  et  $A \cup \Delta^B$ ) sont analytiques. ||

12.5. - On dira que la famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ensembles analytiques est faiblement enchaînée si pour tous  $i$  et  $j \in I$  on peut trouver  $i_0 \dots i_n \in I$  tels que  $A_{i_0} = A_i$ ;  $A_{i_n} = A_j$  et que  $A_{i_k}$  et  $A_{i_{k+1}}$  soient faiblement enchaînés pour  $0 \leq k \leq n-1$ .

COROLLAIRE. - Si la famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ensembles analytiques est faiblement enchaînée  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est analytique.

En effet, d'après le lemme 12.4., pour toute sous famille finie  $(A_i)_{i \in J}$  faiblement enchaînée,  $\bigcup_{i \in J} A_i$  est analytique. Mais ces ensembles  $\bigcup_{i \in J} A_i$  forment

une famille enchaînée (et même filtrante) et leur réunion, égale à  $\bigcup_{i \in I} A_i$ , est donc analytique.  $\parallel$

12. 6. - LEMME. - Soit  $\mathcal{B}$  une classe régulière. Soient  $A \in \mathcal{B}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  et  $a \in K$ .  
Alors :

si  $\text{Pr}_a(A \cap B) \neq \emptyset$  on a  $\text{Pr}_a(A \cap B) = \text{Pr}_a(A) \cap \text{Pr}_b(B)$  ;

si  $\text{Im}_a(A \cap B)$  est réduit à un point, on a  $\text{Im}_a(A \cap B) = \text{Im}_a(A) \cap \text{Im}_a(B)$  ;

si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\text{Pr}_a(A) \cap \text{Pr}_b(B)$  est vide ou réduit à un point.

La démonstration est calquée sur celle du lemme 8. 2.

Notons que l'on a  $\text{Im}_a(A \cap B) \subset \text{Im}_a(A) \cap \text{Im}_a(B)$  et donc  $\text{Pr}_a(A \cap B) \subset \text{Pr}_a(A) \cap \text{Pr}_a(B)$ , et par suite, si  $\text{Pr}_a(A \cap B) \neq \emptyset$ ,  $\text{Pr}_a(A) \cap \text{Pr}_b(B)$  est un intervalle ni vide ni réduit à un point. Tout revient donc à prouver que si  $\text{Pr}_a(A) \cap \text{Pr}_b(B)$  est un intervalle ni vide ni réduit à un point, on a

$$\overline{\text{Im}_a(A \cap B)} = \text{Pr}_a(A) \cap \text{Pr}_a(B).$$

Soit alors  $\text{Pr}_a(A) = [\alpha, \alpha']$  et  $\text{Pr}_a(B) = [\beta, \beta']$  avec  $\sup(\alpha, \beta) < \inf(\alpha', \beta')$ . Supposons que  $\overline{\text{Im}_a(A \cap B)} = [\gamma, \gamma']$  soit non vide et soit strictement contenu dans  $\text{Pr}_a(A) \cap \text{Pr}_a(B)$  ; soit par exemple  $\gamma > \sup(\alpha, \beta)$ . Il existe donc  $r$  avec  $\sup(\alpha, \beta) < r < \gamma$ . On a donc  $D(a, r) \cap A \neq \emptyset$  et  $D(a, r) \cap B \neq \emptyset$  et puisque  $\mathcal{B}$  est régulière  $A' = D(a, r) \cup A$  et  $B' = D(a, r) \cup B$  appartiennent à  $\mathcal{B}$ , on a donc  $A' \cap B'$  analytique, mais

$$\overline{\text{Im}_a(A' \cap B')} = [0, r] \cup [\gamma, \gamma'],$$

donc  $A' \cap B'$  n'est pas infraconnexe. Il y a contradiction. Si on a  $\gamma' < \inf(\alpha', \beta')$  on considère les ensembles  $A' = \bigcup D(a, r) \cup A$  et  $B' = \bigcup D(a, r) \cup B$  avec  $\gamma' < r < \inf(\alpha', \beta')$ . Enfin, si  $\text{Im}_a(A \cap B) = \emptyset$  (soit  $A \cap B = \emptyset$ ) on considère les ensembles  $A' = D(a, r) \cup A \cup \bigcup D(a, \rho)$  et  $B' = D(a, r) \cup B \cup \bigcup D(a, \rho)$  avec  $\sup(\alpha, \beta) < r < \rho < \inf(\alpha', \beta')$ .  $\parallel$

12.7. - LEMME. - Si  $A = A' \cap R$  et  $B = B' \cap Q$  où  $A'$  et  $B'$  appartiennent à  $\mathfrak{B}$  et  $R$  et  $Q$  appartiennent à  $\mathfrak{R}$ , alors les conclusions du lemme 12.6. subsistent.

On remarque d'abord qu'elles subsistent si  $A$  est infraconnexe et  $B$  appartient à  $\mathfrak{R}$ . En effet,  $\text{Im}_a(A' \cap B')$  et  $\text{Im}_a(A) \cap \text{Im}_a(B)$  coïncident sauf peut être pour un nombre fini de points.

Dans le cas général on voit que si

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A' \cap R) \cap (B' \cap Q) = (A' \cap B') \cap (R \cap Q) \neq \emptyset \\ \overline{\text{Im}_a(A \cap B)} &= \overline{\text{Im}_a(A' \cap B')} \cap \overline{\text{Im}_a(R \cap Q)} = \\ &= \overline{\text{Im}_a(A')} \cap \overline{\text{Im}_a(B')} \cap \overline{\text{Im}_a(R)} \cap \overline{\text{Im}_a(Q)} = \\ &= \overline{\text{Im}_a(A' \cap R)} \cap \overline{\text{Im}_a(B' \cap Q)}, \end{aligned}$$

et que si  $\text{Im}_a(A) \cap \text{Im}_a(B)$  est un intervalle non réduit à un point, alors  $A \cap B$  est non vide. ||

12.8. - LEMME. - Soient  $(A_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et  $(B_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , deux familles d'ensembles de la forme  $A_i = A'_i \cap R_i$  et  $B_j = B'_j \cap Q_j$  où  $A'_i$  et  $B'_j$  appartiennent à  $\mathfrak{B}$  et  $R_i$  et  $Q_j$  appartiennent à  $\mathfrak{R}$ . Supposons que l'on ait  $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $1 \leq i < n$ ,  $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ ,  $1 \leq j < m$ ,  $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ ;  $A_n \cap B_m \neq \emptyset$  et  $A_i \cap B_j = \emptyset$  dans tous les autres cas. Alors  $A_1 \cap B_1$  et  $A_n \cap B_m$  sont faiblement enchaînés.

Soit  $a \in A_1 \cap B_1$  et soit  $\text{Fr}_a(A_1 \cap B_1) = [0, \alpha]$ . Nous allons montrer que  $\overline{\text{Im}_a(A_n \cap B_m)} \cap [0, \alpha] \neq \emptyset$ .

Si  $\overline{\text{Im}_a(A_n)} \subset [0, \alpha]$  ou  $\overline{\text{Im}_a(B_m)} \subset [0, \alpha]$ , on a

$$\overline{\text{Im}_a(A_n \cap B_m)} = \overline{\text{Im}_a(A_n)} \cap \overline{\text{Im}_a(B_m)} \subset [0, \alpha] \quad \text{et comme}$$

$$\overline{\text{Im}_a(A \cap B)} \neq \emptyset, \text{ on a } \overline{\text{Im}_a(A_n \cap B_m)} \cap [0, \alpha] \neq \emptyset.$$

Supposons alors que ni  $\overline{\text{Im}_a(A_n)}$  ni  $\overline{\text{Im}_a(B_n)}$  ne soient contenus dans  $[0, \alpha]$ . Nous allons prouver que  $\overline{\text{Im}_a(B_n)}$  contient le point  $\alpha$ .

D'après les hypothèses et le lemme 12.7. on a  $\overline{\text{Im}_a(A_1)} \cap \overline{\text{Im}_a(B_1)}$ , et pour  $(i, j) \neq (1, 1)$  et  $(i, j) \neq (n, m)$   $\overline{\text{Im}_a(A_i)} \cap \overline{\text{Im}_a(B_j)}$  est vide ou réduit à un point.

Si  $m = 1$ ,  $\overline{\text{Im}_a(B_m)} \cap [0, \alpha] = \overline{\text{Im}_a(B_1)} \cap [0, \alpha] = [0, \alpha] \neq \emptyset$ .

Si  $m > 1$ ,  $I = (\bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{\text{Im}_a(A_i)}) \cap (\bigcup_{1 \leq j < m} \overline{\text{Im}_a(B_j)}) = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j < m}} (\overline{\text{Im}_a(A_i)} \cap \overline{\text{Im}_a(B_j)})$

est formé de la réunion de l'intervalle  $[0, \alpha]$  et d'un nombre fini de points.

Mais comme  $\overline{\text{Im}_a(A_i)} \cap \overline{\text{Im}_a(A_{i+1})} \neq \emptyset$ ,  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{\text{Im}_a(A_i)}$  est un intervalle, de même  $\bigcup_{1 \leq j < m} \overline{\text{Im}_a(B_j)}$  est un intervalle, donc  $I$  est un intervalle et par conséquent

$$(\bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{\text{Im}_a(A_i)}) \cap (\bigcup_{1 \leq j < m} \overline{\text{Im}_a(B_j)}) = [0, \alpha].$$

Comme  $\overline{\text{Im}_a(A_n)}$  n'est pas contenu dans  $[0, \alpha]$ , alors  $[\bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{\text{Im}_a(A_i)}] = [0, \alpha']$  avec  $\alpha' > \alpha$ , et donc d'après ce qu'on vient de voir

$\text{Im}_a(B_{m-1}) \subset \bigcup_{1 \leq j < m} \overline{\text{Im}_a(B_j)} = [0, \alpha]$ , comme  $\text{Im}_a(B_{m-1}) \cap \text{Im}_a(B_m) \neq \emptyset$ ,

on a  $\text{Im}_a(B_m) \cap [0, \alpha] \neq \emptyset$ . Comme  $\overline{\text{Im}_a(B_m)}$  est un intervalle non contenu dans  $[0, \alpha]$ , il doit contenir le point  $\alpha$ .

Comme les  $A_i$  et les  $B_j$  jouent des rôles symétriques, on prouve de même que  $\overline{\text{Im}_a(A_n)}$  contient le point  $\alpha$ . Alors

$$\overline{\text{Im}_a(A_n \cap B_m)} = \overline{\text{Im}_a(A_n)} \cap \overline{\text{Im}_a(B_m)}$$

contient le point  $\alpha$  et a donc une intersection non vide avec  $[0, \alpha]$ .

Prouvons enfin que  $A_1 \cap B_1$  et  $A_n \cap B_m$  sont faiblement enchaînés.

Si  $\Delta^{A_1 \cap B_1} \cap (A_n \cap B_m) \neq \emptyset$  et  $\Delta^{A_n \cap B_m} \cap (A_1 \cap B_1) \neq \emptyset$ , la proposition

est démontrée. Supposons alors par exemple que  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1} \cap (A_n \cap B_m) = \emptyset$  (si c'est l'autre cas qui se produit, on se ramène à ce cas en inversant les numérotations des  $A_i$  et des  $B_j$ ). Alors nécessairement  $\overline{\text{Im}_a(A_n \cap B_m)} \cap [0, \alpha]$  est réduit au point  $\alpha$ . Si  $\overline{\text{Im}_a(A_n \cap B_m)} = [\alpha, \beta]$ , avec  $\beta > \alpha$ ; on voit que  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1}$  est un trou (ou un trou intérieur) de  $A_n \cap B_m$ . Si  $\overline{\text{Im}_a(A_n \cap B_m)}$  est réduit au point  $\alpha$ , alors nécessairement  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1} = D(a, \alpha^-)$ . Soit alors  $b \in A_n \cap B_m$ , on a  $\overline{\text{Im}_b(A_n \cap B_m)} = [0, \gamma]$ , avec  $\gamma \leq \alpha$ ,  $\text{Im}_b(A_1 \cap B_1)$  est réduit au point  $\alpha$ . Mais le raisonnement fait ci-dessus prouvait que  $\overline{\text{Im}_b(A_1 \cap B_1)} \cap [0, \gamma] \neq \emptyset$  ce qui entraîne que  $\alpha = \gamma$ , et on voit donc que dans ce cas aussi  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1}$  est un trou intérieur de  $A_n \cap B_m$ .

Montrons que  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1} \cup (A_n \cap B_m)$  est analytique. Si  $\alpha \in \text{Im}(A_n \cap B_m)$  alors  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1} = D(a, \alpha^-)$  est un trou de  $A_n \cap B_m$  et d'après la remarque 12.3.1.  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1} \cup (A_n \cap B_m)$  est analytique. Si  $\alpha \notin \text{Im}(A_n \cap B_m)$ , alors  $T = D(a, \alpha^+)$  est un trou de  $A_n \cap B_m$ . Mais on a vu que  $T \cap B_n \neq \emptyset$  (car  $[0, \alpha] \cap \text{Im } B_m \neq \emptyset$ ) et pour les mêmes raisons  $T \cap A_n \neq \emptyset$ . On a en particulier  $T \cap A'_n \neq \emptyset$ ,  $T \cap B'_m \neq \emptyset$ ,  $T \cap R_n \neq \emptyset$ ,  $T \cap Q_m \neq \emptyset$ . Comme  $A'_n$  et  $B'_m$  appartiennent à  $\mathcal{B}$ ,  $T \cup A'_n$  et  $T \cup B'_m$  appartiennent aussi à  $\mathcal{B}$  et donc  $(T \cup A'_n) \cap (T \cup B'_n)$  est analytique.  $T \cup R_n$  et  $T \cup Q_m$  appartiennent à  $\mathcal{R}$  et donc  $T \cup (A_n \cap B_m) = [(T \cup A'_n) \cap (T \cup B'_m)] \cap (T \cup R_n) \cap (T \cup Q_m)$  est analytique.

Comme  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1}$  est soit  $T$  soit un disque intérieur de  $T$ , il résulte de la remarque 12.3.2. que  $\Delta_1^{A_1 \cap B_1} \cup (A_n \cap B_m)$  est analytique. Un raisonnement analogue prouve que  $(A_1 \cap B_1) \cup \Delta_1^{A_1 \cap B_1}$  est analytique. (Comme étape intermédiaire on prouve que  $\alpha \in \text{Im}_a(A_1)$  et  $\alpha \in \text{Im}_a(B_1)$ .) ||

12. 9. - Fin de la démonstration de la proposition 12. 2.

Il résulte du lemme 12. 8. que la famille formée de  $A_i \cap R_i \cap B_j \cap Q_j$  non vides est faiblement enchaînée. La proposition résulte alors du corollaire 12. 5. . ||

12. 10. - PROPOSITION. - Soit  $\mathcal{B}$  une famille complètement régulière. Soient  $B \in \mathcal{B}$  et  $f$  un élément analytique sur  $B$ . Notons  $B^\circ$  l'ensemble des  $x \in B$  pour lesquels  $f(x) \neq 0$ . Alors  $1/f(x)$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B^\circ$ .

Soient  $y$  et  $z$  deux points de  $B^\circ$ . Considérons le polygone de valuation  $f$  relatif à  $y$ . Puisque  $f(y) \neq 0$ , pour  $0 \leq r \leq |y-z|$ , on a  $|f|_y(r) \geq \alpha > 0$ . Soit  $R(x)$  une fraction rationnelle approchant  $f$  à moins que  $\alpha/2$ , c'est-à-dire que  $\sup |f(x) - R(x)| \leq \alpha/2$ . Pour  $0 \leq r \leq |y-z|$  on a alors  $|R|_y(r) = |f|_y(r)$ . Comme  $R$  n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles, sauf pour un nombre fini de valeurs  $r_1, \dots, r_n$  on a pour  $|x-y| = r$ ,  $0 \leq r < |y-z|$ ,  $|R(x)| = |R|_y(r) \geq \alpha$  et donc  $|f(x)| \geq \alpha$ . Le même raisonnement relatif au point  $z$ , montre qu'il existe  $\beta > 0$ ,  $0 < r'_1 < r'_2 < \dots < r'_m < |y-z|$  tels que pour  $|x-z| = r$ ,  $0 \leq r < |y-z|$ ,  $r \neq r'_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) on a  $|f(x)| \geq \beta$ .

Notons  $Q_{y,z}$  l'ensemble des  $x \in K$  tels que l'on ait soit  $|x-y| < |y-z|$  et  $|x-y| \neq r_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), soit  $|x-z| < |y-z|$  et  $|x-z| \neq r'_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ). Il est clair que  $Q_{y,z} \in \mathcal{R}$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est complètement régulière il en résulte que  $B \cap Q_{y,z}$  appartient à  $\mathcal{B}$ . D'après ce qu'on vient de voir on a  $\inf_{x \in B \cap Q_{y,z}} |f(x)| > 0$ .

Il résulte alors de la proposition 6. 7. que  $1/f$  est un élément analytique sur  $B \cap Q_{y,z}$ . Comme il est clair que la famille  $(B \cap Q_{y,z})_{(y,z) \in B^\circ \times B^\circ}$  est enchaînée et engendre  $B^\circ$ , il en résulte que  $f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B^\circ$ . ||

12. 11. - COROLLAIRE. - Soient  $\mathcal{B}$  une famille complètement régulière et  $f$  une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B$ . Si  $B^\circ$  désigne l'ensemble des points  $x$  de  $B$  pour lesquels  $f(x) \neq 0$ ,  $1/f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B^\circ$ .

En effet si  $(B_i)_{i \in I}$  est une famille enchaînée d'éléments de  $\mathfrak{B}$  telle que  $\bigcup_{i \in I} B_i = B$  et que  $f$  soit un élément analytique sur  $B_i$ , alors  $\bigcup_{i \in I} B_i^\circ = B^\circ$  et la famille  $(B_i^\circ)$  est enchaînée (car les zéros de  $f$  sont isolés). Comme  $1/f$  est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B_i^\circ$ , c'est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$  (proposition 7.8.).  $\parallel$

12.12. - PROPOSITION. - Soient  $\mathfrak{B}$  une famille complètement régulière,  $f$  une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$  et  $g$  un élément analytique sur  $B$ , alors  $fg$  est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$ .

Considérons d'abord le cas où  $f$  et  $g$  sont tous deux des éléments analytiques sur  $B \in \mathfrak{B}$ . Pour prouver que  $fg$  est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$ , en vertu de la remarque faite au paragraphe 6.3., il suffit de prouver que le produit d'un élément analytique borné  $h$  sur  $B$  et de la fonction  $\frac{1}{x-a}$ , avec  $a \notin B$ ,  $a$  adhérent à  $B$ , est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$ . Or comme  $\mathfrak{B}$  est complètement régulière  $B \cap D(a, r)$  appartient à  $\mathfrak{B}$ . Mais pour  $r > 0$ ,  $\frac{1}{x-a}$  est bornée sur  $B \cap D(a, r)$  et donc  $\frac{h(x)}{x-a}$  est un élément analytique sur  $B \cap D(a, r)$ .  $\frac{h(x)}{x-a}$  est donc une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$ .

Si maintenant  $f$  est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$ ,  $f$  est un élément analytique sur  $B_i$ , où les  $B_i \in \mathfrak{B}$  et  $\bigcup B_i = B$ .  $fg$  est donc une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B_i$ ; c'est donc une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique sur  $B$ .  $\parallel$

12.13. - COROLLAIRE. - Si  $\mathfrak{B}$  est complètement régulière et si pour toute fonction  $f$   $\mathfrak{B}$ -analytique, la restriction de  $f$  à un ensemble  $B$  de  $\mathfrak{B}$  contenu dans le support de  $f$  est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique, alors le produit de deux fonctions  $\mathfrak{B}$ -analytiques de même support est une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique.

Ce sera en particulier le cas si  $\mathfrak{B}$  est stable par intersection ou encore le cas de la famille  $\mathfrak{G}$ .



## FONCTIONS MEROMORPHES

---

13. 1. - Deux méthodes nous permettent de définir les fonctions  $\mathcal{B}$ -méromorphes. ( $\mathcal{B}$  désigne une sous famille de  $\mathcal{A}$ ).

### Première méthode :

On procède comme dans le cas complexe. Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B$ . Soit  $a$  un point isolé de  $B$ . Si  $f$  se développe en série de Laurent au voisinage de  $a$  (ce qui sera toujours le cas si  $K$  est maximalelement complet et  $f$  définie par une famille cohérente dénombrable au voisinage de  $a$  : théorème 10. 4.) et si tous les coefficients des termes d'exposant négatif sont nuls,  $f$  se prolonge en une fonction analytique dans  $B \cup \{a\}$ ; si tous les coefficients sauf un nombre fini de termes d'exposant négatif sont nuls, sans être tous nuls, on dit que  $f$  a un pôle au point  $a$ . L'exposant le plus petit des termes à coefficient non nul, changé de signe, sera appelé l'ordre du pôle.

DEFINITION  $M_1$ . - Si  $f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B$  privé d'une famille discrète de points  $a_i$  et si pour chaque  $i$ ,  $f$  a un pôle en  $a_i$ , on dit que  $f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -méromorphe dans  $B$ .

### Deuxième méthode :

On ajoute à  $K$  le point à l'infini, soit  $\overline{K} = K \cup \{\infty\}$ ;  $\overline{K}$  est muni d'une topologie qui sur  $K$  coïncide avec celle de  $K$ , une base de voisinages du point  $\infty$  est formée des ensembles  $|x| > r$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ . On définit sur  $\overline{K}$  une structure

uniforme compatible avec sa topologie : un système fondamental d'entourages est formé des

$$V_\alpha = \{ (x, y) \in \overline{K} \times \overline{K} : (|x-y| < \alpha) \text{ ou } (|x| > \frac{1}{\alpha} \text{ et } |y| > \frac{1}{\alpha}) \} \\ \text{pour } 0 < \alpha < 1 .$$

(on pose  $|\infty| = \infty$ ). Si  $(x, y) \in V_\alpha$  nous dirons que  $x$  et  $y$  sont voisins d'ordre  $\alpha$ . Pour cette structure uniforme  $K$  est complet (puisque  $\overline{K}$  est complet pour la valuation  $|\cdot|$ ).

Enfin il est bien connu qu'une fraction rationnelle  $R(x)$  se prolonge sur  $\overline{K}$  tout entier en une fonction à valeurs dans  $\overline{K}$  uniformément continue.

DEFINITION  $M_2$ . - Soit  $A$  un ensemble analytique contenu dans  $K$ . Une limite uniforme sur  $A$  (au sens de  $\overline{K}$ ) de fractions rationnelles sera appelée un élément méromorphe sur  $A$ . Soit  $(B_i)$  une famille enchaînée d'éléments de la classe  $\mathfrak{B}$ ,  $B = \bigcup_i B_i$ , si la restriction de  $f$  sur chaque  $B_i$  est un élément méromorphe on dira que  $f$  est une fonction  $\mathfrak{B}$ -méromorphe sur  $B$ .

13.2. - LEMME. - Soit  $\mathfrak{B}$  une famille régulière. Alors une fonction  $\mathfrak{B}$ -méromorphe au sens  $M_1$  est  $\mathfrak{B}$ -méromorphe au sens  $M_2$ .

Soit donc  $f$  une fonction  $\mathfrak{B}$ -analytique au sens de  $M_1$  sur  $B$ . Soit  $B'$  l'ensemble  $B$  privé des pôles  $a_i$ . Pour chaque  $i$  il existe un disque  $D_i$  de centre  $a_i$  contenu dans  $B$  tel que dans  $D_i \setminus \{a_i\}$   $f$  se développe en série de Laurent n'ayant qu'un nombre fini de termes d'exposants négatifs.  $f$  est donc un élément méromorphe dans  $D_i$ . Donc sur  $B' \cup (\bigcup_i D_i) = B$ ,  $f$  est une fonction méromorphe.  $\parallel$

13.3. - Nous verrons par la suite (proposition 13.16.) qu'une fonction  $\mathfrak{B}$ -méromorphe au sens  $M_2$  l'est aussi au sens  $M_1$ . L'avantage de la définition  $M_2$  est qu'elle nous permet de raisonner sur les fonctions méromorphes comme nous l'avons fait sur les fonctions analytiques moyennant quelques adaptations. En

particulier, nous obtiendrons un théorème sur la répartition des pôles analogue à celui établi pour les zéros d'une fonction analytique. Auparavant, nous allons établir que certaines assertions valables pour les fonctions analytiques restent vraies pour les fonctions méromorphes. Dorénavant les fonctions considérées sont méromorphes au sens  $M_2$ .

La fonction de valuation et le polygone de valuation d'un élément méromorphe (et donc d'une fonction méromorphe) se définissent comme dans le cas des fonctions analytiques.

13. 4. - PROPOSITION. - Les fonctions  $\mathcal{Q}$ -méromorphes vérifient le principe du prolongement analytique.

Il suffit évidemment de le démontrer pour les éléments méromorphes. La démonstration est calquée sur celle de [8] théorème 1. Nous ne refaisons pas la démonstration complètement, mais indiquerons seulement les modifications à apporter.

Soit donc un élément méromorphe  $f$  sur l'ensemble  $A$  analytique, tel que  $f$  soit identiquement nul dans un ouvert contenu dans  $A$  et non identiquement nul dans  $A$ . Puisque  $A$  est analytique,  $A$  vérifie la condition  $(*)$ .

On voit comme dans la démonstration du théorème 1 de [8] qu'il existe un point  $x_0$  de  $A$  tel que le polygone de valuation de  $f$  relatif à  $x_0$  atteigne la valeur  $-\infty$  en un point  $r$  de  $\text{Im}(A)$ , mais ne soit pas confondu avec la droite d'ordonnée  $-\infty$ . Pour ce faire, ce polygone a une infinité de changement de pentes en des points  $r_1, \dots, r_n, \dots$  formant une suite monotone convergeant vers  $r$ , que nous supposerons croissante pour simplifier. Nous pouvons aussi supposer que  $x_0 = 0$ .

On peut donc trouver  $r' < r$  tel que pour  $r' < \rho < r$ , on ait  $|f|(\rho) < \frac{1}{2}$ . Alors si  $R$  est une fonction méromorphe approximant  $f$  à  $\frac{1}{2}$  près, on peut trouver  $r''$ ,  $r' < r'' < r$ , tel que  $R$  n'ait aucun pôle dans la couronne  $C : r'' < \rho < r$ , et donc  $f$  n'aura aucun pôle dans  $A \cap C$ .  $f$  est donc un élément analytique dans  $A \cap C$ , c'est-à-dire la limite uniforme dans  $A \cap C$  de fractions rationnelles sans

pôles dans  $A \cap C$ . Or précisément ce que l'on a démontré dans le théorème 1 de [8] c'est que si  $A$  vérifie la condition  $(*)$  il n'existe pas d'élément analytique dans  $A \cap C$  tel que  $|f|(\rho) \neq 0$  pour  $r'' < \rho < r$  et  $|f|(r) = 0$ . Il y a donc une contradiction, ce qui achève la démonstration.  $\parallel$

13.5. - Nous allons étudier maintenant comment sont répartis les zéros et les pôles des éléments méromorphes.

Soit  $Q(x)$  une fraction rationnelle, soit  $\Delta$  un sous-ensemble de  $K$ , nous noterons  $z_\Delta(Q)$  (ou  $z(Q)$  ou  $z_\Delta$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) et  $p_\Delta(Q)$  (ou  $p(Q)$  ou  $p_\Delta$ ) respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de  $Q$  situés dans  $\Delta$ .

Prenons pour  $\Delta$  le disque ouvert  $D(a, r^-)$ , alors la pente du polygone de valuation de  $Q$  relatif à  $a$  à gauche du point d'abscisse  $\text{Log } r$  représente  $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q)$ . Si alors la fraction rationnelle  $R(x)$  approxime  $Q$  sur  $\Delta$  à  $\alpha$  près avec  $\alpha < |Q|_a(r) < 1/\alpha$ , les polygones de  $R$  et de  $Q$  coïncident au voisinage gauche du point d'abscisse  $\text{Log } r$ , et on a donc

$$z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q) = z_\Delta(R) - p_\Delta(R).$$

On obtient le même résultat pour le disque fermé  $\Delta = D(a, r^+)$  en raisonnant séparément sur chacun des disques intérieurs de  $\Delta$  et en remarquant que quel que soit le point  $b$  de  $\Delta$  on a alors

$$|Q|_b(r) = |Q|_a(r).$$

Si  $\Delta$  est la couronne ouverte  $r < |x-a| < r'$ , la différence des pentes du polygone de  $Q$  à gauche de  $\text{Log } r'$  et à droite de  $\text{Log } r$  nous donne  $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q)$ . Si donc  $R$  approxime  $Q$  sur  $\Delta$  à  $\alpha$  près avec

$$\alpha < \inf(|Q|_a(r), |Q|_a(r')) \leq \max(|Q|_a(r), |Q|_a(r')) < \frac{1}{\alpha},$$

on voit que les polygones de  $Q$  et  $R$  coïncident au voisinage droit de  $\text{Log } r$  et au voisinage gauche de  $\text{Log } r'$  et donc  $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q) = z_\Delta(R) - p_\Delta(R)$ . On

obtient un résultat analogue sur les couronnes fermées ou semi-fermées en raisonnant séparément sur la couronne ouverte "intérieure" et les disques intérieurs des cercles "frontière". Nous allons améliorer ces résultats.

13. 6. - LEMME. - Soient Q une fraction rationnelle,  $\Delta$  le disque  $D(a, r)$  (resp. la couronne :  $r < |x-a| < r'$ ), soit R une fraction rationnelle approximant uniformément Q sur  $\Delta$  à  $\alpha$  près avec  $\alpha < |Q|_a(r) < 1/\alpha$  (resp.  $\alpha < \inf (|Q|_a(r), |Q|_a(r')) \leq \max (|Q|_a(r), |Q|_a(r')) < 1/\alpha$ ), on a alors  $z_\Delta(Q) = z_\Delta(R)$ ,  $p_\Delta(Q) = p_\Delta(R)$ .

On sait déjà que  $z_\Delta(Q) - p_\Delta(Q) = z_\Delta(R) - p_\Delta(R)$ .

Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre  $z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q)$  de pôles et de zéros de Q dans  $\Delta$ .

Remarquons d'abord que si  $p_\Delta(Q) = 0$ ,  $\sup_{x \in \Delta} Q(x) = Q_a(r)$  pour le disque (resp.  $\sup_{x \in \Delta} |Q(x)| = \max(|Q|_a(r), |Q|_a(r'))$  pour la couronne). Il en résulte que l'on a  $\sup_{x \in \Delta} |R(x)| = \sup_{x \in \Delta} |Q(x)| \leq 1/\alpha$ , donc  $p_\Delta(R) = 0$  et alors  $z_\Delta(Q) = z_\Delta(R)$ . De même si  $z_\Delta(Q) = 0$ ,

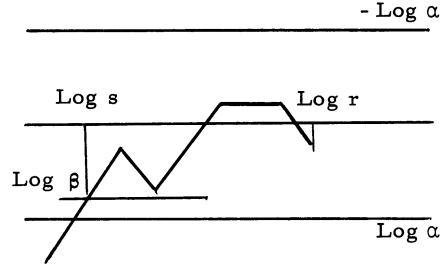
$$\inf_{x \in \Delta} |Q(x)| = |Q|_a(r) \quad (\text{resp.} \quad \inf_{x \in \Delta} |Q(x)| = \inf (|Q|_a(r), |Q|_a(r')))$$

et donc  $\inf_{x \in \Delta} |R(x)| = \inf_{x \in \Delta} |Q(x)| > \alpha$ , donc  $z_\Delta(R) = 0$  et alors  $p_\Delta(Q) = p_\Delta(R)$ .

La propriété est donc prouvée pour  $z_\Delta(Q)$ ,  $p_\Delta(Q) = 0$  et donc en particulier pour  $z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) = 0$  ou 1.

Supposons alors la propriété prouvée pour  $z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) \leq n$  (et ce pour toute fraction rationnelle et tout disque ou couronne), et soient  $\Delta$  et Q avec  $z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) = n+1$ . D'après ce qu'on vient de voir on peut supposer que Q a au moins un zéro et au moins un pôle dans  $\Delta$ .

Soit d'abord  $\Delta = D(a, r^-)$  et supposons  $p_\Delta(Q) \geq z_\Delta(Q)$ . Soit  $b$  un zéro de  $Q$  dans  $\Delta$ . Comme  $|Q|_b(0) = 0$ , étant donné  $\beta$  avec  $\alpha < \beta < |Q|_b(r) = |Q|_a(r)$ , il existe  $s$  avec  $0 < s < r$  tel que  $|Q|_b(s) = \beta$ . Comme d'autre part, le polygone de  $Q$  a une pente négative ou nulle à gauche du point  $r$ , il doit avoir un changement de pente entre  $s$  et  $r$ . Dans le disque  $\Delta' = D(b, s^-)$   $Q$  a donc au moins un zéro (à savoir  $b$ ) et dans la couronne  $\Delta'' : s \leq |x-b| < r$ ,


 Polygone de  $Q$  relatif à  $b$ 

$Q$  a au moins un pôle. Comme

$z_{\Delta'}(Q) + p_{\Delta'}(Q) + z_{\Delta''}(Q) + p_{\Delta''}(Q) = z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q)$  on a  $z_{\Delta'}(Q) + p_{\Delta'}(Q) \leq n$  et  $z_{\Delta''}(Q) + p_{\Delta''}(Q) \leq n$ . Comme d'autre part  $\alpha < |Q|_b(s) < |Q|_b(r) < 1/\alpha$ , d'après l'hypothèse de récurrence

$z_{\Delta'}(R) = z_{\Delta'}(Q)$ ,  $p_{\Delta'}(R) = p_{\Delta'}(Q)$ ,  $z_{\Delta''}(R) = z_{\Delta''}(Q)$ ,  $p_{\Delta''}(R) = p_{\Delta''}(Q)$ , et donc  $z_\Delta(R) = z_\Delta(Q)$  et  $p_\Delta(R) = p_\Delta(Q)$ .

Dans le cas où  $p_\Delta(Q) < z_\Delta(Q)$  on raisonne de même en considérant un pôle  $b$  de  $Q$  et en prenant  $1/\alpha > \beta > |Q|_a(r)$ .

Si  $\Delta = D(a, r^+)$  on raisonne séparément sur chacun des disques intérieurs  $\Delta_i$  de  $\Delta$  où l'on a bien sûr

$$z_{\Delta_i}(Q) + p_{\Delta_i}(Q) \leq z_\Delta(Q) + p_\Delta(Q) = n+1.$$

Supposons alors que  $\Delta$  est la couronne  $r < |x-a| < r'$ . Soit  $\beta = \inf(|Q|_a(r), |Q|_a(r'))$ ,  $\beta' = \max(|Q|_a(r), |Q|_a(r'))$ .

On peut trouver un nombre fini de nombres  $r = r_1 < r_2 < \dots < r_n = r'$  tels que  $|Q|_a(r_i) = \beta$  ou  $\beta'$  et que dans l'intervalle  $]r_i, r_{i+1}[$  on ait toujours  $|Q|_a(\rho) > \beta'$  ou toujours  $|Q|_a(\rho) < \beta$  ou toujours  $\beta \leq |Q|_a(\rho) \leq \beta'$

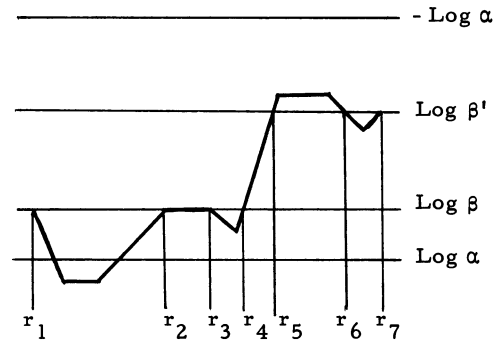
On peut alors partager la couronne  $\Delta$  en les couronnes

$\Delta_i$   $r_i < |x-a| < r_{i+1}$  et les cercles  $C_i(a, r_i)$ . On a bien

$$z_{\Delta_i}(Q) + p_{\Delta_i}(Q) \leq z_{\Delta}(Q) + p_{\Delta}(Q) = n+1$$

$$z_{C_i}(Q) + p_{C_i}(Q) \leq z_{\Delta}(Q) + p_{\Delta}(Q) = n+1$$

pour ce qui est des cercles on raisonne sur chacun des disques intérieurs séparément et la propriété résulte de ce qu'on vient de voir ci-dessus. Il reste donc à étudier les trois cas :



Polygone de  $Q$  relatif à  $a$

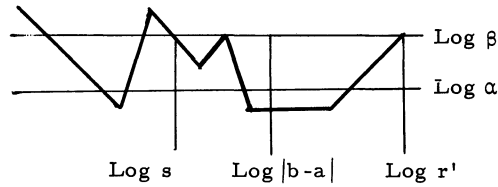
- Dans la couronne  $\Delta$  :  $r < |x-a| < r'$ , pour  $r < \rho < r'$  on a

$$\alpha < \inf(|Q|_a(r), |Q|_a(r')) \leq |Q|_a(\rho) \leq \sup(|Q|_a(r), |Q|_a(r')) < \frac{1}{\alpha}.$$

Si tous les zéros et les pôles de  $Q$  ne sont pas situés sur un même cercle de centre  $a$ , on peut trouver  $r''$ , avec  $r < r'' < r'$  tel que dans la couronne  $\Delta''$ ,  $r'' < |x-a| < r'$ . Si  $C$  est le cercle  $C(a, r'')$ , on voit que  $z_{\Delta''}(Q) + p_{\Delta''}(Q) \leq n$ ,  $z_C(Q) + p_C(Q) \leq n$  et  $z_{\Delta''}(Q) + p_{\Delta''}(Q) \leq n$ , comme d'autre part  $\alpha < |Q|_a(r'') < 1/\alpha$ , on a  $z_{\Delta''}(R) = z_{\Delta''}(Q)$ ,  $p_{\Delta''}(R) = p_{\Delta''}(Q)$ , ... et donc  $z_{\Delta}(R) = z_{\Delta}(Q)$  et  $p_{\Delta}(R) = p_{\Delta}(Q)$ . Si tous les zéros et pôles de  $Q$  sont sur le cercle  $C = C(a, r'')$ , alors  $z_{\Delta}(Q) = p_{\Delta}(Q) = z_{\Delta''}(Q) = p_{\Delta''}(Q) = 0$  et il en est donc de même pour  $R$ . Pour le cercle, on obtient  $z_C(Q) = z_C(R)$  et  $p_C(Q) = p_C(R)$  en raisonnant sur les disques intérieurs ainsi qu'on l'a déjà dit. D'où encore  $z_{\Delta}(Q) = z_{\Delta}(R)$  et  $p_{\Delta}(Q) = p_{\Delta}(R)$ .

- Dans la couronne  $\Delta$  :  $r < |x-a| < r'$ , pour  $r < \rho < r'$  on a  $|Q|_a(\rho) < \beta$  et  $|Q|_a(r) = |Q|_a(r') = \beta$ . Alors le polygone de valuation de  $Q$  relatif à  $a$  nécessairement une pente négative à droite de  $\text{Log } r$  et une pente positive à gauche de  $\text{Log } r'$  donc plus de zéros que de pôles :  $z_{\Delta}(Q) > p_{\Delta}(Q)$ . Soit  $b$  un pôle de  $Q$  dans  $\Delta$  (s'il n'y en a pas on a déjà résolu le problème).

Comme  $|Q|_b(0) = +\infty$ , que  
 $|Q|_b(\rho) < \rho < \beta$  pour  
 $|b-a| < \rho < r'$ , il existe  $s$ ,  
 $0 < s < |b-a|$ , tel que  
 $|Q|_b(\rho) = \beta$  et  $|Q|_b(\rho) < a$   
 pour  $s < \rho < r'$  et  
 $|Q|_b(\rho) \geq \beta$  au voisinage  
 gauche de  $s$ .



Le polygone de  $Q$

Polygone de  $Q$  relatif à  $b$

relatif à  $b$  a alors une pente  
 négative ou nulle à gauche de

$\text{Log } s$  et donc dans le disque  $D = D(b, s^-)$ ,  $p_D(Q) \geq z_D(Q)$  et donc  
 $p_D(Q) + z_D(Q) < p_\Delta(Q) + z_\Delta(Q)$ , donc  $p_D(Q) + z_D(Q) \leq n$ . Comme d'autre part  
 $\alpha < |Q|_b(s) = \beta < 1/\alpha$ , on a donc  $p_D(Q) = p_D(R)$ . En raisonnant de même avec  
 les autres pôles de  $Q$  situés dans  $\Delta$  on trouve un nombre fini de cercles  
 $D_1, \dots, D_m$  (qui peuvent coïncider pour des pôles différents) et pour lesquels on  
 a  $p_{D_i}(Q) = p_{D_i}(R)$ . D'autre part pour  $x \in \Delta$ ,  $x \notin D_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , on a

$|Q(x)| \leq \beta$ ; en effet, si

$\beta < |Q(x_0)| < +\infty$  comme au

voisinage de  $x_0$ ,  $|Q(x)|$

reste constant, et que

$|Q|_{x_0}(|x_0 - a|) = |Q|_a(|x_0 - a|) < \beta$

le polygone doit avoir un change-

ment de pente négatif au-dessus

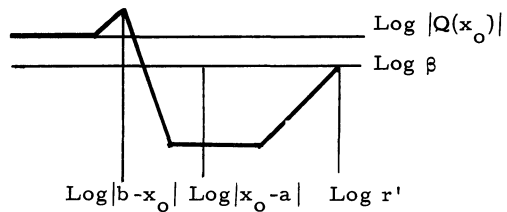
de la droite d'ordonnée  $\text{Log } \beta$ ,

donc  $Q$  a un pôle en  $b$  tel que

$|Q|_{x_0}(|b - x_0|) > \beta$ , donc

$|Q|_b(|b - x_0|) > \beta$  ce qui prouve

que  $x_0$  appartient au disque  $D(b, s^-)$ .



Polygone de  $Q$  relatif à  $x_0$

Puisque  $\sup_{x \in \Delta \cap \bigcup_i D_i} |Q(x)| \leq \beta < 1/\alpha$ , on a aussi  $\sup_{x \in \Delta \cap \bigcup_i D_i} |R(x)| \leq \beta$ ,

donc  $R$  n'a pas de pôles dans  $\Delta \cap \bigcup_i D_i$ . Donc :



$$p_{\Delta}(R) = \sum_i p_{D_i}(R) = \sum_i p_{D_i}(Q) = p_{\Delta}(Q)$$

et puisque  $z_{\Delta}(Q) - p_{\Delta}(Q) = z_{\Delta}(R) - p_{\Delta}(R)$  on a aussi  $z_{\Delta}(Q) = z_{\Delta}(R)$ .

- Dans la couronne  $\Delta : r < |x-a| < r'$ , pour  $r < \rho < r'$  on a  $|Q|_a(\rho) > \beta'$  et  $|Q|_a(r) = |Q|_a(r') = \beta'$ .

Le même raisonnement que dans le cas précédent, où on permute le rôle des zéros et des pôles, nous prouve que la propriété annoncée est encore vérifiée.

Enfin si  $\Delta$  est une couronne semi-fermée ou fermée, la propriété se démontre en considérant séparément la couronne ouverte et les disques intérieurs des cercles extrémaux. ||

13.7. - THEOREME. - Soit  $f$  un élément méromorphe non identiquement nul ou infini sur un disque ou une couronne  $\Delta$ . Il existe une fraction rationnelle  $Q$  et un élément méromorphe  $g$  sur  $\Delta$  sans pôles ni zéros dans  $\Delta$ , tel que  $f = Qg$ .

De plus, si la fraction rationnelle  $R$  approxime  $f$  suffisamment sur  $\Delta$ ,  $R$  et  $f$  ont même nombre de pôles et de zéros et si la suite  $R_n$  converge uniformément sur  $\Delta$  vers  $f$ , les pôles et les zéros de  $f$  sont les limites des pôles et zéros des  $R_n$ .

Soit  $\Delta$  le disque  $D(0, r)$  (resp. la couronne  $r' < |x| < r$ ), et soit  $R_n$  une suite de fractions rationnelles convergeant vers  $f$  uniformément sur  $\Delta$  (au sens de  $\overline{\mathbb{K}}$ ). Remarquons d'abord qu'il résulte de la proposition 13.4. que l'on a  $0 < |f|(r) < +\infty$  (resp.  $0 < \inf_{r' \leq \rho \leq r} (|f|(\rho)) \leq \sup_{r' \leq \rho \leq r} (|f|(\rho)) < +\infty$ ), sauf éventuellement si  $r' = 0$  mais alors  $f$  se prolonge dans tout le disque  $D(0, r)$  en un élément méromorphe et on est ramené au cas précédent).

Soit alors  $\alpha$  tel que  $\alpha < |f|(r) < 1/\alpha$  (resp.  $\alpha < \inf_{r' \leq \rho \leq r} (|f|(\rho)) \leq \sup_{r' \leq \rho \leq r} (|f|(\rho)) < 1/\alpha$ ). Soit  $R$  une fraction rationnelle

approximant  $f$  uniformément sur  $\Delta$  à  $\alpha$  près. Comme alors pour  $\rho$  tel que  $\alpha < |f|(\rho) < 1/\alpha$  on a  $|f|(\rho) = |R|(\rho)$ ,  $R$  vérifie la condition précédente. Si  $R'$  approxime aussi  $f$  à  $\alpha$  près,  $R'$  approxime  $R$  à  $\alpha$  près et en vertu du lemme 13.6. on voit que  $R$  et  $R'$  ont le même nombre  $z$  de zéros et le même nombre  $p$  de pôles dans  $\Delta$ .

Posons  $\beta = |f|(r)$  (resp.  $\beta = \inf_{r' \leq \rho \leq r} |f|(\rho)$ ). Soit  $a$  un zéro de  $R$  et considérons le polygone de valuation de  $R$  relatif à  $a$ .

- Cas où  $\Delta$  est un disque.

Alors pour  $\rho < r$ , le polygone a une pente toujours inférieure ou égale à  $z$ , et donc le polygone de  $R$  est situé au-dessus de la droite de pente  $z$  passant par le point de coordonnées  $(\text{Log } r, \text{Log } \beta)$ .

On a donc pour  $0 < \rho < r$

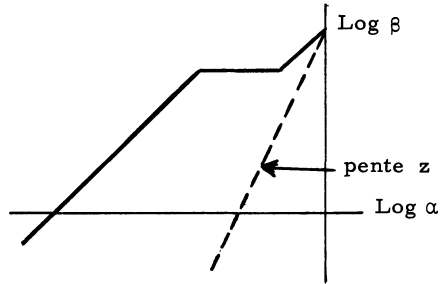
$$|R|_a(\rho) \geq \beta \left(\frac{\rho}{r}\right)^z$$

et donc pour  $\rho = r \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z}$ , on a  $|R|_a(\rho) \geq 2\alpha > \alpha$ .

Donc il existe  $\eta \leq r \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z}$  tel que  $\alpha < |R|_a(\eta) < 1/\alpha$ .

Si  $R'$  approxime aussi  $f$  (et donc  $R$ ) à  $\alpha$  près sur  $\Delta$  il résulte du lemme 13.6. que  $R$  et  $R'$  ont autant de zéros dans le disque  $D(a, \eta)$ . En raisonnant ainsi pour tous les zéros de  $R$ , on voit qu'on peut trouver un nombre fini de disques de diamètres inférieurs à  $r \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z}$ , contenus dans  $\Delta$ , dans lesquels  $R$  et  $R'$  ont exactement le même nombre de zéros, et qui contiennent tous les zéros de  $R$  (et  $R'$ ). On peut donc numérotter les zéros de  $R$  et  $R'$ , à savoir  $a_1, \dots, a_z$ ,  $a'_1, \dots, a'_z$  de telle sorte que

$$|a_k - a'_k| < r \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/z}, \quad 1 \leq k \leq z.$$



Polygone de  $R$  relatif à  $a$   
(cas du disque)

- Cas où  $\Delta$  est une couronne.

Alors pour  $\rho < |a|$  le polygone de  $R$  relatif à  $a$  est situé au-dessus de la droite de pente  $z$  passant par le point  $(\text{Log } |a|, \text{Log } |R|(|a|))$ , il est donc au-dessus de la droite de pente  $z$  passant par le point  $(\text{Log } r, \text{Log } \beta)$  puisque  $\text{Log } r \geq \text{Log } |a|$  et  $\text{Log } |R|(|a|) > \text{Log } \beta$  donc  $|R|_a(\rho) > \beta \left(\frac{\rho}{r}\right)^z$ , et il existe

$$\eta \leq \inf \left( r \left( \frac{2\alpha}{\beta} \right)^{1/z}, |a| \right)$$

tel que  $\alpha < |R|_a(\eta) < 1/\alpha$ .

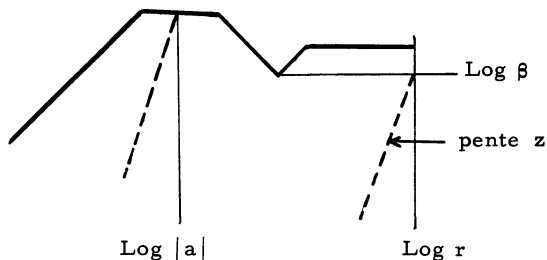
Le disque  $D(a, \eta)$  est alors contenu dans  $\Delta$  et le raisonnement se termine comme dans le cas du disque.

On démontre de la même façon que l'on peut numérotter les  $p$  pôles de  $R$  et  $R'$ , à savoir

$b_1, \dots, b_p, b'_1, \dots, b'_p$ , de telle sorte que

$$|b_j - b'_j| < r(2\alpha\beta')^{1/p} \text{ avec}$$

$$\beta' = |f|(r) \text{ (resp. } \beta' = \sup_{r' \leq \rho \leq r} |f|(\rho)).$$



Polygone de  $R$  relatif à  $a$   
(cas de la couronne)

Soit alors  $(\alpha_n)$  une suite de nombres tendant vers 0 en décroissant, et soit  $(R_n(x))$  une suite de fractions rationnelles telles que  $R_n$  approche  $f$  à  $\alpha_n$  près sur  $\Delta$ . D'après ce qu'on vient de voir à partir d'un certain rang  $N$  tous les  $R_n$  ont le même nombre de zéros et de pôles, et on peut numérotter les zéros et les pôles de  $R_n$  soit,  $a_1^n, \dots, a_z^n, b_1^n, \dots, b_p^n$ , de sorte que l'on ait

$$|a_i^n - a_i^{n+1}| < r \left( 2 \frac{\alpha_n}{\beta} \right)^{1/z} \quad 1 \leq i \leq z,$$

$$|b_j^n - b_j^{n+1}| < r (2\alpha_n \beta')^{1/p} \quad 1 \leq j \leq p.$$

Les suites  $(a_i^n)_n$  et  $(b_j^n)_n$  forment donc des suites de Cauchy puisque  $K$  est complet, ces suites convergent vers des limites  $a_i$  et  $b_j$ ;  $\Delta$  étant fermé  $a_i$  et  $b_j$  appartiennent à  $\Delta$ .

D'autre part puisque  $R_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\Delta$ , on a  $f(a_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a_i^n) = 0$ ,  $f(b_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(b_j^n) = \infty$ , ce qui montre que les  $a_i$  et les  $b_j$  sont des zéros et des pôles de  $f$  respectivement et donc que  $\inf_{i,j} |a_i - b_j| > 0$ .

Posons alors

$$Q_n(x) = \frac{\prod_i (x - a_i^n)}{\prod_j (x - b_j^n)}, \quad Q(x) = \frac{\prod_i (x - a_i)}{\prod_j (x - b_j)}.$$

Nous montrerons plus loin (lemme 13.8.) que  $Q_n$  converge uniformément sur  $\bar{K}$  de  $Q$ . Ecrivons  $R_n(x) = Q_n(x) P_n(x)$ .  $P_n(x)$  n'a ni zéros ni pôles dans  $\Delta$ . On a donc si  $\Delta$  est un disque

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Delta} |P_n(x) - P_{n+1}(x)| &= |P_n - P_{n+1}|(r) = \left| \frac{R_n}{Q_n} - \frac{R_{n+1}}{Q_{n+1}} \right|(r) \\ &= \left| \frac{R_n - R_{n+1}}{Q_n} + \frac{R_{n+1}(Q_{n+1} - Q_n)}{Q_n Q_{n+1}} \right|(r) \\ &\leq \max \left( \frac{|R_n - R_{n+1}|(r)}{|Q_n|(r)}, \frac{|R_{n+1}|(r)}{|Q_n|(r) |Q_{n+1}|(r)} |Q_{n+1} - Q_n|(r) \right) \end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  puisque  $R_n$  et  $Q_n$  convergent uniformément sur  $\Delta$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et que  $|R_n|(r)$  et  $1/|Q_n|(r)$  sont bornés.

Dans le cas de la couronne on a

$$\sup_{x \in \Delta} |P_n(x) - P_{n+1}(x)| = \max(|P_n - P_{n+1}|(r'), |P_n - P_{n+1}|(r)),$$

et le même calcul montre que cette dernière quantité tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ .

Il en résulte que la fraction rationnelle  $P_n$  converge uniformément sur  $\Delta$  vers un élément méromorphe  $g$ . On a d'autre part pour tout  $x \in \Delta$

$|P_n(x)| = |P_n|(r)$  et donc  $|g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n|(r) \neq 0, \neq \infty$ ,  $g$  n'a donc ni zéro ni pôle dans  $\Delta$ .

On a bien  $f = \lim_n R_n = \lim_n Q_n P_n = \lim_n Q_n \lim_n P_n = Qg$ .  $\parallel$

13.8. - Prouvons le lemme annoncé.

LEMME. - Si l'on a  $z+p$  suites  $(a_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$   $1 \leq i \leq z$ , et  $(b_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $1 \leq j \leq p$ , convergeant vers les limites  $a_i$  et  $b_j$  (différentes de l'infini) telles que  
 $\inf_{i,j} |a_i - b_j| \neq 0$ , la suite de fractions rationnelles

$$Q_n(x) = \frac{\prod_{i=1}^z (x - a_i^n)}{\prod_{j=1}^p (x - b_j^n)},$$

converge uniformément sur  $\bar{K}$  vers la limite

$$Q(x) = \frac{\prod_i (x - a_i)}{\prod_j (x - b_j)}$$

(Remarquons que si  $a^n \rightarrow a$  et  $b^n \rightarrow a$ ,  $\frac{x - a^n}{x - b^n}$  ne converge pas uniformément vers 1 sauf si  $a^n = b^n$  pour tout  $n$  assez grand).

Donnons-nous  $\alpha < 1$ , il faut prouver qu'il existe  $N$  tel que pour  $n > N$ , et pour tout  $x \in K$ ,  $Q_n(x)$  et  $Q(x)$  soient voisins d'ordre  $\alpha$ .

Soit  $\gamma > |a_i|$ ,  $\gamma > |b_j|$  pour tous  $i$  et  $j$ . On peut trouver  $N$  tel que pour  $n > N$  on ait  $\gamma > |a_i^n|$  et  $\gamma > |b_j^n|$  pour tous  $i$  et  $j$ , alors pour  $|x| > \gamma$  on aura

$$|Q_n(x)| = |Q(x)| = |x|^{z-p}$$

Si  $z > p$ , on aura pour  $|x| > \max(\gamma, (\frac{1}{\alpha})^{1/(z-p)})$ ,

$$|Q_n(x)| > \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad |Q(x)| > \frac{1}{\alpha}$$

donc  $Q_n(x)$  et  $Q(x)$  sont voisins d'ordre  $\alpha$ .

Si  $z < p$ , on aura pour  $|x| > \max(\gamma, (\frac{1}{\alpha})^{1/p-z})$

$$|Q_n(x)| < \alpha \quad \text{et} \quad |Q(x)| < \alpha,$$

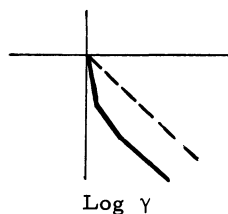
donc  $|Q_n(x) - Q(x)| < \alpha$ ,  $Q_n(x)$  et  $Q(x)$  sont voisins d'ordre  $\alpha$ .

Si  $z = p$ ,  $Q_n - Q = P_n$  est une fraction rationnelle dont le numérateur a un degré inférieur à celui du dénominateur, qui n'a pas de pôles dans la couronne  $|x| > \gamma$ , et telle que  $|P_n|(\gamma) \leq 1$ , le polygone de  $P_n$  étant convexe pour  $r > \gamma$ ,

on aura  $|P_n|(r) \leq \frac{\gamma}{r}$ , et

donc pour  $|x| \geq \frac{\gamma}{\alpha}$ ,

$$|P_n(x)| = |P_n|(|x|) \leq \frac{\gamma}{|x|} \leq \alpha.$$



En résumé, on peut trouver  $N$  et  $\beta$  tels que  $n > N$  et  $|x| > \beta$  impliquent que  $Q_n(x)$  et  $Q(x)$  soient voisins d'ordre  $\alpha$ .

Voyons ce qui se passe pour  $x \leq \beta$ .

Soient  $\delta < \inf_{i,j} |a_i - b_j|$ ,  $\lambda = \max(\sup_{i,k} |a_i - a_k|, \sup_{j,\ell} |b_j - b_\ell|)$

$\mu = \inf(\delta, \alpha \frac{\delta^p}{\lambda^{z-1}}, \alpha \frac{\delta^z}{\lambda^{p-1}}, \lambda)$  et soit  $N' > N$  tel que pour  $n > N'$ ,

$|a_i^n - a_i| < \mu$ ,  $|b_j^n - b_j| < \mu$ . Alors on a  $|a_i^n - b_j^n| > \delta$  et  $|b_j^n - a_i^n| > \delta$  pour tous

$i$  et  $j$ ,  $n > N'$ ; et pour tous  $ijkl$  et  $n > N'$

$$|a_i^n - a_k^n| < \lambda, \quad |b_j^n - b_\ell^n| < \lambda.$$

On a donc pour  $|x - a_i| < \mu$

$$|Q(x)| < \mu \frac{\lambda^{z-1}}{\delta^p} < \alpha \quad \text{et} \quad |Q_n(x)| < \alpha,$$

donc  $|Q(x) - Q_n(x)| < \alpha$ , et on a pour  $|x - b_j| < \mu$

$$|Q(x)| > \frac{\delta^z}{\mu \lambda^{p-1}} > \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad |Q_n(x)| > \frac{\delta^z}{\mu \lambda^{p-1}} > \frac{1}{\alpha}.$$

Donc dans  $D = (\cup D(a_i, \mu^-)) \cup (\cup D(b_j, \mu^-))$ , pour  $n > N'$ ,  $Q_n(x)$  approxime  $Q(x)$  uniformément à  $\alpha$  près.

Il reste à voir ce qui se passe dans  $D(0, \beta^+) \cap \complement D$ .

Soient  $S_n$ ,  $S$  les numérateurs de  $Q_n$ ,  $Q$  et  $T_n$ ,  $T$  les dénominateurs de  $Q_n$ ,  $Q$ . Posons  $a_i^n = a_i + \varepsilon_i^n$ ,  $b_j^n = b_j + \varepsilon_{z+j}^n$ . Alors

$$Q_n(x) - Q(x) = \frac{S_n(x) T(x) - S(x) T_n(x)}{S_n(x) S(x)} = \frac{P(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_{z+p}^n)}{S_n(x) S(x)}$$

où  $P$  est un polynôme en  $\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_{z+p}^n$  sans terme constant et à coefficients fonctions polynômes de  $x$ . On a, pour  $x \in D(0, \beta^+) \cap \complement D$  et  $n > N'$ ,  $|S_n(x)| = |S(x)| > \mu^P$ . Comme  $|x| < \beta$ , les coefficients de  $P$  sont bornés uniformément en  $x$ , et pour  $|\varepsilon_k^n|$  assez petit,  $1 \leq k \leq z+p$ , ou encore  $n > N'' > N'$ ; on aura

$$|P(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_{z+p}^n)| < \frac{\alpha}{\mu^{2p}}, \quad \text{et donc}$$

$$|Q_n(x) - Q(x)| < \alpha.$$

Finalement pour  $n > N''$ ,  $Q_n(x)$  approxime  $Q(x)$  à  $\alpha$  près dans  $\bar{K}$ . ||

13.9. - COROLLAIRE. - Si  $f$  est un élément méromorphe sur un disque ou une couronne  $f$  est le quotient de deux éléments analytiques.

En effet, il résulte de la démonstration que  $g$  est un élément analytique (on a la convergence uniforme de  $P_n$  vers  $g$  au sens ordinaire). Donc

$$f = \varphi / \psi \quad \text{avec} \quad \varphi = g \prod_{i=1}^z (x - a_i) \quad \psi = \prod_{j=1}^p (x - b_j). \quad ||$$

13. 10. - COROLLAIRE (Théorème de factorisation) - Soit  $f$  un élément analytique sur un ensemble  $A$ . Si le cercle  $C(y, r)$  est contenu dans  $A$  et si  $r$  est un point intérieur de  $\text{Pr}_y(A)$ , si  $m$  est le changement de pente du polygone de valuation  $f$  relatif à  $y$  au point d'abscisse  $\text{Log } r$  ( $m$  peut être nul),  $f$  a exactement  $m$  zéros (éventuellement confondus) dans ce cercle. Si  $(a_k)$  sont ces zéros on peut décomposer  $f$  sous la forme

$$f(x) = (x-a_1) \dots (x-a_m) g(x)$$

où  $g$  est un élément analytique sur  $A$  ne s'annulant pas sur le cercle  $C(y, r)$ .

En effet un élément analytique est un élément méromorphe (la convergence uniforme au sens ordinaire entraînant la convergence uniforme au sens de  $\bar{K}$ ). De plus  $f$  n'a pas de pôles. Or si  $R$  approxime  $f$  suffisamment, au voisinage du point d'abscisse  $\text{Log } r$  son polygone de valuation relatif à  $y$  coïncidera avec celui de  $f$ , et le changement de pente  $m$  prouve que  $R$  a  $m$  zéros sur le cercle  $C(y, r)$  donc  $f$  aussi. Nous savons aussi que  $f$  se décompose sur ce cercle sous la forme  $f(x) = Q(x) g(x)$ , où  $Q(x) = (x-a_1) \dots (x-a_m)$  et  $g(x)$  est un élément analytique sur  $C(y, r)$ , il faut vérifier que cette décomposition est vraie sur tout  $A$ .

Or si l'on considère la suite de fractions rationnelles sans pôles dans  $A$ , telle que  $\sup_{x \in A} |R_n(x) - f(x)| = \alpha_n$ ,  $\alpha_n$  tendant vers 0, et si l'on écrit  $R_n = Q_n P_n$ ,  $Q_n(x) = (x-a_1^n) \dots (x-a_m^n)$ ,  $(a_k^n)$  étant les zéros de  $R_n$  situé dans le cercle  $C(y, r)$  on a vu que  $P_n$  convergeait uniformément vers  $g$  sur  $C(y, r)$ , montrons que  $P_n$  converge uniformément sur  $A$  vers un élément analytique  $g$ . Or dans  $\bigcap C(y, r) \frac{1}{Q_n}$  converge uniformément vers  $\frac{1}{Q}$ . Donc dans  $A \cap C(y, r)$  on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A \cap \bigcap C(y, r)} |P_n(x) - P_{n+1}(x)| &\leq \\ \sup_{x \in A \cap \bigcap C(y, r)} |(R_n(x) - R_{n+1}(x)) \frac{1}{Q_n(x)} - R_{n+1}(x) (\frac{1}{Q_n(x)} - \frac{1}{Q_{n+1}(x)})| \end{aligned}$$

et ceci tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , donc la suite  $P_n$  converge uniformément sur  $A \cap \bigcap C(y, r)$ , donc converge uniformément sur  $A$  vers l'élément analytique  $g$ . ||



Habituellement ce théorème est démontré pour les éléments analytiques. dans les couronnes en utilisant des techniques de séries entières [6].

13. 11. - PROPOSITION (Continuité des zéros et des pôles). - Soit  $f$  un élément méromorphe sur  $\Delta$ , non identiquement nul ou infini, où  $\Delta$  est le disque  $D(0, r)$  (resp. la couronne  $0 < r' < |x| < r$ ) . Posons  $\beta = \beta' = |f|(r)$  (resp.  $\beta = \inf_{r' \leq \rho \leq r} |f|(\rho)$  et  $\beta' = \sup_{r' \leq \rho \leq r} |f|(\rho)$  (on a  $0 < \beta \leq \beta' < +\infty$ ).

Soit  $\alpha$  avec  $0 < \alpha < \beta \leq \beta' < 1/\alpha$ . Si  $g$  est un élément méromorphe sur  $\Delta$  qui approche  $f$  uniformément sur  $\Delta$  à  $\alpha$  près,  $g$  a le même nombre  $z$  de zéros et le même nombre  $p$  de pôles que  $f$  dans  $\Delta$ . On peut faire correspondre les zéros  $a_i$  et  $a'_i$  et les pôles  $b_j$  et  $b'_j$  de  $f$  et  $g$  respectivement de sorte que l'on ait :

$$\begin{aligned} |a_i - a'_i| &< r \left(2 \frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/z} & 1 \leq i \leq z \\ |b_j - b'_j| &< r (2\alpha\beta)^{1/z} & 1 \leq j \leq p \end{aligned}$$

Cette proposition résulte directement de la démonstration du théorème 13. 7.. Si  $R_n$  et  $Q_n$  sont des fractions rationnelles qui approchent  $f$  et  $g$  respectivement à  $\alpha$  près sur  $\Delta$ , alors  $R_n$  et  $Q_n$  sont proches d'ordre  $\alpha$  et les estimations précédentes ont été établies en 13. 7. pour les zéros et les pôles de  $R_n$  et  $Q_n$ . Si  $R_n$  et  $Q_n$  convergent uniformément sur  $\Delta$  vers  $f$  et  $g$  respectivement les estimations restent vraies à la limite pour les zéros et les pôles de  $f$  et  $g$  qui sont limites des zéros et pôles de  $R_n$  et  $Q_n$ . ||

13. 12. - PROPOSITION. - La limite uniforme sur  $A$  d'une suite d'éléments méromorphes sur  $A$  est un élément méromorphe sur  $A$ .

On applique le procédé diagonal. ||

13. 13. - PROPOSITION. - Soit  $f$  un élément méromorphe sur  $A$  prenant ses valeurs dans  $B \subset \bar{K}$ , et soit  $g$  un élément méromorphe sur  $B$ . Alors  $g \circ f$  est un élément méromorphe sur  $A$ .

On voit d'abord que si  $g$  est une fraction rationnelle  $Q$ , et si la suite de fractions rationnelles  $R_n$  converge uniformément sur  $A$  vers  $f$ , comme  $Q$  est uniformément continue,  $Q \circ R_n$  converge uniformément vers  $Q \circ f$  qui est un élément méromorphe sur  $A$ . Si alors la suite  $(Q_n)$  converge uniformément sur  $B$  vers  $g$ ,  $Q_n \circ f$ , qui est un élément méromorphe, converge uniformément sur  $A$  vers  $g \circ f$  qui est donc un élément méromorphe sur  $A$ . ||

13. 14. - COROLLAIRE. - L'inverse d'un élément méromorphe méromorphe.

13. 15. - Comme l'addition et la multiplication ne se prolongent pas par continuité partout dans  $K \times K$  (l'addition n'est pas continue au point  $(\infty, \infty)$  et la multiplication n'est pas continue aux points  $(0, \infty)$  et  $(\infty, 0)$ ), la somme et le produit de deux éléments méromorphes peuvent ne pas être des éléments méromorphes, même dans des bons cas (par exemple si  $A$  est quasi-connexe).

Exemple : Soit  $(a_n)$  une suite de points convergeant vers 0 et soit  $A$  l'ensemble des  $x \neq 0$  tels que  $|x| \neq a_n$  pour tout  $n$  ( $A$  est quasi-connexe). Soit  $a$  un point de  $K$  tel que  $|a| > 1$ . Posons  $f(x) = a + \sum_n \frac{a_n}{x - a_n}$ . On voit sans peine que cette série converge pour  $x \in A$ , et que si  $x \in A$ ,  $|f(x)| = |a|$ , mais cette série ne converge pas uniformément sur  $A$ . Si cependant  $f$  était un élément méromorphe sur  $A$ , ce serait un élément analytique (puisque uniformément borné sur  $A$ ) et donc d'après le théorème 4. 7. la somme uniforme de ses parties singulières, donc la somme de la série ci-dessus. Par contre la série converge uniformément pour  $|x| > \varepsilon > 0$ .

La fonction  $g(x) = f(x) + \frac{1}{x}$  est un élément méromorphe sur  $A$  étant donné  $\alpha < \frac{1}{|a|}$ , pour  $|x| < \frac{1}{\alpha}$  on a  $|g(x)| > \frac{1}{\alpha}$ , et pour tout

$$\left| \frac{1}{x} + a + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x-a_k} \right| > \frac{1}{\alpha},$$

et on peut trouver  $N$  tel que pour  $n > N$  et  $|x| \geq \frac{1}{\alpha}$

$$\left| g(x) - \frac{1}{x} - a - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x-a_k} \right| < \alpha,$$

donc  $(g(x), \frac{1}{x} + a + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x-a_k}) \in V_\alpha$  pour  $n > N$  ce qui démontre notre assertion.

Par contre  $g(x) - \frac{1}{x}$  n'est pas un élément méromorphe ainsi qu'on vient de le voir.

De même  $h(x) = \frac{f(x)}{x}$  est un élément méromorphe sur  $A$ , mais  $x h(x)$  n'en est pas un.

Par contre, lorsqu'il s'agit des fonctions méromorphes tous les résultats établis pour les fonctions analytiques se généralisent au cas des fonctions méromorphes. Pour le prouver nous nous ramenons au cas des fonctions analytiques en démontrant la réciproque du lemme 13. 2. .

13. 16. - PROPOSITION. - Soit  $\mathcal{B}$  une famille complètement régulière. Une fonction  $\mathcal{B}$  méromorphe au sens  $M_1$  est  $\mathcal{B}$ -méromorphe au sens  $M_2$  et réciproquement.

La partie directe a été prouvée (lemme 13. 2. ). Pour prouver la réciproque il suffit de montrer qu'un élément méromorphe  $f$  sur  $B \in \mathcal{B}$  (au sens  $M_2$ ) est une fonction  $\mathcal{B}$ -méromorphe sur  $\mathcal{B}$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $B$  tels que  $f(a) \neq \infty$ ,  $f(b) \neq \infty$ . Alors les fonctions de valuation  $|f|_a(r)$  et  $|f|_b(r)$  sont majorées par un nombre  $M$  pour  $r \leq |b-a|$ . Soit  $R$  une fraction rationnelle approximant  $f$  à  $\alpha$  près avec

$\alpha < \frac{1}{M}$ . Alors  $|R|_a(r) \leq M$  et  $|R|_b(r) \leq M$  pour  $r \leq |b-a|$ . D'autre part  $R$  n'a qu'un nombre fini de zéros  $a_1, \dots, a_k$  dans le disque  $D(b, |b-a|^-)$  et un nombre fini de pôles  $b_1, \dots, b_\ell$  dans le disque  $D(b, |b-a|^-)$ . Donc pour  $|x-a| < |b-a|$  et  $|x-a| \neq |x-a_i|$ ,  $1 \leq i \leq k$ , on a  $|f(x)| \leq |f|_a(r) \leq M$ . De même pour  $|x-b| < |b-a|$ ,  $|x-b| \neq |x-b_j|$ ,  $1 \leq j \leq \ell$ , on a  $|f(x)| \leq |f|_b(r) \leq M$ .

Notons  $B_{ab}$  l'ensemble des  $x \in B$  tels que  $|x-a| < |b-a|$  et  $|x-a| \neq |x-a_i|$ ,  $1 \leq i \leq k$ , ou tels que  $|x-b| < |b-a|$  et  $|x-b| \neq |x-b_j|$ ,  $1 \leq j \leq \ell$ .

Sur  $B_{ab}$   $f$  est un élément méromorphe borné donc un élément analytique.

D'autre part, puisque la classe  $\mathcal{B}$  est complètement régulière  $B_{ab} \in \mathcal{B}$ . Enfin si  $B^\circ$  représente l'ensemble des points de  $B$  où  $f$  n'est pas infini, on voit que la famille  $(B_{a,b})_{(a,b) \in B^\circ \times B^\circ}$  est enchaînée et que  $\bigcup_{(a,b) \in B^\circ \times B^\circ} (B_{a,b}) = B^\circ$ .

Enfin si  $f(a) = \infty$ , il résulte du théorème 13.7. que  $a$  est bien un pôle de  $f$  au sens de  $M_1$ . (On peut aussi le voir en remarquant que  $1/f(x)$  est un élément analytique au voisinage de  $a$ ).  $\parallel$

COMPOSEE DE DEUX FONCTIONS ANALYTIQUES

---

Les résultats de ce paragraphe découlent immédiatement du paragraphe précédent.

THEOREME. - Soit  $\mathcal{B}$  une famille complètement régulière. Soient  $f$  une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B$ , et  $g$  un élément analytique sur  $A \supset f(B)$ . Alors  $g \circ f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique sur  $B$ .

Supposons d'abord que  $f$  soit un élément analytique sur  $B \in \mathcal{B}$ . Alors  $f$  et  $g$  sont des éléments méromorphes et en vertu de la proposition 13.13,  $g \circ f$  est un élément méromorphe. Comme d'après la proposition 13.16  $g \circ f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -méromorphe au sens  $M_1$  et que de plus  $g \circ f$  n'a pas de pôles dans  $B$  (puisque ni  $f$  ni  $g$  n'en ont)  $g \circ f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique.

Supposons maintenant que  $f$  soit une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique définie par la famille cohérente  $f_n$  d'éléments analytiques sur  $B_n \in \mathcal{B}$ .

D'après ce qu'on vient de voir  $g \circ f_n$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique pour tout  $n$ , or  $(g \circ f_n)$  est une famille cohérente définissant  $g \circ f$ , et donc d'après la proposition 7.8,  $g \circ f$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -analytique.  $\parallel$

Remarques :

1) Un cas particulier du théorème précédent est celui où  $f$  ne s'annule pas dans  $B$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Il résulte donc de l'étude du paragraphe 12 sur l'inverse d'une fonction analytique qu'il faut supposer la famille  $\mathcal{B}$  complètement régulière.

2) Le composé de deux éléments analytiques peut ne pas être un élément analytique. Prenons le cas particulier  $g(x) = 1/x$  ; on a déjà vu que l'inverse d'un élément analytique ne s'annulant pas pouvait ne pas être un élément analytique.

# PROLONGEMENT ANALYTIQUE ---

15. 1. - Soit une fonction analytique définie au voisinage d'un point  $a$ , par exemple par sa série de Taylor. Soit  $b$  un autre point de  $K$ . On se demande si  $f$  est prolongeable analytiquement au point  $b$ , c'est-à-dire s'il existe un ensemble analytique  $A$  contenant  $a$  et  $b$  et un élément analytique  $g$  sur  $A$  coïncidant avec  $f$  au voisinage de  $a$ , ou plus généralement s'il existe une suite finie  $A_1, \dots, A_n$  d'ensembles analytiques avec  $a \in A_1$ ,  $b \in A_n$ ,  $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $1 \leq i < n$ , et des éléments analytiques  $f_i$  sur  $A_i$  tels que  $f_i = f_{i+1}$  sur  $A_i \cap A_{i+1}$  et que  $f_1$  coïncide avec  $f$  au voisinage de  $a$ .

On a vu que la valeur du prolongement de  $f$  en  $b$  pouvait dépendre de l'ensemble considéré  $A$  (car  $\mathcal{A}$  n'est pas stable par intersection) ou de la suite  $A_i$  choisie (proposition 8. 6. ). Par contre, si on précise que  $A$  (ou les  $A_i$ ) doit appartenir à une famille  $\mathcal{B}$  régulière, le deuxième cas se ramène au premier cas (théorème 8. 3. ) et le prolongement de  $f$  en  $b$  ne dépend pas de l'ensemble considéré (principe du prolongement uniforme, théorème 8. 5. ).

Pour simplifier nous supposons que  $f$  est donnée au voisinage de  $0$ . En la développant en série de Taylor à l'origine, on peut la prolonger dans tout le disque de convergence de sa série de Taylor  $D = D(0, r)$ . Si  $f(x) = \sum a_n x^n$ ,  $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ . Si  $|a_n| r^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $D = D(0, r^+)$  et  $f$  est un élément analytique sur  $D$ . Si  $|a_n| r^n$  ne tend pas vers  $0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $D = D(0, r^-)$ . Pour que  $f$  se prolonge en dehors de  $D$  nous obtenons le premier critère :

15.2. - PROPOSITION. - Si  $f$  se prolonge en dehors de son disque de convergence,  $f$  est un élément analytique sur son disque de convergence  $D$ .

Si le disque de convergence  $D$  est fermé, il n'y a rien à prouver, puisqu'alors la série entière converge uniformément sur  $D$ , et définit donc un élément analytique.

Supposons alors que  $D = D(0, r^-)$ . Soient  $y \in K$ ,  $|y| \geq r$ ,  $A$  un ensemble analytique contenant  $0$  et  $y$ ,  $g$  un élément analytique sur  $A$  coïncidant avec  $f$  au voisinage de  $0$ . Soit  $T$  un trou intérieur de  $A$  contenu dans  $D$ . Il existe alors  $\rho < r$  tel que  $T$  soit contenu dans  $D(0, \rho^+)$ . Sur l'ensemble analytique  $A \cap D(0, \rho^+)$ ,  $f$  et  $g$  sont deux éléments analytiques coïncidant au voisinage de  $0$ , donc coïncidant partout. Comme d'autre part  $f$  est un élément analytique sur  $(A \cap D(0, \rho^+)) \cup T$ , on a  $g_T = 0$ . On a donc

$$g = \sum_{T \in \mathfrak{I}^\circ(A)} g_T = \sum_{\substack{T \in \mathfrak{I}^\circ(A) \\ T \cap D = \emptyset}} g_T,$$

et cette dernière série converge uniformément sur  $D$  vers un élément analytique sur  $D$  qui coïncide avec  $f$ . ||

15.3. - Nous donnerons plus loin des conditions sur les coefficients de Taylor de  $f$  pour que  $f$  soit un élément analytique dans son disque de convergence.

Soit alors  $f$  un élément analytique sur  $D$ . D'après le théorème 4.7.,  $f$  se décompose suivant ses parties singulières. Mais que sont les trous intérieurs de  $D$  ?

15.3.1. - Si  $D$  est fermé,  $D = D(0, r^+)$ ,  $D$  n'a qu'un trou  $T_0$  qui est le trou de centre infini. On a  $f = f_{T_0}$ , où  $f_{T_0}$  est un élément analytique sur  $\mathbb{C}_{T_0} = D$ . On le savait déjà !

Remarque : Si l'on cherche un prolongement de  $f$  sur un quasi-connexe  $A$ , et si le disque de convergence  $D$  est fermé, on sait ([5]) qu'il n'existe pas de



tel prolongement. La situation est différente lorsqu'on cherche un prolongement de  $f$  sur un ensemble analytique  $A$ . Donnons l'exemple d'un élément analytique  $f$  dont la série de Taylor à l'origine a un disque de convergence fermé  $D(0, r^+)$  et qui se prolonge sur un ensemble analytique  $A$  contenant le disque de convergence.

Soit  $a_n$  une suite de points de  $K$ , telle que  $|a_n|$  forme une suite strictement décroissante convergeant vers  $r$ . Soit  $\rho_n$  une suite de nombres réels, avec  $0 < \rho_n < |a_n|$ . Soit  $A$  l'ensemble des  $x$  de  $K$ , tels que  $|x - a_n| > \rho_n$ . Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log |a_n| - \log r}{\log |a_n| - \log \rho_n} < +\infty,$$

$A \in \mathcal{B}$ , donc est analytique. Nous supposons cette condition réalisée. Soit  $b_n$  une suite de points de  $K$ , telle que  $|b_n - a_n| \neq 0$  pour tout  $n$ , et telle que  $\frac{|b_n - a_n|}{\rho_n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x - b_n}{x - a_n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a_n - b_n}{x - a_n} \right)$$

converge uniformément sur  $A$  vers un élément analytique  $f(x)$ , puisque

$$\sup_{x \in A} \left| \frac{x - b_n}{x - a_n} \right| = \frac{|a_n - b_n|}{\rho_n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

On voit que  $f$  est un élément analytique dans  $D(0, r^+)$ , mais n'est un élément analytique dans aucun disque plus grand. Le disque de convergence de sa série de Taylor en  $0$  est donc  $D(0, r^+)$ .

Nous ne connaissons pas de critère permettant de dire si une série entière, dont le disque de convergence est fermé, se prolonge ou non en dehors de son disque de convergence.

15.3.2. - Si  $D$  est ouvert,  $D = D(0, r^-)$ , et si  $r$  n'appartient pas au groupe des valeurs,  $D$  n'a qu'un trou intérieur  $T_0$  qui est le trou de centre  $\infty$ . On a  $f = f_{T_0}$ , où  $f_{T_0}$  est un élément analytique sur  $T_0 = D(0, r^+)$ , ce qui signifie que le disque de convergence de  $f$  doit être  $D(0, r^+)$ . Il y a contradiction. D'où la

proposition suivante.

PROPOSITION. - Si le rayon de convergence  $r$  de la série entière

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

n'appartient pas au groupe des valeurs, et si

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |a_n| r^n \neq 0 ,$$

la fonction  $f(x)$  ne se prolonge pas analytiquement en dehors de son disque de convergence.

15.3.3. - Si  $D$  est ouvert,  $D = D(0, r^-)$ , et si  $r$  appartient au groupe des valeurs, les trous intérieurs de  $D$  sont d'une part le trou de centre infini  $T_0 = \{x \mid |x| > r\}$ , d'autre part les trous  $T_i = D(\alpha_i, r^-)$  avec  $|\alpha_i| = r$ ,  $|\alpha_i - \alpha_j| = r$ ,  $i \neq j$ .

Comme on a alors, pour  $T \in \mathfrak{I}^\circ(D)$ ,

$$f = f_T + \sum_{\substack{T' \in \mathfrak{I}(D) \\ T' \neq T}} f_{T'}$$

et que  $\sum_{\substack{T' \in \mathfrak{I}^\circ(D) \\ T' \neq T}} f_{T'}$  est un élément analytique sur  $D \cup T$ , pour savoir si  $f$  se

prolonge dans  $T$ , il suffit d'étudier si  $f_T$  se prolonge dans  $T$ .

Mais  $f_T$  se développe en série de Taylor autour de 0 si  $T$  est le trou  $T_0$  de centre  $\infty$ , et en série de Laurent autour de  $\alpha_i$  n'ayant que des termes d'exposant négatif si  $T$  est le trou  $T_i = D(\alpha_i, r^-)$ .

On peut alors recommencer le même raisonnement pour  $f_T$  (tout ce que l'on a dit sur les séries entières, s'applique, moyennant des changements évi-  
dents, aux séries de Laurent).

Si l'on s'intéresse au prolongement sur un quasi-connexe, le processus s'arrête lorsque la série entière ou la série de Laurent n'est pas un élément ana-  
lytique dans son domaine de convergence, ou a un domaine de convergence fermé.

Si  $f$  se prolonge au point  $y$  sur un quasi-connexe, ce prolongement est obtenu en un nombre fini d'étapes.

15. 4. - Cherchons des critères assurant que  $f$  est un élément analytique dans son disque de convergence. Comme on l'a vu, il suffit de considérer le cas où le disque est ouvert, et où le rayon de convergence appartient au groupe des valeurs. Par homothétie, on peut se ramener au cas où  $r = 1$ . Soit donc  $D = D(0, 1^-)$ . Si  $f$  est un élément analytique sur  $D$ ,  $|f(x)|$  est borné et donc les coefficients de Taylor de  $f$  sont bornés.

Soit  $S$  l'espace vectoriel des suites bornées d'éléments de  $K$ . Pour  $a = (a_n)$ , on pose  $\|a\| = \sup_n |a_n|$ .  $S$  est alors un espace de Banach ultramétrique [10]. Muni de la norme  $\|f\| = \|f\|_D$ ,  $H(D)$  est un espace de Banach ultramétrique. Considérons l'application linéaire de  $H(D)$  dans  $S$ , qui à  $f$  associe la suite de ses coefficients de Taylor à l'origine  $a(f)$ . Notons  $SH$  l'image de cette application. Il est bien connu que  $\|f\| = \|a(f)\|$ .  $SH$  est donc un sous-espace fermé de  $S$ . Si  $E$  est un espace de Banach ultramétrique, nous dirons que la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est une base orthonormale de  $E$  [10] si tout élément  $x$  de  $E$  se décompose de façon unique sous la forme  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ , avec  $\|x\| = \sup_i |\lambda_i|$ , et  $\lambda_i \rightarrow 0$  quand  $i \rightarrow \infty$  (c'est-à-dire suivant le filtre des complémentaires des parties finies de  $I$ ).

Notons  $\mathfrak{t}$  le corps de restes de  $K$ ,  $x \rightarrow \bar{x}$  l'application canonique de  $D(0, 1^+)$  dans  $\mathfrak{t}$ . Pour tout  $\alpha \in \mathfrak{t}' = \mathfrak{t} - \{0\}$ , choisissons un relèvement  $\tilde{\alpha}$  de cette application; on a donc  $\tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha$ . Soit  $D_\alpha = D(\tilde{\alpha}, 1^-)$ . Alors

$$f = f_0 + \sum_{\alpha \in \mathfrak{t}'} f_\alpha, \quad \text{où } f_0 \in H(D(0, 1^+)) \text{ et } f_\alpha \in H(D_\alpha),$$

et de plus

$$\|f\| = \sup (\|f_0\|, \sup_\alpha \|f_\alpha\|) \text{ et } \|f_\alpha\| \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow \infty.$$

D'autre part, il est bien connu que

$$f_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i, \text{ avec } \|f_0\| = \sup_i |\lambda_i| \text{ et } |\lambda_i| \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty$$

et que

$$f_{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j\alpha} \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha}-x)^{j-1}},$$

avec  $\|f_{\alpha}\| = \|f_{\alpha}\|_{\mathcal{C}_{\alpha}^D} = \sup_j |\lambda_{j\alpha}|$  et  $|\lambda_{j\alpha}| \rightarrow 0$  quand  $j \rightarrow \infty$ .

Donc

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i + \sum_{\alpha \in I'} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j\alpha} \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha}-x)^{j-1}}$$

avec

$$\|f\| = \sup_{i,j,\alpha} (|\lambda_i|, |\lambda_{j\alpha}|),$$

et

$$|\lambda_i| \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty, \quad |\lambda_{j\alpha}| \rightarrow 0 \text{ quand } (j,\alpha) \rightarrow \infty.$$

Ceci prouve que les fonctions

$$e_i(x) = x^i, \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad e_{j\alpha}(x) = \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha}-x)^{j-1}}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in I'$$

forment une base orthonormale de  $H(D)$ . Notons  $s_i$  et  $s_{j\alpha}$  les suites des coefficients de Taylor en 0 de ces fonctions.

PROPOSITION. - L'espace SH est l'espace vectoriel fermé engendré par les suites

$$s_i = (\delta_{in})_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad s_{j\alpha} = ((\binom{n+j}{j} \tilde{\alpha}^{-n})_{n \in \mathbb{N}}), \quad i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in I'.$$

On notera que  $s_i$  et  $s_{j\alpha}$  forment une base orthonormale de SH.

Nous allons établir quelques propriétés des éléments de SH.

15.5. - LEMME. - Soient p un entier > 0 et j un entier ≥ 0. L'application  
 $\pi_j$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : n \rightarrow (\binom{n+j}{j} \bmod p$ , est périodique, de période  $p^j$ . Si  
p est premier et  $j \leq p^m - 1$ , cette application est périodique, de période  $p^m$ .

Notons d'abord que

$$\frac{1}{(1-X)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_j(n) X^n.$$

Alors  $\pi_j(n)$  périodique mod  $p$ , de période  $N$ , signifie que

$$\pi_j(n+sN) \equiv \pi_j(n) \pmod{p} \text{ pour tous } n \text{ et } s$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_j(n) X^n \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{\infty} \pi_j(n) X^{n+sN} \pmod{p}$$

soit

$$\frac{1}{(1-X)^j} \equiv \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \pi_j(n) X^n}{1-X^N} \pmod{p}.$$

Donc  $\pi_j(n)$  périodique mod.  $p$ , de période  $N$ , équivaut donc à dire que  $\frac{1-X^N}{(1-X)^j}$  est, modulo  $p$ , un polynôme de degré inférieur à  $N$ .

Si  $p$  est premier on a

$$1 - X^{p^m} \equiv (1-X)^{p^m} \pmod{p}$$

et donc pour  $j \leq p^m - 1$

$$\frac{1-X^{p^m}}{(1-X)^j} \equiv (1-X)^{p^m-j} \pmod{p}$$

est donc bien, modulo  $p$ , identique à un polynôme de degré inférieur à  $p^m$  ce qui prouve la deuxième partie du lemme.

Soit maintenant  $p$  un entier quelconque. Posons  $1-X=Y$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1-X^N}{(1-X)^j} &= \frac{1-(1-Y)^N}{Y^j} = \frac{1 - \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (-Y)^i}{Y^j} \\ &= \frac{1 - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{N}{i} (-Y)^i}{Y^j} + Q(Y) \end{aligned}$$

où  $Q(Y)$  est un polynôme en  $Y$  de degré  $N-j$  et donc  $Q(1-X)$  est un polynôme en  $X$  de degré  $N-j$ .

La première somme est

$$\sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i \binom{N}{i} \frac{Y^i}{Y^j}.$$

Pour montrer que  $\pi_j(n)$  est de période  $N \pmod{p}$ , il suffit donc de montrer que  $\binom{N}{i} \equiv 0 \pmod{p}$  pour  $1 \leq i \leq j-1$ .

Mais pour  $i > 0$ ,  $\binom{N}{i} = \frac{N!}{i!}$ , et pour avoir  $\binom{N}{i} \equiv 0 \pmod{p}$ , il suffit que le nombre rationnel  $\frac{N!}{i!}$  mis sous forme irréductible ait son numérateur divisible par  $p$ . Ceci a lieu si, pour tout premier  $q$  divisant  $p$  on a

$$\text{ord}_q N - \text{ord}_q (i!) \geq \text{ord}_q p.$$

Or pour  $1 \leq i \leq j-1$  on a  $\text{ord}_q (i!) \leq j-1$ . Si on prend alors  $N = p^j$  on a  $\text{ord}_q N = j \text{ord}_q p$  et on vérifie bien que pour  $1 \leq i \leq j-1$ ,

$$\text{ord}_q p^j - \text{ord}_q (i!) \geq j \text{ord}_q p - (j-1) \geq \text{ord}_q p$$

car  $(j-1)(\text{ord}_q p - 1) \geq 0$  puisque  $\text{ord}_q p \geq 1$ . Ceci achève la démonstration du lemme.

(Cette démonstration, due à M. Dwork, remplace la démonstration primitive moins élégante).

15.6. - LEMME. - Soient  $N, M, L$  trois entiers, soient  $(x_i)_{0 \leq i \leq M-1}$   $M$  variables indépendantes. Posons

$$w_m^n(N) = \binom{N+n+k}{k} x_i^{n+N},$$

avec

$$m = iL + k, \quad 0 \leq k \leq L-1, \quad 0 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq ML-1, \quad 0 \leq m \leq ML-1.$$

On a

$$\det(w_m^n) = \prod_{i=0}^{M-1} \prod_{k=0}^{L-1} \binom{iL+k}{k} \cdot \prod_{i=0}^{M-1} x_i^{L(N+ \frac{L(L-1)}{2})} \prod_{0 \leq j < i \leq M-1} (x_i - x_j)^{L^2}.$$

Pour  $m \neq iL$  retranchons la ligne  $m-1$  de la ligne  $m$ , on obtient la nouvelle matrice  $(w_m^n(N))$  avec

$$w_{iL}^n(N) = \begin{pmatrix} N+n \\ 0 \end{pmatrix} x_i^{n+N} = x_i w_{iL}^n(N-1) ,$$

$$\begin{aligned} w_{iL+k}^n(N) &= w_{iL+k}^n(N) - w_{iL+k-1}^n(N) = \begin{pmatrix} N+n+k \\ k \end{pmatrix} x_i^n \\ &\quad - \begin{pmatrix} N+n+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x_j^n = \begin{pmatrix} N-1+n+k \\ k \end{pmatrix} x_i^n = x_i w_{iL+k}^n(N-1) . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \det(w_m^n(N)) &= \det(w_m^n(N)) = \prod_i x_i \det(w_m^n(N-1)) \\ &= \det(w_m^n(0)) \prod_i x_i^{NL} . \end{aligned}$$

Nous considérons alors le cas  $N = 0$ ,  $w_m^n = w_m^n(0)$ .

Démontrons la formule

$$(1) \quad \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \sum (-1)^{k-s+1} \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+s \\ s \end{pmatrix} .$$

Soit  $X$  une indéterminée, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^n &= X^k \sum_{m \geq 0} \begin{pmatrix} m+k \\ k \end{pmatrix} X^m = \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}} = \\ &= \frac{1}{1-X} \left( \frac{1}{1-X} - 1 \right)^k = \frac{1}{1-X} \sum_{s=0}^k \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} (-1)^{k-s} \frac{1}{(1-X)^s} = \\ &= \sum_{s=0}^k \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} (-1)^{k-s} \frac{1}{(1-X)^{s+1}} = \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+n \\ s \end{pmatrix} \right] X^n . \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de  $X^n$  on obtient la formule (1).

Posons  $\Omega_{iL+k}^n = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x_i^{n-k}$  (rappelons que  $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0$  pour  $n < k$ ).

Il résulte de la formule (1) que

$$x_i^k \Omega_{iL+k}^n = [w_{iL+k}^n + \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k-s} \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} w_{iL+s}^n]$$

et par suite

$$\det(w_m^n) = \det(\Omega_m^n) \prod_i x_i^{\frac{L(L-1)}{2}}$$

Posons alors  $x_0 = x_1 + h$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Omega_{0+k}^n &= \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} x_1^{n-k-s} h^s \binom{n-k}{s} \\ &= \sum_{s=0}^{n-k} x_1^{n-k-s} h^s \binom{k+s}{s} \binom{n}{k+s} = \sum_{t=k}^n \binom{n}{t} x_1^{n-t} \binom{t}{t-k} h^{t-k} \end{aligned}$$

Posons

$$\Omega_k'^n = \sum_{t=L}^n \binom{n}{t} \binom{t}{t-k} x_1^{n-t} h^{t-L} \quad n \geq L > k$$

$$\Omega_k'^n = 0 \quad n \leq L-1, \quad k \leq L-1$$

$$\Omega_m'^n = \Omega_m^n \quad m > L.$$

On a

$$\Omega_k^n - \sum_{t=k}^{L-1} \binom{t}{t-k} h^{t-k} \Omega_{L+t}'^n = h^{L-k} \Omega_k'^n \quad k \leq L-1$$

Donc

$$\det(\Omega_m^n) = h^{\frac{L(L+1)}{2}} \det(\Omega_m'^n)$$

Développons les  $L$  premières lignes de  $\det(\Omega_m'^n)$ , on obtient

$$\det(\Omega_m'^n) = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{t_k=L}^{ML-1} \Delta_{t_0, \dots, t_{L-1}}$$

où  $\Delta_{t_0, \dots, t_{L-1}}$  est le déterminant de la matrice  $(\Omega_m''^n)$  avec

$$\Omega_k''^n = \binom{n}{t_k} \binom{t_k}{k} x_1^{n-t_k} h^{t_k-L} \quad 0 \leq k \leq L-1$$

$$\Omega_m''^n = \Omega_m'^n \quad m \geq L$$



On voit que si  $t_j = t_k$  les lignes  $j$  et  $k$  sont proportionnelles et donc  $\Delta_{t_0, \dots, t_{L-1}}$  est nul. De plus dans la ligne  $k$  on peut mettre  $h^{t_k - L}$  en facteur, donc dans  $\Delta_{t_0, \dots, t_{L-1}}$  on peut mettre  $h^{\sum (t_k - L)}$  et par suite dans

$\det(\Omega_m^n) = \sum_{t_j \neq t_k} \Delta_{t_0, \dots, t_{L-1}}$  on peut mettre

$$h^{\sum_{k=0}^{L-1} k} = h^{\frac{L(L-1)}{2}}$$

en facteur.

Il en résulte que dans  $\det(\Omega_m^n)$  on peut mettre  $(x_0 - x_1)^{L^2}$  en facteur et par raison de symétrie  $(x_j - x_i)^{L^2}$ , pour  $i \neq j$ , se met aussi en facteur dans  $\det(\Omega_m^n)$ .

En résumé nous avons montré que le polynôme en  $x_0, \dots, x_{M-1}$   $\det(w_m^n(0))$  est divisible par le polynôme

$$Q(x_0, \dots, x_{M-1}) = \prod_i x_i^{\frac{L(L-1)}{2}} \prod_{i>j} (x_i - x_j)^{L^2}$$

Comme ces deux polynômes sont tous deux des polynômes homogènes de degré  $\frac{M^2 L^2 - M L}{2}$ , c'est que l'on a  $\det(w_m^n(0)) = C Q(x_0, \dots, x_{M-1})$ . Pour déterminer la constante  $C$  il suffit de déterminer le coefficient du terme  $x_{M-1}^{(M-1)L^2} x_{M-2}^{(M-2)L^2} \dots x_1^{L^2}$  dans le polynôme  $\det(\Omega_m^n)$ ; or ce terme s'obtient en faisant le produit des éléments diagonaux. On trouve donc

$$C = \prod_{i=0}^{M-1} \prod_{k=0}^{L-1} \binom{iL+k}{k} . \quad \parallel$$

15.7. - Dorénavant, si  $\mathfrak{f}$  est de caractéristique nulle,  $p$  désignera un entier arbitraire, et sinon la caractéristique de  $\mathfrak{f}$ .

Notons  $\Sigma$  l'espace des suites d'éléments de  $\mathfrak{f}$ . Pour  $a \in S$ ,  $\|a\| \leq 1$ , posons  $\bar{a} = (\bar{a}_n) \in \Sigma$ .

LEMME. - Soit  $\bar{a} = \sum_{finie} \overline{\lambda_{ja}} \overline{s_{ja}}$ , où  $\bar{a} \in \Sigma$ ,  $\overline{\lambda_{ja}} \in \mathfrak{l}$ , et où les  $\overline{\lambda_{ja}}$  ne sont pas tous nuls. Soit  $J$  le sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  formé des  $n$  tels que  $a_n \neq 0$ . Il existe  $\tau$  tel que, quel que soit  $N \in \mathbb{N}$ ,  $J \cap (N, N+\tau) \neq \emptyset$ .

On peut supposer que

$$\bar{a} = \sum_{0 \leq j \leq p^\mu - 1} \sum_{0 \leq i \leq M-1} \lambda_{ja_i} s_{ja_i},$$

où  $\mu \in \mathbb{N}$ . Prenons  $\tau = Mp^{\mu-1}$ . S'il existe  $N$  tel que  $J \cap [N, N+\tau] = \emptyset$ , on a pour  $N \leq n \leq N+Mp^{\mu-1}$ ,  $\bar{a}_n = 0$ , c'est-à-dire

$$\sum_{0 \leq j \leq p^\mu - 1} \sum_{0 \leq i \leq M-1} \overline{\lambda_{ja_i}} \binom{N+n+j}{j} \alpha_i^{-(N+n)} = 0 \quad 0 \leq n \leq Mp^{\mu-1}.$$

Le déterminant de ce système linéaire en  $\overline{\lambda}$  a été calculé au lemme 15. 6., il vaut

$$\Delta = \prod_{j=0}^{p^\mu-1} \prod_{i=0}^{M-1} (i p_j^{\mu+j}) \cdot \prod_{i=0}^{M-1} \alpha_i^{-p^\mu - N - \frac{p^\mu(p^\mu-1)}{2}} \prod_{0 \leq k < i \leq M-1} (\alpha_i^{-1} - \alpha_k^{-1})^{p^2}$$

Il faut distinguer deux cas :

a)  $\mathfrak{l}$  est de caractéristique 0, alors le facteur constant n'est pas nul et, puisque  $\alpha_i \neq \alpha_k$ , pour  $i \neq k$ , on a  $\Delta \neq 0$ .

b)  $\mathfrak{l}$  est de caractéristique  $p$ . En vertu du lemme 15. 5. on a alors

$$(i p_j^{\mu+j}) = \binom{j}{j} = 1 \mod p,$$

le facteur constant n'est donc pas nul et  $\Delta$  n'est pas nul.

Il en résulte dans tous les cas que l'on doit avoir

$$\lambda_{ja_i} = 0 \quad 0 \leq j \leq p^\mu - 1 \quad 0 \leq i \leq M-1$$

ce qui contredit l'hypothèse.  $\parallel$

15. 8. - LEMME. - Soit  $a \in SH$  . Alors  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \sup_{j, \alpha} |\lambda_{j\alpha}(a)|$  .

Si  $\sup_{j, \alpha} |\lambda_{j\alpha}(a)| = 0$  ,  $a = \sum \lambda_i(a) s_i$  , et  $a_n = \lambda_n(a)$  , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  .

Si  $\sup_{j, \alpha} |\lambda_{j\alpha}(a)| = |\lambda_{j_0\alpha_0}(a)| = \lambda \neq 0$  , posons  $b = a - \sum_{|\lambda_i| \geq \lambda} \lambda_i s_i$  , et  
 et  $c = \frac{b}{\lambda_{j_0\alpha_0}(a)}$  . On a, pour  $n > n_0$  ,  $|b_n| = |a_n|$  et  $\|c\| = 1$  . On a  $\lambda_i(c) < 1$  ,

et donc  $\overline{c} = \sum_{finie} \overline{\lambda_{j\alpha}(c)} \overline{s_{j\alpha}}$  avec  $\overline{\lambda_{j_0\alpha_0}(c)} \neq 0$  . D'après le lemme 15. 7. il

existe  $\tau$  tel que, dans tout intervalle  $[N, N+\tau]$  , il existe un  $n$  avec  $\overline{c}_n \neq 0$  ,  
 et donc  $|c_n| = 1$  , ou encore  $|b_n| = \lambda$  . On a donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \lambda$  .  $\parallel$

15. 9. - DEFINITION. - Le sous-ensemble  $J$  de  $\mathbb{N}$  est dit lacunaire, si, quel  
 que soit  $\tau \in \mathbb{N}$  , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $J \cap [N, N+\tau] = \emptyset$  .

15. 10. - THEOREME. - Soit  $a \in S$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lambda \neq 0$  . Soit  $J$  (resp.  $I$ )  
l'ensemble des  $n$  tels que  $|a_n| = \lambda$  (resp.  $|a_n| > \lambda$ ) . Si  $J$  est lacunaire, ou si  
 $I$  n'est pas borné,  $a$  n'appartient pas à  $SH$  .

Soit  $a \in SH$  . Il résulte du lemme 15. 8. que  $I$  est borné. Construisons  
 la suite  $c$  , comme au lemme 15. 8. . Soit  $J$  l'ensemble des  $n$  tels que  $|a_n| = \lambda$  ,  
 et  $J'$  l'ensemble des  $n$  tels que  $|c_n| = 1$  . Il résulte de la démonstration du  
 lemme 15. 8. que  $J'$  n'est pas lacunaire. Or

$$J' \cap [n_0, \infty] = J \cap [n_0, \infty] ,$$

et donc  $J$  n'est pas lacunaire.  $\parallel$

15. 11. - COROLLAIRE. - Soit  $r$  le rayon de convergence de la série entière

$$f(x) = \sum a_n x^n,$$

et supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| r^n = \lambda \neq 0.$$

Soit  $J$  (resp.  $I$ ) l'ensemble des  $n$  tels que  $|a_n| r^n = \lambda$   
(resp.  $|a_n| r^n > \lambda$ ).

Si  $J$  est lacunaire, ou si  $I$  n'est pas borné,  $f$  ne se prolonge pas analytiquement en dehors de son disque de convergence.

15. 12. - Exemples :

1)  $J = \emptyset$ , cela se produit s'il existe  $N$  et une suite croissante  $n_k$  telle que l'on ait pour  $N \leq n < n_k$ ,  $|a_n| r^n < |a_{n_k}| r^{n_k}$ .

Cela se produit aussi s'il existe une suite croissante  $n_k$  telle que l'on ait pour  $n > n_k$ ,  $|a_n| r^n < |a_{n_k}| r^{n_k}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n_k}| r^{n_k} \neq 0$ .

2) Les fonctions  $f(x) = \sum_n x^{n^2}$  et  $g(x) = \sum_n x^{2^n}$  ne se prolongent pas en dehors du disque unité  $D(0, 1^-)$ .

3) Soit  $K$  de caractéristique 0 et  $\mathbb{F}$  de caractéristique  $p$ . Considérons la fonction  $\exp(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$ . Le rayon de convergence de cette série est  $p^{-\frac{1}{p-1}}$ . On trouve  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1|}{n!} p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{-\frac{1}{p-1}}$ . Pour  $n = p^k$  on a  $\frac{|1|}{p^{k!}} = p^{\frac{p^k - 1}{p-1}}$  et donc  $\frac{|1|}{p^{k!}} p^{-\frac{p^k}{p-1}} = p^{-\frac{1}{p-1}}$ . L'ensemble  $J$  est l'ensemble  $\{p^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Cet ensemble est lacunaire. L'exponentielle n'est pas un élément analytique dans son disque de convergence.

4) Soit toujours  $K$  de caractéristique 0 et  $\mathbb{F}$  de caractéristique  $p \neq 2$ .

Considérons la fonction  $1 - (1-x)^{1/2} = \frac{1}{2}x + \frac{1/2 \cdot 1/2}{2}x^2 + \dots$ . On a

$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ . Le rayon de convergence de la série est 1. De plus  $|a_n| = \left| \binom{2n}{n} \right|$ .

Il résulte du lemme 15.5. que pour  $n = p^m$   $|a_n| = 1$  et pour

$\frac{p^m - 1}{2} < n \leq p^m - 1$ ,  $|a_n| < 1$ . On a donc  $\lambda = 1$  et on voit que  $J$  est lacunaire puisque pour tout  $m$  l'intervalle  $[\frac{p^m + 1}{2}, p^m - 1] \cap J = \emptyset$ .

15.13. - Nous allons améliorer nos résultats moyennant des hypothèses supplémentaire sur  $K$ . Nous supposons que  $\mathbb{F}$  est de caractéristique  $p$  et que dans  $\mathbb{F}$  tout élément est une racine de l'unité. Ces conditions sont réalisées dans le cas de  $\hat{\Omega}_p$ , la clôture algébrique de  $\Omega_p$ . On sait [6] qu'on peut construire une extension maximale complète  $\bar{\Omega}_p$  de  $\hat{\Omega}_p$  qui ne change pas le corps de restes.  $\bar{\Omega}_p$  vérifie donc nos hypothèses.

LEMME. - Quels que soient le nombre réel positif  $\epsilon$  et l'élément  $\beta$  de  $\Omega_p$  avec  $|\beta| = 1$  ; il existe  $M$  tel que  $|\beta^M - 1| < \epsilon$ .

On sait que dans le corps de restes  $\mathbb{F}$  de  $\bar{\Omega}_p$  tout élément est une racine primitive de l'unité, donc qu'il existe un entier  $\mu$  tel que  $\beta^\mu - 1 < 1$ .

Mais alors

$$\begin{aligned} |\beta^{\mu p} - 1| &= |(1 + \beta^\mu - 1)^p - 1| = |p(\beta^\mu - 1) + \frac{p(p-1)}{2}(\beta^\mu - 1)^2 + \dots + (\beta^\mu - 1)^p| \\ &\leq \sup(|\beta^\mu - 1|^p, \frac{|\beta^\mu - 1|}{p}), \end{aligned}$$

et donc  $\beta^{\mu p^n} - 1 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On peut donc trouver un entier  $\nu$  tel que  $|\beta^{\mu p^\nu} - 1| < \epsilon$ . On pose alors  $M = \mu p^\nu$ . ||

15.14. - THEOREME. - Soient  $K = \overline{\Omega}_p$ ,  $a \in SH$ ,  $\lambda$  un nombre réel positif, Il existe deux entiers  $n_0$  et  $m$  tels que pour  $n > n_0$  on ait  $|a_{n+m} - a_n| < \lambda$ .

Par homothétie, on peut se ramener au cas où  $\|a\| \leq 1$  et  $0 < \lambda < 1$ .

Soit

$$a = \sum_i \lambda_i s_i + \sum_j \lambda_{j\alpha} s_{j\alpha}.$$

On a  $|\lambda_i| \leq 1$ ,  $|\lambda_{j\alpha}| \leq 1$ . Posons

$$b = \sum_{|\lambda_{j\alpha}| \geq \lambda} \lambda_{j\alpha} s_{j\alpha}$$

(c'est une somme finie).

Soit

$$n_0 = \sup_{|\lambda_i| \geq \lambda} i.$$

Pour  $n > n_0$ , on a  $|b_n - a_n| < \lambda$ .

Soit  $\mu$  tel que  $\frac{1}{p^\mu} < \lambda$ . Alors, d'après le lemme 15.5. on a, pour  $N = p^{\mu j}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$| \binom{n + KN + j}{j} - \binom{n+j}{j} | \leq \frac{1}{p^\mu} < \lambda.$$

D'autre part il résulte du lemme 15.13. qu'il existe  $M(\alpha) \in \mathbb{N}$  tel que  $|\tilde{\alpha}^{-M} - 1| < \lambda$ , et donc pour  $k \in \mathbb{N}$   $|\tilde{\alpha}^{-kM} - 1| < \lambda$ .

Si on pose

$$m = \overline{\prod_{|\lambda_{j\alpha}| \geq \lambda}} p^{\mu j} M(\alpha),$$

il résulte de ce qu'on vient de montrer que

$$|b_{n+m} - b_n| < \lambda, \text{ et donc } |a_{n+m} - a_n| < \lambda. \quad \parallel$$

On déduit de ce théorème le résultat suivant de F. Bertrandias [3] :

Soit  $f(x) = \sum_n a_n x^n$  une fraction rationnelle ; supposons que les coefficients  $a_n$  soient rationnels et soit  $\rho$  le rayon de convergence de cette série entière. Notons  $|\cdot|_p$  la valuation p-adique. Alors il existe  $k_0$  tel que, si pour  $k > k_0$   $a_k \neq 0$ , il existe  $M$  et  $n_0$  tels que pour  $n = k + Mn' > n_0$  ( $n' \in \mathbb{N}$ ) on ait

$$\rho^n |a_n|_p = \text{Cte}.$$

Comme ci-dessus on en déduit un critère assurant qu'une série de Taylor n'est pas prolongeable en dehors de son disque de convergence.

15.15. - Soit  $a \in \text{SH}$ . Nous allons donner une méthode "explicite" de calcul des coefficients de  $a$  relatifs à la base  $(s_i, s_{j\alpha})$  dans le cas où  $\mathfrak{f}$  est dénombrable (c'est le cas de  $\overline{\Omega}_p$ ).

LEMME. - Munissons  $K^N$  de la norme  $\|a\| = \sup_{0 \leq n \leq N-1} |a_n|$ . Pour que  $e_0, \dots, e_{N-1}$  de  $K^N$  forment une base orthonormale de  $K^N$ , il faut et il suffit que l'on ait  $\|e_i\| = 1$ ,  $0 \leq i \leq N-1$  et que les images  $\overline{e_i}$  des  $e_i$ , dans l'application canonique de la boule unité  $B_N$  de  $K^N$  dans  $\mathfrak{f}^N$ , forment une base de  $\mathfrak{f}^N$ .

La condition sur la norme des  $e_i$  est évidemment nécessaire. Si alors  $a \in B_N$ , on a  $a = \sum \lambda_i e_i$  avec  $|\lambda_i| \leq 1$  et donc  $\overline{a} = \sum \overline{\lambda_i} \overline{e_i}$  ce qui prouve que les  $\overline{e_i}$  engendrent  $\mathfrak{f}^N$ , comme  $\mathfrak{f}^N$  est de dimension  $N$  les  $e_i$  forment une base de  $\mathfrak{f}^N$ .

Maintenant si  $N$  vecteurs  $(e_i)$  vérifient  $\|e_i\| = 1$ , mais ne forment pas une base orthonormale de  $K^N$ , c'est qu'il existe  $a$ , avec  $\|a\| < 1$  tel que  $a = \sum \lambda_i e_i$  et  $\sup |\lambda_i| = 1$ . On aura alors  $0 = \sum \overline{\lambda_i} \overline{e_i}$  où les  $\overline{\lambda_i}$  ne sont pas tous nuls. Les  $\overline{e_i}$  ne forment donc pas une base de  $\mathfrak{f}^N$ .  $\parallel$

15.16. - Puisque  $\mathfrak{f}$  est supposé dénombrable, numérotons ses éléments non nuls, soit  $\alpha_k \neq \alpha_m$  si  $k \neq m$  et  $\mathfrak{f} \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\alpha_k\}$ . Nous poserons  $s_{j\alpha_k} = s_{jk}$ .

Comme convenu en 13.7. si  $\mathfrak{f}$  est de caractéristique nulle  $p$  désigne un entier fixe  $\geq 2$ , sinon la caractéristique de  $\mathfrak{f}$ .

Si  $a \in S$ , nous noterons  $\hat{a}_N$  ou  $\hat{a}$  s'il n'y a pas de confusion avec le vecteur de  $K^N$  de composantes  $(a_0, \dots, a_{N-1})$ .

Les vecteurs  $\bar{s}_i$ ,  $0 \leq i \leq p^n - 1$ , et  $\bar{s}_{jk}$ ,  $0 \leq j \leq p^n - 1$ ,  $0 \leq k \leq p^n - 1$ , forment une base de  $\mathfrak{f}^{p^n + p^{2n}}$ . En effet si  $\bar{a} = \sum_i \bar{\lambda}_i \bar{s}_i + \sum_{j,k} \bar{\lambda}_{jk} \bar{s}_{jk} = 0$  les coordonnées de  $a$  d'indice  $m$  avec  $p^n \leq m \leq p^{2n} + p^n - 1$  ne font pas intervenir les  $\bar{\lambda}_i$ , il résulte alors de la démonstration du lemme 13.7. que tous les  $\bar{\lambda}_{jk}$  sont nuls, on a alors  $\bar{a}_i = \bar{\lambda}_i = 0$ .

Il résulte alors du lemme 13.15. que les vecteurs  $\hat{s}_i$ ,  $0 \leq i \leq p^n - 1$  et  $\hat{s}_{jk}$ ,  $0 \leq j \leq p^n - 1$ ,  $0 \leq k \leq p^n - 1$ , forment une base orthonormale de  $K^{p+p^{2n}}$ .

Pour  $i \leq p^n - 1$ ,  $j \leq p^n - 1$ ,  $k \leq p^n - 1$ , nous noterons  $\lambda_j^n(a)$  et  $\lambda_{jk}^n(a)$  respectivement les coordonnées de  $\hat{a}$  relativement à la base  $\hat{s}_i$ ,  $\hat{s}_{jk}$  de  $K^{p+p^{2n}}$ . Pour  $i \geq p^n$  ou  $j \geq p^n$  ou  $k \geq p^n$  nous poserons  $\lambda_i^n(a) = 0$ ,  $\lambda_{jk}^n(a) = 0$ .

15.17. - PROPOSITION. - Si  $a \in SH$ ,  $\lambda_i^n(a)$  et  $\lambda_{jk}^n(a)$  convergent, lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers les coordonnées  $\lambda_i(a)$  et  $\lambda_{jk}(a)$  de  $a$  relatives à la base orthonormale  $(s_i, s_{jk})$  de  $SH$ .

Il est clair que  $\lambda_i^n(a)$  et  $\lambda_{jk}^n(a)$  sont des formes linéaires sur  $S$  puisque ce sont les composées de l'application linéaire  $a \rightarrow \hat{a}$  et d'une forme linéaire. De plus on a  $\|\lambda_i^n\| \leq 1$  et  $\|\lambda_{jk}^n\| \leq 1$  pour tous  $n$  et  $i$  et  $j$  et  $k$ , car l'application de restriction  $a \rightarrow \hat{a}$  est de norme 1 et que les formes coordonnées sont de norme 1 puisque la base  $(s_i, s_{jk})$  de  $K^{p+p^{2n}}$  est orthonormale.



De plus il est évident que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^n(s_i) = \lambda_i(s_i) = \delta_{ii}$  ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^n(s_{jk}) = \lambda_i(s_{jk}) = 0$  ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{jk}^n(s_i) = \lambda_{jk}(s_i) = 0$  , et  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{jk}^n(s_{j'k'}) = \lambda_{jk}(s_{j'k'}) = \delta_{jj'} \delta_{kk'}$  .

Comme les vecteurs  $(s_i, s_{jk})$  forment une famille totale de SH (proposition 13. 4.) il résulte d'un théorème classique sur les espaces normés que pour tout  $a \in SH$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^n(a) = \lambda_i(a)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{jk}^n(a) = \lambda_{jk}(a)$  . ||

#### 15. 18. - Remarques :

- 1) Le calcul des formes  $\lambda_i^n$  et  $\lambda_{jk}^n$  relève du calcul matriciel.
- 2) Cette méthode permet de voir si un élément de S appartient à SH .  
 Soit  $a \in S$  , considérons les suites  $\lambda_i^n(a)$  et  $\lambda_{jk}^n(a)$  . Si pour un i ou un couple (j,k) l'une de ces suites ne converge pas c'est que  $a \notin SH$  . Si ces suites convergent toutes vers des limites  $\lambda_i(a)$  et  $\lambda_{jk}(a)$  respectivement et si la famille  $(\lambda_i(a), \lambda_{jk}(a))$  ne tend pas vers 0 à l'infini, c'est que  $a \notin SH$  . Enfin si la famille  $(\lambda_i(a), \lambda_{jk}(a))$  tend vers 0 à l'infini, mais si l'on a alors  $a \neq \sum_i \lambda_i(a) s_i + \sum_{jk} \lambda_{jk}(a) s_{jk}$  , c'est que  $a \notin SH$  .

Il semble cependant que ce critère ne soit guère utilisable en pratique.

#### 15. 19. - Rappelons les résultats déjà obtenus dans ce domaine.

Dans sa thèse [9] , W. Schöbe donne un critère pour que la fonction analytique  $f(x)$  définie par sa série de Taylor dans le disque unité  $D(0, 1^-)$  se prolonge dans le complémentaire du disque  $D(1, 1^-)$ ,  $\Delta = \mathbb{C} \setminus D(1, 1^-)$  . Sa méthode consiste à faire une inversion  $\varphi$  qui conserve le disque  $D(0, 1^-)$  et envoie  $D(1, 1^-)$  dans le complémentaire du disque unité fermé à savoir l'ensemble des  $x$  tels que  $|x| > 1$  . Alors la série de Taylor de  $f \circ \varphi^{-1}$  doit converger dans le disque

$D(1, 1^+)$ , donc ses coefficients doivent tendre vers 0. On peut ainsi calculer les coefficients du développement de Laurent de  $f$  autour du point 1. W. Schöbe donne aussi un critère pour que  $f$  se développe en série de Laurent dans une couronne de centre 1 et donne des formules permettant de calculer les coefficients de cette série de Laurent à partir des coefficients de la série de Taylor de  $f$  autour de 0.

Plus récemment Y. Amice [2], remarquant que les fonctions  $n \rightarrow \binom{n+k}{k}$  sont les polynômes d'interpolation de la suite très bien répartie  $u_k = -k$  [1], a montré que la fonction analytique dans  $D(0, 1^-)$   $f(x) = \sum a_n x^n$  se prolongeait dans  $\mathring{D}(1, 1^-)$  si et seulement si la fonction  $n \rightarrow a_n$  était uniformément continue pour  $\mathbb{N}$  muni de la valuation  $p$ -adique (on suppose  $K = \overline{\mathbb{Q}}_p$ ). Le coefficient du développement de Laurent de  $f$  autour du point 1 s'obtient à partir des coefficients  $a_n$  grâce aux formules d'interpolations [1]. Elle généralise ce critère au cas où  $f$  se prolonge dans le complémentaire de la réunion d'un nombre fini de disques intérieurs du cercle unité.

# A N N E X E

Pour la commodité de l'exposition nous rappelons ici la caractérisation géométrique des ensembles analytiques.

Soit  $A$  un sous-ensemble ouvert de  $K$ . Etant donné un couple de points  $(x_o, y)$  de  $A$  on dira que la suite de trous disjoints  $D_{n,j} = D(a_{nj}, \rho_{nj})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq J_n$ , est convenable si l'on a :

$$|a_{nj} - x_o| = r_n \quad \text{pour } 1 \leq j \leq J_n,$$

$$|a_{nj} - a_{mk}| = \sup(r_n, r_m) \quad \text{pour } n \neq m$$

et

$$|a_{nj} - a_{nk}| < r_n \quad \text{pour } j \neq k,$$

si la suite  $(r_n)$  forme une suite monotone convergeant vers une limite  $r$  et si  $r_n \leq x_o - y$  pour tout  $n$ .

THEOREME. - Pour que l'ensemble ouvert  $A$  soit analytique, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout couple de points } (x_o, y) \text{ de } A, \text{ pour toute suite convenable de} \\ \text{trous } D_{n,j} \text{ et pour toute suite d'entiers } \geq 0 \text{ } (p_{nj}), \text{ la suite} \\ \left( \sum_{m=1}^{n-1} p_m |\log r_n - \log r_m| \right) - \sup_{1 \leq j \leq J_n} [p_{nj} (\log r_n - \log \rho_{nj}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk} (\log r_n - \log |a_{nk} - a_{nj}|)] \\ \text{(où } p_m = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj}) \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

La suffisance de la condition (\*) a été démontrée dans [8]. Dans [8] on donnait une condition nécessaire plus faible moyennant des hypothèses supplémentaires sur le corps de restes. La nécessité de la condition (\*) a été prouvée de façon tout à fait générale par A. Escassut, [5].

### Exemples :

Dans [8] on donne de nombreux exemples. Nous utilisons dans cet article les exemples suivants :

1) Les disques  $D(a, \rho)$  et  $D(b, r)$  sont dits indiscernables si  $|a - b| = \rho = r$ .

L'ensemble ouvert  $A$  est analytique si la condition suivante est réalisée.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Pour tout couple } (x_0, y) \text{ de points de } A, \text{ pour toute suite de trous dis-} \\ \text{cernables de } A, D(a_n, \rho_n), \text{ telle que } |x_0 - a_n| < |x_0 - y| \text{ pour tout } n \text{ et que} \\ \text{la suite } |x_0 - a_n| \text{ forme une suite monotone convergeant vers la limite } r, \text{ la} \\ (*) \left\{ \begin{array}{l} \text{série} \\ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\log r - \log |x_0 - a_n||}{\log |x_0 - a_n| - \log \rho_n} \\ \text{converge pour } N \text{ assez grand.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

2) Soit  $A$  un ouvert tel que  $\mathcal{C}A$  soit la réunion d'une suite de disques  $D(a_n, \rho_n)$ , où  $|a_n|$  est une suite monotone convergeant vers  $r$ , avec :

$$\log \rho_n \leq \log |a_n| - \sum_{k=1}^{n-1} |\log |a_n| - \log |a_k|| + c$$

où  $c$  est une constante arbitraire vérifiant  $c < \sum_{k=1}^{\infty} |\log r - \log |a_k||$ . Alors  $A$  est analytique.

3) S'il existe un couple de points  $(x_0, y)$  de  $A$  et une suite de trous  $D(a_n, \rho_n)$  de  $A$  tels que  $|a_n - x_0| \leq |x_0 - y|$  pour tout  $n$ , que  $|a_n - a_m| = \sup(|a_n - x_0|, |a_m - x_0|)$  pour tout  $m \neq n$ , que  $|x_0 - a_n|$  forme une suite monotone convergeant vers  $r$ , que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \log r - \log |a_n|$  soit divergente et que

$$\text{Log } \rho_n \geq \text{Log } |x_o - a_n| - \lambda \sum_{k=1}^{n-1} |\text{Log } |x_o - a_n| - \text{Log } |x_o - a_k||$$

avec  $\lambda < 1$ ,  $A$  n'est pas analytique.

En effet, la suite  $D(a_n, \rho_n)$  est convenable (avec  $J_n = 1$ ,  $\forall n$ ) et en prenant  $p_n = 1$ , on voit que :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} |\text{Log } |x_o - a_n| - \text{Log } |x_o - a_m|| - (\text{Log } |x_o - a_n| - \text{Log } \rho_n) \\ \geq (1-\lambda) \sum_{m=1}^{n-1} |\log |x_o - a_n| - \log |x_o - a_m|| \end{aligned}$$

qui tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc  $(*)$  n'est pas vérifié.

4) Si  $A$  est analytique et  $B$  est quasi-connexe, alors  $A \cap B$  est analytique (si  $A \cap B \neq \emptyset$ ).

En effet, si  $x_o$  et  $y$  appartiennent à  $A \cap B$ , ils appartiennent à  $A$ ; d'autre part, si la suite de trous  $D_{nj}$  de  $A \cap B$  est convenable, les  $D_{nj}$  sont des trous de  $A$  sauf pour un nombre fini d'indices  $n$  et la condition  $(*)$  est vérifiée pour  $A \cap B$  puisqu'elle l'est pour  $A$ .

## INDEX TERMINOLOGIQUE

---

|                                                                   |        |
|-------------------------------------------------------------------|--------|
| Analytique (élément).....                                         | p. 113 |
| Analytique (ensemble) .....                                       | p. 114 |
| Analytique (fonction) .....                                       | p. 132 |
| Disque intérieur, ouvert, fermé.....                              | p. 115 |
| Enchaînée (famille).....                                          | p. 132 |
| Maximalement complet .....                                        | p. 143 |
| Partie singulière d'un élément analytique relative à un trou..... | p. 122 |
| Placé (disque bien).....                                          | p. 152 |
| Polygone de valuation.....                                        | p. 118 |
| Projection d'un ensemble .....                                    | p. 117 |
| Régulière (famille).....                                          | p. 136 |
| Régulière (famille complètement) .....                            | p. 162 |
| Infraconnexe .....                                                | p. 117 |
| Trou .....                                                        | p. 120 |
| Trou intérieur.....                                               | p. 120 |
| Condition (*) .....                                               | p. 214 |
| Famille $\alpha$ .....                                            | p. 114 |
| Famille $\delta$ .....                                            | p. 152 |
| Famille $\mathfrak{I}$ , $\mathfrak{I}^\circ$ .....               | p. 120 |

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Y. AMICE. - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. France, 92, 1964.
- [2] Y. AMICE. - Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques. Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1968-1969, (polycopié).
- [3] F. BERTRANDIAS. - Séries de Taylor à coefficients rationnels. Séminaire Delange-Pisot, 4e année, 1962-1963, n° 17, (polycopié).
- [4] N. BOURBAKI. - Théorie des ensembles, livre 1, chapitre 3, Hermann.
- [5] A. ESCASSUT. - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse 1970, (polycopié).
- [6] M. KRASNER. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloque C. N. R. S., Clermont Ferrand, 1964.
- [7] M. LAZARD. - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet, I. H. E. S. Publications mathématiques, n° 14, 1962.
- [8] E. MOTZKIN et Ph. ROBBA. - Prolongement analytique en analyse p-adique. Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux 1968-69, (polycopié).
- [9] W. SCHÖBE. - Beiträge zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern. Thèse Münster, 1930.
- [10] J.P. SERRE. - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. I. H. E. S. Publications mathématiques, n° 12, 1962.
- [11] M. KRASNER. - Comptes Rendus, p. 244 (1957), p. 2570-2573.

Philippe ROBBA  
U.E.R. de Mathématiques  
Université de Paris VI  
4, place Jussieu