ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GAËL RÉMOND

Inégalité de Vojta en dimension supérieure

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 29, nº 1 (2000), p. 101-151

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_2000_4_29_1_101_0>

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)
Vol. XXIX (2000), pp. 101-151

Inégalité de Vojta en dimension supérieure

GAËL RÉMOND

Abstract. Following work by P. Vojta and G. Faltings, E. Bombieri reproved Mordell's conjecture through a more effective Vojta inequality: for a curve C of genus at least 2, there exists a constant γ such that if $x, y \in C(\bar{K})$ satisfy $|y| \geq |x| \geq \gamma$ and $< x, y > \geq \frac{3}{4}|x||y|$ then $|y| \leq \gamma|x|$. Here $|\cdot|$ and $<,>$ refer to the Néron-Tate height on the jacobian of C. We give an effective generalization of this inequality to a subvariety X of an abelian variety A. Let Z_X be the union of translates of non-zero abelian subvarieties contained in X and $m = \dim X + 1$. We then prove the existence of reals c_1, c_2 and c_3 such that if $x_1, \ldots, x_m$ are points of $X \setminus Z_X$ with $|x_1| \geq c_3$ and $< x_i, x_{i+1} > \geq (1 - c_1^{-1})|x_i||x_{i+1}|$ then there exists i with $|x_{i+1}| \leq c_2|x_i|$. Since this implies the finiteness of $(X \setminus Z_X)(K)$ we obtain a new proof of Lang's conjecture, simpler than Faltings' original one, because avoiding Néron models. Our proof is completely effective and we get explicit values for c_1, c_2 and c_3 in terms of dimensions, degrees and heights in a projective embedding of A. This effectivity is new even in the case of curves (Bombieri's situation). The general framework of the proof is Faltings' induction based on the product theorem (of which we use a new refined effective version) but for the main step — application of Siegel's lemma — we rather generalize Bombieri's approach with polynomials; this involves a new estimate for the height of multiplications on an abelian variety.

Mathematics Subject Classification (1991): 11G10 (primary), 14G05, 14K15 (secondary).

E. Bombieri a donné, dans [B1], une version simplifiée de la preuve de Vojta de la conjecture de Mordell. La conclusion s'appuie sur deux résultats; le premier est dû à Mumford ([M] et Paragraphe 5 de [B1]), le second fait l'objet du théorème 1 de [B1] inspiré par les travaux de Vojta. En reformulant quelque peu ces deux ingrédients on peut les mettre sous la forme de deux inégalités. En effet, il suit de [B1] que, pour toute courbe C de genre au moins 2, il existe une constante γ telle que si z et w sont des éléments distincts de $C(\bar{K})$ vérifiant $|w| \geq |z| \geq \gamma$ et $< z, w > \geq \frac{3}{4}|z||w|$ alors

- **Inégalité de Mumford** $|w| \geq 2|z|$
- **Inégalité de Vojta** $|w| \leq \gamma|z|$.

Pervenuto alla Redazione il 12 luglio 1999 e in forma definitiva il 28 settembre 1999.

Dans cet énoncé $< \cdot, \cdot >$ et $|\cdot|$ se réfèrent à la hauteur de Néron-Tate dans la jacobienne de C.

Sous cette forme le décompte final des points de $C(K)$ est clair : on sait majorer le nombre de points vérifiant $|z| \leq \gamma$; on répartit les autres en un nombre fini de cônes dans lesquels deux points vérifient $< z, w > \geq \frac{3}{4}|z||w|$; finalement les inégalités montrent que dans un tel cône il y a au plus $\log_2 \gamma + 1$ points distincts.

On remarque également que l'inégalité de Vojta seule donne la finitude du nombre de points : dans chaque cône comme ci-dessus on choisit (si c'est possible) un point z_i. Alors tous les points de $C(K)$ vérifient $|z| \leq \gamma \max |z_i|$.

Faltings a démontré (voir [F2]) la généralisation suivante de la conjecture de Mordell (conjecturée par Lang) : si X est une sous-variété d'une variété abélienne A on peut écrire $X(K) = \bigcup_{i=1}^{n} x_i + B_i(K)$ avec $x_i \in X(K)$ et B_i une sous-variété abélienne de A. Nous donnons une généralisation de l'inégalité de Vojta dans ce contexte (théorème 1.1).

Notre démarche présente deux avantages. Elle donne tout d'abord une preuve simplifiée du théorème de Faltings puisque, généralisant certaines des méthodes de [B1], nous évitons le recours au modèle de Néron. Cela est une amélioration significative, cette étape constituant le seul passage vraiment non élémentaire de la démonstration de Faltings, selon [EE, Introduction].

En second lieu, notre approche est également plus effective puisque les constantes apparaissant sont explicitées autant que faire se peut. Même dans le cas de la dimension 1, le fait que la constante nommée c_3 ci-dessous soit entièrement calculée est nouveau. Certes les bornes obtenues pour c_1 et c_2 lorsque l'on spécialise ainsi $\dim X = 1$ dans nos formules sont moins précises que celles déjà connues, dans [dD] par exemple, mais, en revanche, le passage à un résultat en famille comme dans ce dernier article devient évident avec notre énoncé. De même, celui-ci conduit facilement à une borne entièrement explicite pour le cardinal de $C(K)$. Dans le cas de la dimension quelconque, pour déduire un résultat de décompte, il reste à généraliser l'inégalité de Mumford ...

Tâchons maintenant de décrire les grandes lignes de ce travail. Notre inégalité de Vojta sur $X \subset A$ consiste à nier qu'un grand nombre de points ($m = \dim X + 1$) $x_1, \ldots, x_m$ puissent être à la fois angulairement proches : $< x_i, x_{i+1} > \geq (1 - c_1^{-1})|x_i||x_{i+1}|$; et très espacés en hauteurs : $|x_{i+1}| \geq c_2|x_i|$ et $|x_1|^2 \geq c_3$.

Pour prouver ceci, on commence (voir partie 3) par choisir des entiers $a_1, \ldots, a_m$ de sorte que le quotient a_i/a_{i+1} soit proche de $|x_{i+1}|/|x_i|$. Par la condition sur les angles, on en déduit que le point

$$\beta(x) = (a_1x_1 - a_2x_2, a_2x_2 - a_3x_3, \ldots, a_{m-1}x_{m-1} - a_mx_m)$$

est de hauteur petite par rapport à celle de $x = (x_1, \ldots, x_m)$. On peut écrire disons $h(\beta(x)) - \varepsilon h(x) < 0$ et considérer cette expression comme hauteur associée à un certain faisceau sur X^m de la forme

$$\mathcal{Q}_\varepsilon = \beta^*\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}^{\otimes -\varepsilon}$$

(si $\mathcal{L}'$ est très ample sur A^{m-1} et $\mathcal{L}$ sur X^m ; il faudra que $\mathcal{L}$ soit une puissance pour que $\mathcal{L}^{\otimes -\varepsilon}$ ait un sens avec $\varepsilon \in \mathbb{Q}$: voir les définitions précises plus bas).

L'objet de la partie 6 (proche de [B1]) est de montrer que cette condition de hauteur entraîne que toute section globale s de $\mathcal{Q}_\varepsilon$ de hauteur suffisamment petite s'annule en x avec un indice élevé. L'indice correspond à un ordre d'annulation pondéré suivant les facteurs de X^m, ces poids étant ici proportionnels aux a_i^2. On démontre ceci en estimant en chaque place la taille des dérivées de s en x.

Le point central est de prouver que l'on peut effectivement trouver une telle section s de petite hauteur. On réalise ceci en deux étapes.

Tout d'abord (partie 2), on démontre que $\mathcal{Q}_\varepsilon$ a suffisamment de sections globales. L'argument, dû à Faltings, s'appuie sur des calculs de nombres d'intersection et utilise de manière cruciale que le morphisme $\beta\colon X^m \to A^{m-1}$ est génériquement fini. Nous prouvons une version effective de ce résultat dont la démonstration s'inspire de la reformulation donnée par Vojta dans [V].

Si l'on revient à la recherche de s, il s'agit de voir que comme $\mathcal{Q}_\varepsilon$ a beaucoup de sections globales il en possède une de hauteur assez petite. Ceci est obtenu naturellement par un lemme de Siegel. Cependant, alors que Faltings mettait en œuvre un résultat de ce type sur un modèle entier (obtenu *via* un modèle de Néron), nous évitons cette complication et gagnons l'effectivité en suivant plutôt [B1] : on choisit une représentation des sections de $\mathcal{Q}_\varepsilon$ à l'aide de polynômes de sorte à pouvoir leur appliquer un lemme de Siegel classique. Ce choix, plus délicat que dans [B1], et l'estimation pour la hauteur de s qui en découle sont détaillés dans la partie 5. On y montre en particulier une borne nouvelle pour la hauteur des formules de multiplication par un entier sur une variété abélienne.

Une fois l'existence de s acquise, comme l'on a dit qu'elle devait s'annuler avec un indice élevé en x, on est à même d'appliquer le théorème du produit. On utilise la version effective de [R2]. C'est ici qu'apparaît la condition d'espacement des hauteurs car l'inégalité $a_i/a_{i+1} \geq c_2$ donne l'hypothèse principale du théorème du produit en termes des poids définissant l'indice. Le résultat (voir partie 7) est donc que x est contenu dans une sous-variété produit stricte $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ de X^m dont le degré et la hauteur sont contrôlés.

Pour conclure on est donc amené à travailler par récurrence selon le principe exposé dans la partie 3 : le procédé décrit jusqu'à présent, correspondant aux parties 5, 6 et 7, s'applique en réalité à une section globale $s \in \Gamma(Y, \mathcal{Q}_\varepsilon)$ pour un produit $Y \subset X^m$ comme ci-dessus. On commence bien sûr avec $Y = X^m$. A chaque pas l'application du théorème du produit remplace Y par un produit de dimension inférieure et les bornes pour $\deg(Y)$ et $h(Y)$ grossissent (en restant cependant, c'est essentiel, indépendantes de x). Finalement, comme on conserve la condition $x \in Y$, il arrive que sur l'un des facteurs on a $Y_i = \{x_i\}$ et, essentiellement par le choix de c_3, on peut faire en sorte que ceci soit absurde par la borne de hauteur.

Disons encore que la rapide esquisse faite jusqu'à présent omet deux ingrédients. D'une part, la partie 4 décrit assez précisément des changements de plongement que l'on fera, à chaque pas de la récurrence, en fonction de Y, pour permettre l'écriture des polynômes représentant les éléments de $\Gamma(Y, \mathcal{Q}_\varepsilon)$. D'autre part, le résultat n'est évidemment pas valable pour tous les points de X : il faut retirer l'ensemble exceptionnel Z_X (voir [F2] ou [O]), l'union des translatés de variétés abéliennes non nulles inclus dans X, et nous travaillerons donc vraiment sur $X \setminus Z_X$. Dans ce qui précède, il faut imposer $x_i \notin Z_X$ et surtout $Y_i \not\subset Z_X$ (pour chaque i). Pratiquement, cette restriction, indispensable, n'apparaît que dans la partie 2.

1. – Notations et résultat

Soient A une variété abélienne sur un corps de nombres K et X un sous-schéma fermé géométriquement intègre de A. On fixe également une immersion fermée $\iota: A \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$. On note $\mathcal{L} = \iota^*\mathcal{O}(1)$ et on fait l'hypothèse que $\mathcal{L}$ est symétrique et que $\Gamma(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}(d)) \to \Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes d})$ est surjectif pour tout $d \geq 1$.

On contrôle X par son degré projectif $\deg X$ d'une part et sa hauteur $h(X)$ d'autre part (telle qu'elle est définie dans [BGS], [Ph] ou [R1]).

Par ailleurs, si B est une partie finie de K, on définit sa hauteur ainsi : pour toute place v de K on écrit

$$|B|_v = \max_{x \in B} |x|_v$$

puis on pose

$$h(B) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |B|_v .$$

Si P est un polynôme et B la famille de ses coefficients on note aussi $|P|_v = |B|_v$ et $h(P) = h(B)$. D'autre part si $x \in \mathbb{P}^n_K(K)$ on désigne par $h(x)$ la hauteur d'un système quelconque de coordonnées. On prendra garde que cette hauteur diffère de celle de $\{x\}$ comme sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n_K$; on a cependant

$$h(x) \leq h(\{x\}) \leq h(x) + \frac{1}{2}\log(n+1).$$

Par le plongement ι, la hauteur des points (étendue aux extensions de K) induit une hauteur sur $A(\bar{K})$. Comme $\mathcal{L}$ est symétrique, on dispose d'une forme bilinéaire $<,>$ sur $A(\bar{K})$ telle que $|x|^2 =< x, x >$ est la hauteur de Néron-Tate et on introduit une constante c_{NT} de sorte que pour tout $x \in A(\bar{K})$ on ait

$$\left|h(x) - |x|^2\right| \leq c_{\mathrm{NT}}.$$

L'autre constante associée à A que nous utiliserons, notée h_1, est la hauteur d'une famille de polynômes représentant l'addition de A (voir définition précise dans la partie 5, proposition 5.2).

Enfin pour énoncer le résultat on désigne par Z_X l'union des translatés de sous-variétés abéliennes non nulles inclus dans X. C'est un sous-schéma fermé de X (voir [H2] et [O]).

THÉORÈME 1.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe des réels* $c_1, c_2, c_3 > 0$ *de sorte que si* $m = \dim X + 1$ *et si* $x_1, \ldots, x_m$ *sont des éléments de* $X(\bar{K})$ *vérifiant (pour* $1 \leq i < m$*)*

$$< x_i, x_{i+1} > \geq (1 - 1/c_1)|x_i||x_{i+1}|$$
$$|x_{i+1}| \geq c_2 |x_i|$$
$$|x_1|^2 \geq c_3$$

alors il existe i *tel que* $x_i \in Z_X(\bar{K})$.

De plus on peut choisir les valeurs effectives suivantes

$$c_1 = c_2 = \max\left(\deg X, (6m)^{2m}\right)^{m^{3m^2}} \qquad et$$

$$c_3 = c_1(n+1)^{(\dim X)^3} \max(h(X), h_1, c_{\mathrm{NT}}, n \log(n+1)).$$

Notons immédiatement que l'on peut se contenter de prouver le théorème pour des points $x_1, \ldots, x_m$ rationnels. En effet, dans le cas général, on peut étendre les scalaires à un corps de nombres sur lequel sont définis les x_i ; on obtient exactement les mêmes hypothèses et le résultat s'applique à cette nouvelle situation, donnant la conclusion puisque les constantes ne dépendent pas du corps de base. Dorénavant, nous supposerons donc que l'on a $x_i \in X(K)$ pour tout i.

On retrouve le théorème principal de [F2] car l'énoncé entraîne la finitude de $(X \setminus Z_X)(K)$: on répartit les points de $A(K)$ dans un nombre fini (dépendant du rang de $A(K)$) de cônes où deux points distincts vérifient $< x, y > \geq (1 - 1/c_1)|x||y|$; si l'un de ces cônes contient une infinité de points de $(X \setminus Z_X)(K)$, la suite de leurs hauteurs tend vers l'infini et l'on peut alors trouver $x_1, \ldots, x_m$ contredisant le théorème.

Remarquons que l'hypothèse que X est géométriquement intègre n'est pas très contraignante au sens suivant : si X, intègre, n'est pas géométriquement intègre, il n'a pas de points rationnels lisses ; par suite $X(K) = X'(K)$ si X' est un fermé de X avec $X \setminus X'$ lisse. On peut facilement contrôler (degré, hauteur) un tel X' et remplacer alors X par X' (ou les composantes de X') pour l'étude des points rationnels. De même, les hypothèses sur $\mathcal{L}$ sont peu restrictives : si $\mathcal{M}$ est un faisceau ample quelconque sur A on peut trouver ι associé à $\mathcal{L} = (\mathcal{M} \otimes [-1]^*\mathcal{M})^{\otimes 3}$ les vérifiant.

La définition de Z_X tient compte de tous les translatés de sous-variétés abéliennes non nulles, y compris par des points non rationnels. Ceci a l'avantage que $Z_X \times \bar{K} = Z_{X \times \bar{K}}$ (voir partie 2). On remarque aussi que le théorème est trivial si $Z_X = X$: d'après [H2], [O] ceci est équivalent à $\dim(\mathrm{Stab}(X)) > 0$ où $\mathrm{Stab}(X)$ est le stabilisateur de X dans A. Nous supposerons donc dorénavant $\dim(\mathrm{Stab}(X)) = 0$.

Le théorème 1.1 est en fait obtenu à partir du résultat plus précis ci-dessus, en majorant assez largement les bornes pour ne garder que les termes principaux.

THÉORÈME 1.2. *L'énoncé précédent est vrai avec*

$$c_1 = 2(4m)^{m+1}\Lambda^{\prod_{j=m+1}^{m \dim X}(3j+1)},$$
$$c_2 = 2\Lambda^{\frac{3}{2}m\prod_{j=m+1}^{m \dim X}(3j+1)} \text{ et}$$
$$c_3 = c_1^2 c_{\mathrm{NT}} + 2(n+1)^{(\dim X)^3}\Lambda^{\left(1+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=m}^{m \dim X}(3j+1)}H$$

où l'on définit

$$\Lambda = \max\left((\deg X)^m, 32m^3(\dim X)(4m)^{m\dim X}(\deg X), (2m\dim X)^{m \dim X}\right)$$

et

$$H = \max(h(X), \Lambda^{-1}h_1, n\log(n+1)).$$

Les constantes sont données comme elles apparaissent dans la démonstration.

Les définitions de $m = \dim X + 1$, Λ, H ... seront utilisées dans toute la suite. Si $\dim X = 0$ le résultat est trivial donc on supposera toujours $\dim X \geq 1$. Ceci entraîne pour les estimations numériques $m \geq 2$, $n \geq 3$ (car $X \neq A$ puisque $Z_X \neq X$ et $A \neq \mathbb{P}_K^n$) et $\Lambda \geq 2^{14}$.

Ainsi on déduit le théorème 1.1 du théorème 1.2 en majorant

$$32m^3(\dim X)(4m)^{m\dim X} \leq (6m)^{2m\dim X}$$

et $(2m\dim X)^{m\dim X} \leq (6m)^{2m^2}$ de sorte que

$$\Lambda \leq \max\left(\deg X, (6m)^{2m}\right)^m.$$

Enfin pour les exposants

$$\left.\begin{array}{l} 1 + m\displaystyle\prod_{j=m+1}^{m\dim X}(3j+1) \\ 1 + \dfrac{3}{2}m^2\displaystyle\prod_{j=m+1}^{m\dim X}(3j+1) \\ 2 + 2m\displaystyle\prod_{j=m+1}^{m\dim X}(3j+1) \\ 1 + \left(m+\dfrac{2}{3}\right)\displaystyle\prod_{j=m}^{m\dim X}(3j+1) \end{array}\right\} \leq m^{3m^2}.$$

2. – Effectivisation du résultat-clef de [F2]

La démarche de Faltings (voir [F1, F2]) est basée sur l'emploi d'un certain faisceau sur X^m. Nous commençons donc par introduire un faisceau analogue.

Les notations définies maintenant seront utilisées dans toute la suite. Tout d'abord on pose $\eta_i = 2$ si $1 < i < m$ et $\eta_1 = \eta_m = 1$. On considère ensuite des couples (ε, d) où $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, d est le carré d'un entier naturel et $d\varepsilon \in \mathbb{Z}$. Le paramètre d est destiné à tendre vers l'infini dans la démonstration ; ainsi certains résultats seront énoncés avec des fonctions $O()$ ou $o()$ se référant à cette limite.

A un couple comme ci-dessus et à $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$ on associe le faisceau sur X^m

$$\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d} = \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes(1-\varepsilon)d\eta_i a_i^2} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{P}_{i,i+1}^{\otimes -da_i a_{i+1}}$$

expression dans laquelle $\mathcal{L}_i$ représente l'image réciproque de $\mathcal{L}$ par la i-ème projection $X^m \to A$ tandis que $\mathcal{P}_{i,j} = s_{i,j}^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_i^{\otimes -1} \otimes \mathcal{L}_j^{\otimes -1}$ si $s_{i,j}\colon X^m \to A$ est l'addition des facteurs i et j (on utilisera parfois les mêmes notations pour les faisceaux sur A^m définis de la même façon).

Le résultat fondamental sur ce faisceau (à savoir que sa restriction à certains produits a assez de sections globales, voir proposition 2.1 ci-dessous) passe par l'étude d'un morphisme génériquement fini (voir [F1] et [F2]). Nous procédons ici de manière analogue à [V, §11] (c'est ce lemme qui impose la valeur de m).

LEMME 2.1. *Soient $Y_1, \ldots, Y_m$ des sous-schémas fermés géométriquement intègres de X non contenus dans Z_X. Alors le morphisme $\alpha\colon Y_1 \times \cdots \times Y_m \to A^{m-1}$ donné sur les points par*

$$\alpha(x_1, \ldots, x_m) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_m - x_{m-1})$$

est génériquement fini.

DÉMONSTRATION. Vu les hypothèses et la définition de Z_X, on peut, pour la preuve, remplacer K par sa clôture algébrique. Il est immédiat que la fibre contenant un point donné $(x_1, \ldots, x_m) \in Y_1 \times \cdots \times Y_m$ est formée des points de la forme

$$(x_1 + x, x_2 + x, , \ldots, x_m + x)$$

où x est un point de A soumis à la seule condition que le m-uplet ci-dessus soit un point de $Y_1 \times \cdots \times Y_m$. Par suite cette fibre est isomorphe au sous-schéma fermé

$$(Y_1 - x_1) \cap \cdots \cap (Y_m - x_m).$$

Montrons que l'on peut choisir successivement $x_1, \ldots, x_m$ de sorte qu'à chaque étape on ait

$$\dim(Y_1 - x_1) \cap \cdots \cap (Y_i - x_i) \leq \max(0, \dim Y_1 - i + 1).$$

Le cas $i = 1$ ne posant pas de problème, supposons ceci acquis pour $i \geq 1$. On écrit $C_1, \dots, C_k$ les composantes irréductibles de dimension maximale de $(Y_1 - x_1) \cap \dots \cap (Y_i - x_i)$. Si cette dimension est 0, n'importe quel $x_{i+1} \in Y_{i+1}$ convient ; dans le cas contraire, il suffit de trouver $x_{i+1} \in Y_{i+1}$ tel que $C_j \not\subset Y_{i+1} - x_{i+1}$ pour $1 \leq j \leq k$. A présent, l'ensemble des points $y \in Y_{i+1}$ tels que $y + C_j \subset Y_{i+1}$ forment un fermé F_j de Y_{i+1}. S'il n'est pas propre on a $C_j \subset \mathrm{Stab}(Y_{i+1})$ qui contredit $Y_{i+1} \not\subset Z_X$. Par suite $F_j \neq Y_{i+1}$ et il suffit de choisir x_{i+1} dans $Y_{i+1} \setminus \bigcup_{j=1}^k F_j$.

On peut ainsi choisir $(x_1, \dots, x_m)$ et la fibre obtenue est de dimension 0 (puisque $m = \dim X + 1$). Ceci entraîne bien (voir par exemple [Ha, Ex. II.3.22]) que α est génériquement fini. □

Pour faire le lien avec le faisceau $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ on définit un autre morphisme de schémas : à des entiers $a_1, \dots, a_m$ on associe le morphisme $\beta \colon X^m \to A^{m-1}$ défini sur les points par

$$\beta(x_1, \dots, x_m) = (a_1x_1 - a_2x_2, a_2x_2 - a_3x_3, \dots, a_{m-1}x_{m-1} - a_mx_m).$$

Alors, pour tout a, si $\mathcal{L}_i' = (p_i \colon A^{m-1} \to A)^*\mathcal{L}$, on peut écrire

$$\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d} = \beta^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{L}_i' \right)^{\otimes d} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes -\varepsilon\eta_i d a_i^2}$$

(cela résulte du théorème du cube, voir début de la partie 5). De même nous utiliserons que le faisceau

$$\beta^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{L}_i' \right)^{\otimes -1} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes 2\eta_i a_i^2}$$

est engendré par ses sections globales.

Le résultat principal de cette partie s'énonce alors comme suit.

Proposition 2.1. *Pour tout $a \in (\mathbb{N} \setminus 0)^m$, tout sous-schéma fermé intègre $Y \hookrightarrow X^m$, de dimension non nulle notée u, de la forme $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$ où les Y_i sont des sous-schémas fermés géométriquement intègres de X non contenus dans Z_X et tout $\varepsilon \leq u^{-1}(4m)^{-u} \prod_{i=1}^m \deg(Y_i)^{-1}$, il existe $d_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $d_0 \mid d$*

$$\dim_K \Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}) \geq \frac{d^u}{4u!} \prod_{i=1}^m a_i^{2\dim Y_i} + O(d^{u-1}).$$

DÉMONSTRATION. On note, pour cette preuve, $\mathcal{N}_a = \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{\otimes \eta_i a_i^2}$. La théorie élémentaire de l'intersection montre que

$$\begin{aligned}
[\mathcal{N}_a]^u \cdot Y &= u! \prod_{i=1}^m \frac{\deg Y_i}{(\dim Y_i)!} (\eta_i a_i^2)^{\dim Y_i} \\
&\leq (2m)^u \prod_{i=1}^m (\deg Y_i) a_i^{2 \dim Y_i} \\
&\leq \frac{\varepsilon^{-1}}{u 2^u} \prod_{i=1}^m a_i^{2 \dim Y_i}
\end{aligned}$$

Par ailleurs un résultat crucial d'homogénéité (voir [F1, lemme 4.2], [F2] ou [V, Corollaire 11.4]) donne

$$\left[\beta^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{L}_i' \right) \right]^u \cdot Y = \left(\prod_{i=1}^m a_i^{2 \dim Y_i} \right) \left[\alpha^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{L}_i' \right) \right]^u \cdot Y.$$

Comme α est génériquement fini (voir [V, Corollaire 11.2])

$$\left[\alpha^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{L}_i' \right) \right]^u \cdot Y \geq 1.$$

On considère ensuite un sous-schéma fermé H de Y d'idéal isomorphe à $\mathcal{N}_a^{\otimes -1}$ de sorte que pour tout faisceau $\mathcal{M}$ sur Y la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_a^{\otimes -1}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(H, \mathcal{M}_{|H})$$

permet d'écrire $\dim_K \Gamma(Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_a^{\otimes -1}) \geq \dim_K \Gamma(Y, \mathcal{M}) - \dim_K \Gamma(H, \mathcal{M}_{|H})$. On introduit l'entier d_0 (indépendant de d) que nous fixerons ci-dessous. L'itération de la formule précédente montre

$$\begin{aligned}
\dim_K \Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}) &= \dim_K \Gamma \left(Y, \beta^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{L}_i' \right)^{\otimes d} \otimes \mathcal{N}_a^{\otimes -\varepsilon d} \right) \\
&\geq \dim_K \Gamma \left(Y, \beta^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{L}_i' \right)^{\otimes d} \otimes \mathcal{N}_a^{\otimes d/d_0} \right) \\
&\quad - \sum_{j=-d/d_0}^{d\varepsilon - 1} \dim_K \Gamma \left(H, \beta^* \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathcal{L}_i' \right)^{\otimes d} \otimes \mathcal{N}_a^{\otimes -j}{}_{|H} \right).
\end{aligned}$$

Ensuite, sachant que $\beta^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1}\mathcal{L}'_i\right)^{\otimes -1}\otimes\mathcal{N}_a^{\otimes 2}$ est engendré par ses sections globales, on peut trouver une injection (sur H)

$$\beta^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1}\mathcal{L}'_i\right)^{\otimes d}\otimes\mathcal{N}_a^{\otimes -j}{}_{|H}\longrightarrow\mathcal{N}_a^{\otimes 2d-j}{}_{|H}.$$

Alors la dimension des sections sur H du membre de gauche est majorée par (si $-d/d_0\leq j<d\varepsilon-1$)

$$\begin{aligned}\dim_K\Gamma(H,\mathcal{N}_a^{\otimes 2d-j}{}_{|H}) &= \frac{(2d-j)^{u-1}}{(u-1)!}[\mathcal{N}_{a|H}]^{u-1}\cdot H+O((2d-j)^{u-2})\\ &\leq\left(1+\frac{1}{2d_0}\right)^{u-1}\frac{(2d)^{u-1}}{(u-1)!}[\mathcal{N}_a]^u\cdot Y+O(d^{u-2})\\ &\leq\left(1+\frac{1}{2d_0}\right)^{u-1}\frac{d^{u-1}}{2u!}\varepsilon^{-1}\prod_{i=1}^m a_i^{2\dim Y_i}+O(d^{u-2})\end{aligned}$$

(où les constantes sous-entendues dans les $O()$ sont indépendantes de j) tandis que

$$\begin{aligned}&\dim_K\Gamma\left(Y,\beta^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1}\mathcal{L}'_i\right)^{\otimes d}\otimes\mathcal{N}_a^{\otimes d/d_0}\right)\\ &=\frac{(d/d_0)^u}{u!}\left[\beta^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1}\mathcal{L}'_i\right)^{\otimes d_0}\otimes\mathcal{N}_a\right]^u\cdot Y+O(d^{u-1})\\ &=\frac{d^u}{u!}\left(\left[\beta^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1}\mathcal{L}'_i\right)\right]^u\cdot Y+P_1\left(\frac{1}{d_0}\right)\right)+O(d^{u-1})\\ &\geq\frac{d^u}{u!}\prod_{i=1}^m a_i^{2\dim Y_i}\left(1+P_2\left(\frac{1}{d_0}\right)\right)+O(d^{u-1})\end{aligned}$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes indépendants de d vérifiant $P_1(0)=P_2(0)=0$. Finalement on a, en combinant,

$$\dim_K\Gamma(Y,\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})\geq$$
$$\frac{d^u}{u!}\prod_{i=1}^m a_i^{2\dim Y_i}\left(1+P_2\left(\frac{1}{d_0}\right)-\left(1+\frac{1}{2d_0}\right)^{u-1}\sum_{j=-d/d_0}^{d\varepsilon-1}\frac{\varepsilon^{-1}}{2d}\right)+O(d^{u-1}).$$

L'expression entre parenthèses vaut

$$1+P_2\left(\frac{1}{d_0}\right)-\left(1+\frac{1}{2d_0}\right)^{u-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon d_0}\right)=\frac{1}{2}+P_3\left(\frac{1}{d_0}\right)$$

où, à nouveau, P_3 est un polynôme indépendant de d vérifiant $P_3(0)=0$. On conclut en choisissant d_0 tel que $P_3(1/d_0)\geq -1/4$. □

3. – Principe de la démonstration

On va procéder à l'aide d'estimations sur les sections de $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$. Le lemme suivant donne le choix de a dépendant de x et formule l'inégalité principale qui transforme les conditions du théorème en une condition que l'on pourra lire sur le faisceau ci-dessus (voir partie 6, dernier paragraphe).

LEMME 3.1. *Sous les hypothèses du théorème* 1.2 *il existe des entiers* $a_1, \ldots, a_m \geq 1$ *de telle sorte que* $a_i/a_{i+1} \geq c_2$,

$$|a_i x_i| \geq \left(1 - \frac{1}{2c_2}\right)^{i-1} |a_1 x_1|$$

et (*inégalité principale*)

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i |a_i x_i|^2 \geq \frac{c_1}{4} \sum_{i=1}^{m-1} |a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}|^2.$$

De plus on peut choisir ces entiers de manière à ce que $s_i = a_i/a_{i+1}$ *soit l'entier le plus proche de* $|x_{i+1}|/|x_i|$ *et* $a_m = 1$.

DÉMONSTRATION. Nous choisissons a_m et $s_1, \ldots, s_{m-1}$ comme indiqué dans l'énoncé et vérifions que $a_i = s_i \cdots s_{m-1} a_m$ convient. On a clairement $s_i \geq c_2$ puisque c_2 est entier. D'autre part, $\big| s_i |x_i| - |x_{i+1}| \big| \leq \frac{1}{2}|x_i|$ et cela entraîne (avec $\frac{1}{2} \leq \frac{s_i}{2c_2}$)

$$|x_{i+1}| \leq s_i |x_i| + \frac{1}{2}|x_i| \leq \left(1 + \frac{1}{2c_2}\right) s_i |x_i|,$$

$$s_i |x_i| \leq |x_{i+1}| + \frac{1}{2}|x_i| \leq |x_{i+1}| + \frac{1}{2c_2} s_i |x_i|$$

et donc

$$\left(1 - \frac{1}{2c_2}\right) s_i |x_i| \leq |x_{i+1}|.$$

En itérant on a bien

$$|a_i x_i| \geq \left(1 - \frac{1}{2c_2}\right)^{i-1} |a_1 x_1|.$$

Montrons l'inégalité principale. On a $|a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}| = a_{i+1} |s_i x_i - x_{i+1}|$ et

$$\begin{aligned}
|s_i x_i - x_{i+1}|^2 &= s_i^2 |x_i|^2 - 2 s_i < x_i, x_{i+1} > + |x_{i+1}|^2 \\
&\leq s_i^2 |x_i|^2 - 2 s_i (1 - 1/c_1) |x_i| |x_{i+1}| + |x_{i+1}|^2 \\
&\leq (s_i |x_i| - |x_{i+1}|)^2 + \frac{2}{c_1} s_i |x_i| |x_{i+1}| \\
&\leq \frac{1}{4}|x_i|^2 + \frac{2}{c_1}\left(1 + \frac{1}{2c_2}\right) s_i^2 |x_i|^2 \\
&\leq \frac{1}{4c_2^2}|x_{i+1}|^2 + \frac{2}{c_1}\left(1 + \frac{1}{2c_2}\right) s_i^2 |x_i|^2.
\end{aligned}$$

On écrit $1+\frac{1}{2c_2}\leq 2$, $c_1\leq 16c_2^2$ et finalement

$$\sum_{i=1}^{m-1}|a_ix_i-a_{i+1}x_{i+1}|^2\leq\sum_{i=1}^{m-1}\frac{4a_{i+1}^2}{c_1}(|x_{i+1}|^2+s_i^2|x_i|^2)=\frac{4}{c_1}\sum_{i=1}^{m}\eta_i|a_ix_i|^2. \qquad \square$$

Nous en arrivons au cœur de la démonstration : nous allons supposer que $x_i\in(X\setminus Z_X)(K)$ pour tout i et, sous les hypothèses du théorème 1.2, arriver à une contradiction. L'énoncé que nous allons établir est

THÉORÈME 3.1. *Si les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées avec $x_i\in(X\setminus Z_X)(K)$ pour tout i alors il existe un entier $v\geq m-1$ et une famille de sous-schémas fermés intègres de X notée $(Y_i^{(u)})_{u,i}$ où $1\leq i\leq m$ et $v\leq u\leq m\dim X$ de sorte que les conditions suivantes sont réalisées.*

1. *$x_i\in Y_i^{(u)}\subset Y_i^{(u+1)}$ pour tous $v\leq u<m\dim X$, $1\leq i\leq m$.*
2. *$\sum_i\dim Y_i^{(u)}=u$ pour tout u.*
3. *Si $u\neq v$, $\dim Y_i^{(u)}\geq 1$ pour tout i et il existe i tel que $Y_i^{(v)}=\{x_i\}$.*
4. *Pour tout u*
$$\prod_{i=1}^{m}\deg(Y_i^{(u)})\leq\Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}$$
et, pour tout i,
$$32m^3\dim X(4m)^{m\dim X}\deg(Y_i^{(u)})\leq\Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}.$$
5. *Pour tout u*
$$\sum_{i=1}^{m}\eta_ia_i^2h(Y_i^{(u)})\leq\mu^{m\dim X-u}\Lambda^{\left(1+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}H\sum_{i=1}^{m}\eta_ia_i^2$$
où l'on pose $\mu=(n+1)^{m-1}$.

Montrons d'abord que cela entraîne bien notre résultat : en effet la formule de hauteur pour $u=v$ et i tel que $Y_i^{(v)}=\{x_i\}$ donne une borne pour

$$\begin{aligned}\eta_ia_i^2h(\{x_i\})&\geq\eta_ia_i^2h(x_i)\geq a_i^2h(x_i)\geq-a_i^2c_{\mathrm{NT}}+a_i^2|x_i|^2\\&\geq-a_i^2c_{\mathrm{NT}}+\left(1-\frac{1}{2c_2}\right)^{2i-2}a_1^2c_3.\end{aligned}$$

D'autre part, dans le membre de droite, on a

$$\sum_i\eta_ia_i^2\leq\left(1+2\sum_{i=1}^{m-1}c_2^{-2i}\right)a_1^2\leq\frac{c_2^2+1}{c_2^2-1}a_1^2.$$

Ainsi, en majorant i par m et en minorant v par $m-1$, on aboutit à

$$c_3 \leq \left(1-\frac{1}{2c_2}\right)^{2-2m}\left(\frac{c_2^2+1}{c_2^2-1}\right)\left[c_{\mathrm{NT}}+\mu^{m\dim X-m+1}\Lambda^{\left(1+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=m}^{m\dim X}(3j+1)}H\right].$$

Vu la valeur de c_2 on a

$$\left(1-\frac{1}{2c_2}\right)^{2-2m}\left(\frac{c_2^2+1}{c_2^2-1}\right)\leq 2$$

($c_2 \geq 2m+1$ suffit) et l'on en déduit bien, par définition de c_3, une contradiction (on a $(m-1)(m\dim X-m+1)=(\dim X)^3$).

Pour la démonstration du théorème, on procède par récurrence sur u. Si $u = m\dim X$ on pose $Y_i^{(u)} = X$ pour chaque i. On vérifie que cela convient car

$$\deg(X)^m \leq \Lambda,$$
$$32m^3\dim X(4m)^{m\dim X}\deg(X)\leq\Lambda$$

et $h(X)\leq H$.

Pour continuer, la démarche est la suivante : on va construire une petite section de $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ sur $Y^{(u)}=Y_1^{(u)}\times\cdots\times Y_m^{(u)}$ (par un lemme de Siegel), montrer à l'aide de l'inégalité principale qu'elle s'annule à un ordre suffisamment élevé en x et, enfin, grâce au théorème du produit, cela impliquera que x appartient à un produit de dimension strictement inférieure (permettant la construction de $Y^{(u-1)}$). Toutefois dans la pratique nous exclurons certains x de ce procédé pour pouvoir le mettre en œuvre plus aisément. Les points ainsi exclus seront contenus dans un fermé de hauteur et degré contrôlé, ce qui permet quand même de continuer la récurrence. Au paragraphe suivant nous traitons ces points particuliers après avoir modifié notre plongement en fonction des $Y_i^{(u)}$ de façon à ce que ces schémas y soient décrits de manière plus simple.

4. – Préparation

On notera généralement $W_0,\ldots,W_n$ les coordonnées de $\mathbb{P}_K^n$. Si I est un idéal homogène de $K[W_0,\ldots,W_n]$ on désignera par $V(I)$ le fermé correspondant. Si F est un élément homogène de cet anneau, $D_+(F)$ est le complémentaire de $V(F)$. Les résultats du premier paragraphe sont voisins de [Ch, chap. 2].

4.1. – Plongements adaptés

Lorsque Z est un schéma intègre, projectif sur K, de dimension $u < n$, on dira ici qu'une immersion fermée $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ est *adaptée* à Z si

1. $Z \cap V(W_0, \dots, W_u) = \emptyset$;
2. $K(Z)$ est engendré par les images de $\frac{W_1}{W_0}, \dots, \frac{W_{u+1}}{W_0}$;
3. l'image de W_{u+1}/W_0 est non nulle.

On remarque que la première condition donne naissance à un morphisme fini $\pi: Z \to \mathbb{P}^u_K$: on compose l'immersion fermée $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K \setminus V(W_0, \dots, W_u)$ avec la projection linéaire $\mathbb{P}^n_K \setminus V(W_0, , \dots, W_u) \to \mathbb{P}^u_K$ (cette dernière étant un morphisme affine, il en est de même de π qui est propre donc fini). En particulier π est surjectif (par dimension) donc $Z \cap D_+(W_0) \neq \emptyset$ ce qui donne

$$\Gamma(D_+(W_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}) = K\left[\frac{W_1}{W_0}, \dots, \frac{W_n}{W_0}\right] \longrightarrow \Gamma(D_+(W_0) \cap Z, \mathcal{O}_Z) \hookrightarrow K(Z).$$

On peut ainsi parler de l'image w_i de W_i/W_0 dans $K(Z)$. On a toujours $K(Z) = K(w_1, \dots, w_n)$. Le fait que π soit fini et surjectif montre que les éléments $w_1, \dots, w_u$ sont algébriquement indépendants et que chaque w_i est entier sur $K[w_1, \dots, w_u]$. Le degré de π vaut $[K(Z) : K(w_1, \dots, w_u)]$ et coïncide avec le degré projectif de $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$. On remarque que la troisième condition découle de la seconde excepté si ce degré vaut 1. Le lemme ci-après montre que, sous l'hypothèse 1, l'on contrôle des relations de dépendance intégrale pour les w_i.

On rappelle que, si $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ est de degré D, toute forme éliminante f de Z est un polynôme multihomogène de multidegré $(D, \dots, D)$ en $u+1$ groupes de $n+1$ variables. Chacun de ces groupes correspond naturellement à une forme linéaire et si $L_0, \dots, L_u$ sont de telles formes on note $f(L_0, \dots, L_u)$ l'image par f de la famille de leurs coefficients.

LEMME 4.1. *Soit Z un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_K$ qui vérifie la condition $Z \cap V(W_0, \dots, W_u) = \emptyset$. On note $u = \dim Z$, $D = \deg Z$ et f une forme éliminante de Z. Pour $u+1 \leq j \leq n$ on pose*

$$P_j(X_0, \dots, X_{u+1}) = \frac{f(X_{u+1}W_0 - X_0W_j, X_0W_1 - X_1W_0, \dots, X_0W_u - X_uW_0)}{X_0^{Du} f(W_0, \dots, W_u)}.$$

Alors P_j est un polynôme homogène de degré D dans lequel le coefficient de X_{u+1}^D est 1 et le polynôme

$$P_j(W_0, \dots, W_u, W_j)$$

est élément de l'idéal de Z.

DÉMONSTRATION. Puisque $Z \cap V(W_0, \dots, W_u, W_j) = \emptyset$ on a comme plus haut un morphisme fini $\pi_j: Z \to \mathbb{P}^{u+1}_K$. Ainsi $\pi_j(Z)$ est une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}^{u+1}_K$ et s'écrit donc $V(F_j)$ pour un certain polynôme homogène irréductible F_j de $K[X_0, \dots, X_{u+1}]$ (déterminé à la multiplication par un élément de $K^\times$ près). Comme $Z \cap V(W_0, \ldots, W_u) = \emptyset$ entraîne $\pi_j(Z) \cap V(X_0, \ldots, X_u) = \emptyset$ qui se réécrit $F_j(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$, on constate $\deg_{X_{u+1}} F_j = \deg F_j$.

On note

$$P_j' = f(X_{u+1}W_0 - X_0W_j, X_0W_1 - X_1W_0, \ldots, X_0W_u - X_uW_0).$$

Si $x_0, \ldots, x_{u+1}$ sont des éléments de $\bar{K}$ avec $x_0 \neq 0$, les zéros communs des formes linéaires $x_{u+1}W_0 - x_0W_j$ et $x_0W_i - x_iW_0$ $(1 \leq i \leq u)$ sont les éléments de $\mathbb{P}_K^n(\bar{K})$ se projetant sur $x = (x_0 : \cdots : x_{u+1}) \in \mathbb{P}_K^{u+1}(\bar{K})$. Par conséquent (théorème de l'élimination)

$$\begin{aligned} P_j'(x_0, \ldots, x_{u+1}) = 0 &\iff \pi_j^{-1}(x)(\bar{K}) \neq \emptyset \\ &\iff x \in \pi_j(Z)(\bar{K}) \\ &\iff F_j(x_0, \ldots, x_{u+1}) = 0 \end{aligned}$$

(sous l'hypothèse $x_0 \neq 0$). Ceci montre que l'on peut écrire

$$P_j' = \lambda X_0^a F_j^b$$

avec $\lambda \in K^\times$ et $a, b \in \mathbb{N}$. A présent le coefficient de $X_0^{Du} X_{u+1}^D$ dans P_j' est facilement, par multihomogénéité,

$$f(W_0, W_1, \ldots, W_u) \in K.$$

L'hypothèse $Z \cap V(W_0, \ldots, W_u) = \emptyset$ exprime exactement la non-nullité de cet élément. Par suite $D = \deg_{X_{u+1}} P_j' = b \deg_{X_{u+1}} F_j = b \deg F_j = \deg P_j' - a$ et cela entraîne $a = Du$. Ainsi P_j est effectivement un polynôme et c'est (à une constante près) une puissance de F_j. Puisque $\pi_j(Z) = V(F_j)$ on a

$$Z \subset \pi_j^{-1} V(F_j) = V(F_j(W_0, \ldots, W_u, W_j)) = V(P_j(W_0, \ldots, W_u, W_j))$$

ce qui termine la preuve. □

Voici maintenant un résultat qui indique comment adapter, *via* une transformation linéaire de petite taille, un plongement projectif donné. On y utilise les faits élémentaires suivants :

- si $f \in K[X_1, \ldots, X_n] \setminus 0$ et $E \subset K$ avec $\mathrm{Card}(E) > \max_i \deg_{X_i} f$ alors il existe $x \in E^n$ tel que $f(x) \neq 0$;
- si $f \in K[X_0^{(1)}, \ldots, X_{m_1}^{(1)}, \ldots, X_0^{(n)}, \ldots, X_{m_n}^{(n)}] \setminus 0$ est multihomogène et $E \subset K$ avec $0 \in E$ et $\mathrm{Card}(E) \geq \max(2, \max_i \deg_{X^{(i)}} f)$ alors il existe $x \in E^{m_1 + \cdots + m_n + n}$ tel que $f(x) \neq 0$.

PROPOSITION 4.1. *Soit $\varphi \colon Z \to \mathbb{P}_K^n$ un sous-schéma fermé intègre. On note $u = \dim Z$ et $D = \deg Z$. Il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ telle que si $\chi \colon \mathbb{P}_K^n \to \mathbb{P}_K^n$ est l'automorphisme défini par M alors l'immersion fermée $\chi \circ \varphi$ est adaptée à Z. De plus on peut choisir M à coefficients dans $E = \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq \max(D, 2)/2\}$.*

DÉMONSTRATION. Si l'on note $m_{i,j}$ les coefficients de M, $L_i = \sum_{j=0}^n m_{i,j} W_j$ les formes linéaires définies par ses lignes et f une forme éliminante de Z, la condition $\chi \circ \varphi(Z) \cap V(W_0, \ldots, W_u) = \emptyset$ est équivalente à

$$f(L_0, \ldots, L_u) \neq 0.$$

Puisque f est multihomogène de degré D en chaque groupe de variables, on peut choisir les $m_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq u$ et $0 \leq j \leq n$ à coefficients dans E de telle sorte que ceci soit réalisé. Les formes $L_0, \ldots, L_u$ sont alors automatiquement indépendantes et l'on peut trouver $k_{u+1}, \ldots, k_n$ de manière que la famille $L_0, \ldots, L_u, W_{k_{u+1}}, \ldots, W_{k_n}$ soit encore libre. Montrons (si $D \neq 1$) qu'il existe une matrice convenable avec les $m_{i,j}$ $(i \leq u)$ fixés comme ci-dessus, $m_{i,j} = \delta_{j,k_i}$ si $i > u+1$, $m_{u+1,j} = 0$ si $j \leq u$ et $m_{u+1,k_{u+1}} = 1$ (0 et 1 sont éléments de E). En d'autres termes il faut établir que $K(Z)$, qui est engendré par les images des L_i/L_0 et W_{k_i}/L_0, est engendré par les images des L_i/L_0 et d'une certaine combinaison linéaire de la forme

$$\frac{W_{k_{u+1}}}{L_0} + \sum_{j=u+2}^{n} m_{u+1,k_j} \frac{W_{k_j}}{L_0}.$$

Pour cela on considère les D plongements σ_i de $K(Z)$ dans une clôture normale (au-dessus de $K(L_i/L_0)$) ; un élément x engendre si et seulement si $\sigma_i(x) \neq \sigma_1(x)$ pour tout $i > 1$ autrement dit si

$$\prod_{i=2}^{D} (\sigma_i(x) - \sigma_1(x)) \neq 0.$$

En remplaçant x par l'image de l'expression précédente, on obtient un polynôme de degré $D-1$ en les $m_{u+1,j}$. Comme ci-dessus on peut choisir ces coefficients dans E vérifiant la condition.

Il reste à traiter le cas $D = 1$. Là, la condition 2 est automatique mais il faut vérifier la troisième. On fixe encore $m_{i,j} = \delta_{j,k_j}$ pour $i > u+1$ mais on choisit pour $\sum_{j=0}^n m_{u+1,j} W_j$ soit $W_{k_{u+1}}$, soit $W_{k_{u+1}} + L_0$ soit $W_{k_{u+1}} - L_0$ (la première si l'image de $W_{k_{u+1}}/L_0$ est non nulle, celle des deux autres qui est à coefficients dans E sinon). □

Comme $\chi^* \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(1)$, changer le plongement φ en $\chi \circ \varphi$ ne modifie pas le degré de Z. Pour la hauteur nous utiliserons le fait suivant (voir aussi partie 6 pour la hauteur des points).

LEMME 4.2. *Sous les hypothèses de la proposition, on peut trouver dans l'idéal de $\chi \circ \varphi(Z)$ des éléments*

$$P_j(W_0, \ldots, W_u, W_j)$$

$(u+1 \leq j \leq n)$ où les P_j sont des polynômes homogènes de $K[X_0, \ldots, X_{u+1}]$ de degré D, dans lesquels le coefficient de X_{u+1}^D est 1, de telle sorte que si B est la famille formée des coefficients de $P_{u+1}, \ldots, P_n$ on ait

$$h(B) \leq h_\varphi(Z) + D(u+1) \log D(n+1).$$

DÉMONSTRATION. Par le lemme 4.1 on peut trouver de tels P_j dont les coefficients s'obtiennent par une spécialisation donnée d'une certaine forme éliminante de $\chi(\varphi(Z))$, disons f'. Par le théorème de l'élimination, il existe une forme éliminante f de $\varphi(Z)$ telle que

$$f'(L_0, \ldots , L_u) = f(L_0(M\cdot), \ldots , L_u(M\cdot))$$

pour des formes linéaires $L_0, \ldots , L_u$. Si $L_i = X_i W_0 - X_0 W_i$ on a $L_i(M\cdot) = \sum_{k=0}^{n}(m_{0,k}X_i - m_{i,k}X_0)W_k$; par suite P_j s'obtient en spécialisant chaque variable de f en un élément de la forme $aX_0 + bX_i$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $|a|, |b| \leq \max(2, D)/2$ et $1 \leq i \leq u$ ou $i = j$. Donc, si Λ est la famille des coefficients de f, on a une écriture

$$P_j = X_0^{-Du} \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda \prod_{i\in[1,u]\cup\{j\}} \prod_{k=1}^{D} (a_{\lambda,i,k}X_0 + b_{\lambda,i,k}X_i).$$

Si v est une place finie la valeur absolue d'un coefficient de P_j est au plus $\max_{\lambda\in\Lambda} |\lambda|_v$ (car $a_{\lambda,i,k}$ et $b_{\lambda,i,k}$ sont entiers). Pour une place infinie on remarque que le terme en facteur de λ est un polynôme dont la somme des valeurs absolues des coefficients est au plus $D^{D(u+1)}$ (y compris si $D = 1$). Ainsi

$$|P_j|_v \leq D^{D(u+1)} \sum_{\lambda\in\Lambda} |\lambda|_v.$$

Si λ est le coefficient d'un monôme $\mathfrak{m}$ alors (voir [R1] démonstration du lemme 3.3)

$$|\lambda|_v \leq \binom{d}{\mathfrak{m}} M_v(f)$$

où $d = (D, \ldots , D)$ et $M_v(f)$ est le terme local définissant $h_\varphi(Z)$. La somme des coefficients multinomiaux qui interviennent est $(n + 1)^{D(u+1)}$ donc $|P_j|_v \leq [D(n + 1)]^{D(u+1)} M_v(f)$ qui donne la conclusion. □

4.2. – Application

On suppose les conditions du théorème 3.1 vraies pour u mais $Y_i^{(u)} \neq \{x_i\}$. Ainsi $u \geq m$.

Nous allons appliquer ce qui précède aux $Y_i^{(u)}$ mais nous fixons d'abord quelques notations.

Dans la suite, on travaillera toujours à u fixé (sauf brièvement, dans ce paragraphe, pour l'étude du pas final de la démonstration du théorème 3.1). Aussi désignera-t-on simplement par Y_i le schéma $Y_i^{(u)}$ et, de même, $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$. De plus on écrira $\varphi_i : Y_i \hookrightarrow \mathbb{P}_K^{n_i}$, $u_i = \dim Y_i$ et $D_i = \deg Y_i$ (en particulier $u_i > 0$).

Enfin, lorsque l'on a affaire au produit $(\mathbb{P}_K^n)^m$, on distingue les coordonnées des différents facteurs en notant $W_0^{(i)}, \ldots , W_n^{(i)}$ celles du i-ème.

En vertu du paragraphe précédent, l'on fixe donc, une fois pour toutes, une matrice $M_i \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ à coefficients entiers compris entre $-\max(D_i, 2)/2$ et $\max(D_i, 2)/2$ de sorte que le morphisme $\chi_i : \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ associé fait de $\chi_i \circ \varphi_i$ un plongement adapté. On lui associe comme précédemment un morphisme $\pi_i : Y_i \to \mathbb{P}^{u_i}_K$ et l'on appelle également $w_j^{(i)}$ l'image de $W_j^{(i)}/W_0^{(i)}$ dans $K(Y_i)$. On note $P_j^{(i)}$ (pour $u_i + 1 \leq j \leq n$) les polynômes obtenus par le lemme 4.2 et B_i la famille de leurs coefficients. Ainsi

$$P_j^{(i)}\left(1, w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)}, Z\right) = 0$$

sera une relation de dépendance intégrale pour $w_j^{(i)}$, irréductible si $j = u_i + 1$. Dans nos calculs (partie 6), nous aurons également besoin de relations de dépendance pour les quotients $w_\nu^{(i)}/w_j^{(i)}$ lorsque (ν, j) est élément de

$$\mathcal{N}_i = \{(\nu, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq \min(\nu, j) < \max(\nu, j) = u_i + 1\}$$

(notons que l'on a fait en sorte que $w_{u_i+1}^{(i)} \neq 0$). On pose alors

$$Q_{u_i+1,j}^{(i)}(X_1, \dots, X_{u_i}, Z) = P_{u_i+1}^{(i)}(1, X_1, \dots, X_{u_i}, X_j Z) \qquad 0 \leq j \leq u_i$$

$$Q_{\nu,u_i+1}^{(i)}(X_1, \dots, X_{u_i}, Z) = P_{u_i+1}^{(i)}(Z, X_1 Z, \dots, X_{u_i} Z, X_\nu) \qquad 0 \leq \nu \leq u_i$$

(où, à droite, $X_0 = 1$, le cas échéant) de sorte que, pour tout $(\nu, j) \in \mathcal{N}_i$, le polynôme de $K(Y_i)[Z]$

$$Q_{\nu,j}^{(i)}(w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)}, Z)$$

est une relation de dépendance intégrale pour $w_\nu^{(i)}/w_j^{(i)}$.

Le but va à présent être de montrer la

PROPOSITION 4.2. *Dans le cadre décrit ci-dessus, il existe un indice i ($1 \leq i \leq m$) et un polynôme homogène $T \in K[W_0^{(i)}, \dots, W_{u_i+1}^{(i)}]$ tel que*

- $\chi_i(x_i) \in V(T)$;
- $\chi_i(Y_i) \not\subset V(T)$;
- $\deg T \leq \Lambda^{3u \prod_{j=u+1}^{m \dim X}(3j+1)}$ *et*
- $\eta_i a_i^2 h(T)$ *est au plus*

$$8(\dim X)(4m)^{m \dim X} \mu^{m \dim X - u + 1} \Lambda^{\left(3u+2+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=u+1}^{m \dim X}(3j+1)} H \sum_{l=1}^{m} \eta_l a_l^2.$$

En effet si ce résultat est acquis l'on peut donner la

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1. On commence par ramener le polynôme dans le plongement initial : $x_i \in V(T')$ où $T' = T(M_i\cdot)$. Les estimations deviennent : $\deg T' = \deg T$ et

$$h(T') \leq h(T) + (\deg T)\log\frac{\max(D_i,2)}{2} + (\deg T)\log(n+1) + \log\binom{\deg T + u_i + 1}{u_i + 1}.$$

Pour les formules d'intersection nous utiliserons la hauteur modifiée $h_m(T')$ introduite dans [R1] ; on a la majoration $h_m(T') \leq h(T') + \sqrt{n}$ (en utilisant le lemme 5.2 de [R2]). Si l'on écrit $\log(n+1) \leq \sqrt{n} \leq \mu$ on déduit

$$\begin{aligned} h_m(T') &\leq h(T) + 4\mu(\deg T)\log(u_i+2)D_i \\ &\leq h(T) + 4\mu(\deg T)(u_i+1)D_i. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $4(u_i+1)D_i \leq \Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}$, on trouve que $\eta_i a_i^2 h_m(T')$ est au plus

$$9(\dim X)(4m)^{m\dim X}\mu^{m\dim X - u+1}\Lambda^{\left(3u+2+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)} H \sum_{l=1}^{m}\eta_l a_l^2.$$

On définit maintenant $Y_j^{(u-1)} = Y_j^{(u)}$ si $j \neq i$ et $Y_i^{(u-1)}$ comme une composante irréductible de $Y_i^{(u)} \cap V(T')$ qui contient x_i. Ainsi (formule d'intersection avec une hypersurface) on a $d(Y_i^{(u-1)}) \leq D_i \deg T'$ et

$$h(Y_i^{(u-1)}) \leq D_i h_m(T') + \deg T' h(Y_i).$$

Les quantités apparaissant dans la quatrième condition du théorème (degrés) sont donc chacune multipliée par au plus $\deg T'$ en passant de u à $u-1$. On en déduit immédiatement que cette condition est donc bien remplie pour $u-1$. En ce qui concerne la cinquième assertion (hauteurs) on a

$$\sum_{l=1}^{m}\eta_l a_l^2 h(Y_l^{(u-1)}) \leq \eta_i a_i^2 D_i h_m(T') + \deg T' \sum_{l=1}^{m}\eta_l a_l^2 h(Y_l^{(u)})$$

$$\leq 10 D_i(\dim X)(4m)^{m\dim X}\mu^{m\dim X-u+1}\Lambda^{\left(3u+2+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)} H \sum_{l=1}^{m}\eta_l a_l^2.$$

On majore enfin $10D_i(\dim X)(4m)^{m\dim X}$ par $\Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}$ puis $1+3u+2+\frac{2}{3m} \leq 3u+1+\frac{2u}{m}+\frac{2}{3m} = (3u+1)\left(1+\frac{2}{3m}\right)$ et l'on obtient la majoration souhaitée. Ceci établit les estimations pour $u-1$. Si aucun des $Y_i^{(u-1)}$ n'est de dimension 0, toutes les conditions sont vérifiées et l'on peut continuer par récurrence. Sinon on pose $v = u-1$ (on a bien $v \geq m-1$) et le théorème est entièrement démontré. □

L'intérêt d'énoncer ici cette proposition plutôt que dans la partie 7 où nous serons à même de l'établir est qu'elle permet d'éliminer immédiatement un certain nombre de «cas particuliers» pour lesquels les méthodes développées dans les paragraphes suivants ne s'appliqueront pas.

On note $(x_0^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in K^{n+1}$ un choix de coordonnées projectives pour $\chi_i(x_i)$.

LEMME 4.3. *Pour démontrer la proposition précédente on peut supposer que les trois assertions suivantes sont vérifiées pour chaque* $1 \leq i \leq m$.

1. *Le morphisme* $\pi_i \colon Y_i \to \mathbb{P}_K^{u_i}$ *est étale au point* x_i.
2. *Si* $0 \leq j \leq u_i + 1$ *alors* $x_j^{(i)} \neq 0$.
3. *Pour tout* $(j, \nu) \in \mathcal{N}_i$

$$\frac{\partial Q_{j,\nu}^{(i)}}{\partial Z}\left(\frac{x_1^{(i)}}{x_0^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_0^{(i)}}, \frac{x_\nu^{(i)}}{x_j^{(i)}}\right) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION. Si la condition 2 n'est pas vérifiée (pour i, j donnés) les conclusions de la proposition sont réalisées avec $T = W_j^{(i)}$. Considérons ensuite, pour i fixé, le discriminant Δ du polynôme en Z

$$P_{u_i+1}^{(i)}(W_0^{(i)}, W_1^{(i)}, \dots, W_{u_i}^{(i)}, Z).$$

C'est un polynôme homogène de degré $D_i(D_i - 1)$ en $W_0^{(i)}, \dots, W_{u_i}^{(i)}$. Ce Δ n'est pas le polynôme nul car le polynôme ci-dessus est irréductible en Z. Par conséquent $\chi_i(Y_i) \not\subset V(\Delta)$. De plus on déduit de la définition du discriminant que

$$h(\Delta) \leq 2D_i h(B_i) + 5u_i D_i^2.$$

Ainsi si $\chi_i(x_i) \in V(\Delta)$ on obtient la proposition (car avec le lemme 4.2 $h(\Delta) \leq 2D_i h(Y_i) + 3u_i D_i^3 H$ ce qui entraîne facilement les estimations de hauteurs). Montrons que dans le cas contraire les assertions 1 et 3 sont alors vérifiées. Il nous faut tout d'abord noter que, dans $K(Y_i)$, on a

$$\Delta(1, w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)}) w_j^{(i)} \in K[w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)}, w_{u_i+1}^{(i)}]$$

pour tout j, $0 \leq j \leq n$: cela résulte de ce que $w_j^{(i)}$ est entier sur $K[w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)}]$, voir [ZS].

Par suite si $\delta = \Delta(1, w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)})$ et $P(Z) = P_{u_i+1}^{(i)}(1, w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)}, Z)$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(D_+(W_0^{(i)}\Delta) \cap Y_i, \mathcal{O}_{Y_i}) &= K\left[w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)}, \frac{1}{\delta}\right]\left[w_{u_i+1}^{(i)}\right] \\ &\simeq K\left[w_1^{(i)}, \dots, w_{u_i}^{(i)}, \frac{1}{\delta}\right][Z]/P(Z).\end{aligned}$$

Sur cette dernière écriture il est clair que l'on a affaire à une $K[w_1^{(i)},\ldots,w_{u_i}^{(i)},\frac{1}{\delta}]$-algèbre étale. En effet, P est unitaire et $P'(w_{u_i+1}^{(i)})$ est inversible puisque le discriminant δ appartient (dans $K[w_1^{(i)},\ldots,w_{u_i}^{(i)},Z]$) à l'idéal engendré par P et P'. Ainsi la restriction de π à $D_+(W_0^{(i)}\Delta)\cap Y_i$ est effectivement un morphisme étale. En outre on a (image de $P'(w_{u_i+1}^{(i)})$ dans le corps résiduel $k(x_i)$)

$$\frac{\partial P_{u_i+1}^{(i)}}{\partial X_{u_i+1}}\left(1,\frac{x_1^{(i)}}{x_0^{(i)}},\ldots,\frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_0^{(i)}},\frac{x_{u_i+1}^{(i)}}{x_0^{(i)}}\right)\neq 0$$

et ceci entraîne facilement l'assertion 3 compte tenu des formules définissant les $Q_{\nu,j}^{(i)}$. □

Dorénavant on travaille dans le cadre fixé par ce paragraphe. En particulier, on tire parti du lemme. Ceci n'a que peu d'incidence sur la partie suivante — application d'un lemme de Siegel — car les points x_i n'y apparaissent pas. On y utilise toutefois la remarque importante suivante.

Chacun des Y_i est un schéma intègre et a un point rationnel lisse x_i. Par conséquent, il est géométriquement intègre. Par suite, le produit $Y = Y_1\times\cdots\times Y_m$ est intègre.

En particulier ceci permet d'appliquer la proposition 2.1. Pour ce faire on ne considérera plus désormais que des couples (ε, d) avec $d_0 \mid d$ où d_0 est fixé par cette proposition (dépendant de Y, a et ε).

5. – Lemme de Siegel

Dans cette partie et les suivantes, l'objet central sera une section globale s de $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$: on la construira de petite hauteur par le lemme de Siegel, on estimera ses dérivées et son ordre d'annulation en x. Avant toute chose, il s'agit de donner une représentation commode qui se prête à nos calculs.

5.1. – Représentation par des polynômes

Introduisons quelques notations : si $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ on note $[a,b]$ le morphisme décrit par

$$\begin{aligned} A\times A &\longrightarrow A\times A\\ (x,y) &\longmapsto (ax+by, ax-by)\end{aligned}$$

et, si $i=1,2$, on écrira $[a,b]_i = p_i\circ[a,b]\colon A\times A\to A$. Par symétrie de $\mathcal{L}$ on a les isomorphismes

$$\begin{aligned}[a,b]^*(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2) &\simeq \mathcal{L}_1^{\otimes 2a^2}\otimes\mathcal{L}_2^{2b^2},\\ [a,b]_1^*\mathcal{L} &\simeq \mathcal{L}_1^{\otimes a^2}\otimes\mathcal{L}_2^{b^2}\otimes\mathcal{P}^{\otimes ab}\ \text{ et}\\ [a,b]_2^*\mathcal{L} &\simeq \mathcal{L}_1^{\otimes a^2}\otimes\mathcal{L}_2^{b^2}\otimes\mathcal{P}^{\otimes -ab}\end{aligned}$$

(puisque $\mathcal{P}$ est défini comme $[1,1]^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_1^{\otimes -1}\otimes\mathcal{L}_2^{\otimes -1}$). Par voie de conséquence il appert que

$$\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}\otimes\bigotimes_{i=1}^{m-1}q_i^*[\sqrt{d}a_i,\sqrt{d}a_{i+1}]_1^*\mathcal{L}\simeq\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{L}_i^{\delta_i}$$

si l'on pose $\delta_i=(2-\varepsilon)d\eta_i a_i^2$ tandis que $q_i\colon A^m\to A\times A$ est la projection sur les facteurs i et $i+1$ (ici $i\neq m$). On définit alors l'application

$$\varphi\colon\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}\longrightarrow\bigoplus_{k\in[0,n]^{m-1}}\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{L}_i^{\otimes\delta_i}$$

par la formule

$$s\longmapsto\left(s\otimes\bigotimes_{i=1}^{m-1}q_i^*[\sqrt{d}a_i,\sqrt{d}a_{i+1}]_1^*(\xi_{k_i})\right)_k.$$

Ici, ξ_j, pour $0\leq j\leq n$, désigne l'image de W_j par le morphisme $\Gamma(\mathbb{P}_K^n,\mathcal{O}(1))\to\Gamma(\mathbb{P}_K^n,\iota^*\iota_*\mathcal{O}(1))=\Gamma(A,\mathcal{L})$, on ne fait pas usage des automorphismes χ_i. Puisque $\mathcal{L}$ est engendré par ses section globales ξ_j $(0\leq j\leq n)$, de même

$$\bigotimes_{i=1}^{m-1}q_i^*[\sqrt{d}a_i,\sqrt{d}a_{i+1}]_1^*\mathcal{L}$$

est engendré par ses sections globales $\bigotimes_{i=1}^{m-1}q_i^*[\sqrt{d}a_i,\sqrt{d}a_{i+1}]_1^*(\xi_{k_i})$ lorsque k parcourt $[0,n]^{m-1}$. Par suite φ est un monomorphisme. Celui-ci va nous fournir la représentation souhaitée car $\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{L}_i^{\otimes\delta_i}$ est l'image réciproque d'un faisceau $\mathcal{O}(\delta)=\mathcal{O}(\delta_1,\ldots,\delta_m)$ sur $(\mathbb{P}_K^n)^m$ dont les sections globales s'identifient à des polynômes multihomogènes de multidegré δ. On note plus généralement

$$\Theta\colon K[W]\simeq\bigoplus_{\gamma'}\Gamma((\mathbb{P}_K^n)^m,\mathcal{O}(\gamma'))\longrightarrow\bigoplus_{\gamma'}\Gamma\left(Y,\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{L}_i^{\otimes\gamma_i'}\right)$$

où, cette fois, on utilise les χ_i : $\mathcal{L}_i$ est vu comme $p_i^*(\chi\circ\iota)^*\mathcal{O}(1)$.

Les calculs qui suivent sont grandement simplifiés si l'on se restreint à un sous-espace sur lequel Θ est injectif. On considère à cette fin le sous-K-espace vectoriel E de $K[W]_\delta$ (soit $\Gamma((\mathbb{P}_K^n)^m,\mathcal{O}(\delta))$) formé des P vérifiant

- $\deg_{W_j^{(i)}}P=0$ si $u_i+1<j\leq n$ et
- $\deg_{W_{u_i+1}^{(i)}}P<D_i$.

L'intérêt de considérer ce sous-espace est donc que la restriction de Θ

$$E\hookrightarrow K[W]_\delta\simeq\Gamma((\mathbb{P}_K^n)^m,\mathcal{O}(\delta))\longrightarrow\Gamma\left(Y,\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{L}_i^{\otimes\delta_i}\right)$$

est injective en vertu de la partie précédente. D'autre part, nous verrons au paragraphe suivant que la dimension de E est comparable à celle de $\Gamma(Y, \bigotimes \mathcal{L}_i^{\otimes \delta_i})$.

On dira qu'une section globale s de $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ est représentée par une famille $(F_k)_k$ d'éléments de E (où k parcourt $[0,n]^{m-1}$) si cette dernière a pour image dans $\bigoplus_k \Gamma(Y, \bigotimes \mathcal{L}_i^{\otimes \delta_i})$ l'élément $\varphi(s)$. Avec cette terminologie le but de la présente partie est de prouver la

PROPOSITION 5.1. *Pour tout $\varepsilon \leq u^{-1}(4m)^{-u} \prod_{i=1}^m D_i^{-1}$, il existe un élément s non nul de $\Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$ représenté par une famille $\mathcal{F} = (F_k)_k$ de polynômes de E dont la hauteur $h(\mathcal{F})$ est majorée par*

$$d(n+1)^{m-1}4(2m)^u \left(\prod_{i=1}^m D_i\right) (2-\varepsilon)^u \sum_{i=1}^m \eta_i a_i^2 \left(h_1 + \frac{9}{4} h(B_i) + g(n, u_i, D_i)\right) + o(d)$$

où

$$g(n, u, D) = 6n + \frac{9}{4} \log(n+1)!(2u+2)D^n.$$

5.2. – Exposant du système

A l'intérieur de $F = \bigoplus_k E$ on cherche à construire un élément de $F' = F \cap \Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$ (si l'on considère ces deux espaces comme inclus dans les sections de $\bigoplus_k \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{\delta_i}$). Notre méthode consiste à déterminer un système minimal de formes linéaires sur F qui définissent F' puis d'appliquer le lemme de Siegel.

Le nombre d'équations à considérer est donc $\dim F - \dim F'$ et l'exposant de Dirichlet du système s'écrit

$$\zeta = \frac{\dim F - \dim F'}{\dim F'} = \frac{\dim F}{\dim F'} - 1.$$

Pour majorer cet exposant, il faut minorer $\dim F'$. En premier lieu

$$\dim F' \geq \dim F + \dim \Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}) - \dim \Gamma(Y, \bigoplus_k \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{\delta_i}).$$

Un calcul immédiat montre que

$$\dim E = \left(\prod_{i=1}^m \frac{D_i}{u_i!} \delta_i^{u_i}\right) + o(d^u)$$

tandis que, par la théorie élémentaire de l'intersection, $\dim \Gamma(Y, \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{\delta_i})$ vérifie la même formule. On a ainsi $\dim F' \geq \dim \Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}) + o(d^u)$. On peut alors, grâce à la condition sur ε (et $Y_i \not\subset Z_X$ car $x_i \in Y_i$), appliquer la proposition 2.1 et aboutir à

$$\zeta \leq \frac{(n+1)^{m-1}\prod_{i=1}^{m}\frac{D_i}{u_i!}\delta_i^{u_i}}{\frac{1}{4u!}\prod_{i=1}^{m}(da_i^2)^{u_i}} - 1 + o(1)$$

d'où

$$\zeta \leq (n+1)^{m-1}4(2m)^u\prod_{i=1}^{m}D_i(2-\varepsilon)^u + o(1).$$

5.3. – Équations

Le lemme ci-dessous permet d'écrire les équations de notre système.

LEMME 5.1. *On pose $\gamma_i = (4-\varepsilon)d\eta_i a_i^2$. On a alors une suite exacte sur A^m*

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_k \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes\delta_i} \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{k_1,k_2,k_3} \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes\gamma_i}$$

où ψ est la somme des applications

$$\bigoplus_k \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes\delta_i} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes\gamma_i}$$

$$\begin{aligned}(s_k) \longmapsto\ & s_{k_1} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]^*(p_1^*\xi_{k_{2,i}} \otimes p_2^*\xi_{k_{3,i}}) \\ & - s_{k_2} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]^*(p_1^*\xi_{k_{1,i}} \otimes p_2^*\xi_{k_{3,i}}).\end{aligned}$$

De plus la suite reste exacte lorsque l'on en prend l'image réciproque sur Y.

DÉMONSTRATION. Grâce aux isomorphismes $[a,b]^*(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \simeq \mathcal{L}_1^{\otimes 2a^2} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes 2b^2}$ on vérifie que les formules ont bien un sens. Ensuite, puisque le faisceau

$$\bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]^*(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$$

est engendré par ses sections globales $\bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]^*(p_1^*\xi_{k_{2,i}} \otimes p_2^*\xi_{k_{3,i}})$ lorsque k_2 et k_3 parcourent $[0,n]^{m-1}$, il suffit de montrer que pour k_2, k_3 fixés la suite est exacte si on la restreint à un ouvert sur lequel cette section engendre. Sur un tel ouvert une section $s = (s_k)$ dans le noyau de ψ vérifie

$$s_{k_1} = s_{k_2} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]_1^*(\xi_{k_{1,i}}) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]_1^*(\xi_{k_{2,i}}) \right)^{\otimes -1}$$

ce qui, si

$$s' = s_{k_2} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]_1^*(\xi_{k_{2,i}}) \right)^{\otimes -1}$$

donne l'égalité $s = \varphi(s')$ et donc l'exactitude. Ceci montre même que la suite est localement scindée et l'on en déduit la dernière assertion. □

Ainsi la condition imposée sur s sera-t-elle simplement $\psi(s) = 0$. Afin de transformer cette équation en un système linéaire à coefficients dans K, plusieurs étapes sont requises. En premier lieu, rappelons que nos inconnues seront les coefficients des polynômes F_k qui représentent s. Primitivement, on dispose donc de $(n+1)^{3(m-1)}$ équations à coefficients dans $\Gamma(Y, \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{\gamma_i})$. Théoriquement, il suffit de choisir une base de ce sous-espace et d'y décomposer les coefficients. Pratiquement, on veut pouvoir estimer les composantes (éléments de K) que l'on obtient.

La remarque suivante, élémentaire, simplifie beaucoup ce travail : pour toute famille $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m') \in \mathbb{N}^m$ et toute section $s' \in \Gamma(Y, \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{\gamma_i'}) \setminus 0$ la multiplication

$$\Gamma\left(Y, \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{\gamma_i}\right) \xrightarrow{\otimes s'} \Gamma\left(Y, \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{L}_i^{\gamma_i+\gamma_i'}\right)$$

est injective (on rappelle que Y est intègre).

Ainsi a-t-on la possibilité de remplacer chaque équation par son image sous cette application. Ceci aura l'avantage (lorsque s' sera judicieusement choisie) de ramener les coefficients des équations dans un sous-espace, entièrement analogue à E, dont on connaît une base.

Avant cela, puisque les éléments que nous aurons à décomposer seront (essentiellement) de la forme

$$\bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]^*(p_1^*\xi_l \otimes p_2^*\xi_{l'}),$$

le paragraphe suivant permet d'associer une écriture polynomiale (contrôlée) aux éléments de cette forme.

5.4. – Estimations pour $[a, b]$

On utilise la fonction $f(n) = \left[\frac{n^2-1}{8}\right]$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ les formules $f(2n) \geq 4f(n)$ et $f(2n+1) \geq 2f(n) + 2f(n+1) + 1$.

PROPOSITION 5.2. *Pour tous* $a, b \geq 1$ *et* $0 \leq i, j, l, l' \leq n$ *il existe un polynôme bihomogène de bidegré* $(2(a^2 + f(a)), 2(b^2 + f(b)))$ *en deux groupes de* $n+1$ *indéterminées de sorte que*

$$\begin{aligned} &p_1^*\xi_i^{\otimes 2f(a)} \otimes p_2^*\xi_j^{\otimes 2f(b)} \otimes [a, b]^*(p_1^*\xi_l \otimes p_2^*\xi_{l'}) \\ &\quad = P_{a,b,i,j,l,l'}(p_1^*\xi_0, \ldots, p_1^*\xi_n, p_2^*\xi_0, \ldots, p_2^*\xi_n) \end{aligned}$$

dans $\Gamma(A \times A, \mathcal{L}_1^{\otimes 2(a^2+f(a))} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes 2(b^2+f(b))})$. *De plus dès que l'on choisit de tels polynômes* $P_{1,1,0,0,l,l'}$ *pour tous* l, l' *alors il existe une famille de polynômes comme ci-dessus de telle sorte que*

$$h((P_{a,b,i,j,l,l'})_{l,l'}) \leq (a^2 + b^2)(h_1 + 6n)$$

où h_1 *est la hauteur de la famille formée par tous les coefficients des* $P_{1,1,0,0,l,l'}$.

DÉMONSTRATION. Grâce à nos hypothèses on a une surjection

$$\Gamma(\mathbb{P}_K^n \times \mathbb{P}_K^n, \mathcal{O}(2,2)) \longrightarrow \Gamma\left(A \times A, \mathcal{L}_1^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes 2}\right)$$

(obtenue par exemple à partir de la surjection $\Gamma(\mathbb{P}_K^n, \mathcal{O}(2)) \to \Gamma(A, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ par la formule de Künneth). Par suite, pour tout couple (l, l'), la section

$$[1, 1]^*(p_1^*\xi_l \otimes p_2^*\xi_{l'}) \in \Gamma\left(A \times A, \mathcal{L}_1^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes 2}\right)$$

s'écrit bien sous la forme $R_{l,l'}(p_1^*\xi, p_2^*\xi)$. L'existence d'une famille de $P_{1,1}$ est donc acquise par $P_{1,1,i,j,l,l'} = R_{l,l'}$. En en choisissant une, nous allons montrer l'existence de $P_{a,b,i,j,l,l'}$ vérifiant la borne annoncée. Pour cela on établit d'abord que pour tout $m \geq 1$ et tous $0 \leq i, j \leq n$ la section

$$\xi_j^{\otimes f(m)} \otimes [m]^*\xi_i \in \Gamma\left(A, \mathcal{L}^{\otimes m^2+f(m)}\right)$$

s'écrit $Q_{m,i,j}(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ avec $Q_{m,i,j}$ polynôme homogène de degré $m^2 + f(m)$ de sorte que la hauteur de la famille des coefficients des $Q_{m,i,j}$ quand i varie est majorée par $\frac{1}{2}(m^2 - 1)(h_1 + 6n) - 2n \log m$. On procède par récurrence sur m. Pour $m = 1$ le résultat est clair avec $Q_{1,i,j} = X_j$. Si $m > 1$ on écrit $m = m_1 + m_2$ avec $m_1 = m_2 = m/2$ si m est pair et $m_1 = (m-1)/2$, $m_2 = (m+1)/2$ si m est impair. Dans les deux cas $1 \leq m_1 \leq m_2 < m$ ce qui permet de supposer le résultat acquis pour m_1 et m_2. On utilise alors la relation

$$([m_1 + m_2], [m_2 - m_1]) = [1, 1] \circ ([m_2], [m_1])$$

(égalité entre morphismes $A \to A \times A$) de sorte que pour tous i, j

$$\begin{aligned}&[m_1 + m_2]^*\xi_i \otimes [m_2 - m_1]^*\xi_j \\ &\quad = ([m_2], [m_1])^* R_{i,j}(p_1^*\xi_0, \dots, p_1^*\xi_n, p_2^*\xi_0, \dots, p_2^*\xi_n) \\ &\quad = R_{i,j}([m_2]^*\xi_0, \dots, [m_2]^*\xi_n, [m_1]^*\xi_0, \dots, [m_1]^*\xi_n).\end{aligned}$$

Par définition des $Q_{m_1,\cdot,j}$ et $Q_{m_2,\cdot,j}$ et $\deg R_{i,j} = (2,2)$ on a

$$\xi_j^{\otimes 2f(m_1)+2f(m_2)} \otimes [m_2 - m_1]^*\xi_j \otimes [m]^*\xi_i = \\ R_{i,j}(Q_{m_2,0,j}(\xi), \dots, Q_{m_2,n,j}(\xi), Q_{m_1,0,j}(\xi), \dots, Q_{m_1,n,j}(\xi)).$$

Si m est impair on a $\xi_j^{\otimes 2f(m_1)+2f(m_2)} \otimes [m_2 - m_1]^*\xi_j = \xi_j^{\otimes 2f(m_1)+2f(m_2)+1}$ où l'exposant est plus petit que $f(m)$; si m est pair $[m_2 - m_1]^*\xi_j = [0]^*\xi_j$ est une constante qui multiplie tous les éléments de la famille tandis que $2f(m_1) + 2f(m_2) \le f(m)$. Ainsi dans tous les cas $\xi_j^{\otimes f(m)} \otimes [m]^*\xi_i$ s'écrit comme le produit d'une constante (élément de K) par une puissance de ξ_j puis par le membre de droite de la formule précédente. Ceci prouve l'existence de $Q_{m,i,j}$. Pour estimer la hauteur, la constante n'intervient pas ni la puissance de ξ_j. Il reste donc à contrôler la hauteur des coefficients de la famille des

$$R_{i,j}(Q_{m_2,0,j}, \dots, Q_{m_2,n,j}, Q_{m_1,0,j}, \dots, Q_{m_1,n,j})$$

lorsque i varie. Par homogénéité un majorant est

$$h_1 + 2h(Q_{m_1,\cdot,j}) + 2h(Q_{m_2,\cdot,j}) \\ + \log\left[\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\binom{m_1^2 + f(m_1) + n}{n}^2\binom{m_2^2 + f(m_2) + n}{n}\right]$$

où le dernier terme borne le nombre de termes qui contribuent à un monôme donné. On applique l'hypothèse de récurrence à m_1 et m_2 et l'on majore

$$\binom{m_1^2 + f(m_1) + n}{n} \le (m_1^2 + f(m_1) + 1)^n \le (2m_1^2)^n$$

(et de même pour m_2) ce qui donne

$$\begin{aligned}h(Q_{m,\cdot,j}) &\le h_1 + (m_1^2 - 1)(h_1 + 6n) + (m_2^2 - 1)(h_1 + 6n) - 4n\log m_1 m_2 \\ &\quad + 2\log\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 3n\log 2 + 2n\log m_1^2 m_2 \\ &\le (m_1^2 + m_2^2 - 1)(h_1 + 6n) - 6n - 2n\log m_2 + 2\log\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &\quad + 3n\log 2.\end{aligned}$$

Pour conclure on remarque d'abord $2m_1^2 + 2m_2^2 \leq m^2 + 1$ et $m/2 \leq m_2$ tandis que

$$5n \log 2 + 2 \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} \leq 6n$$

pour tout entier naturel $n \geq 1$ comme le prouve une vérification élémentaire. Ceci fournit le résultat annoncé pour $[m]$. Pour passer à $[a, b]$ on écrit $[a, b] = [1, 1] \circ ([a] \times [b])$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
&p_1^* \xi_i^{\otimes 2f(a)} \otimes p_2^* \xi_j^{\otimes 2f(b)} \otimes [a, b]^*(p_1^* \xi_l \otimes p_2^* \xi_{l'}) \\
&= p_1^* \xi_i^{\otimes 2f(a)} \otimes p_2^* \xi_j^{\otimes 2f(b)} \otimes ([a] \times [b])^* R_{l,l'}(p_1^* \xi, p_2^* \xi) \\
&= p_1^* \xi_i^{\otimes 2f(a)} \otimes p_2^* \xi_j^{\otimes 2f(b)} \otimes R_{l,l'}(p_1^*[a]^* \xi, p_2^*[b]^* \xi) \\
&= R_{l,l'}(Q_{a,\cdot,i}(p_1^* \xi), Q_{b,\cdot,j}(p_2^* \xi)).
\end{aligned}$$

Le calcul des hauteurs est le même que plus haut et l'on trouve

$$\begin{aligned}
&h(P_{a,b,i,j,\cdot,\cdot}) \\
&\leq h_1 + 2h(Q_{a,\cdot,i}) + 2h(Q_{b,\cdot,j}) + 2 \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 3n \log 2 + 2n \log a^2 b \\
&\leq h_1 + (a^2 + b^2 - 2)(h_1 + 6n) - 4n \log ab + 2 \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 3n \log 2 \\
&\quad + 2n \log a^2 b \\
&\leq (a^2 + b^2)(h_1 + 6n) + 2 \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 3n \log 2 - 12n \\
&\leq (a^2 + b^2)(h_1 + 6n)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Au vu de la démonstration on peut en fait remplacer le $6n$ de l'énoncé par $5n \log 2 + 2 \log \binom{n+2}{2}$ mais ce raffinement n'a pas d'intérêt ici.

Utilisons cette proposition pour les morphismes $[\sqrt{d} a_i, \sqrt{d} a_{i+1}]$. En premier lieu, pour chaque i, on fixe un indice $j(i)$ de sorte que l'image de $\xi_{j(i)}$ soit un élément non nul de $\Gamma(Y_i, \mathcal{L})$. On considère ensuite, pour $i < m$ fixé, la famille de polynômes bihomogènes

$$(P_{\sqrt{d} a_i, \sqrt{d} a_{i+1}, j(i), j(i+1), l, l'})_{l,l'},$$

dont la hauteur est au plus $d(a_i^2 + a_{i+1}^2)(h_1 + 6n)$. Pour travailler dans les plongements adaptés que l'on a choisis dans la partie précédente, on définit

$$\Psi_{l,l'}^{(i)}(X, X') = P_{\sqrt{d} a_i, \sqrt{d} a_{i+1}, j(i), j(i+1), l, l'}(M_i^{-1} X, M_{i+1}^{-1} X')$$

où X et X' sont deux groupes de $n+1$ indéterminées. Bien entendu, $\Psi_{l,l'}^{(i)}$ est bihomogène de bidegré $(2(da_i^2 + f(\sqrt{d}a_i)), 2(da_{i+1}^2 + f(\sqrt{d}a_{i+1})))$. D'autre part, $h((\Psi_{l,l'}^{(i)})_{l,l'})$ est majorée par

$$d(a_i^2 + a_{i+1}^2)(h_1 + 6n) + \frac{9}{4}da_i^2 \log(n+1)!D_i^n + \frac{9}{4}da_{i+1}^2 \log(n+1)!D_{i+1}^n + o(d)$$

en utilisant que le nombre de coefficients de $P_{\sqrt{d}a_i,\sqrt{d}a_{i+1},j(i),j(i+1),l,l'}$ est borné par un polynôme en d et, par ailleurs, que la somme des valeurs absolues des coefficients sur une ligne de la comatrice de M_i est au plus $(n+1)!D_i^n$.

On définit encore

$$s_0 = \bigotimes_{i=1}^{m} p_i^* \xi_{j(i)}^{\otimes 2\eta_i f(\sqrt{d}a_i)} \in \Gamma\left(Y, \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes 2\eta_i f(\sqrt{d}a_i)}\right)$$

qui est une section non nulle par choix des $j(i)$ et a la propriété que

$$s_0 \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]^*(p_1^*\xi_{k_i} \otimes p_2^*\xi_{k_i'}) = \Theta\left(\prod_{i=1}^{m-1} \Psi_{k_i,k_i'}^{(i)}(W^{(i)}, W^{(i+1)})\right)$$

pour tous k, k'.

5.5. – Hauteur des équations

Pour écrire le système définitif auquel on appliquera le lemme de Siegel, on va faire en sorte de se placer dans l'espace vectoriel $\mathcal{R}$ des polynômes P multihomogènes en $W^{(1)}, \ldots, W^{(m)}$ qui vérifient $\deg_{W_j^{(i)}} P = 0$ si $j > u_i + 1$ et $\deg_{W_{u_i+1}^{(i)}} P < D_i$. Comme plus haut, la restriction de Θ donne une injection

$$\mathcal{R} \hookrightarrow \bigoplus_{\gamma'} \Gamma\left(Y, \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes \gamma_i'}\right).$$

On notera encore $\hat{W}$ la famille des indéterminées $W_j^{(i)}$ avec $j \leq u_i$ et, pour toute famille $k = (k_{i,j})_{i,j}$ d'entiers naturels,

$$W^{[k]} = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=u_i+1}^{n} W_j^{(i)k_{i,j}}.$$

Puisque $w_{u_i+1}^{(i)}$ engendre $K(Y_i)$ sur $K(w_1^{(i)}, \ldots, w_{u_i}^{(i)})$, il est clair qu'il existe un élément $R_Y \in \mathcal{R}$ non nul tel que, pour chaque famille k vérifiant $k_{i,j} \leq 2D_i$ (tous i, j), on peut écrire $\Theta(R_Y W^{[k]})$ sous la forme

$$\Theta\left(\sum_{l,\ 0 \leq l_i < D_i} S_{k,l}(\hat{W}) \prod_{i=1}^{m} W_{u_i+1}^{(i)\ l_i}\right) \in \Gamma\left(Y, \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes \deg_{W^{(i)}} R_Y + \sum_j k_{i,j}}\right)$$

(cela est possible puisqu'un nombre fini de familles k sont en jeu).

On note ensuite $r_Y = \Theta(R_Y)$ de sorte que

$$s' = s_0 \otimes r_Y \in \Gamma\left(Y, \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i^{\otimes \deg_{W^{(i)}} R_Y + 2\eta_i f(\sqrt{d} a_i)}\right)$$

est une section non nulle que l'on va utiliser comme annoncé pour obtenir le système final. Par les calculs qui précèdent, les équations (où les inconnues correspondent à une famille $(F_k)_k$ d'éléments de E) s'écrivent

$$\Theta\left(F_{k_1} R_Y \prod_{i=1}^{m-1} \Psi^{(i)}_{k_{2,i},k_{3,i}}(W^{(i)}, W^{(i+1)}) - F_{k_2} R_Y \prod_{i=1}^{m-1} \Psi^{(i)}_{k_{1,i},k_{3,i}}(W^{(i)}, W^{(i+1)})\right) = 0.$$

Le terme en facteur d'une inconnue donnée est donc de la forme

$$\pm\Theta\left(\mathfrak{m}(\hat{W})\left(\prod_{i=1}^{m} W^{(i)}_{u_i+1}{}^{l_i}\right) R_Y \prod_{i=1}^{m-1} \Psi^{(i)}_{l'_i,l''_i}(W^{(i)}, W^{(i+1)})\right)$$

où $\mathfrak{m}$ est un monôme (sans coefficient), l un m-uplet vérifiant $0 \leq l_i < D_i$ et $l', l'' \in [0, n]^{m-1}$. Pour conclure on va écrire

$$\Theta\left(\prod_{i=1}^{m-1} \Psi^{(i)}_{l'_i,l''_i}(W^{(i)}, W^{(i+1)})\right) = \Theta\left(\sum_{k\in\mathcal{K}} Q_k^{(l',l'')}(\hat{W}) W^{[k]}\right)$$

où par définition $k \in \mathcal{K}$ si et seulement si $k_{i,j} < D_i$ pour tous i, j. En supposant ceci acquis on note $\hat{k} = (k_{i,j} + \delta_{j,u_i+1} l_i)$ qui vérifie $\hat{k}_{i,j} < 2D_i$ et le coefficient précédent devient

$$\begin{aligned}&\pm\Theta\left(\mathfrak{m}(\hat{W}) R_Y \sum_{k} Q_k^{(l',l'')}(\hat{W}) W^{[\hat{k}]}\right)\\ &= \pm\Theta\left(\mathfrak{m}(\hat{W}) \sum_{\hat{l}} \left(\sum_{k} Q_k^{(l',l'')}(\hat{W}) S_{\hat{k},\hat{l}}(\hat{W})\right) \prod_{i=1}^{m} W^{(i)}_{u_i+1}{}^{\hat{l}_i}\right).\end{aligned}$$

On voit ainsi apparaître un élément de $\mathcal{R}$. On peut le décomposer suivant la base des monômes et ceci montre que les coefficients définitifs du système (éléments de K) sont les coefficients de $\sum_{k\in\mathcal{K}} Q_k^{(l',l'')}(\hat{W}) S_{\hat{k},\hat{l}}(\hat{W})$. La hauteur de la famille obtenue (lorsque l, l', l'' et $\hat{l}$ varient) est majorée par

$$h\left((Q_k^{(l',l'')})_{k,l',l''}\right) + o(d)$$

car ni $S_{\hat{k},\hat{l}}(\hat{W})$ ni le cardinal de $\mathcal{K}$ ne dépendent de d.

Les deux lemmes suivants vont permettre de contrôler la hauteur des polynômes $Q_k^{(l',l'')}$ en fonction de celle des $\Psi^{(i)}_{l,l'}$.

LEMME 5.2. *On peut associer à chaque triplet* $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ *avec* $1 \leq y \leq z$ *un polynôme* $U_{x,y,z} \in \mathbb{N}[X_1, \ldots, X_z]$, *homogène de degré* $x + y - z$ *si* $\deg X_i = i$ *et dont la somme des coefficients est au plus* 2^x, *de telle sorte que, si, dans un anneau* A, *des éléments* $t, a_1, \ldots, a_z$ *vérifient*

$$t^z = \sum_{y=1}^{z} a_y t^{z-y},$$

alors, pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$t^x = \sum_{y=1}^{z} U_{x,y,z}(a_1, \ldots, a_z) t^{z-y}.$$

DÉMONSTRATION. On travaille d'abord dans l'anneau $A = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_z, T]$ gradué par $\deg X_i = i$ et $\deg T = 1$. Le polynôme $P = T^z - \sum_{y=1}^{z} X_y T^{z-y}$ est homogène ; on note t l'image de T dans A/P qui est gradué. En écrivant t^x dans la $\mathbb{Z}$-base évidente de A/P on obtient immédiatement des $U_{x,y,z}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ayant la bonne homogénéité. En substituant directement il est clair que les coefficients sont positifs. Enfin on considère $A = \mathbb{R}$. Il est immédiat qu'il existe t dans l'intervalle $[1, 2[$ tel que $t^z = \sum_{y=1}^{z} t^{z-y}$. Par suite pour tout x

$$2^x \geq t^x = \sum_{y=1}^{z} U_{x,y,z}(1, \ldots, 1) t^{z-y} \geq \sum_{y=1}^{z} U_{x,y,z}(1, \ldots, 1).$$

Par positivité la somme des coefficients de $U_{x,y,z}$ est bien $U_{x,y,z}(1, \ldots, 1)$. □

LEMME 5.3. *Soient* $b_1, \ldots, b_m$ *des entiers,* $\mathcal{S}$ *un ensemble fini et* $(\Psi_s)_{s \in \mathcal{S}}$ *une famille de polynômes multihomogènes en* W *de multidegré* b. *Il existe alors une (unique) famille de polynômes* $(Q_{k,s})_{(k,s) \in \mathcal{K} \times \mathcal{S}}$, *multihomogènes en* $\hat{W}$, *telle que, pour tout* $s \in \mathcal{S}$,

$$\Psi_s - \sum_{k \in \mathcal{K}} Q_{k,s}(\hat{W}) W^{[k]}$$

est élément de l'idéal J *engendré par les* $P_j^{(i)}(W_0^{(i)}, \ldots, W_{u_i}^{(i)}, W_j^{(i)})$, $1 \leq i \leq m$, $u_i + 1 \leq j \leq n$. *De plus on a*

$$h((Q_{k,s})_{k,s}) \leq h((\Psi_s)_s) + \sum_{i=1}^{m} b_i (h(B_i) + \log(2u_i + 2)) + \log \binom{b_i + n}{n}.$$

DÉMONSTRATION. On écrit

$$P_j^{(i)}(W_0^{(i)}, \ldots, W_{u_i}^{(i)}, W_j^{(i)}) = W_j^{(i)D_i} - \sum_{y=1}^{D_i} V_y^{(i,j)}(\hat{W}^{(i)}) W_j^{(i)D_i - y}$$

de sorte que par le lemme précédent (appliqué à $K[\hat{W}^{(i)}, W_j^{(i)}]/P_j^{(i)}$) l'élément (homogène de degré l)

$$W_j^{(i)l} - \sum_{y=1}^{D_i} U_{l,y,D_i}(V_1^{(i,j)}, \dots, V_{D_i}^{(i,j)}) W_j^{(i)D_i-y}$$

appartient à J. On écrit ensuite

$$\Psi_s = \sum_{k'} T_{k',s}(\hat{W}) W^{[k']}$$

sans restriction sur k' et, modulo J,

$$W^{[k']} \equiv \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=u_i+1}^{n} \sum_{y=1}^{D_i} U_{k'_{ij},y,D_i}(V_1^{(i,j)}, \dots, V_{D_i}^{(i,j)}) W_j^{(i)D_i-y}.$$

Par suite la famille

$$Q_{k,s}(\hat{W}) = \sum_{k'} T_{k',s}(\hat{W}) \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=u_i+1}^{n} U_{k'_{ij},D_i-k_{ij},D_i}(V_1^{(i,j)}, \dots, V_{D_i}^{(i,j)})$$

convient. L'unicité est claire pour raison de degré. Il reste à estimer la hauteur. Le polynôme $U_{k'_{ij},D_i-k_{ij},D_i}(V_1^{(i,j)}, \dots, V_{D_i}^{(i,j)})$ est une somme d'au plus $2^{k'_{ij}}$ termes de la forme

$$\prod_{y=1}^{D_i} V_y^{(i,j)l_y}$$

où $\sum_{y=1}^{D_i} y l_y = k'_{ij} - k_{ij}$. Un tel terme est à son tour somme d'au plus $\prod_{y=1}^{D_i} \binom{u_i+y}{y}^{l_y}$ termes (puisque $\deg V_y^{(i,j)} = y$) de la forme

$$\pm \prod_{\alpha=1}^{k'_{ij}-k_{ij}} \beta_\alpha X_{\nu_\alpha}^{(i)}$$

où $\beta_\alpha \in B_i$ (on rappelle $1 \in B_i$) et $0 \leq \nu_\alpha \leq u_i$. On majore

$$2^{k'_{ij}} \prod_{y=1}^{D_i} \binom{u_i + y}{y}^{l_y} \leq 2^{k'_{ij}} \prod_{y=1}^{D_i} (u_i + 1)^{y l_y} \leq (2u_i + 2)^{k'_{ij}}.$$

On en déduit que, si $f(k', s)$ est le nombre de coefficients de $T_{k',s}$, le polynôme $Q_{k,s}$ s'exprime comme une somme d'au plus

$$\sum_{k'} f(k', s) \prod_{i=1}^{m} (2u_i + 2)^{\sum_j k'_{ij}}$$

termes de la forme

$$\pm\lambda \prod_{i=1}^{m} \prod_{\alpha=1}^{b_i - \sum_j k_{ij}} \beta_{\alpha,i} X^{(i)}_{\nu_{\alpha,i}}$$

où λ est un coefficient de Ψ_s puis $\beta_{\alpha,i} \in B_i$ et $0 \leq \nu_{\alpha,i} \leq u_i$. Par suite, on obtient le résultat en majorant $\sum_j k'_{ij}$ par b_i et $\sum_{k'} f(k', s)$, qui est le nombre de coefficients de Ψ_s, par $\prod_{i=1}^{m} \binom{b_i+n}{n}$. □

5.6. – Conclusion

On applique le

LEMME 5.4 (lemme de Siegel). *Il existe une constante $c_S(K)$ telle que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ avec $m < n$, il existe $X \in K^n \setminus 0$ vérifiant $AX = 0$ et*

$$h(X) \leq \frac{m}{n-m} \left(\max_{1\leq i\leq m} h(A_i) + \log n \right) + \frac{n}{n-m} c_S(K).$$

DÉMONSTRATION. C'est le lemme de Siegel pour un corps de nombres tel qu'il est formulé dans [B2] (en réalité il est possible, avec le lemme de Bombieri-Vaaler, de supprimer le coefficient $n/(n-m)$ devant la constante mais ce raffinement n'a pas d'intérêt ici). □

Avec le système défini dans les paragraphes précédents

$$\begin{aligned} h(A_i) &\leq h((Q_k^{(l',l'')})_{k,l',l''}) + o(d) \\ &\leq h\left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} \Psi^{(i)}_{l'_i,l''_i}(W^{(i)}, W^{(i+1)}) \right)_{l',l''} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m} 2\eta_i (da_i^2 + f(\sqrt{d}a_i))(h(B_i) + \log(2u_i + 2)) + o(d) \end{aligned}$$

à l'aide du lemme 5.3. Comme le nombre de coefficients de $\Psi^{(i)}_{l,l'}$ est polynomial en d on a

$$h\left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} \Psi^{(i)}_{l'_i,l''_i}(W^{(i)}, W^{(i+1)}) \right)_{l',l''} \right) \leq \sum_{i=1}^{m} h((\Psi^{(i)}_{l,l'})_{l,l'}) + o(d)$$

ce qui est majoré par

$$\sum_{i=1}^{m} d\eta_i a_i^2 \left(h_1 + 6n + \frac{9}{4}\log(n+1)!D_i^n\right) + o(d).$$

Finalement

$$h(A_i) \leq d\sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 \left(h_1 + 6n + \frac{9}{4}h(B_i) + \frac{9}{4}\log(n+1)!(2u_i+2)D_i^n\right) + o(d).$$

On obtient donc la proposition 5.1 avec

$$h(\mathcal{F}) \leq \zeta \log\dim F + \zeta d\sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i^2 \left(h_1 + \frac{9}{4}h(B_i) + g(n, u_i, D_i)\right) + o(d)$$

ce qui, compte tenu du calcul de ζ fait plus haut et de $\dim F = o(e^d)$, achève la preuve.

6. – Dérivations

L'objet de cette partie est de prouver

PROPOSITION 6.1. *Sous les hypothèses et conclusions de la proposition* 5.1, *on note σ l'indice par rapport à $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ et au point x de la section s de $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$. Alors on a*

$$\sigma \geq \frac{\varepsilon}{\max_i 16(2D_i - 1)(u_i + 1)} + o(1).$$

6.1. – Indice et hauteur

Si U est un ouvert de Y contenant x et $s_1 \in \Gamma(U, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$ une section qui engendre $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ sur U, on peut écrire $s = \alpha s_1$ avec $\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$. Alors σ est également l'indice de α en x. Par définition, cela signifie que pour tout opérateur différentiel D' d'ordre $(\beta'_1, \dots, \beta'_m)$ avec $\beta'_1/\delta_1 + \cdots + \beta'_m/\delta_m < \sigma$ on a $D'\alpha(x) = 0$ et qu'il existe D d'ordre $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ avec $\beta_1/\delta_1 + \cdots + \beta_m/\delta_m = \sigma$ tel que $D\alpha(x) \neq 0$. Puisque π est étale en x, il est possible de choisir U de sorte que $\pi|_U$ soit étale. Alors $\Omega_{U/K}$ est libre et, si l'on restreint encore U de sorte que $w_j^{(i)} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ pour tous i et j, une base en est donnée par

$$(\partial_{w_j^{(i)}})_{1 \leq j \leq u_i,\ 1 \leq i \leq m}$$

avec $\partial_{w_j^{(i)}}(w_{j'}^{(i')}) = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$ pour $1 \leq i, i' \leq m$ et $1 \leq j \leq u_i$, $1 \leq j' \leq u_{i'}$. Il est alors clair que dans la définition de l'indice on peut supposer D de la forme

$$D = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{u_i} \frac{1}{\kappa_{i,j}!} \left(\partial_{w_j^{(i)}}\right)^{\kappa_{i,j}}$$

pour une certaine famille κ vérifiant $\sum_{i=1} \frac{1}{\delta_i} \sum_{j=1}^{u_i} \kappa_{i,j} = \sigma$. On notera aussi ∂^{κ_i} la partie correspondant au i-ème facteur, de sorte que $D = \prod_{i=1}^{m} \partial^{\kappa_i}$.

Ceci étant fixé, c'est la non-nullité de $D\alpha(x)$ qui, *via* une formule du produit, va donner l'information sur les hauteurs. Compte tenu des plongements que l'on a fixés, on choisit parmi les hauteurs sur Y associées à $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ celle dont la valeur en x est :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} \delta_i h(\chi_i(x_i)) - \sum_{i=1}^{m-1} h(\sqrt{d}a_i x_i + \sqrt{d}a_{i+1}x_{i+1}).$$

Si l'on fixe des systèmes de coordonnées $(x_0^{(i)},\ldots,x_n^{(i)})$ pour $\chi_i(x_i)$ et $(y_0^{(i)},\ldots,y_n^{(i)})$ pour $\sqrt{d}a_i x_i + \sqrt{d}a_{i+1}x_{i+1}$ on a

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} \delta_i \sum_{v} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{0\leq j_i\leq n} |x_{j_i}^{(i)}|_v \quad - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{v} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{0\leq k_i\leq n} |y_{k_i}^{(i)}|_v.$$

Pour chaque place v de K on désigne par $j_v = (j_{v,1}, \ldots, j_{v,m})$ un multi-indice tel que $0 \leq j_{v,i} \leq u_i + 1$ et $|x_{j_{v,i}}^{(i)}|_v = \max_{0\leq j\leq u_i+1} |x_j^{(i)}|_v$ pour tout i ; de même on désigne par $k_v \in [0, n]^{m-1}$ un élément vérifiant $|y_{k_{v,i}}^{(i)}|_v = \max_{0\leq k\leq n} |y_k^{(i)}|_v$ pour tout i. Ainsi, d'une part,

$$\Phi \geq \sum_{v} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \left| \frac{\prod_{i=1}^{m} {x_{j_{v,i}}^{(i)}}^{\delta_i}}{\prod_{i=1}^{m-1} y_{k_{v,i}}^{(i)}} \right|_v .$$

D'autre part, le quotient qui apparaît est relié à la section

$$s_v = \bigotimes_{i=1}^{m} p_i^*(\chi \circ \iota)^* W_{j_{v,i}}^{\otimes \delta_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^*[\sqrt{d}a_i, \sqrt{d}a_{i+1}]_1^* \xi_{k_{v,i}}$$

de $\mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d}$ sur un voisinage de x. En effet, on peut trouver un ouvert U comme plus haut et une section $s_1 \in \Gamma(U, \mathcal{Q}_{\varepsilon,a,d})$, ne dépendant que des coordonnées choisies, de sorte que si l'on écrit $s_v|_U = \alpha_v s_1$ avec $\alpha_v \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ on a (dans le corps résiduel $k(x)$)

$$\alpha_v(x) = \frac{\prod_{i=1}^{m} {x^{(i)}_{j_{v,i}}}^{\delta_i}}{\prod_{i=1}^{m-1} y^{(i)}_{k_{v,i}}}.$$

De ceci, et de la représentation de s par des polynômes $(F_k)_k$ introduite dans la partie précédente, on déduit

$$\alpha = \alpha_v F_{k_v}\left(\frac{w}{w_{j_v}}\right)$$

où la notation signifie à gauche que le i-ème groupe de variables est

$$1/w^{(i)}_{j_{v,i}}, w^{(i)}_1/w^{(i)}_{j_{v,i}}, \ldots , w^{(i)}_{u_i+1}/w^{(i)}_{j_{v,i}}$$

(avec, éventuellement, la convention que $w^{(i)}_0 = 1$). Enfin, puisque $\alpha_v(x) \neq 0$, il vient

$$D\alpha(x) = \alpha_v(x) D\left[F_{k_v}\left(\frac{w}{w_{j_v}}\right)\right](x)$$

(pour l'opérateur fixé plus haut). Ainsi, en employant comme annoncé la formule du produit pour $D\alpha(x) \in K^\times$, on a

$$\Phi \geq -\sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \left| D\left[F_{k_v}\left(\frac{w}{w_{j_v}}\right)\right](x)\right|_v .$$

Par suite

$$\Phi \geq -h(\mathcal{F}) - \log(\dim E) - \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{i=1}^{m} \log \max_{\mathfrak{m}_i} \left| \partial^{\kappa_i}\left[\mathfrak{m}_i\left(\frac{w^{(i)}}{w^{(i)}_{j_{v,i}}}\right)\right](x)\right|_v$$

où $\mathfrak{m}_i$ parcourt les monômes de degré δ_i en $u_i + 2$ variables. Dans cette expression, la quantité $h(\mathcal{F})$ a été majorée par la partie précédente ; on a $\log(\dim E) = o(d)$; les dérivées des monômes vont être bornées au paragraphe suivant — en faisant apparaître κ donc l'indice σ — et on déduira ensuite de l'inégalité principale une majoration de Φ, la combinaison donnant la borne pour σ.

6.2. – Estimation des dérivées

On a tout d'abord un lemme local dans lequel on note $\varepsilon_v = 0$ si v est une place finie de K et $\varepsilon_v = 1$ si c'est une place infinie. On écrit aussi $\kappa!$ pour le produit $\kappa_1! \cdots \kappa_u!$. Le résultat généralise le lemme 5 de [B1].

LEMME 6.1. *Soient $X_1, \dots, X_u, Y$ des indéterminées (avec $u \geq 1$), P un polynôme de $K[X_1, \dots, X_u, Y]$, L une extension algébrique de $K(X_1, \dots, X_u)$ et $y \in L$ un élément tel que $P(X_1, \dots, X_u, y) = 0$. On suppose qu'il existe un morphisme de K-algèbres $\varphi\colon K[X_1, \dots, X_u, y] \to K$ tel que $\varphi(X_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et on désigne encore par φ son extension lorsqu'on localise en* $\mathrm{Ker}(\varphi)$. *On note $(d_i\colon L \to L)_{1 \leq i \leq n}$ les K-dérivations caractérisées par $d_i(X_j) = \delta_{ij}$ et lorsque $\kappa \in \mathbb{N}^u$ on note $d^\kappa = d_1^{\kappa_1} \cdots d_u^{\kappa_u}$ et $\partial^\kappa = \frac{1}{\kappa!} d^\kappa$. On pose $R = \frac{\partial P}{\partial Y}$ et on suppose $\varphi(R(X_1, \dots, X_u, y)) \neq 0$. Soient maintenant v une place de K telle que $|\varphi(y)|_v \leq 1$ et $\kappa \in \mathbb{N}^u \setminus 0$. Alors on a*

$$|\varphi(\partial^\kappa y)|_v \leq f_1(u, D)^{\varepsilon_v |\kappa|} \left(\frac{|P|_v}{|\varphi(R(X_1, \dots, X_u, y))|_v} \right)^{2|\kappa|-1}$$

où D majore à la fois $\deg_X P$ *et* $\deg_Y P$ *et*

$$f_1(u, D) = (2u+4) D \binom{D+u}{u}^2 \binom{D+1}{2}^2.$$

DÉMONSTRATION. On notera $\chi\colon K[X_1, \dots, X_u, Y] \to K[X_1, \dots, X_u, y]$ et $\psi = \varphi \circ \chi$. On vérifie que $\varphi(\partial^\kappa y)$ a bien un sens car le localisé $K[X_1, \dots, X_u, y]_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ est stable par chaque d_i : en effet $d_i y = -\chi(R)^{-1} \chi(\partial P / \partial X_i)$. On note $P = \sum_{i,j} p_{i,j} X_1^{j_1} \cdots X_u^{j_u} Y^i$. Lorsque v est une place finie, on calcule par la formule de Leibniz

$$0 = \partial^\kappa(\chi(P)) = \sum_{i,j} p_{i,j} \sum_{l^{(0)} + \dots + l^{(i)} = \kappa} \partial^{l^{(0)}} \left(X_1^{j_1} \cdots X_u^{j_u} \right) \partial^{l^{(1)}} y \cdots \partial^{l^{(i)}} y$$

où la seconde somme est sur tous les choix de $l^{(0)}, \dots, l^{(i)} \in \mathbb{N}^u$ avec $l^{(0)} + \dots + l^{(i)} = \kappa$. Par ailleurs $\chi(R) = \sum_{i,j} p_{i,j} X_1^{j_1} \cdots X_u^{j_u} i Y^{i-1}$ donc en extrayant de la somme précédente les termes pour lesquels $l^{(k)} = \kappa$ pour un indice k vérifiant $0 < k \leq i$ on a

$$\chi(R) \partial^\kappa y = -\sum_{i,j} p_{i,j} \sum_{\substack{l^{(0)} + \dots + l^{(i)} = \kappa \\ l^{(k)} \neq \kappa \text{ si } k > 0}} \partial^{l^{(0)}} \left(X_1^{j_1} \cdots X_u^{j_u} \right) \partial^{l^{(1)}} y \cdots \partial^{l^{(i)}} y.$$

On constate que $\partial^{l^{(0)}} (X_1^{j_1} \cdots X_u^{j_u})$ vaut 1 si $l^{(0)} = j$ et 0 sinon. On applique alors φ à l'égalité précédente et, v étant ultramétrique,

$$|\psi(R)|_v |\varphi(\partial^\kappa y)|_v \leq |P|_v \max_{i \geq 0, l^{(1)} + \dots + l^{(i)} \leq \kappa, l^{(k)} \neq \kappa} |\varphi(\partial^{l^{(1)}} y)|_v \cdots |\varphi(\partial^{l^{(i)}} y)|_v.$$

On prouve maintenant par récurrence sur $|\kappa|$ que

$$|\varphi(\partial^\kappa y)|_v \le \left(\frac{|P|_v}{|\psi(R)|_v}\right)^{\max(0,2|\kappa|-1)}$$

En effet le cas $|\kappa| = 0$ est l'hypothèse $|\varphi(y)|_v \le 1$ et, si $|\kappa| > 0$, la formule obtenue montre que, si l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour les κ' avec $|\kappa'| < |\kappa|$, on a

$$|\varphi(\partial^\kappa y)|_v \le \max_{i\ge 0, l^{(1)}+\cdots+l^{(i)}\le\kappa, l^{(k)}\neq\kappa} \left(\frac{|P|_v}{|\psi(R)|_v}\right)^{1+\sum_{k=1}^{i}\max(0,2|l^{(k)}|-1)}.$$

On constate d'abord que $|\psi(R)|_v \le |P|_v$; ceci montre qu'il suffit d'établir

$$\sum_{k=1}^{i}\max(0, 2|l^{(k)}| - 1) \le 2|\kappa| - 2$$

pour tous les choix de $i \ge 0$, $l^{(1)}, \ldots, l^{(i)} \in \mathbb{N}^u$ avec $l^{(1)} + \cdots + l^{(i)} \le \kappa$ et $l^{(k)} \neq \kappa$. Si ce choix est tel que $l^{(1)} + \cdots + l^{(i)} \neq \kappa$ alors la majoration triviale

$$\sum_{k=1}^{i}\max(0, 2|l^{(k)}| - 1) \le \sum_{k=1}^{i} 2|l^{(k)}| = 2|l^{(1)} + \cdots + l^{(i)}| \le 2(|\kappa| - 1)$$

donne la conclusion. Si le choix est tel que $l^{(1)}+\cdots+l^{(i)} = \kappa$ alors l'hypothèse $l^{(k)} \neq \kappa$ entraîne l'existence de deux indices distincts k_1 et k_2 tels que $l^{(k_1)} \neq 0$ et $l^{(k_2)} \neq 0$; on peut donc majorer

$$\sum_{k=1}^{i}\max(0, 2|l^{(k)}| - 1) \le 2|l^{(k_1)}| - 1 + 2|l^{(k_2)}| - 1 + \sum_{k\neq k_1,k_2} 2|l^{(k)}| = 2|\kappa| - 2$$

ce qui termine la démonstration quand v est une place finie.

On procède différemment lorsque v est infinie. On montre par récurrence sur $|\kappa| \ge 1$ qu'il existe un polynôme $Q_\kappa \in K[X_1, \ldots, X_u, Y]$ tel que

$$\chi(Q_\kappa) = \chi(R)^{2|\kappa|-1} d^\kappa(y).$$

En effet si $|\kappa| = 1$, c'est-à-dire $\kappa_k = \delta_{k,k_0}$ pour un indice k_0, on pose $Q_\kappa = -\frac{\partial P}{\partial X_{k_0}}$ car

$$0 = d^\kappa(\chi(P)) = \chi\left(\frac{\partial P}{\partial X_{k_0}}\right) d^\kappa(X_{k_0}) + \chi\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right) d^\kappa(y) = \chi\left(\frac{\partial P}{\partial X_{k_0}}\right) + \chi(R) d^\kappa(y).$$

Si $|\kappa| > 1$ on choisit k_0 tel que $\kappa_{k_0} \neq 0$ et on définit κ' par $\kappa'_k = \kappa_k - \delta_{k,k_0}$ puis

$$Q_\kappa = R^2 \frac{\partial Q_{\kappa'}}{\partial X_{k_0}} - R \frac{\partial P}{\partial X_{k_0}} \frac{\partial Q_{\kappa'}}{\partial Y} + (2|\kappa'| - 1) Q_{\kappa'} \left(\frac{\partial P}{\partial X_{k_0}} \frac{\partial R}{\partial Y} - R \frac{\partial R}{\partial X_{k_0}} \right).$$

Ceci convient car en appliquant d_{k_0} à $\chi(R)^{2|\kappa'|-1} d^{\kappa'} y = \chi(Q_{\kappa'})$ puis en multipliant par $\chi(R)^2$ on trouve

$$\begin{aligned} &\chi(R)^{2|\kappa|-1} d^\kappa y + (2|\kappa'| - 1)\chi(R)^{2|\kappa'|} d_{k_0}(\chi(R)) d^{\kappa'} y \\ &= \chi\left(\frac{\partial Q_{\kappa'}}{\partial X_{k_0}}\right) \chi(R)^2 + \chi\left(\frac{\partial Q_{\kappa'}}{\partial Y}\right) \chi(R)^2 d_{k_0} y \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} &\chi(R)^{2|\kappa|-1} d^\kappa y + (2|\kappa'| - 1)\chi(Q_{\kappa'} R) \left(\chi\left(\frac{\partial R}{\partial Y}\right) d_{k_0} y + \chi\left(\frac{\partial R}{\partial X_{k_0}}\right) \right) \\ &= \chi\left(\frac{\partial Q_{\kappa'}}{\partial X_{k_0}} R^2\right) + \chi\left(\frac{\partial Q_{\kappa'}}{\partial Y}\right) \chi(R)^2 d_{k_0} y, \end{aligned}$$

formule dans laquelle il suffit de remplacer $\chi(R) d_{k_0} y$ par $-\chi\left(\frac{\partial P}{\partial X_{k_0}}\right)$ pour reconnaître

$$\chi(R)^{2|\kappa|-1} d^\kappa y = \chi(Q_\kappa).$$

Sur la définition de Q_κ par récurrence, on constate que $\deg_X Q_\kappa$ et $\deg_Y Q_\kappa$ sont tous deux majorés par $2|\kappa|D$. D'autre part, si $Q_{\kappa'} = \sum_{l,m} q_{l,m} X_1^{m_1} \cdots X_u^{m_u} Y^l$ on trouve

$$\begin{aligned} Q_\kappa = &\sum_{i,j,i',j',l,m} p_{i,j} p_{i',j'} q_{l,m} X^{j+j'+m} X_{k_0}^{-1} Y^{i+i'+l-2} \\ &\times \left(i i' m_{k_0} - i j'_{k_0} l + (2|\kappa'| - 1)\big(j'_{k_0} i(i-1) - i i' j'_{k_0}\big) \right). \end{aligned}$$

Dans cette expression on a

$$\left| i i' \big(m_{k_0} - (2|\kappa'| - 1) j'_{k_0}\big) \right| \leq i i' \max\left(m_{k_0}, (2|\kappa'| - 1) j'_{k_0}\right) \leq i i' \cdot 2|\kappa'| D$$

et de même $\left| i j'_{k_0}\big(-l + (2|\kappa'| - 1)(i-1)\big) \right| \leq i j'_{k_0} \cdot 2|\kappa'| D$. On en déduit

$$|Q_\kappa|_v \leq |P|_v^2 |Q_{\kappa'}|_v \cdot 2|\kappa'| D \sum_{0 \leq i, i', |j|, |j'| \leq D} i(i' + j'_{k_0}).$$

Cette dernière somme vaut

$$\left(\sum_{|j|\le D} 1\right)\left(\sum_{i=0}^{D} i\right)\left[\left(\sum_{|j'|\le D} 1\right)\left(\sum_{i'=0}^{D} i'\right)+\left(\sum_{i'=0}^{D} 1\right)\left(\sum_{|j'|\le D} j'_{k_0}\right)\right]$$
$$=\binom{D+u}{u}\binom{D+1}{2}\left[\binom{D+u}{u}\binom{D+1}{2}+(D+1)\binom{D+u}{u+1}\right]$$
$$=\binom{D+u}{u}^2\binom{D+1}{2}^2\left[1+\frac{2}{u+1}\right]\le\frac{f_1(u,D)}{2uD}.$$

Ainsi

$$|Q_\kappa|_v\le f_1(u,D)\frac{|\kappa'|}{u}|P|_v^2|Q_{\kappa'}|_v.$$

Si $|\kappa|=1$ on a $|Q_\kappa|_v\le D|P|_v$ donc

$$|Q_\kappa|_v\le D\left(\frac{f_1(u,D)}{u}\right)^{|\kappa|-1}(|\kappa|-1)!|P|_v^{2|\kappa|-1}.$$

On en déduit

$$|\psi(Q_\kappa)|_v\le 3D^2|\kappa|!\left(\frac{f_1(u,D)}{u}\right)^{|\kappa|-1}|P|_v^{2|\kappa|-1}$$

car $|\psi(Y)|_v\le 1$, $\psi(X_i)=0$ et $1+\deg_Y Q_\kappa\le 3D|\kappa|$. Enfin le choix de Q_κ montre que

$$\psi(Q_\kappa)=\psi(R)^{2|\kappa|-1}\varphi(d^\kappa y)=\kappa_1!\cdots\kappa_u!\psi(R)^{2|f|-1}\varphi(\partial^\kappa y)$$

donc

$$|\varphi(\partial^\kappa y)|_v\le\frac{|\kappa|!}{\kappa!}3D^2\left(\frac{f_1(u,D)}{u}\right)^{|\kappa|-1}\left(\frac{|P|_v}{|\psi(R)|_v}\right)^{2|\kappa|-1}$$
$$\le f_1(u,d)^{|\kappa|}\left(\frac{|P|_v}{|\psi(R)|_v}\right)^{2|\kappa|-1}$$

car $\frac{|\kappa|!}{\kappa!}\le u^{|\kappa|}$ et $3uD^2\le f_1(u,D)$. □

On va appliquer le résultat à notre situation dans le lemme suivant où l'on note

$$c_i=\prod_{(\nu,j)\in\mathcal{N}_i} x_0^{(i)\,D_i}x_j^{(i)\,D_i-1}\partial_Z Q_{\nu,j}^{(i)}\left(\frac{x_1^{(i)}}{x_0^{(i)}},\ldots,\frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_0^{(i)}},\frac{x_\nu^{(i)}}{x_j^{(i)}}\right)\in K.$$

LEMME 6.2. *Pour tout $1\le i\le m$, tout $l\in\mathbb{N}^{u_i}$, toute place v et tout $0\le\nu\le u_i+1$ on a*

$$\left|c_i^{2|l|}\partial^l\left(\frac{w_\nu^{(i)}}{w_{j_{\nu,i}}^{(i)}}\right)(x)\right|_v\le f_2(u_i,D_i)^{\varepsilon_v|l|}|B_i|_v^{4(u_i+1)|l|}\max_{0\le k\le u_i+1}\left|x_k^{(i)}\right|_v^{(8D_i-4)(u_i+1)|l|}$$

où

$$f_2(a,b) = f_1(a,b) b^{4a+2} \binom{b+a+1}{a+1}^{4a+2} 4^b \binom{b+a}{a}^2 .$$

DÉMONSTRATION. On commence par écrire

$$\left| \partial_Z Q^{(i)}_{\nu,j} \left(\frac{x^{(i)}_1}{x^{(i)}_0}, \dots, \frac{x^{(i)}_{u_i}}{x^{(i)}_0}, \frac{x^{(i)}_\nu}{x^{(i)}_j} \right) \right|_v$$

$$\le \left(D_i \binom{D_i+u_i+1}{u_i+1} \right)^{\varepsilon_v} |B_i|_v \max_{0\le k\le u_i} \left| \frac{x^{(i)}_k}{x^{(i)}_0} \right|_v^{D_i} \max\left(1, \left| \frac{x^{(i)}_\nu}{x^{(i)}_j} \right|_v \right)^{D_i-1}$$

car $\partial_Z Q^{(i)}_{\nu,j}$ a au plus $\binom{D_i+u_i+1}{u_i+1}$ coefficients (comme $P^{(i)}_{u_i+1}$) qui sont chacun produit d'un entier au plus égal à D_i par un élément de B_i. Par suite

$$|c_i|_v \le \left(D_i \binom{D_i+u_i+1}{u_i+1} \right)^{2(u_i+1)\varepsilon_v} |B_i|_v^{2(u_i+1)} \max_{0\le k\le u_i+1} \left| x^{(i)}_k \right|_v^{2(2D_i-1)(u_i+1)}$$

et, pour chaque $(\nu, j) \in \mathcal{N}_i$,

$$|c_i|_v \le \left| \partial_Z Q^{(i)}_{\nu,j} \left(\frac{x^{(i)}_1}{x^{(i)}_0}, \dots, \frac{x^{(i)}_{u_i}}{x^{(i)}_0}, \frac{x^{(i)}_\nu}{x^{(i)}_j} \right) \right|_v \left| x^{(i)}_0 \right|_v^{D_i}$$

$$\times \left(D_i \binom{D_i+u_i+1}{u_i+1} \right)^{(2u_i+1)\varepsilon_v} |B_i|_v^{2u_i+1} \max_{0\le k\le u_i+1} \left| x^{(i)}_k \right|_v^{2(2D_i-1)(u_i+1)-D_i} .$$

Comme $\left(D_i \binom{D_i+u_i+1}{u_i+1}\right)^{4(u_i+1)} \le f_2(u_i, D_i)$ la première inégalité montre le lemme si $\left| \partial^l \left(\frac{w^{(i)}_\nu}{w^{(i)}_{j_{\nu,i}}} \right)(x) \right|_v \le 1$. Ceci est clairement vérifié si $l = (0, \dots, 0)$ (par définition de $j_{\nu,i}$) ou si $\nu = j_{\nu,i}$. On exclut donc ces situations. Montrons que c'est encore le cas si $(\nu, j_{\nu,i}) \notin \mathcal{N}_i$. Si le terme que l'on cherche à calculer est non nul on a $l_\nu \le 1$ et $l_\nu + l_{j_{\nu,i}} = |l|$ et donc

$$\begin{aligned}
\partial^l \left(\frac{w^{(i)}_\nu}{w^{(i)}_{j_{\nu,i}}} \right) &= \partial^{l_\nu}_{w^{(i)}_\nu} \left(w^{(i)}_\nu \right) \partial^{l_{j_{\nu,i}}}_{w^{(i)}_{j_{\nu,i}}} \left(\frac{1}{w^{(i)}_{j_{\nu,i}}} \right) \\
&= \left(w^{(i)}_\nu \right)^{1-l_\nu} (-1)^{l_{j_{\nu,i}}} \left(w^{(i)}_{j_{\nu,i}} \right)^{-l_{j_{\nu,i}}-1} \\
&= \pm \left(\frac{w^{(i)}_\nu}{w^{(i)}_{j_{\nu,i}}} \right)^{1-l_\nu} \left(\frac{w^{(i)}_0}{w^{(i)}_{j_{\nu,i}}} \right)^{|l|}
\end{aligned}$$

dont la valeur absolue en x est à nouveau au plus 1. On suppose donc maintenant $|l| \geq 1$ et $(\nu, j_{v,i}) \in \mathcal{N}_i$. L'on va appliquer le lemme précédent aux éléments

$$X_\alpha = w_\alpha^{(i)} - \frac{x_\alpha^{(i)}}{x_0^{(i)}} \quad (1 \leq \alpha \leq u_i) \quad \text{et} \quad y = \frac{w_\nu^{(i)}}{w_{j_{v,i}}^{(i)}}$$

dans l'anneau $\mathcal{O}_{Y_i,x_i}$ muni de l'application linéaire $\varphi \colon \mathcal{O}_{Y_i,x_i} \to k(x_i) \simeq K$. Le polynôme utilisé est ainsi

$$P(X_1, \dots, X_{u_i}, Y) = Q_{\nu,j_{v,i}}^{(i)}\left(X_1 + \frac{x_1^{(i)}}{x_0^{(i)}}, \dots, X_{u_i} + \frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_0^{(i)}}, Y\right).$$

On constate que

$$\frac{\partial P}{\partial Y}(0, \dots, 0, \varphi(y)) = \partial_Z Q_{\nu,j_{v,i}}^{(i)}\left(\frac{x_1^{(i)}}{x_0^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_0^{(i)}}, \frac{x_\nu^{(i)}}{x_{j_{v,i}}^{(i)}}\right) \neq 0$$

donc le lemme s'applique et donne

$$\left|\partial^l\left(\frac{w_\nu^{(i)}}{w_{j_{v,i}}^{(i)}}\right)(x)\right|_v \leq f_1(u_i, D_i)^{\varepsilon_v|l|}\left(\frac{|P|_v}{\left|\partial_Z Q_{\nu,j_{v,i}}^{(i)}\left(\frac{x_1^{(i)}}{x_0^{(i)}}, \dots, \frac{x_{u_i}^{(i)}}{x_0^{(i)}}, \frac{x_\nu^{(i)}}{x_{j_{v,i}}^{(i)}}\right)\right|_v}\right)^{2|l|-1}$$

En utilisant la seconde des majorations de $|c_i|_v$ établies plus haut, la quantité de l'énoncé est au plus

$$|c_i|_v f_1(u_i, D_i)^{\varepsilon_v|l|} |P|_v^{2|l|-1} \left|x_0^{(i)}\right|_v^{D_i(2|l|-1)} \left(D_i \binom{D_i + u_i + 1}{u_i + 1}\right)^{(2u_i+1)\varepsilon_v(2|l|-1)}$$
$$\times |B_i|_v^{(2u_i+1)(2|l|-1)} \max_{0 \leq k \leq u_i+1} \left|x_k^{(i)}\right|_v^{(2|l|-1)[2(2D_i-1)(u_i+1)-D_i]}.$$

Majorons maintenant $|P|_v$: un coefficient de ce polynôme est somme d'au plus $\binom{D_i+u_i}{u_i}$ termes (nombre de termes comportant une puissance donnée de Z dans $Q_{\nu,j_{v,i}}^{(i)}$) de la forme

$$\lambda \prod_{\alpha=1}^{u_i} \binom{\beta_\alpha}{\gamma_\alpha} \left(\frac{x_\alpha^{(i)}}{x_0^{(i)}}\right)^{\gamma_\alpha}$$

avec $\sum_\alpha \beta_\alpha \leq D_i$ et $\lambda \in B_i$. Ainsi

$$|P|_v \leq |B_i|_v \binom{D_i + u_i}{u_i}^{\varepsilon_v} 2^{\varepsilon_v D_i} \max_{0 \leq \alpha \leq u_i} \left|\frac{x_\alpha^{(i)}}{x_0^{(i)}}\right|^{D_i}.$$

Finalement en réemployant la première estimation pour $|c_i|_v$ notre quantité est au plus

$$f_1(u_i, D_i)^{\varepsilon_v|l|}\left(D_i\binom{D_i+u_i+1}{u_i+1}\right)^{(2u_i+1)\varepsilon_v 2|l|+\varepsilon_v}\left(2^{D_i}\binom{D_i+u_i}{u_i}\right)^{\varepsilon_v(2|l|-1)}$$
$$\times |B_i|_v^{4(u_i+1)|l|}\max_{0\leq k\leq u_i}\left|x_k^{(i)}\right|_v^{4|l|(2D_i-1)(u_i+1)}$$

ce qui donne le résultat en utilisant $D_i\binom{D_i+u_i+1}{u_i+1}\leq 2^{D_i}\binom{D_i+u_i}{u_i}$ (parce que $u_i\geq 1$). □

Grâce au lemme on peut majorer

$$\left|\partial^{\kappa_i}\mathfrak{m}(x)\right|_v \leq |c_i|_v^{-2|\kappa_i|}2^{\varepsilon_v(|\kappa_i|+u_i\delta_i)}$$
$$\times f_2(u_i, D_i)^{\varepsilon_v|\kappa_i|}|B_i|_v^{4(u_i+1)|\kappa_i|}\max_{0\leq k\leq u_i+1}\left|x_k^{(i)}\right|_v^{4(2D_i-1)(u_i+1)|\kappa_i|}$$

pour tout i, toute place v et tout monôme $\mathfrak{m}$ de degré δ_i en $\frac{1}{w_{j_{v,i}}^{(i)}}, \frac{w_1^{(i)}}{w_{j_{v,i}}^{(i)}}, \ldots, \frac{w_{u_i+1}^{(i)}}{w_{j_{v,i}}^{(i)}}$. En effet un tel monôme s'écrit

$$\mathfrak{m}=\prod_{\lambda=1}^{\delta_i}\frac{w_{\nu_\lambda}^{(i)}}{w_{j_{v,i}}^{(i)}}$$

pour un certain $\nu\in[0, u_i+1]^{\delta_i}$. Par la formule de Leibniz

$$\partial^{\kappa_i}\mathfrak{m}=\sum_{(l_\lambda)}\prod_{\lambda=1}^{\delta_i}\partial^{l_\lambda}\left(\frac{w_{\nu_\lambda}^{(i)}}{w_{j_{v,i}}^{(i)}}\right)$$

où la somme est prise sur toutes les familles $(l_\lambda)_{1\leq\lambda\leq\delta_i}$ avec $l_\lambda\in\mathbb{N}^{u_i}$ et $\sum_{\lambda=1}^{\delta_i}l_\lambda=\kappa_i$. La formule annoncée s'obtient en remarquant que le nombre de telles familles est

$$\prod_{j=1}^{u_i}\binom{\kappa_{ij}+\delta_i-1}{\delta_i-1}\leq\prod_{j=1}^{u_i}2^{\kappa_{ij}+\delta_i-1}\leq 2^{|\kappa_i|+u_i\delta_i}.$$

En utilisant la formule du produit pour c_i l'on peut donc écrire

$$\sum_v\frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\max_{\mathfrak{m}}\left|\partial^{\kappa_i}\mathfrak{m}(x)\right|_v\leq u_i\delta_i\log 2$$
$$+|\kappa_i|\Big(\log 2f_2(u_i, D_i)+4(u_i+1)h(B_i)+4(2D_i-1)(u_i+1)h(\chi_i(x_i))\Big).$$

6.3. – Conjonction avec l'inégalité principale

En combinant les deux paragraphes qui précèdent et $|\kappa_i| \le \sigma\delta_i$, on a

$$-\Phi \le h(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \Big[u_i \log 2$$

$$+\sigma\Big(\log 2 f_2(u_i, D_i) + 4(u_1+1)h(B_i) + 4(2D_i - 1)(u_i+1)h(\chi_i(x_i))\Big)\Big] + o(d).$$

Pour démontrer la proposition 6.1, nous allons supposer

$$\sigma \le \varepsilon(16(2D_i - 1)(u_i+1))^{-1}$$

pour tout i. L'obtention d'une contradiction pour d assez grand montrera l'énoncé. On réécrit

$$-\Phi \le h(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \left[\frac{\varepsilon}{4}h(\chi_i(x_i)) + \varepsilon h(B_i) + u_i \log 2 + \varepsilon f_3(u_i, D_i)\right] + o(d)$$

où $f_3(a,b) = (16(2b-1)(a+1))^{-1}\log 2 f_2(a,b)$.

Voyons maintenant comment l'inégalité principale — celle qui a servi à convertir les conditions du théorème en un choix des a_i — permet de donner une majoration de Φ. Il suffit pour cela de majorer $h(\chi_i(x_i))$ en termes de $|x_i|^2$. On a en effet :

$$h(\chi_i(x_i)) \le h(x_i) + \log(n+1)\frac{\max(D_i, 2)}{2}$$

puisque l'on multiplie les coordonnées par la matrice M_i et

$$h(x_i) \le |x_i|^2 + c_{\mathrm{NT}}$$

par définition de c_{NT}. Par conséquent

$$\Phi \le \sum_{i=1}^{m} \delta_i \Big(|x_i|^2 + c_{\mathrm{NT}} + \log(n+1)D_i\Big) - \sum_{i=1}^{m-1} |\sqrt{d}a_i x_i + \sqrt{d}a_{i+1}x_{i+1}|^2 + o(d).$$

A présent

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \delta_i |x_i|^2 - \sum_{i=1}^{m-1} |\sqrt{d}a_i x_i + \sqrt{d}a_{i+1}x_{i+1}|^2 \\
&= d\left[\sum_{i=1}^{m-1}\Big(2|a_i x_i|^2 + 2|a_{i+1}x_{i+1}|^2 - |a_i x_i + a_{i+1}x_{i+1}|^2\Big) - \varepsilon\sum_{i=1}^{m}\eta_i |a_i x_i|^2\right] \\
&= d\left[\sum_{i=1}^{m-1}|a_i x_i - a_{i+1}x_{i+1}|^2 - \varepsilon\sum_{i=1}^{m}\eta_i|a_i x_i|^2\right] \\
&\le d\left(\frac{4}{c_1} - \varepsilon\right)\sum_{i=1}^{m}\eta_i|a_i x_i|^2.
\end{aligned}$$

En rassemblant ceci avec la borne pour $-\Phi$ (on réutilise la comparaison de hauteurs)

$$d\left(\varepsilon-\frac{4}{c_1}-\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{4}\right)\sum_{i=1}^{m}\eta_i a_i^2|x_i|^2 \leq h(\mathcal{F})$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\delta_i\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)(c_{\mathrm{NT}}+\log(n+1)D_i)+\varepsilon h(B_i)+u_i\log 2+\varepsilon f_3(u_i,D_i)\right]+o(d).$$

On choisit $\varepsilon = u^{-1}(4m)^{-u}\prod_{i=1}^{m}D_i^{-1}$. On rappelle que

$$c_1 = 8m(4m)^m\Lambda^{\prod_{j=m+1}^{m\dim X}(3j+1)}$$

de sorte que l'on a facilement $\frac{4}{c_1}\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Par suite le membre de gauche précédent est minoré par

$$\frac{d\varepsilon^2}{4}\sum_{i=1}^{m}\eta_i|a_ix_i|^2 > \left(\sum_{i=1}^{m}\eta_i a_i^2\right)\frac{d\varepsilon^2}{4}c_3.$$

On en déduit en prenant d assez grand

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\delta_i\right)\frac{\varepsilon^2 c_3}{4(2-\varepsilon)} \leq h(\mathcal{F})$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\delta_i\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)(c_{\mathrm{NT}}+\log(n+1)D_i)+\varepsilon h(B_i)+u_i\log 2+\varepsilon f_3(u_i,D_i)\right].$$

Il reste à faire intervenir les majorations des degrés et des hauteurs ainsi que la valeur des constantes pour montrer que ceci est impossible. On simplifie cette expression de la manière suivante. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} f_3(a,b) &= \frac{\log 2b^{4a+3}\binom{b+a+1}{a+1}^{4a+2}4^b\binom{b+a}{a}^4(2a+1)\binom{b+1}{2}^2}{16(2b-1)(a+1)} \\ &\leq \frac{\log 2+4(a+1)b+4(a+1)^2b+b\log 4+4(a+1)b+2(a+1)+4b}{16b(a+1)} \\ &\leq \frac{a+1}{4}+1 \end{aligned}$$

et ainsi $\varepsilon f_3(u_i,D_i)\leq 1$. Ensuite $(1+\varepsilon/4)\log(n+1)D_i \leq n\log(n+1)+2\log D_i \leq H+2\log\Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}$. Ces premières estimations permettent d'appliquer le lemme ci-dessous, formulé de manière à être utilisé également dans la partie suivante.

LEMME 6.3. *La quantité*

$$\Psi = h(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \left[\varepsilon h(B_i) + 3u_i + H + 9u \log \Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m \dim X}(3j+1)} \right]$$

satisfait

$$\Psi \leq 8(4m)^{m \dim X} \mu^{m \dim X - u + 1} \Lambda^{\left(2+\frac{2}{2m}\right) \prod_{j=u+1}^{m \dim X}(3j+1)} H \sum_{i=1}^{m} \delta_i .$$

DÉMONSTRATION. On commence par remplacer $h(\mathcal{F})$ par la majoration obtenue (proposition 5.1), on utilise également $h(B_i) \leq h(Y_i) + D_i(u_i+1) \log D_i(n+1)$ (lemme 4.2) et l'inégalité $(n+1)^{m-1} 2(2-\varepsilon)^{u-1} \leq \mu 2^u - \varepsilon$ de sorte à obtenir pour Ψ la borne

$$2\mu(4m)^u \left(\prod_{i=1}^{m} D_i \right) \sum_{l=1}^{m} \delta_i \left(h_1 + \frac{9}{4} h(Y_i) + \frac{9}{4} D_i(u_i+1) \log D_i(n+1) + g(n, u_i, D_i) \right)$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} \delta_i \left[3(u_i+1)H + 9u \log \Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m \dim X}(3j+1)} \right].$$

Grâce à $n \log(n+1) \leq H$ on a

$$\begin{aligned} g(n, u_i, D_i) &\leq 6n + \frac{9}{4} \log(n+1)!2(u_i+1) D_i^n \\ &\leq 6n + 3n \log(n+1) + 3 \log 2(u_i+1) + 3n \log D_i \\ &\leq 11H + 3HD_i \\ &\leq 14HD_i . \end{aligned}$$

Dans l'expression précédente on majore encore $\log(n+1) \leq H$ et $9u \leq (4m)^u \mu$ de sorte que

$$\Psi \leq 2\mu(4m)^u \left(\prod_{i=1}^{m} D_i \right)$$
$$\times \sum_{l=1}^{m} \delta_i \left(h_1 + \frac{9}{4} h(Y_i) + 32 D_i(u_i+1) H \log D_i' + \log \Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m \dim X}(3j+1)} \right)$$

si $D_i' = \max(D_i, 3)$. On regroupe les deux derniers termes puisque

$$\log D_i' \leq \left(\prod_{j=u+1}^{m \dim X} (3j+1) \right) \log \Lambda \leq (3m \dim X + 1)^{m \dim X - u} \log \Lambda$$

où l'on a clairement $3m\dim X+1\leq\mu$ (sauf peut-être si $\dim X=1$ mais en ce cas $m\dim X-u=0$) et $\log\Lambda\leq\frac{3}{2}m\Lambda^{2/3m}$. Ainsi la quantité en facteur de δ_i est majorée par

$$h_1+\frac{9}{4}h(Y_i)+48mD_i(u_i+1)H\mu^{m\dim X-u}\Lambda^{\frac{2}{3m}}.$$

On fait maintenant intervenir l'hypothèse de récurrence pour borner la somme des $\delta_i h(Y_i)$ et $h_1\leq\Lambda H$ et l'on obtient

$$\begin{aligned}\Psi &\leq 2\mu^{m\dim X-u+1}(4m)^u\left(\prod_{i=1}^m D_i\right)\left(\sum_{l=1}^m\delta_i\right)H\\ &\quad\times\left(\Lambda+\frac{9}{4}\Lambda^{\left(1+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}+48m\max_i(u_i+1)D_i\Lambda^{\frac{2}{3m}}\right).\end{aligned}$$

Enfin on a (pour tout i)

$$48m(u_i+1)D_i\leq\frac{3}{4}\Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}$$

ainsi que

$$\prod_{i=1}^m D_i\leq\Lambda^{\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}$$

à nouveau par l'hypothèse de récurrence et cela donne clairement la conclusion du lemme. □

Ainsi, en simplifiant par $\sum_{i=1}^m\delta_i$ la majoration obtenue, on a

$$\frac{\varepsilon^2c_3}{4(2-\varepsilon)}\leq\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)c_{\mathrm{NT}}+8(4m)^{m\dim X}\mu^{m\dim X-u+1}\Lambda^{\left(2+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}H.$$

Étant donné la valeur de ε, cela entraîne

$$c_3\leq c_1^2c_{\mathrm{NT}}+64u^2(4m)^{3m\dim X}\mu^{m\dim X-u+1}\Lambda^{\left(4+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}H.$$

Puisque $m\leq u$ et $4u(4m)^{m\dim X}\leq\Lambda$ on a

$$\begin{aligned}c_3&\leq c_1^2c_{\mathrm{NT}}+\mu^{m\dim X-m+1}\Lambda^{3+\left(4+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=m+1}^{m\dim X}(3j+1)}H\\ &\leq c_1^2c_{\mathrm{NT}}+\mu^{m\dim X-m+1}\Lambda^{8\prod_{j=m+1}^{m\dim X}(3j+1)}H\\ &\leq c_1^2c_{\mathrm{NT}}+\mu^{m\dim X-m+1}\Lambda^{\prod_{j=m}^{m\dim X}(3j+1)}H\end{aligned}$$

lorsque $m\geq3$ car $8\leq3m+1$. Si $m=2$ on a $64u^2(4m)^{3m\dim X}\leq\Lambda^2$ et l'on trouve la même formule qui est une contradiction.

7. – Théorème du produit

En considérant les calculs faits au début de la partie précédente, il appert que si $k \in [0, n]^{m-1}$ vérifie $\prod_{i=1}^{m-1} y_{k_i}^{(i)} \neq 0$ alors la section de $\mathcal{O}_Y$

$$F_k(w)$$

est d'indice σ en x (à nouveau w désigne la famille dont le i-ème groupe est $1, w_1^{(i)}, \ldots, w_{u_i+1}^{(i)}$). Par suite la norme de cette section sur $K[(w_j^{(i)})_{1\le j\le u_i, 1\le i\le m}]$ est d'indice au moins σ puisqu'elle s'écrit

$$N(F_k(w)) = \prod_{\tau\in\mathcal{T}} \tau(F_k(w)) = F_k(w) \prod_{\tau\in\mathcal{T}\setminus\{\mathrm{id}\}} \tau(F_k(w))$$

où $\mathcal{T}$ est l'ensemble des plongements de $K(Y)$ dans une clôture normale, au-dessus de $K((w_j^{(i)})_{1\le j\le u_i, 1\le i\le m})$. Si l'on pose $F_k = \sum_l G_l \prod_{i=1}^m {W_{u_i+1}^{(i)}}^{l_i}$, avec des polynômes G_l ($l \in \prod_{i=1}^m [0, D_i - 1]$) ne faisant pas apparaître les $W_{u_i+1}^{(i)}$, on a

$$\begin{aligned} N(F_k(w)) &= \prod_{\tau\in\mathcal{T}} \tau\left(\sum_l G_l(w) \prod_{i=1}^m {w_{u_i+1}^{(i)}}^{l_i}\right) \\ &= \sum_{(l_\tau)_\tau} \prod_{\tau\in\mathcal{T}} \left(G_{l_\tau}(w) \prod_{i=1}^m \tau(w_{u_i+1}^{(i)})^{(l_\tau)_i}\right) \\ &= \sum_{(\lambda_l)_l} \left(\prod_l G_l(w)^{\lambda_l}\right) \cdot \sum_{(l_\tau)_\tau} \prod_{\tau\in\mathcal{T}} \prod_{i=1}^m \tau(w_{u_i+1}^{(i)})^{(l_\tau)_i} \end{aligned}$$

où la première somme est prise sur toutes les familles vérifiant $\sum_l \lambda_l = \mathrm{Card}\mathcal{T} = \prod_{i=1}^m D_i$ tandis que la seconde est restreinte aux (l_τ) tels que $\mathrm{Card}\{l_\tau = l\} = \lambda_l$ pour tout l. En tout état de cause, on obtient un polynôme homogène en les G_l de degré $\prod_{i=1}^m D_i$ dont les coefficients sont indépendants de d. Par suite on peut écrire $N(F_k(w)) = G(w)$ où G est un polynôme multihomogène de $K[(W_j^{(i)})_{0\le j\le u_i, 1\le i\le m}]$ de multidegré $((\prod_{i=1}^m D_i)\delta_1, \ldots, (\prod_{i=1}^m D_i)\delta_m)$ et dont la hauteur vérifie

$$h(G) \le \left(\prod_{i=1}^m D_i\right) h(F_k) + o(d).$$

On considère ensuite ce polynôme G comme une section globlale du faisceau

$$\mathcal{O}\left(\left(\prod_{i=1}^m D_i\right)\delta\right)$$

sur $\mathbb{P}_K^{u_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{u_m}$ et ce qui précède montre que cette section est d'indice, par rapport à $(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, au moins égal à σ en $\pi(x)$. Ceci va nous permettre d'appliquer le corollaire suivant du théorème du produit effectif (on y note St_{u_l} le nombre de Stoll $h(\mathbb{P}_K^{u_l}) = \sum_{i=1}^{u_l} \sum_{j=1}^{i} 1/2j$; on utilisera plus bas la majoration $\mathrm{St}_{u_l} \le u_l \log(u_l + 1)$).

THÉORÈME 7.1. *Soient* $(x'_1, \dots, x'_m)$ *un point rationnel de* $\mathbb{P}_K^{u_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{u_m}$ *et* $u = u_1 + \cdots + u_m$. *On considère un polynôme multihomogène* G *de multidegré* $\delta' \in (\mathbb{N} \setminus 0)^m$. *On suppose que*

1. *G s'annule en x' avec un indice supérieur à σ_0 par rapport à $(\delta'_1, \dots, \delta'_m)$,*
2. $\frac{\delta'_i}{\delta'_{i+1}} \geq \left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u$ *et*
3. $\frac{\sigma_0}{m} < \left(\frac{\log(u+1)}{2u^2}\right)^u$.

Alors il existe un indice i et un polynôme non nul T homogène en $W_0, \dots, W_{u_i}$ tel que

1. $x'_i \in V(T)$,
2. $\deg T \leq \left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u$ *et*
3. $$\delta'_i h(T) \leq u_i \left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u \left[h(G) + \sum_{l=1}^{m} \left(\delta'_l(\mathrm{St}_{u_l} + \log 2) + \sqrt{u_l}\right) + \frac{u-1}{2} \log |\delta'|\right]$$ $$+ \delta'_i \left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u (u_i + 1) \log \left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u (u_i + 1) + \delta'_i \log \binom{\deg T + u_i}{u_i}.$$

DÉMONSTRATION. Avec les notations de [R2] on a par hypothèse $x' \in Z_{\sigma_0}(G)$. On choisit une composante irréductible W de $Z_{\sigma_0}(G)$ qui contient x' et on lui applique le corollaire 1.2 de [R2]. On a donc

$$x' \in W \subset Z_1 \times \cdots \times Z_m \not\subseteq \mathbb{P}_K^{u_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{u_m}$$

où Z_i est un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}_K^{u_i}$. On choisit un indice i pour lequel $Z_i \neq \mathbb{P}_K^{u_i}$. On a (voir remarque à la fin du paragraphe 3 de [R2])

$$d(Z_i) \leq \left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u$$

et

$$\delta'_i h(Z_i) \leq u_i \left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u \left[h(G) + \sum_{l=1}^{m} \left(\delta'_l(\mathrm{St}_{u_l} + \log 2) + \sqrt{u_l}\right) + \frac{u-1}{2} \log |\delta'|\right].$$

En vertu des lemmes de la partie 4 on peut trouver un polynôme T dans l'idéal de Z_i tel que $\deg T = d(Z_i)$ et

$$h(T) \leq h(Z_i) + d(Z_i)(u_i + 1) \log d(Z_i)(u_i + 1) + \log \binom{d(Z_i) + u_i}{u_i};$$

en multipliant par δ'_i et en combinant les estimations on obtient le résultat. $\square$

On utilise ce théorème avec G, $x' = \pi(x)$, $\sigma_0 = m\Lambda^{-3\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}$ et $\delta' = \left(\prod_{i=1}^m D_i\right)\delta$. Vérifions les hypothèses. Le polynôme G est d'indice au moins σ par rapport à δ donc d'indice au moins $\left(\prod_{i=1}^m D_i\right)^{-1}\sigma$ par rapport à δ'. De plus

$$\left(\prod_{i=1}^m D_i\right)\sigma^{-1} \le \left(\prod_{i=1}^m D_i\right)\varepsilon^{-1}16\max_i(2D_i-1)(u_i+1)$$
$$< \left(\prod_{i=1}^m D_i\right)^2 32m^2\dim X(4m)^{m\dim X}\max_i D_i.$$

Par hypothèse de récurrence (voir théorème 3.1) ceci est bien majoré par σ_0^{-1}. L'hypothèse 1 est donc prouvée. Pour 2 on a clairement

$$\frac{\delta_i'}{\delta_{i+1}'} = \frac{\eta_i a_i^2}{\eta_{i+1}a_{i+1}^2} \ge \frac{c_2^2}{2} \ge \left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u = \Lambda^{3u\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)}$$

puisque $u \ge m$ et que l'exposant est une fonction décroissante de u. Pour 3 on écrit $\sigma_0/m \le \Lambda^{-3} \le (2m\dim X)^{-3m\dim X} \le (2u)^{-3u}$ qui donne le résultat.

Par conséquent, on obtient un polynôme T qui vérifie toutes les conditions de la proposition 4.2 sauf peut-être pour la hauteur. Pour celle-ci, on a la borne (on divise la majoration obtenue dans le théorème par $\prod_{i=1}^m D_i$)

$$\delta_i h(T) \le u_i\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u\left[h(\mathcal{F}) + \sum_{l=1}^m \delta_l(\mathrm{St}_{u_l} + \log 2)\right]$$
$$+\,\delta_i\left[\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u(u_i+1)\log(u_i+1)\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u + \log\binom{(m/\sigma_0)^u+u_i}{u_i}\right] + o(d).$$

En prenant d assez grand on a

$$\delta_i h(T) \le u_i\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u\left[h(\mathcal{F}) + 3\sum_{l=1}^m \delta_l\log(u_l+1)\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u\right]$$

car $\log\binom{(m/\sigma_0)^u+u_i}{u_i} \le u_i\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u$ et $1+\log 2+u_l\log(u_l+1) \le \log(u_l+1)\left(\frac{m}{\sigma_0}\right)^u$ ($\Lambda \ge u_l+1$ et $\Lambda \ge 16$). On applique alors le lemme 6.3 et cela donne bien

$$\eta_i a_i^2 h(T) \le 8(\dim X)(4m)^{m\dim X}\mu^{m\dim X-u+1}\Lambda^{\left(3u+2+\frac{2}{3m}\right)\prod_{j=u+1}^{m\dim X}(3j+1)} H\sum_{l=1}^m \eta_l a_l^2$$

qui est la conclusion de la proposition 4.2.

RÉFÉRENCES

[B1] E. Bombieri, *The Mordell conjecture revisited*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **17** (1990) 615-640. — Erratum. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **18** (1991) 473.

[B2] E. Bombieri, *On G-functions*, In: "Recent progress in analytic number theory", vol. II (Durham 1979), H. Halberstam et C. Hooley (eds), Academic Press, 1981, pp. 1-67.

[BGS] J.-B. Bost – H. Gillet – C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994) 903-1027.

[Ch] M. Chardin, "Contributions à l'algèbre commutative effective et à la théorie de l'élimination", Thèse. Univ. Paris VI, 1990.

[dD] T. de Diego, *Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2*, J. of Number Theory **67** (1997) 85-114.

[EE] B. Edixhoven – J.-H. Evertse, "Diophantine approximation and abelian varieties", Lecture Notes in Mathematics 1566, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Fb] C. Faber, *Geometric part of Faltings's proof*, In: "[EE]", Chapitre IX, pp. 83-91.

[F1] G. Faltings, *Diophantine approximation on abelian varieties*, Ann. of Math. **133** (1991) 549-576.

[F2] G. Faltings, *The general case of S. Lang's conjecture*, In: "Barsotti Symposium in Algebraic Geometry" (Abano Terme, 1991). Perspect. Math. 15. Academic Press, San Diego, 1994, pp. 175-182.

[Ha] R. Hartshorne, "Algebraic Geometry", Springer-Verlag, 1977.

[H1] M. Hindry, *Autour d'une conjecture de Serge Lang*, Invent. Math. **94** (1988) 575-603.

[H2] M. Hindry, *Sur les conjectures de Mordell et de Lang [d'après Vojta, Faltings et Bombieri]*, Astérisque **209** (1992) 39-56.

[M] D. Mumford, *A remark on Mordell's conjecture*, Amer. J. Math. **87** (1965) 1007-1016.

[O] F. Oort, *"The" general case of S. Lang's conjecture (after Faltings)*, In : "[EE]" Chapitre XIII, pp. 117-122.

[Ph] P. Philippon, *Sur des hauteurs alternatives III*, J. Math. Pures Appl. **74** (1995) 345-365.

[R1] G. Rémond, *Géométrie diophantienne multiprojective*, Chapitre 7 de : "Introduction to Algebraic Independence Theory", Y. Nesterenko – P. Philippon (eds), à paraître dans Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

[R2] G. Rémond, *Sur le théorème du produit*, XXIèmes Journées Arithmétiques, Rome, 1999.

[V] P. Vojta, "Applications of arithmetic algebraic geometry to diophantine approximations", Lecture Notes in Mathematics, 1553, Springer-Verlag.

[ZS] O. Zariski – P. Samuel, "Commutative Algebra I", Van Nostrand, New York, 1958.

Théorie des nombres
Institut de Mathématiques de Jussieu
Case 247
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France