

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

PHILIPPE CHARPENTIER

YVES DUPAIN

Pseudodistances et courants positifs fermés dans les domaines de $\mathbb{C}^3$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 24, n° 2 (1997), p. 299-350

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1997_4_24_2_299_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Pseudodistances et courants positifs fermés dans les domaines de $\mathbb{C}^3$

PHILIPPE CHARPENTIER - YVES DUPAIN

1. – Introduction et énoncé des résultats

1.1. – Introduction

Soit Ω un domaine borné à bord régulier de $\mathbb{C}^n$. Si θ est un $(1, 1)$ -courant positif fermé dans Ω , il est maintenant classique (c.f. [1], [2], [3], [4] et [7]) que les coefficients tangents de θ satisfont une condition de croissance au bord meilleure que ses autres coefficients. Cette condition est connue sous le nom de “condition de Malliavin”. Précisément, si $\Omega = \{\rho < 0\}$, $\rho \in \mathcal{C}^\infty$, $\nabla \rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} \left| \theta \wedge \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho \wedge \beta^{n-2} \right| \leq K \int_{\Omega} (-\rho) |\theta|,$$

où K ne dépend que de Ω et $\beta = \sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$.

L'importance de cette condition vient naturellement de son intervention essentielle dans la caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna d'un domaine strictement pseudo-convexe obtenue indépendamment par G. M. Henkin et H. Skoda ([3], [4] et [7]).

Dans [1] on démontre que cette condition n'est optimale que dans les domaines strictement pseudo-convexes, et, si l'on veut généraliser le résultat de G. M. Henkin et H. Skoda il faut l'améliorer en fonction du domaine sur lequel on se trouve. Dans ce même article on propose alors une condition, dans les domaines de $\mathbb{C}^2$, meilleure en général que la condition de Malliavin, qui semblait alors être la bonne condition dans le cas des domaines de type fini. Cette condition s'écrit

$$(1.2) \quad \int_{\Omega} \frac{|\theta \wedge \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho|}{S} \leq K \int_{\Omega} (-\rho) |\theta|,$$

où le poids S est construit à partir de dérivées de la forme de Levi du domaine Ω . La raison pour laquelle cette condition semblait être la bonne est d'ordre géométrique:

Considérons tout d'abord le cas des domaines strictement pseudo-convexes. Nous avons à notre disposition la pseudo-distance de Korany dont les boules ont, dans la direction normale, un rayon équivalent à la distance au bord, et, dans les directions complexes tangentes, un rayon $R(z)$ équivalent à la racine carrée de la distance au bord. Dans la condition de Malliavin, le poids qui affecte les coefficients tangents de θ peut donc s'écrire $R(z)^2/(-\rho(z))$. Dans le cas traité dans [1] le même phénomène se produit: dans [5], A. Nagel, E. Stein et S. Wainger introduisent une pseudodistance sur les domaines pseudo-convexes de $\mathbb{C}^n$; cette pseudodistance n'est optimale que dans $\mathbb{C}^2$ (c.f. [6]), et, dans ce cas, le rayon des boules dans la direction normale est équivalent à la distance au bord, et le rayon $R(z)$ dans la direction complexe tangente s'écrit $R(z) = (-\rho(z))^{1/2}/S(z)^{1/2}$, S étant le poids intervenant dans la formule (1.2).

Ici nous nous intéressons aux domaines bornés de $\mathbb{C}^3$. Dans [2] nous avons donné pour ces domaines une condition, dépendant d'un paramètre m , sur les coefficients tangents d'un courant positif fermé, une base locale de l'espace complexe tangent étant choisie. Cette condition étant en général meilleure que celle que l'on peut obtenir en s'inspirant logiquement de ce qui avait été fait pour $\mathbb{C}^2$ dans [1] (c'est-à-dire sans distinguer les différentes directions complexes tangentes) il est naturel de se demander si, comme dans les cas précédents, cette condition est liée de la même manière à l'existence de pseudo-distances. Le premier but du présent travail est de donner une réponse affirmative à cette question.

Nous construisons tout d'abord des pseudo-distances dont les rayons dans les directions complexes tangentes de la base choisie sont liées aux poids introduits dans [2] de la même manière que dans le cas de $\mathbb{C}^2$.

Ces pseudo-distances sont attachées à un paramètre m . Dans une deuxième partie nous montrons que, d'une certaine manière on peut optimiser en chaque point ce paramètre en agrandissant le rayon dans une certaine direction de la base quitte à le diminuer dans l'autre. On obtient ainsi une nouvelle pseudo-distance qui nous permet, comme première application, d'améliorer les estimations de [2].

Avant d'énoncer les principaux résultats, rappelons tout d'abord un certain nombre de définitions et notations extraites de [2].

Soit Ω un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^3$ à bord C^∞ . Soit ρ une fonction définissante de Ω (i.e. $\nabla\rho \neq 0$ au voisinage de $\partial\Omega$). Soit N le $(1, 0)$ champ normal à ρ dans un voisinage de $\partial\Omega$ défini par

$$N = \frac{4}{|\nabla\rho|^2} \sum \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial z_i},$$

c'est à dire tel que $N\rho \equiv 1$ au voisinage de $\partial\Omega$. Au bord de Ω , N est donc proportionnel au vecteur normal complexe unitaire (le facteur de proportionnalité étant $\nabla\rho$) qui est intrinsèquement défini (indépendamment du choix de la fonction définissante ρ). Nous noterons T la partie imaginaire de N qui est donc un vecteur tangent à $\partial\Omega$ qui n'est pas dans l'espace complexe tangent.

Soit z_0 un point de $\partial\Omega$ fixé une fois pour toutes. Soit $B = (L_1, L_2)$ une base C^∞ **ordonnée** de $(1, 0)$ champs tangents à ρ (i.e. $L_i\rho \equiv 0$) dans un

voisinage U de z_0 . En tout point ζ de $\partial\Omega \cap U$, les vecteurs $L_1(\zeta)$ et $L_2(\zeta)$ forment donc une base $\mathcal{C}^\infty$ de l'espace complexe tangent à $\partial\Omega$ et le système

$$(L_1(\zeta), \bar{L}_1(\zeta), L_2(\zeta), \bar{L}_2(\zeta), T(\zeta))$$

est une base de l'espace tangent à $\partial\Omega$ au point ζ .

Soient m et M deux réels tels que $2 \leq m \leq M$ (ici, contrairement à [2], on ne suppose **pas** m entier). Soit $W(\mathcal{B})$ la famille de listes suivante:

$$W(\mathcal{B}) = \{\mathcal{L}_B = \mathcal{L} = (L^1, L^2, \dots, L^k); k \geq 2, L^i \in \{L_1, \bar{L}_1, L_2, \bar{L}_2\}, \forall i\}.$$

Pour chaque $\mathcal{L} \in W(\mathcal{B})$ on pose

$$l_1(\mathcal{L}) = l_1 = \text{card}\{i \text{ tel que } L^i \in \{L_1, \bar{L}_1\}\},$$

$$l_2(\mathcal{L}) = l_2 = \text{card}\{i \text{ tel que } L^i \in \{L_2, \bar{L}_2\}\},$$

de sorte que $|\mathcal{L}| = k = l_1 + l_2$.

Pour chaque (m, M) définissons maintenant les sous-ensembles de $W(\mathcal{B})$ suivants:

$$\begin{aligned} W(\mathcal{B}, m, M) &= W = \left\{ \mathcal{L} \in W(\mathcal{B}); \frac{l_1}{m} + \frac{l_2}{M} < 1 \right\}; \\ W_0(L_1, m) &= W_0 = \{\mathcal{L} \in W; l_2 = 0\}; \\ W_1(\mathcal{B}, m) &= W_1 = \{\mathcal{L} \in W; l_1 + l_2 < m\}; \\ W_2(\mathcal{B}, m, M) &= W_2 = \{\mathcal{L} \in W; l_2 \geq 1\}; \\ W_3(\mathcal{B}, m, M) &= W_3 = \{\mathcal{L} \in W; l_1 \geq 1\}; \\ W_4(L_2, m, M) &= W_4 = \left\{ \mathcal{L} \in W; l_1 = 0, l_2 < \frac{M}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Pour toute $\mathcal{L} \in W$ nous définissons $c_{2,\mathcal{B},m}(\mathcal{L}) = c$ par $\frac{l_1}{m} + \frac{l_2}{c} = 1$.

Nous définissons maintenant deux notations que nous utiliserons dans tout l'article (pour des raisons techniques une troisième sera introduite dans deux lemmes de l'appendice).

Si $\mathcal{L} = (L^1, \dots, L^k)$, on note

$$\mathcal{L}(\partial\rho) = L^1 \dots L^{k-2}(\partial\rho([L^{k-1}, L^k]), \quad \text{si } k > 2,$$

et

$$\mathcal{L}(\partial\rho) = \partial\rho([L^1, L^2]) \quad \text{si } k = 2.$$

Par contre, pour des raisons d'harmonie dans les formules, nous convenons de la notation suivante qui ignore les deux derniers champs d'une liste $\mathcal{L}$: si

$\mathcal{L} = (L^1, \dots, L^k)$ et si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de z_0 , on note $\mathcal{L}(f) = L^1 \dots L^{k-2}(f)$ si $k > 2$, et, $\mathcal{L}(f) = f$ si $k = 2$.

On remarquera en particulier que aussi bien $\mathcal{L}(\partial\rho)$ que $\mathcal{L}(f)$ ne sont définis que pour $\mathcal{L} \in W(\mathcal{B})$ c'est-à-dire pour $|\mathcal{L}| \geq 2$.

Enfin nous notons $\gamma_{2,\mathcal{B}} = \gamma$ le coefficient de L_1 dans la décomposition du crochet $[L_2, \bar{L}_2]$ sur la base $(T, L_1, \bar{L}_1, L_2, \bar{L}_2)$ de l'espace tangent à ρ .

Pour $2 \leq m \leq M$ on définit maintenant

$$S_2(\mathcal{B}, \delta, m, M) = S^0 + S^2 + S^4 + S^{43} + \delta^{1-\frac{2}{M}},$$

où l'on a noté successivement

$$S^0 = \sum_{\mathcal{L} \in W_0} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2}{k}} \delta^{1-\frac{2}{k}+\frac{2}{m}-\frac{2}{M}},$$

$$S^2 = \sum_{\mathcal{L} \in W_2} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2}{l_2}} \delta^{1-\frac{2}{c}},$$

$$S^4 = \sum_{\tilde{\mathcal{L}} \in W_4} |\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{\frac{2}{l_2}} \delta^{1-\frac{2}{ml_2}},$$

et,

$$S^{43} = \sum_{\tilde{\mathcal{L}} \in W_4} \sum_{\mathcal{L} \in W_3} |\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{\frac{2l_1}{l_1 l_2 + l_2}} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2}{l_1 l_2 + l_2}} \delta^{1-\frac{2}{l_1 l_2 + l_2}}.$$

On définit alors la fonction $S_2(\mathcal{B}, \delta, M)$ par

$$S_2(\mathcal{B}, \delta, M)(\zeta) = \inf\{S_2(\mathcal{B}, \delta, m, M)(\zeta), 2 \leq m \leq M\}.$$

Si $\mathcal{B}_\tau = (L_2, L_1)$ est la base **ordonnée** obtenue en échangeant L_1 et L_2 , on pose enfin

$$S_1(\mathcal{B}, \delta, m, M) = S_2(\mathcal{B}_\tau, \delta, m, M), \text{ et, } S_1(\mathcal{B}, \delta, M) = S_2(\mathcal{B}_\tau, \delta, M).$$

Autrement dit, les fonctions S_1 s'obtiennent de la même manière que les fonctions S_2 , en échangeant les rôles de L_1 et L_2 .

La différence essentielle avec les poids considérés dans [2] est que dans les inf ci-dessus le paramètre m est **réel** alors que dans notre travail précédent, on ne faisait prendre à m que des valeurs **entières**.

On pose enfin

$$S_0(\mathcal{B}, \delta, m) = \sum_{\mathcal{L} \in W_1} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{2/k} \delta^{1-2/k} + \delta^{1-2/m}.$$

Ce dernier poids est la généralisation évidente du cas des domaines de $\mathbb{C}^2$ c'est à dire le poids naturel si l'on ne veut pas distinguer les différentes directions complexes tangentes.

Comme dans [5] la définition des pseudo-boules que nous allons prendre utilise l'application exponentielle. Les propriétés de celle-ci dont nous aurons besoin sont rappelées ou démontrées dans [5] et nous y ferons référence quand cela sera nécessaire. Pour fixer les notations, rappelons simplement que si Y est un champ défini dans un ouvert O de $\mathbb{R}^n$, si $\epsilon > 0$ et $x_0 \in O$, on note $\exp_{x_0}(\epsilon Y)$ la valeur $\varphi(1)$ de la fonction φ solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = \epsilon Y(\varphi(t)), \quad \varphi(0) = x_0.$$

Cette équation a toujours une solution définie sur $[0, 1]$ pourvu que ϵ soit assez petit et que x_0 soit dans un compact assez petit de O .

Dans le cadre où nous sommes, posons $\mathcal{W}_1 = L_1$, $\mathcal{W}_2 = \bar{L}_1$, $\mathcal{W}_3 = L_2$, $\mathcal{W}_4 = \bar{L}_2$ et $\mathcal{W}_5 = T$. Il existe donc un voisinage U_0 de z_0 , relativement compact dans U et un $\epsilon_0 > 0$ tels que, pour $|\alpha_i| \leq \epsilon_0$, $1 \leq i \leq 5$, $\zeta \in U_0 \cap \partial\Omega$, $\exp_\zeta(\sum_{i=1}^5 \alpha_i \mathcal{W}_i)$ est bien défini et l'application

$$(1.3) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \zeta) \longmapsto \exp_\zeta \left(\sum_{i=1}^5 \alpha_i \mathcal{W}_i \right)$$

est C^∞ de $[-\epsilon_0, \epsilon_0]^5 \times (U_0 \cap \partial\Omega)$ dans $U \cap \partial\Omega$, et un difféomorphisme de $[-\epsilon_0, \epsilon_0]^5$ dans $U \cap \partial\Omega$, son Jacobien étant majoré et minoré uniformément par rapport à ζ .

Nous allons définir les boules centrées en un point ζ de $\partial\Omega$ comme l'image d'un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^5$ par l'application $\exp_\zeta$. Ce voisinage est un cube dont les côtés sont déterminés à l'aide des fonctions S_i définies précédemment.

1.2. – Les pseudo-boules $B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta)$ associées à $\mathcal{B}$ et m

La base ordonnée $\mathcal{B} = (L_1, L_2)$ étant fixée comme précédemment, soit $\delta > 0$ assez petit. Posons

$$R_1^{\mathcal{B},m}(z, \delta) = \left(\frac{\delta}{S_0(\mathcal{B}, \delta, m) + S_2(\mathcal{B}, \delta, m, M)} \right)^{1/2},$$

$$R_2^{\mathcal{B},m}(z, \delta) = \left(\frac{\delta}{S_2(\mathcal{B}, \delta, m, M)} \right)^{1/2}.$$

Il est clair que, pour $\delta \leq \delta_0$, δ_0 assez petit ne dépendant que de Ω , $\mathcal{B}$ et M on a $R_i^{\mathcal{B},m} \leq \epsilon_0$, $i = 1, 2$.

La pseudo-boule $B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(\zeta, \delta)$ est, par définition, l'image par l'application $\exp_\zeta$ définie en (1.3) du cube de $\mathbb{R}^5$ formé de tous les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 5}$ tels que

$$\begin{cases} |\alpha_i| < \frac{1}{K_0} R_1^{\mathcal{B},m}(\zeta, \delta), & i = 1, 2, \\ |\alpha_i| < \frac{1}{K_0} R_2^{\mathcal{B},m}(\zeta, \delta), & i = 3, 4, \\ |\alpha_5| < \delta. \end{cases}$$

THÉORÈME 1.1. Soient Ω , ρ , U et $\mathcal{B}$ comme ci-dessus. Il existe un voisinage $U_1 \subset U$ de z_0 et des constantes $K_0 \geq 1$, K et δ_0 ne dépendant que des données ρ , $\mathcal{B}$ et M telles que, pour $K_0 \geq K_0$, $z \in U_1 \cap \partial\Omega$ et $\delta \leq \delta_0/K$,

$$\forall \zeta \in B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta), \text{ on a } B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta) \subset B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(\zeta, K\delta).$$

Clairement ce théorème signifie que, pour δ assez petit, les $B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta)$ sont les pseudo-boules d'une pseudo-distance sur $\partial\Omega$.

Du fait que l'application $\exp_z$ est un difféomorphisme, on a immédiatement une estimation du volume des pseudo-boules. Posons tout d'abord

$$\begin{aligned} S_{2,M}^{\mathcal{B},m}(z, \delta) &= \min\{S_0(\mathcal{B}, \delta, m)(z), S_2(\mathcal{B}, \delta, m, M)(z)\} \\ S_0^{\mathcal{B},m}(z, \delta) &= S_0(\mathcal{B}, \delta, m)(z). \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.2. Avec les notations du Théorème 1.1, il existe une constante K_2 ne dépendant que de ρ , U_0 et $\mathcal{B}$ telle que, pour $z \in U_0$ et $\delta \leq \delta_0$, on a

$$\frac{1}{K_2 K_0^2} \frac{\delta^3}{S_{2,M}^{\mathcal{B},m}(z, \delta) S_0^{\mathcal{B},m}(z, \delta)} \leq \text{Vol}(B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta)) \leq \frac{K_2}{K_0^2} \frac{\delta^3}{S_{2,M}^{\mathcal{B},m}(z, \delta) S_0^{\mathcal{B},m}(z, \delta)}.$$

1.3. – Les pseudo-boules $B_{\mathcal{B}}^{K_0}(z, \delta)$ associées à $\mathcal{B}$

La base ordonnée $\mathcal{B}$ étant toujours fixée, soit $\delta > 0$ assez petit. Posons

$$R_2^{\mathcal{B}}(\zeta, \delta) = \left(\frac{\delta}{S_2(\mathcal{B}, \delta, M)(\zeta)} \right)^{1/2},$$

et,

$$R_1^{\mathcal{B}}(\zeta, \delta) = \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k=2 \\ l_1=0}}^{M-1} (R_2^{\mathcal{B}}(\zeta, \delta))^k |\mathcal{L}(\gamma)(\zeta)| + \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k=2 \\ l_1=0}}^{M-2} (R_2^{\mathcal{B}}(\zeta, \delta))^{k+1} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)| + \delta^{1-\frac{1}{M}}.$$

Il est clair que pour $\delta \leq \delta_0$, δ_0 assez petit ne dépendant que Ω , $\mathcal{B}$ et M on a $|R_i^{\mathcal{B}}| \leq \epsilon_0$, $i = 1, 2$.

Par définition, la pseudo-boule $B_{\mathcal{B}}^{K_0}(z, \delta)$ centrée en z est alors l'image par l'application $\exp_z$ définie en (1.3) du cube de $\mathbb{R}^5$ formé de tous les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 5}$ tels que

$$\begin{cases} |\alpha_i| < \frac{1}{K_0} R_1^{\mathcal{B}}(z, \delta), & i = 1, 2, \\ |\alpha_i| < \frac{1}{K_0} R_2^{\mathcal{B}}(z, \delta), & i = 3, 4, \\ |\alpha_5| < \delta. \end{cases}$$

Comme précédemment, le principal résultat signifie que ces boules sont les (petites) pseudo-boules d'une pseudo-distance sur $\partial\Omega$:

THÉORÈME 1.3. *Soient Ω , ρ , U et $\mathcal{B}$ comme ci-dessus. Alors il existe un voisinage $U_1 \subset U$ de z_0 et des constantes $K_0 \geq 1$, K , et δ_0 ne dépendant que des données ρ et $\mathcal{B}$ telles que, pour $K_0 \geq K_0$, $z \in U_1 \cap \partial\Omega$ et $\delta \leq \delta_0/K$,*

$$\forall \zeta \in B_{\mathcal{B}}^{K_0}(z, \delta), \text{ on a } B_{\mathcal{B}}^{K_0}(z, \delta) \subset B_{\mathcal{B}}^{K_0}(\zeta, K\delta).$$

Comme pour les pseudo-boules précédentes on a une estimation immédiate du volume de ces boules:

Posons

$$S_{2,M}^{\mathcal{B}}(z, \delta) = S_2(\mathcal{B}, \delta, M)(z).$$

Alors:

PROPOSITION 1.4. *Avec les notations du Théorème 1.3, il existe une constante K_2 , ne dépendant que de ρ , U_0 et $\mathcal{B}$ telle que, pour $z \in U_0$ et $\delta \leq \delta_0$ on a*

$$\frac{1}{K_2 K_0^2} \frac{\delta^2}{S_{2,M}^{\mathcal{B}}(z, \delta)} (R_1^{\mathcal{B}}(z, \delta))^2 \leq \text{Vol}(B_{\mathcal{B}}^{K_0}(z, \delta)) \leq \frac{K_2}{K_0^2} \frac{\delta^2}{S_{2,M}^{\mathcal{B}}(z, \delta)} (R_1^{\mathcal{B}}(z, \delta))^2.$$

1.4. – Application aux courants positifs fermés

Soit $\Omega = \{\rho < 0\}$ comme précédemment. Soit θ un courant positif fermé (i.e. $d\theta = 0$) dans Ω satisfaisant à la condition de Blaschke c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} (-\rho)|\theta| < +\infty.$$

Soit, comme précédemment, $\mathcal{B} = (L_1, L_2)$ une base ordonnée de l'espace tangent complexe à ρ dans un voisinage U d'un point z_0 de $\partial\Omega$ (i.e. $L_i(\rho) \equiv 0$ dans U). N étant le champ normal à ρ , soit $(\partial\rho, \omega_1, \omega_2)$ la base de $(1, 0)$ formes duale de la base de $(1, 0)$ champs (N, L_1, L_2) dans U .

Le théorème que nous allons démontrer donne une estimation des coefficients tangents de θ dans la base $(\partial\rho, \omega_1, \omega_2)$ qui améliore celle de [2].

Avec les notations de l'introduction posons, pour $i = 1, 2$,

$$S_i^M(z) = \min\{S_0(\mathcal{B}, -\rho(z), M), S_i(\mathcal{B}, -\rho(z), M)\}, \quad z \in U.$$

Alors:

THÉORÈME 1.5. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^3$ à bord C^∞ , et soit ρ une fonction définissante de Ω (i.e. $\nabla\rho \neq 0$ au voisinage de $\partial\Omega$). Soient z_0 un point de $\partial\Omega$, et $\mathcal{B} = (L_1, L_2)$ une base ordonnée de $(1, 0)$ champs complexes tangents à ρ au voisinage de z_0 (i.e. $L_i(\rho) \equiv 0$). Pour tout réel $M \geq 2$ il existe un réel $r > 0$ et une constante $C > 0$ dépendant de ρ , de la base $\mathcal{B}$ de M et de r tels que:*

Pour tout courant positif fermé θ dans Ω de bidegré $(1, 1)$, l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\int_{\Omega \cap B(z_0, r)} \frac{|\theta \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2|}{S_1^M} + \frac{|\theta \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{S_2^M} \leq C \int_{\Omega} (-\rho)|\theta|,$$

où, $(\partial\rho, \omega_1, \omega_2)$ est la base de $(1, 0)$ formes duale de la base (N, L_1, L_2) , N étant le champ normal à ρ (i.e. $N\rho \equiv 1$ au voisinage de $\partial\Omega$).

L'amélioration par rapport au résultat que nous avons montré dans [2] est précisément la suivante: dans [2] on montrait l'inégalité du Théorème 1.5 avec, à la place des poids S_i^M , les poids

$$\min\{S_0(\mathcal{B}, -\rho(z), M)(z), S_i(\mathcal{B}, -\rho(z), m, M)(z)\}, \quad m \in [2, M],$$

la constante C étant indépendante de m (en fait, dans [2], on énonçait seulement le résultat pour m entier, mais il est facile de se convaincre que la preuve que l'on donnait marche sans changement pour m réel).

La difficulté pour passer au Théorème 1.5 est que les réels m tels que

$$S_i(\mathcal{B}, -\rho(z), m, M)(z) \simeq S_i(\mathcal{B}, -\rho(z), M)(z)$$

dépendent fortement du point z (d'autant plus que l'on s'approche du bord du domaine). Par suite il faut pouvoir localiser la preuve de [2]. L'existence d'une pseudo-distance convenablement associée aux poids $S_i(\mathcal{B}, -\rho(z), M)(z)$ permettra de construire une localisation convenable.

2. – Construction et propriétés des pseudo-boules $B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta)$

La base ordonnée $\mathcal{B}$ étant fixée une fois pour toutes ainsi que M , nous simplifions maintenant les notations introduites au paragraphe précédent en posant:

$$S_2^m(z, \delta) = S_2(\mathcal{B}, \delta, m, M)(z),$$

$$S_0^m(z, \delta) = S_0^{\mathcal{B},m}(z, \delta) = S_0(\mathcal{B}, \delta, m)(z),$$

$$R_i^m(z, \delta) = R_i^{\mathcal{B},m}(z, \delta), \quad i = 1, 2$$

et

$$B_m^{K_0}(z, \delta) = B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta).$$

Pour $K_0 \geq 1$, les boules $B_m^{K_0}(z, \delta)$ sont donc les images, par l'application exponentielle ($\exp_z$) d'un cube de $\mathbb{R}^5$ dont les rayons sont $\frac{1}{K_0} R_1^m(z, \delta)$ dans les deux premières coordonnées, $\frac{1}{K_0} R_2^m(z, \delta)$ dans les deux suivantes et δ dans la dernière.

De manière à obtenir des notations plus concises, nous posons de plus

$$\mathcal{R}_i^m(z, \delta) = R_i^m(z, \delta), \quad i = 1, 2,$$

$$\mathcal{R}_i^m(z, \delta) = R_2^m(z, \delta), \quad i = 3, 4, \text{ et } \mathcal{R}_5^m(z, \delta) = \delta.$$

La méthode générale de la démonstration du Théorème 1.1 est fortement inspirée du travail [5] de A. Nagel, E. Stein et S. Wainger.

On commence par construire des “boules” formées par les extrémités des courbes dont les tangentes sont des combinaisons linéaires à coefficients a_i variables des champs de la base $\mathcal{B}$, de leurs conjugués et de $T = \mathcal{I}mN$, les a_i étant majorés en module par les rayons des pseudo-boules $B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta)$. Ensuite, on montre que sur ces “boules” les fonctions S_i^m sont essentiellement constantes de quoi on déduit que ces “boules” sont attachées à une pseudo-distance. Enfin, une bonne comparaison de ces “boules” avec les $B_{\mathcal{B},m}^{K_0}(z, \delta)$, basée, comme dans [5], sur une étude précise des dérivées de l’application exponentielle inverse en fonction des rayons des boules, permet de conclure.

Le paragraphe est donc divisé en deux sous-paragraphe. Dans le premier on étudie les “boules” définies par les courbes, et, dans le second, on compare ces dernières aux pseudo-boules qui nous intéressent.

2.1. – Les pseudo-boules $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$

Rappelons tout d’abord que nous avons posé dans l’introduction $\mathcal{W}_1 = L_1$, $\mathcal{W}_2 = \overline{L}_1$, $\mathcal{W}_3 = L_2$, $\mathcal{W}_4 = \overline{L}_2$ et $\mathcal{W}_5 = T$.

Avec ces notations, nous définissons les boules $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$, $z \in U_0$, comme étant l’ensemble des points $\zeta = \varphi(1)$ où $\varphi : [0, 1] \rightarrow U$ est une courbe continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que

$$(2.4) \quad \begin{cases} \varphi'(t) = \sum_{i=1}^5 a_i(t) \mathcal{W}_i(\varphi(t)), \\ \varphi(0) = z, \end{cases}$$

les fonctions a_i , $1 \leq i \leq 5$ étant continues par morceaux, et telles que, $|a_i| < \frac{1}{K_0} \mathcal{R}_i^m(z, \delta)$, $i = 1, \dots, 4$ et $|a_5| < \mathcal{R}_5^m(z, \delta) = \delta$.

Le but de ce sous-paragraphe est de montrer que les fonctions S_0^m et S_2^m sont constantes sur les “boules” $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$ et d’en déduire que celles-ci sont attachées à une pseudo-distance.

Pour des raisons techniques qui apparaîtront clairement par la suite nous introduisons maintenant une autre famille de “boules” en changeant les rayons des pseudo-boules $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$: nous noterons $B_{m,1}^{K_0}(z, \delta)$ l’ensemble des points $\zeta = \varphi(1)$ où $\varphi : [0, 1] \rightarrow U$ est une courbe continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, vérifiant (2.4), les fonctions a_i étant continues par morceaux, et telles que, $\max\{|a_1|, |a_2|\} < \frac{1}{K_0} \frac{\delta^{1/2}}{(S_0^m(z, \delta))^{1/2}}$, $\max\{|a_3|, |a_4|\} < \frac{1}{K_0} R_2^m(z, \delta)$ et $|a_5| < \delta$. Il est clair que $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta) \subset B_{m,1}^{K_0}(z, \delta)$.

D’autre part, afin de pouvoir mener certains calculs de dérivations, comme dans [2], nous allons travailler sur des fonctions $\mathfrak{S}_i^m(z, \delta)$, $i = 0, 2$, obtenues à partir des fonctions $S_i^m(z, \delta)$ en remplaçant dans ces dernières tous les termes qui les composent par une puissance n -ième.

Posons $n = 2M$. Alors, par exemple, $\mathfrak{S}_0^m(z, \delta)$ est donnée par

$$\mathfrak{S}_0^m(z, \delta) = \sum_{|\mathcal{L}|=2}^m |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{|\mathcal{L}|}} \delta^{n-\frac{2n}{|\mathcal{L}|}} + \delta^{n-\frac{2n}{m}},$$

et $\mathfrak{S}_2^m(z, \delta)$ s'obtient, à partir de la définition de $S_2^m(z, \delta)$, de la même manière.

Remarquons que, naturellement il existe une constante K ne dépendant que de M telle que

$$\frac{1}{K} (\mathfrak{S}_i^m)^{1/n} \leq S_i^m \leq K (\mathfrak{S}_i^m)^{1/n}, \quad i = 0, 2,$$

et les propriétés que nous montreront pour les fonctions $\mathfrak{S}_i^m$ s'appliqueront immédiatement aux S_i^m .

La proposition qui suit dit que les fonctions $\mathfrak{S}_0^m$ et $\mathfrak{S}_2^m$ sont “constantes” sur les boules $B_{m,1}^{K_0}(z, \delta)$:

PROPOSITION 2.1. *Pour tout $C \geq 1$, il existe des constantes $K_0 \geq 1$, et δ_0 ne dépendant que de C et des données $\rho, \mathcal{B}, M$ et U_0 telles que, pour $K_0 \geq K_0$ et tout point $z \in U_0$, on a:*

Pour $\zeta \in B_{m,1}^{K_0}(z, C\delta)$, $\delta \leq \delta_0$, on a:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{S}_i^m(z, \delta) \leq \mathfrak{S}_i^m(\zeta, \delta) \leq 2 \mathfrak{S}_i^m(z, \delta), \quad i = 0, 2,$$

Nous aurons à utiliser le lemme trivial suivant:

LEMME 2.2. *Pour toute constante $C \geq 1$ on a, pour $z \in U$:*

- 1) $C^{2/M-1} S_i^m(z, \delta) \leq S_i^m(z, C\delta) \leq C^{1-2/M} S_i^m(z, \delta)$, $i = 0, 2$;
- 2) $C^{n(2/M-1)} \mathfrak{S}_i^m(z, \delta) \leq \mathfrak{S}_i^m(z, C\delta) \leq C^{n(1-2/M)} \mathfrak{S}_i^m(z, \delta)$, $i = 0, 2$;
- 3) pour $i = 1, 2$, $C^{1/M} R_i^m(z, \delta) \leq R_i^m(z, C\delta) \leq C^{1-1/M} R_i^m(z, \delta)$.

La démonstration de la Proposition 2.1 utilise des estimations des dérivées des fonctions $\mathfrak{S}_i^m$:

LEMME 2.3. *Il existe une constante K ne dépendant que de $\rho, \mathcal{B}$ et M telle que, pour $\xi \in U$ on a:*

- (i) $|L_1 \mathfrak{S}_0^m(\xi, \delta)| \leq K \frac{(\mathfrak{S}_0^m(\xi, \delta))^{1+1/2n}}{\delta^{1/2}}$, $|L_2 \mathfrak{S}_2^m(\xi, \delta)| \leq K \frac{(\mathfrak{S}_2^m(\xi, \delta))^{1+1/2n}}{\delta^{1/2}}$;
- (ii) $|L_2 \mathfrak{S}_0^m(\xi, \delta)| \leq K \frac{(\mathfrak{S}_0^m(\xi, \delta))^{1+1/2n}}{\delta^{1/2}}$;
- (iii) $|L_2 \mathfrak{S}_0^m(\xi, \delta)| \leq K \left(\frac{(\mathfrak{S}_0^m(\xi, \delta))^{1/2n}}{\delta^{1/2}} \right) \mathfrak{S}_0^m(\xi, \delta)$;
- (iv) $|L_1 \mathfrak{S}_2^m(\xi, \delta)| \leq K \left(\frac{(\mathfrak{S}_2^m(\xi, \delta))^{1/2n}}{\delta^{1/2}} \right) \mathfrak{S}_2^m(\xi, \delta)$;
- (v) $|T \mathfrak{S}_i^m(\xi, \delta)| \leq K \frac{\mathfrak{S}_i^m(\xi, \delta)}{\delta^{1-2/M}}$, $i = 0, 2$;

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.3. Le (i) le (ii) et le (v) sont démontrés dans la Proposition 4 de [2] (p. 332) (en remplaçant δ par $-\rho$). Nous avons donc seulement à démontrer le (iii) et le (iv).

Pour simplifier les notations, pour $i = 1, 2$, on écrira, d'une part, $\overset{(-)}{L}_i = L_i$ ou $\bar{L}_i$, et, d'autre part,

$$F(\overset{(-)}{L}_i, \rho, \gamma, \delta) = F(L_i, \rho, \gamma, \delta) + F(\bar{L}_i, \rho, \gamma, \delta)$$

où F est une fonction positive.

Commençons par le (iii).

Soit $X = |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{2n/k} \delta^{n-2n/k}$ un terme non constant de $\mathfrak{S}_0^m$ et majorons $\delta^{1/2}|L_2 X|$:

$$\delta^{1/2}|L_2 X| \leq \left(|\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{k}} \delta^{n-\frac{2n}{k}} \right)^{1-\frac{k}{2n}} \left| \overset{(-)}{L}_2 \mathcal{L}(\partial\rho) \right| \delta^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Séparons deux cas:

Si $\frac{k}{m} + \frac{1}{M} \geq 1$, on majore $\left| \overset{(-)}{L}_2 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|$ par une constante et il vient

$$\delta^{1/2}|L_2 X| \leq (\mathfrak{S}_0^m)^{1-\frac{k}{2n}} \delta^{\frac{k}{2n}(n-\frac{2n}{m})+\frac{k}{m}-\frac{1}{2}} \leq \mathfrak{S}_0^m \delta^{\frac{1}{2}-\frac{1}{M}} \leq \mathfrak{S}_0^m (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{1}{2n}}.$$

Si inversement $\frac{k}{m} + \frac{1}{M} < 1$ alors $\overset{(-)}{L}_2 \mathcal{L}(\partial\rho)$ apparaît dans la définition de $\mathfrak{S}_2^m$ sous la forme $\left| \overset{(-)}{L}_2 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{2n} \delta^{n-\frac{2n}{c}}$ avec $\frac{k}{m} + \frac{1}{c} = 1$, et il vient

$$\delta^{1/2}|L_2 X| \leq (\mathfrak{S}_0^m)^{1-\frac{k}{2n}} (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{1}{2n}} \delta^{\frac{k}{2n}-\frac{k}{m}} \leq \mathfrak{S}_0^m (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{1}{2n}}.$$

Démontrons maintenant le (iv). Comme précédemment, nous allons majorer $\delta^{1/2}|L_1 X|$ pour chaque X apparaissant dans la composition de $\mathfrak{S}_2^m$.

Premier cas: $X = |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{k}} \delta^{n(1-\frac{2}{k}+\frac{2}{m}-\frac{2}{M})} = \delta^{n(\frac{2}{m}-\frac{2}{M})} Y$, où Y est un terme composant $\mathfrak{S}_0^m$.

D'après (i), on a $\delta^{1/2}|L_1 Y| \leq K(\mathfrak{S}_0^m)^{1+\frac{1}{2n}}$, ce qui donne

$$\delta^{1/2}|L_1 X| \leq K(\mathfrak{S}_0^m)^{1+\frac{1}{2n}} \delta^{\frac{2n}{m}-\frac{2n}{M}}.$$

En utilisant alors le Lemme 1 de [2] (p. 329) avec $\chi_2 = 0$ et en conservant la même notation, on a $\mathfrak{S}_0^m \delta^{(\frac{2}{m}-\frac{2}{M})n} \leq T_1 \delta^{(\frac{2}{m}-\frac{2}{M})n} \leq \mathfrak{S}_2^m$ et il vient

$$\delta^{1/2}|L_1 X| \leq K(\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}} \mathfrak{S}_2^m,$$

ce qui est le résultat cherché.

Deuxieme cas: $X = |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{2}} \delta^{n(1-\frac{2}{c})}$, $\mathcal{L} \in W_2$.

On a

$$\delta^{1/2}|L_1 X| \leq K |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_2}-1} \left| L_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right| \delta^{\frac{1}{2}+n(1-\frac{2}{c})}.$$

Si $\frac{l_1+1}{m} + \frac{l_2}{M} < 1$ alors $(\overset{(-)}{L}_1, \mathcal{L}) \in W_2$ et, en prenant c' défini par $\frac{l_1+1}{m} + \frac{l_2}{c'} = 1$, on a:

$$\begin{aligned} \delta^{1/2}|L_1 X| &\leq K \left(|\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n(1-\frac{2}{c})} \right)^{1-\frac{l_2}{2n}} \\ &\quad \cdot \left(\left| \overset{(-)}{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n(1-\frac{2}{c'})} \right)^{\frac{l_2}{2n}} \delta^{\frac{l_2}{2}(1-\frac{2}{c}) - \frac{l_2}{2}(1-\frac{2}{c'}) + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\delta^{1/2}|L_1 X| \leq K \mathfrak{S}_2^m \delta^{\frac{1}{2}+l_2(\frac{1}{c'}-\frac{1}{c})} = K \mathfrak{S}_2^m \delta^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{m})} \leq K \mathfrak{S}_2^m (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}},$$

car $\mathfrak{S}_0^m \geq \delta^{n(1-2/m)}$.

Maintenant, si $\frac{l_1+1}{m} + \frac{l_2}{M} \geq 1$, on a, en majorant $|\overset{(-)}{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho)|$ par une constante ne dépendant que du domaine,

$$\delta^{1/2}|L_1 X| \leq \left(|\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n(1-\frac{2}{c})} \right)^{1-\frac{l_2}{2n}} \delta^{\frac{l_2}{2}(1-\frac{2}{c}) + \frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\delta^{1/2}|L_1 X| \leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{l_2}{2n}} \delta^{\frac{l_2}{2}(1-\frac{2}{M})} \delta^{\frac{1}{2}+\frac{l_2}{M}-\frac{l_2}{c}} \leq K \mathfrak{S}_2^m \delta^{\frac{1}{2}+\frac{l_2}{M}-(1-\frac{l_1}{m})},$$

car $\mathfrak{S}_2^m \geq \delta^{n(1-\frac{2}{M})}$.

Comme $\frac{1}{2} + \frac{l_2}{M} - 1 + \frac{l_1}{m} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$, on a $\delta^{\frac{1}{2}+\frac{l_2}{M}-(1-\frac{l_1}{m})} \leq (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}}$, et finalement

$$\delta^{1/2}|L_1 X| \leq K \mathfrak{S}_2^m (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}},$$

ce qui achève ce cas.

Troisième cas: $X = |\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n(1-\frac{2}{ml_2})}$, $\tilde{\mathcal{L}} \in W_4$.

On a $|L_1 X| \leq K |\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{\frac{2n}{l_2}-1} |\overset{(-)}{L}_1 \tilde{\mathcal{L}}(\gamma)| \delta^{n(1-\frac{2}{ml_2})}$, et en majorant $|\overset{(-)}{L}_1 \tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|$ par une constante ne dépendant que du domaine, il vient

$$\begin{aligned} \delta^{1/2}|L_1 X| &\leq K \left(|\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n(1-\frac{2}{ml_2})} \right)^{1-\frac{\tilde{l}_2}{2n}} \delta^{\frac{1}{2}+\frac{\tilde{l}_2}{2}(1-\frac{2}{ml_2})} \\ &\leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{\tilde{l}_2}{2n}} \delta^{\frac{\tilde{l}_2}{2}(1-\frac{2}{M})} \delta^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{m})} \delta^{\frac{\tilde{l}_2}{M}} \\ &\leq K \mathfrak{S}_2^m (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}}. \end{aligned}$$

Dernier cas: $X = |\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{\frac{2nl_1}{D}} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{D}} \delta^{n(1-\frac{2}{D})}$, $D = l_1 \tilde{l}_2 + l_2$, avec $\tilde{\mathcal{L}} \in W_4$ et $\mathcal{L} \in W_3$.

On obtient $|L_1 X| \leq K(Y + Z)$ où

$$Y = \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^{\frac{2nl_1}{D}-1} \left| L_1 \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right| |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{D}} \delta^{n(1-\frac{2}{D})},$$

et

$$Z = \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^{\frac{2nl_1}{D}} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{D}-1} \left| L_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right| \delta^{n(1-\frac{2}{D})}.$$

Examinons tout d'abord $\delta^{1/2}Y$:

Il vient successivement, en majorant $\left| L_1 \mathcal{L}(\gamma) \right|^{(-)}$ par une constante,

$$\delta^{1/2}Y \leq K X^{1-\frac{D}{2nl_1}} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{1}{l_1}} \delta^{(1-\frac{2}{D})\frac{D}{2l_1} + \frac{1}{2}}.$$

Si $l_2 = 0$, alors $\mathcal{L} \in W_1$ et on a

$$\begin{aligned} \delta^{1/2}Y &\leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{D}{2nl_1}} \delta^{\frac{D}{2l_1}} \left(|\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_1}} \delta^{n(1-\frac{2}{l_1})} \right)^{\frac{1}{2n}} \\ &\leq K \mathfrak{S}_2^m (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}}. \end{aligned}$$

Car le terme entre parenthèses dans le second membre de la première inégalité apparaît dans la définition de $\mathfrak{S}_0^m$.

Si par contre $l_2 \geq 1$, alors $\mathcal{L} \in W_2$, en prenant $|\mathcal{L}(\partial\rho)|$ comme facteur d'un des termes de $\mathfrak{S}_2^m$ et en remarquant que $\frac{D}{2l_1} - \frac{1}{l_1} - \frac{l_2}{2l_1} \left(1 - \frac{2}{c}\right) = \frac{\tilde{l}_2}{2} - \frac{1}{m}$, il vient

$$\begin{aligned} \delta^{1/2}Y &\leq K X^{1-\frac{D}{2nl_1}} \left(|\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n(1-\frac{2}{c})} \right)^{\frac{l_2}{2nl_1}} \delta^{\frac{1}{2} + \frac{\tilde{l}_2}{2} - \frac{1}{m}} \\ &\leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{\tilde{l}_2}{2n}} \delta^{\frac{\tilde{l}_2}{2}} \delta^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{m})} \\ &\leq K \mathfrak{S}_2^m (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}}, \end{aligned}$$

en utilisant la minoration de $\mathfrak{S}_0^m$ par $(\delta^{1-\frac{2}{m}})^n$ et celle de $\mathfrak{S}_2^m$ par δ^n .

Examinons maintenant $\delta^{1/2}Z$.

Si on remarque que $Z = X^{1-\frac{D}{2n}} |\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{l_1} \delta^{(1-\frac{2}{D})\frac{D}{2}} \left| L_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{(-)}$, on obtient

$$\delta^{1/2}Z \leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{D}{2n}} \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^{l_1} \left| L_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{(-)} \delta^{\frac{D}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Tout d'abord, supposons $\frac{l_1+1}{m} + \frac{l_2}{M} < 1$. Alors $(\overset{(-)}{L}_1, \mathcal{L}) \in W$, et en posant $D_1 = (l_1 + 1)\tilde{l}_2 + l_2$, il vient

$$\delta^{1/2} Z \leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{D}{2n}} \left(\left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^{\frac{2n(l_1+1)}{D_1}} \left| \overset{(-)}{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{\frac{2n}{D_1}} \delta^{n\left(1-\frac{2}{D_1}\right)} \right)^{\frac{l_1}{l_1+1} \frac{D_1}{2n}} \\ \cdot \left| \overset{(-)}{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{\frac{1}{l_1+1} \frac{1}{2} - \frac{1}{l_1+1} + \frac{D}{2} - \frac{D_1}{2} \frac{l_1}{l_1+1}}.$$

Supposons en premier lieu $l_2 = 0$. Alors $(\overset{(-)}{L}_1, \mathcal{L}) \in W_1$ et, en utilisant que

$$\left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^{\frac{2n(l_1+1)}{D_1}} \left| \overset{(-)}{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{\frac{2n}{D_1}} \delta^{n\left(1-\frac{2}{D_1}\right)} \leq \mathfrak{S}_2^m$$

et

$$\left| \overset{(-)}{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{\frac{2n}{l_1+1}} \delta^{n\left(1-\frac{2}{l_1+1}\right)} \leq \mathfrak{S}_0^m,$$

il vient

$$\delta^{1/2} Z \leq K (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}} (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{D}{2n} + \frac{l_1}{l_1+1} \frac{D_1}{2n}} \delta^{\frac{D}{2} - \frac{l_1}{l_1+1} \frac{D_1}{2}} \\ \leq K \mathfrak{S}_2^m (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}},$$

car $\frac{D}{2} - \frac{l_1}{l_1+1} \frac{D_1}{2} > 0$.

Supposons maintenant $l_2 \geq 1$ de sorte que $(\overset{(-)}{L}_1, \mathcal{L}) \in W_2$. En définissant c' par $\frac{l_1+1}{m} + \frac{l_2}{c'} = 1$, on a :

$$\delta^{1/2} Z \leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{D}{2n} + \frac{l_1}{l_1+1} \frac{D_1}{2n}} \left(\left| \overset{(-)}{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n\left(1-\frac{2}{c'}\right)} \right)^{\frac{l_2}{2n(l_1+1)}} \\ \delta^{\frac{1}{2} - \frac{1}{l_1+1} + \frac{D}{2} - \frac{l_1}{l_1+1} \frac{D_1}{2} - \frac{l_2}{2(l_1+1)} + \frac{l_2}{c'(l_1+1)}}.$$

En remarquant que $\frac{D}{2} + \frac{l_1}{l_1+1} \frac{D_1}{2} + \frac{l_2}{l_1+1} = 1$ et que

$$\left| \overset{(-)}{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho) \right|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n\left(1-\frac{2}{c'}\right)} \leq \mathfrak{S}_2^m,$$

on obtient $\delta^{1/2} Z \leq \mathfrak{S}_2^m \delta^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)} \leq K \mathfrak{S}_2^m (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}}$.

Pour terminer, examinons le cas $\frac{l_1+1}{m} + \frac{l_2}{M} \geq 1$. En majorant $|\tilde{L}_1 \mathcal{L}(\partial\rho)|^{(-)}$ par une constante il vient:

$$\begin{aligned} \delta^{1/2} Z &\leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{D}{2n}} \left(|\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n \left(1-\frac{2}{ml_2}\right)} \right)^{\frac{l_1 l_2}{2n}} \delta^{-\frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_1}{m} + \frac{D}{2} - \frac{1}{2}} \\ &\leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{1-\frac{l_2}{2n}} \delta^{\frac{1}{2} - \frac{l_2}{M} - \frac{1}{m} + \frac{l_2}{2}} \\ &\leq K \mathfrak{S}_2^m (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}}, \end{aligned}$$

car d'une part

$$|\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n \left(1-\frac{2}{ml_2}\right)} \leq \mathfrak{S}_2^m,$$

et d'autre part $\delta^{n(1-\frac{2}{M})} \leq \mathfrak{S}_2^m$ et $\delta^{n(1-\frac{2}{m})} \leq \mathfrak{S}_0^m$.

Ceci achève la preuve du Lemme 2.3. $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1. Comme $\zeta \in B_{m,1}^{K_0}(z, C\delta)$, on a $\zeta = \varphi(1)$ où φ est une courbe vérifiant les propriétés décrites en (2.4). Posons $s_i(t) = \mathfrak{S}_i^m(\varphi(t), \delta)$, $i = 0, 2$. On a donc

$$s'_j(t) = \sum_{i=1}^5 a_i(t) \mathcal{W}_i \mathfrak{S}_j^m(\varphi(t), \delta),$$

pour $t \in [0, 1]$ sauf sur un ensemble fini de points, avec

$$\max\{|a_1|, |a_2|\} < \frac{1}{K_0} \frac{C^{1/2} \delta^{1/2}}{S_0^m(z, C\delta)^{1/2}}, \quad \max\{|a_3|, |a_4|\} < \frac{1}{K_0} \frac{C^{1/2} \delta^{1/2}}{S_2^m(z, C\delta)^{1/2}}$$

et $|a_5| < C\delta$.

Le lemme 2.3 donne alors, pour $j = 0, 2$

$$\begin{aligned} \left| \frac{s'_j(t)}{s_j(t)} \right| &\leq K \\ &\left\{ \frac{1}{K_0} \left[\left(\frac{s_0(t)}{s_0(0)} \right)^{\frac{1}{2n}} \frac{C^{\frac{1}{2}} s_0(0)^{\frac{1}{2n}}}{S_0^m(z, C\delta)^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{s_2(t)}{s_2(0)} \right)^{\frac{1}{2n}} \frac{C^{\frac{1}{2}} s_2(0)^{\frac{1}{2n}}}{S_2^m(z, C\delta)^{\frac{1}{2}}} \right] + (C\delta)^{2/M} \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la remarque suivant la définition des fonctions $\mathfrak{S}_j^m$ et le Lemme 2.2 on obtient

$$\left| \frac{s'_j(t)}{s_j(t)} \right| \leq \frac{K C^{3/2}}{K_0} \left[\left(\frac{s_0(t)}{s_0(0)} \right)^{1/2n} + \left(\frac{s_2(t)}{s_2(0)} \right)^{1/2n} \right] + K (C\delta)^{2/M}.$$

Si on pose $u_j(t) = \frac{s_j(t)}{s_j(0)}$, puis $v_j(t) = \log(u_j(t))$, $j = 0, 2$, il vient

$$\begin{cases} |v'_j(t)| \leq K \left[\frac{C^{3/2}}{K_0} \left(e^{\frac{v_0(t)}{2n}} + e^{\frac{v_2(t)}{2n}} \right) + (C\delta)^{2/M} \right], \\ v_j(0) = 0. \end{cases}$$

Soit ϵ un réel positif. Posons $t_1 = \sup \{t \in [0, 1]; \max \{|v_0(t)|, |v_2(t)|\} \leq \epsilon\}$. Vérifions que l'on peut choisir K_0 et δ_0 dépendant de C et ϵ de sorte que, pour $K_0 \geq K_0$ et $\delta \leq \delta_0$ on a $t_1 = 1$. Si tel n'est pas le cas (i.e. si $t_1 < 1$), pour $t \in [0, t_1]$ (sauf éventuellement pour un ensemble fini de valeurs de t) on a

$$\max\{|v'_0(t)|, |v'_2(t)|\} \leq \frac{C^{3/2}}{K_0} 2K e^{\frac{\epsilon}{2n}} + K(C\delta_0)^{2/M}.$$

Alors, si on choisit K_0 et δ_0 de sorte que le second membre de l'inégalité précédente soit strictement inférieur à ϵ , on aboutit à une contradiction en intégrant $v'_0(t)$ et $v'_2(t)$.

Ainsi, avec un tel choix de K_0 et de δ_0 , on a $t_1 = 1$ ce qui donne

$$e^{-\epsilon} \leq \frac{s_i(t)}{s_i(0)} \leq e^{\epsilon}, \quad i = 1, 2,$$

et achève la preuve de la Proposition 2.1 en choisissant $\epsilon = \log 2$. $\square$

REMARQUE 2.4. La preuve ci-dessus montre en fait le résultat plus complet suivant:

Pour toutes constantes $C \geq 1$ et $\epsilon > 0$ il existe des constantes $K_0 \geq 1$ et δ_0 dépendant de C , ϵ et des données telles que, pour $K_0 \geq K_0$ et $\delta \leq \delta_0$, on a, $\forall z \in U_0$, pour tout $\zeta \in B_{m,1}^{K_0}(z, C\delta)$,

$$(1 + \epsilon)^{-1} \mathfrak{S}_i^m(\zeta, \delta) \leq S_i^m(z, \delta) \leq (1 + \epsilon) \mathfrak{S}_i^m(\zeta, \delta), \quad i = 0, 2.$$

COROLLAIRE 2.5. *Il existe une constante A ne dépendant que de M telle que, pour toute constante $C \geq 1$, il existe des constantes $K_0 \geq 1$ et δ_0 dépendant de ρ , B , M et C telles que, $\forall K_0 \geq K_0$, $\forall \delta \leq \delta_0$ et $\forall z \in U_0$,*

$$\zeta \in B_{m,1}^{K_0}(z, C\delta) \Rightarrow A^{-1} S_i^m(\zeta, \delta) \leq S_i^m(z, \delta) \leq A S_i^m(\zeta, \delta), \quad i = 0, 2.$$

REMARQUE 2.6. Dans les Paragraphes 2 et 3 la Proposition 2.1 et le Corollaire 2.5 ne seront appliqués que pour $C = 1$. Par contre nous les appliquerons sous leur forme forte au Paragraphe 4.

Une conséquence immédiate de la proposition précédente et du fait que $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta) \subset B_{m,1}^{K_0}(z, \delta)$ est la suivante:

COROLLAIRE 2.7. *Il existe des constantes A , ne dépendant que de M , et, $K_0 \geq 1$ et δ_0 , ne dépendant que des données, telles que, pour $K_0 \geq K_0$, $\delta \leq \delta_0$, $z \in U_0$ et $i = 1, 2$, on a*

$$\frac{1}{A} R_i^m(z, \delta) \leq R_i^m(\zeta, \delta) \leq A R_i^m(z, \delta), \quad \forall \zeta \in B_{m,0}^{K_0}(z, \delta).$$

La dernière proposition de ce paragraphe dit que les “boules” $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$ sont attachées à une pseudodistance

Soit $U_1 \subset U$ un voisinage de z_0 tel que $\forall z \in U_1$ et $\forall \delta \leq \delta_0$ (intervenant dans le Corollaire 2.7) on a $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta) \subset U_0$. Clairement, un tel voisinage existe et ne dépend que des données. Alors:

PROPOSITION 2.8. *Il existe une constante A ne dépendant que de M et des constantes $K_0 \geq 1$ et δ_0 ne dépendant que des données, telles que, pour $K_0 \geq K_0$, $\delta \leq \delta_0$ et $z \in U_1$ on a:*

$$\forall \zeta \in B_{m,0}^{K_0}(z, \delta), \quad B_{m,0}^{K_0}(z, \delta) \subset B_{m,0}^{K_0}(\zeta, A\delta).$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.8. Soit $\xi \in B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$. En juxtaposant les chemins joignant ζ à z et ξ à z , on obtient l'existence d'une fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow U \cap \partial\Omega$ continue, C^1 par morceaux, telle que $\varphi(1) = \xi$, $\varphi(0) = \zeta$ et, sauf en un nombre fini de points, $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^5 a_i(t) \mathcal{W}_i(\varphi(t))$ avec $|a_i(t)| < \frac{2}{K_0} \mathcal{R}_i^m(z, \delta)$, $1 \leq i \leq 4$ et $|a_5(t)| < 2\delta$.

D'après le Corollaire 2.7 et le Lemme 2.2, on a

$$\frac{2}{K_0} \mathcal{R}_i^m(z, \delta) \leq \frac{2A}{K_0} \mathcal{R}_i^m(\zeta, \delta) \leq \frac{1}{K_0} \mathcal{R}_i^m(\zeta, (2A)^M \delta),$$

pour $i = 1, \dots, 4$, et donc $|a_i| < \frac{1}{K_0} \mathcal{R}_i^m(\zeta, (2A)^M \delta)$ ce qui montre la proposition. $\square$

2.2. – Comparaison des pseudo-boules $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$ et $B_m^{K_0}(z, \delta)$ et preuve du Théorème 1.1

Le but de ce paragraphe est donc de démontrer le Théorème 1.1. Pour cela, nous allons essentiellement suivre la même méthode que A. Nagel, E. Stein et S. Wainger dans [5]. Tout est basé sur une bonne comparaison des pseudo-boules $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$ et $B_m^{K_0}(z, \delta)$ définies respectivement au début du Sous-Paragraphe 2.1 et dans le Sous-Paragraphe 1.2.

Démontrons la proposition fondamentale suivante:

PROPOSITION 2.9. *Il existe deux constantes K et $K_0 \geq 1$ ne dépendant que des données ρ , $\mathcal{B}$ et M telles que, pour $K_0 \geq K_0$ il existe une constante $\delta_0 = \delta_0(K_0)$ dépendant de K_0 et des données telle que, pour $\delta \leq \delta_0$ et $z \in U_0 \cap \partial\Omega$ on a*

$$B_{m,0}^{K_0}\left(z, \frac{\delta}{K}\right) \subset B_m^{K_0}(z, \delta).$$

PREUVE DU THÉORÈME 1.1. C'est une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus et de la Proposition 2.8. $\square$

Le schéma général de la preuve de la Proposition 2.9 suit de très près celui du Théorème 7 de [5]. cette preuve est basée sur un calcul précis de la différentielle de l'application exponentielle en un point en fonction des crochets des champs de vecteurs en ce point.

Posons

$$\mathcal{W}_u = \sum_{i=1}^5 u_i \mathcal{W}_i,$$

et, pour $z \in U_0$ et $|u| \leq \epsilon_0$,

$$\Phi^z(u) = \exp_z(\mathcal{W}_u).$$

Alors Φ^z est un difféomorphisme d'un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^5$ sur un voisinage de z dans $\partial\Omega$.

De plus notons

$$\Psi^z = \left(\Psi_j^z\right)_{1 \leq j \leq 5} = (\Phi^z)^{-1}$$

l'inverse de Φ^z .

Le lemme qui suit donne une estimation des dérivées partielles par rapport aux champs $\mathcal{W}_i$ de Ψ^z dans une pseudo-boule centrée en z . La démonstration de ce lemme est faite au Sous-Paragraphe 5.2.

LEMME 2.10. *Il existe des constantes K , δ_2 ne dépendant que de ρ , $\mathcal{B}$ et M telles que, pour $z \in U_0 \cap \partial\Omega$, $\delta \leq \delta_2$, on a, pour tout $K_0 \geq 1$ et tout $\zeta \in B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$:*

- a) *pour $(i, j) \in \{1, \dots, 4\} \times \{1, \dots, 5\} \cup \{5, 5\}$, $\mathcal{R}_i^m(z, \delta) |\mathcal{W}_i \Psi_j^z(\zeta)| \leq K \mathcal{R}_j^m(z, \delta)$;*
- b) *pour $j \in \{1, \dots, 4\}$, $\mathcal{R}_5^m(z, \delta) |\mathcal{W}_5 \Psi_j^z(\zeta)| \leq K \delta^{1/M} \mathcal{R}_j^m(z, \delta)$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.9. D'après le Lemme 2.2, on a, pour $K \geq 1$, et $1 \leq i \leq 5$,

$$\mathcal{R}_i^m\left(z, \frac{\delta}{K}\right) \leq \frac{1}{K^{1/M}} \mathcal{R}_i^m(z, \delta).$$

Par suite, si $\zeta \in B_{m,0}^{K_0}\left(z, \frac{\delta}{K}\right)$, il existe une courbe φ continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que, sauf pour un nombre fini de valeurs de t , $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^5 a_i(t) \mathcal{W}_i(\varphi(t))$

avec $|a_i(t)| < \frac{1}{K_0 K^{1/M}} \mathcal{R}_i^m(z, \delta)$, $1 \leq i \leq 4$, $|a_5(t)| < \frac{1}{K^{1/M}} \delta$. Posons alors $u_i(t) = \Psi_i^z(\varphi(t))$, $i = 1, \dots, 5$, et

$$t_0 = \sup \left\{ t \in [0, 1]; \forall \tau \in [0, t], |u_i(\tau)| \leq \frac{1}{K_0} R_i^m(z, \delta), 1 \leq i \leq 4, |u_5(\tau)| \leq \delta \right\}$$

(noter que les $u_i(t)$ sont bien définis pour $\delta \leq \delta_0$, δ_0 ne dépendant que des données).

Si $t_0 = 1$ on a $\zeta \in B_m^{K_0}(z, \delta)$. Il nous faut donc montrer que l'on peut choisir les constante K et K_0 , ne dépendant que des données, de sorte que, si $K_0 \geq K_0$, pour $\delta_0 = \delta_0(K_0)$ convenable on a $t_0 = 1$.

Si $t_0 < 1$ il existe i_0 tel que, soit $|u_{i_0}(t_0)| = \frac{1}{K_0} \mathcal{R}_{i_0}^m(z, \delta)$ avec $i_0 \in \{1, \dots, 4\}$, soit, $|u_5(t_0)| = \delta$.

Or, la fonction u_{i_0} étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on a (sauf pour un nombre fini de valeurs de t)

$$u'_{i_0}(t) = \sum_{i=1}^5 a_i(t) \mathcal{W}_i \Psi_{i_0}^z(\varphi(t)), \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Comme $u_{i_0}(0) = 0$, on a

$$u_{i_0}(t_0) = \sum_{i=1}^5 \int_0^{t_0} a_i(t) \mathcal{W}_i \Psi_{i_0}^z(\varphi(t)) dt,$$

et l'hypothèse sur les a_i donne

$$|u_{i_0}(t_0)| \leq \frac{1}{K_0 K^{1/M}} \sum_{i=1}^4 \int_0^{t_0} \mathcal{R}_i^m(z, \delta) |\mathcal{W}_i \Psi_{i_0}^z(\varphi(t))| dt + \frac{1}{K^{1/M}} \mathcal{R}_5^m(z, \delta) |\mathcal{W}_5 \Psi_{i_0}(\varphi(t))|.$$

Supposons tout d'abord $i_0 = 5$. Puisque $\varphi(t) \in B_m^{K_0}(z, \delta)$ pour $t \in [0, t_0]$, le Lemme 2.10 combiné avec l'inégalité ci-dessus donne $|u_{i_0}(t_0)| \leq \frac{\tilde{K}}{K^{1/M}} \delta$, où $\tilde{K}$ ne dépend que des données car $K_0 \geq 1$, et on conclut à une contradiction en choisissant $K \geq \tilde{K}^M$.

Supposons maintenant $1 \leq i_0 \leq 4$. Comme précédemment, le Lemme 2.10 implique

$$|u_{i_0}(t_0)| \leq \frac{\tilde{K}}{K^{1/M}} \left(1 + K_0 \delta_0^{1/M}\right) \frac{1}{K_0} R_{i_0}^m(z, \delta),$$

et, pour conclure, il suffit de choisir $\delta_0 \leq \frac{1}{K_0^M}$ puis $K \geq (2\tilde{K})^M$. □

3. – Construction et propriétés des pseudo-boules $B_B^{K_0}(z, \delta)$

Dans le paragraphe précédent, nous avons construit une famille de pseudo-distances dépendant d'un paramètre m . En un point z fixé les rayons dans les directions complexes L_1 et L_2 de la pseudo-boule $B_{B,m}^{K_0}(z, \delta)$ dont le rayon dans la direction T est δ varie considérablement en fonction de m . Notre but est d'obtenir des pseudo-boules dont le rayon dans l'une des directions L_1 ou L_2 (ici nous choisissons de privilégier L_2) est le plus grand possible. Nous montrons dans ce paragraphe qu'il est possible de prendre, pour chaque (z, δ) , un rayon dans la direction L_2 égal au maximum des rayons correspondant des pseudo-boules $B_m^{K_0}(z, \delta)$ en faisant varier le paramètre m , quitte à diminuer le rayon dans la direction L_1 .

La méthode générale est naturellement la même que celle utilisée au paragraphe précédent. La seule différence est que nous devons considérer en plus une autre famille de "boules", dépendant du paramètre m , définies, comme dans le Sous-Paragraphe 2.1 par des courbes.

Le premier sous-paragraphe est consacré à cette famille supplémentaire, le second à la bonne famille de pseudo-boules définies par des courbes et la démonstration du Théorème 1.3 est faite dans le dernier.

Pour simplifier les notations, à partir de maintenant les boules $B_B^{K_0}(z, \delta)$ seront notées $B^{K_0}(z, \delta)$.

3.1. – Les pseudo-boules $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$

Comme dans le paragraphe précédent, pour des raisons techniques apparaissant clairement par la suite, nous considérerons tout d'abord une famille intermédiaire $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$ de pseudo-boules dépendant du paramètre m sur lesquelles nous allons démontrer des propriétés d'invariance du poids $\mathfrak{S}_2^m$.

Pour $z \in U_0$, soit $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$ l'ensemble des points $\zeta = \varphi(1)$ où $\varphi : [0, 1] \rightarrow U$ est une courbe continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, vérifiant (2.4) les fonctions a_i , $1 \leq i \leq 5$, étant continues par morceaux, et telles que $|a_5| < \delta$, $\max\{|a_3|, |a_4|\} < \frac{1}{K_0} R_2^m(z, \delta)$ et $\max\{|a_1|, |a_2|\} < \frac{1}{K_0} r_1^m(z, \delta)$ où

$$r_1^m(z, \delta) = \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k=2 \\ l_1=0}}^{M-1} (R_2^m(z, \delta))^k |\mathcal{L}(\gamma)| + \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k=2 \\ l_1=0}}^{M-2} (R_2^m(z, \delta))^{k+1} |\mathcal{L}(\partial\rho)| + \delta^{1-\frac{1}{M}}.$$

Le lemme qui suit permet de comparer les pseudo-boules $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$ et $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$:

LEMME 3.1. *Il existe des constantes K et δ_0 ne dépendant que de ρ , B et M telles que, pour $z \in U$ et $\delta \leq \delta_0$ on a $r_1^m(z, \delta) \leq K R_1^m(z, \delta)$.*

La preuve de ce lemme se fait à partir de deux autres lemmes. Le second ne sera utilisé ici que sous une forme affaiblie. Il nous sera utile plus tard sous sa forme forte.

Le premier est une généralisation de la Proposition 2 de [2]:

LEMME 3.2. *Pour toute liste $\tilde{\mathcal{L}}$ telle que $\tilde{l}_1 = 0$ et $|\tilde{\mathcal{L}}| = \tilde{k} \leq M$ il existe une constante K ne dépendant que des données ρ , $\mathcal{B}$ et U telle que, pour $z \in U$ et $\delta \leq 1$, on a*

$$\delta^{\tilde{k}-1} \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma)(z) \right|^2 (\mathfrak{S}_0^m(z, \delta))^{1/n} \leq K (\mathfrak{S}_2^m(z, \delta))^{\frac{\tilde{k}}{n}}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.2. Nous utilisons encore une fois le Lemme 1 de [2] avec $\chi_2 = 0$: avec les notations qui y sont introduites, il suffit de voir que, pour tout terme X de T_1 on a

$$(3.5) \quad \delta^{\tilde{k}-1} \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^2 X^{1/n} \leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{\tilde{k}/n}.$$

Pour montrer (3.5), nous distinguons trois cas.

Premier cas: $X = |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_1}} \delta^{n(1-\frac{2}{l_1})}$, avec $\mathcal{L} \in W_0$.

Notons que, puisque $l_2 = 0$, on a $2 \leq l_1 < m$.

Si $M \leq \tilde{k}m$, on a, en majorant $|\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|$ par une constante,

$$\begin{aligned} \delta^{\tilde{k}-1} \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^2 X^{1/n} &\leq K |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2}{l_1}} \delta^{1-\frac{2}{l_1}+\frac{2}{m}-\frac{2}{M}} \delta^{\tilde{k}-1+\frac{2}{M}-\frac{2}{m}} \\ &\leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{1}{n}} \delta^{(\tilde{k}-1)(1-\frac{2}{M})} \delta^{2(\frac{\tilde{k}}{M}-\frac{1}{m})} \\ &\leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{\tilde{k}}{n}}. \end{aligned}$$

Si maintenant $M > m\tilde{k}$, alors $\tilde{\mathcal{L}} \in W_4$ et il vient

$$\begin{aligned} \delta^{\tilde{k}-1} \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^2 X^{1/n} &= \left(\left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^{\frac{2n}{\tilde{k}}} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_1\tilde{k}}} \delta^{n(1-\frac{2}{l_1\tilde{k}})} \right)^{\frac{\tilde{k}}{n}} \\ &\leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{\tilde{k}}{n}}. \end{aligned}$$

Deuxième cas: $X = |\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n(1-\frac{2}{l_2})}$, $\mathcal{L} \in W_2$.

Ce cas est trivial puisque X est un terme de $\mathfrak{S}_2^m$ et $\delta \leq (\mathfrak{S}_2^m)^{1/n}$.

Troisième cas: $X = \delta^{n(1-\frac{2}{m})}$.

Si $M \leq m\tilde{k}$, on a $\delta^{\tilde{k}-1} |\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)|^2 X^{1/n} \leq K \delta^{\tilde{k}(1-\frac{2}{M})} \leq K (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{\tilde{k}}{n}}$.

Si $M > m\tilde{k}$, alors $\tilde{\mathcal{L}} \in W_4$ et il vient

$$\delta^{\tilde{k}-1} \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^2 X^{1/n} = \left(\left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma) \right|^{\frac{2n}{\tilde{k}}} \delta^{n(1-\frac{2}{m\tilde{k}})} \right)^{\frac{\tilde{k}}{n}} \leq (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{\tilde{k}}{n}}.$$

Ceci achève la preuve de (3.5) et, par la même occasion, celle du Lemme 3.2 □

LEMME 3.3. *Pour toute liste $\mathcal{L}$ de longueur $k \leq M$, il existe une constante K ne dépendant que des données ρ , $\mathcal{B}$ et U , telle que pour $z \in U$ et $\delta \geq 1$ on a*

$$\delta^{k-2} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^2 \leq K (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{l_1}{n}} (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{l_2}{n}}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.3. Supposons tout d'abord $l_2 = 0$ c'est-à-dire $k = l_1$.

Si $k < m$ alors $\mathcal{L} \in W_1$ et on a

$$\delta^{k-2} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^2 = \left(|\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{k}} \delta^{n(1-\frac{2}{k})} \right)^{\frac{k}{n}} \leq (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{k}{n}}.$$

Si par contre $k \geq m$, on a $\delta^{k-2} \leq \delta^{k(1-\frac{2}{m})} \leq (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{k}{n}}$.

Supposons maintenant $l_2 \geq 1$.

Tout d'abord, si $\frac{l_1}{m} + \frac{l_2}{M} < 1$ alors $\mathcal{L} \in W_2$ et nous avons

$$\begin{aligned} \delta^{k-2} |\mathcal{L}(\partial\rho)|^2 &= \left(|\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2n}{l_2}} \delta^{n(1-\frac{2}{l_2}(1-\frac{l_1}{m}))} \right)^{\frac{l_2}{n}} \delta^{k-l_2-\frac{2l_1}{m}} \\ &\leq (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{l_2}{n}} \delta^{l_1(1-\frac{2}{m})} \leq (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{l_1}{n}} (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{l_2}{n}}. \end{aligned}$$

Si par contre $\frac{l_1}{m} + \frac{l_2}{M} \geq 1$, $\mathfrak{S}_0^m \geq \delta^{(1-\frac{2}{m})n}$ et $\mathfrak{S}_2^m \geq \delta^{(1-\frac{2}{M})n}$ entraînent

$$\delta^{k-2} \leq (\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{l_1}{n}} (\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{l_2}{n}},$$

ce qui termine la preuve du Lemme 3.3. $\square$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1. Il faut démontrer que $r_1^m (S_0^m + S_2^m)^{1/2} \leq K\delta^{1/2}$ ce qui est équivalent à

$$(3.6) \quad r_1^m (S_0^m)^{1/2} \leq K\delta^{1/2}$$

et

$$(3.7) \quad r_1^m (S_2^m)^{1/2} \leq K\delta^{1/2}.$$

Pour démontrer (3.6), il suffit de remarquer que, pour une liste $\mathcal{L}$ telle que $l_1 = 0$ et $|\mathcal{L}| \leq M$ on a

$$\frac{\delta^{k/2}}{(\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{|\mathcal{L}|}{2n}}} |\mathcal{L}(\gamma)| \leq K \frac{\delta^{1/2}}{(\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}}}, \text{ et, } \frac{\delta^{\frac{k+1}{2}}}{(\mathfrak{S}_2^m)^{\frac{k+1}{2n}}} |\mathcal{L}(\partial\rho)| \leq K \frac{\delta^{1/2}}{(\mathfrak{S}_0^m)^{\frac{1}{2n}}}.$$

Or la première de ces inégalités est le Lemme 3.2 et la seconde provient du Lemme 3.3.

(3.7) est trivialement vérifiée car $(R_2^m)^k (S_2^m)^{1/2} = \delta^{1/2} (\frac{\delta}{S_2^m})^{\frac{k-1}{2}} \leq K\delta^{1/2}$. $\square$

Le Lemme 3.1 montre qu'il existe des constantes K et δ_0 ne dépendant que de ρ , $\mathcal{B}$, M et U telles que, pour $\delta \leq \delta_0$ et $K_0 \geq 1$ on a $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta) \subset B_{m,1}^{K_0}(z, K\delta)$. On en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION 3.4. *Pour tout $C \geq 1$, il existe des constantes $K_0 \geq 1$ et δ_0 ne dépendant que de ρ , B , M et C telles que, pour $K_0 \geq K_0$, $z \in U_0$, $\zeta \in B_{m,2}^{K_0}(z, C\delta)$ et $\delta \leq \delta_0$ on a:*

- a) $\frac{1}{2} \mathfrak{S}_2^m(z, \delta) \leq \mathfrak{S}_2^m(\zeta, \delta) \leq 2 \mathfrak{S}_2^m(z, \delta);$
- b) *il existe une constante B ne dépendant que de M telle que:*
 - 1) $\frac{1}{B} R_2^m(z, \delta) \leq R_2^m(\zeta, \delta) \leq B R_2^m(z, \delta),$
 - 2) $\frac{1}{B} r_1^m(z, \delta) \leq r_1^m(\zeta, \delta) \leq B r_1^m(z, \delta).$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.4. Quitte à réduire δ_0 , le point a) est une conséquence de la Proposition 2.1 et de l'inclusion de $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$ dans $B_{m,1}^{K_0}(z, K\delta)$. Le point b) 1) se déduit trivialement de a). Il nous faut donc démontrer seulement le b) 2).

Posons, pour $z \in U_0$ et $\zeta \in U$,

$$W(\zeta, \delta) = \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k=2 \\ l_1=0}}^{M-1} (R_2^m(z, \delta))^{2k} |\mathcal{L}(\gamma)(\zeta)|^2 \\ + \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k=2 \\ l_1=0}}^{M-2} (R_2^m(z, \delta))^{2(k+1)} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)|^2 + \delta^{2-\frac{2}{M}}.$$

Puisque nous savons déjà que $R_2^m(\zeta, \delta)$ est “constant” sur $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$, il nous suffit de voir que $W(\zeta, \delta)$ est aussi “constant” sur cette boule. On procède essentiellement comme pour la Proposition 2.1.

LEMME 3.5. *Il existe des constantes K et δ_1 ne dépendant que de ρ , B et U telles que, pour $\zeta \in U$ et $\delta \leq \delta_1$, on a:*

- (i) $|L_1 W(\zeta, \delta)| \leq K (W(\zeta, \delta))^{1/2};$
- (ii) $|L_2 W(\zeta, \delta)| \leq K \frac{W(\zeta, \delta)}{R_2^m(z, \delta)};$
- (iii) $|TW(\zeta, \delta)| \leq K \frac{W(\zeta, \delta)}{\delta^{1-1/M}}.$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.5. Le (i) provient du fait que les coefficients $R_2^m(z, \delta)$ sont majorés par une constante ne dépendant que des données. De la même façon on obtient $|TW(\zeta, \delta)| \leq K W(\zeta, \delta)^{1/2}$ d'où le (iii) puisque $W(\zeta, \delta) \geq \delta^{2-\frac{2}{M}}$.

Montrons maintenant le (ii). Nous nous contentons de faire la vérification pour les termes où apparaît $\mathcal{L}(\gamma)$ les autres se traitant de la même manière.

Si $k + 1 \leq M - 1$, en écrivant $|\overset{(-)}{L}_2 \mathcal{L}(\gamma)|^2 = \frac{1}{2}(|L_2 \mathcal{L}(\gamma)|^2 + |\overline{L}_2 \mathcal{L}(\gamma)|^2)$, on a

$$\begin{aligned} |L_2[(R_2^m)^{2k} |\mathcal{L}(\gamma)|^2]| &\leq (R_2^m)^{2k} \left(\frac{|\mathcal{L}(\gamma)|^2}{R_2^m} + R_2^m \left| \overset{(-)}{L}_2 \mathcal{L}(\gamma) \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{R_2^m} \left[(R_2^m)^{2k} |\mathcal{L}(\gamma)|^2 + (R_2^m)^{2(k+1)} \left| \overset{(-)}{L}_2 \mathcal{L}(\gamma) \right|^2 \right] \\ &\leq \frac{W(\zeta, \delta)}{R_2^m(z, \delta)}, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat dans ce cas.

Si maintenant $k + 1 > M - 1$ il suffit de remarquer que

$$|L_2((R_2^m)^{2k} |\mathcal{L}(\gamma)|^2)| \leq (R_2^m)^k W^{1/2},$$

et comme $R_2^m(z, \delta) \leq \delta^{1/M}$,

$$|L_2((R_2^m)^{2k} |\mathcal{L}(\gamma)|^2)| \leq K \frac{\delta^{\frac{k+1}{M}} W^{1/2}}{R_2^m} \leq K \frac{W}{R_2^m},$$

car $W \geq \delta^{2-2/M}$, ce qui achève la preuve du lemme □

FIN DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.4. Soit $\zeta = \varphi(1)$ un point de la boule $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$. Posons $w(t) = W(\varphi(t), \delta)$. En majorant la dérivée de w , de la même manière que dans la preuve de la Proposition 2.1, à l'aide du Lemme 3.5 et du b) 1) de la Proposition 3.4, il vient

$$|w'(t)| \leq K \left[\frac{r_1^m(z, C\delta)}{K_0} (w(t))^{1/2} + \frac{R_2^m(z, C\delta)}{K_0} \frac{w(t)}{R_2^m(\varphi(t), \delta)} + C\delta^{1/M} (w(t)) \right].$$

Le a) de la Proposition 3.4 et la définition de R_2^m donnent alors

$$|w'(t)| \leq C^M K \left[\frac{w(0)^{1/2} w(t)^{1/2} + w(t)}{K_0} + \delta^{1/M} w(t) \right].$$

Si on pose $v(t) = w(t)^{1/2}$ puis $u(t) = \frac{v(t)}{v(0)}$, on obtient

$$\begin{cases} |u'(t)| \leq C^M K \left(\frac{1+u(t)}{K_0} + \delta^{1/M} u(t) \right), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Soit alors $t_1 = \sup \{t \in [0, 1]; |u(\tau) - 1| \leq 1/2, 0 \leq \tau \leq t\}$. Vérifions que l'on peut choisir K_0 et δ_0 de sorte que $t_1 = 1$. En effet, pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$|u'(t)| \leq C^M K \left(\frac{5/2}{K_0} + \frac{3\delta_0^{1/M}}{2} \right) < 1/2,$$

avec un choix convenable de K_0 et δ_0 ce qui entraîne $|u(t_1) - 1| < 1/2$ et le résultat par continuité de $u(t)$. Par suite, $|u(1) - 1| \leq 1/2$ ce qui implique $\frac{1}{4}w(0) \leq w(1) \leq \frac{9}{4}w(0)$ et achève la preuve de la Proposition 3.4 $\square$

3.2. – Les pseudo-boules $B_0^{K_0}(z, \delta)$

C'est dans ce sous-paragraphe que nous introduisons l'analogue des boules $B_{m,0}^{K_0}(z, \delta)$ du paragraphe précédent.

Pour simplifier les notations, posons (avec les notations du Sous-Paragraphe 1.3)

$$R_2(z, \delta) = R_2^{\mathcal{B}}(z, \delta),$$

$$R_1(z, \delta) = R_1^{\mathcal{B}}(z, \delta), \text{ et, } S_2(z, \delta) = S_2(\mathcal{B}, \delta, M)(z), \quad z \in U.$$

Ainsi $R_1 = \sup_m r_1^m$ et $R_2 = \sup_m R_2^m = \left(\frac{\delta}{S_2(z, \delta)} \right)^{1/2}$ avec $S_2(z, \delta) = \inf_m S_2^m(z, \delta)$.

Comme dans le sous-paragraphe précédent, nous définissons les boules $B_0^{K_0}(z, \delta)$, $z \in U_0$, comme les ensembles de points $\zeta = \varphi(1)$ où $\varphi : [0, 1] \rightarrow U$ est une courbe continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \sum_{i=1}^5 a_i(t) \mathcal{W}_i(\varphi(t)), \\ \varphi(0) = z, \end{cases}$$

les fonctions a_i étant continues, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, vérifiant, pour $1 \leq i \leq 4$, $|a_i| < \frac{1}{K_0} \mathcal{R}_i(z, \delta)$, $|a_5| < \mathcal{R}_5(z, \delta)$, avec

$$\mathcal{R}_i(z, \delta) = R_1(z, \delta), \quad i = 1, 2,$$

$$\mathcal{R}_i(z, \delta) = R_2(z, \delta), \quad i = 3, 4 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_5(z, \delta) = \delta.$$

En remarquant que $B_0^{K_0}(z, \delta) = \bigcup_m B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$ et en utilisant la Proposition 3.4 démontrons le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.6. *Il existe une constante B ne dépendant que de M telle que, pour tout $C \geq 1$, il existe des constantes $K_0 \geq 1$ et δ_0 ne dépendant que des données et de C telles que, pour $K_0 \geq K_0$, $\delta \leq \delta_0$ et $z \in U_0$, on a, pour $i = 1, 2$:*

$$\frac{1}{B} R_i(z, \delta) \leq R_i(\zeta, \delta) \leq B R_i(z, \delta), \quad \forall \zeta \in B_0^{K_0}(z, C\delta).$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, compte tenu de la définition de $R_1(z, \delta)$ notons qu'il suffit de faire la preuve pour $i = 2$.

Soit $\zeta \in B_0^{K_0}(z, C\delta)$. Il existe une suite m_n , $n \in \mathbb{N}$, telle que $R_2^{m_n}(z, \delta)$ converge en croissant vers $R_2(z, \delta)$. En utilisant le Lemme 2.2 il vient donc

$\zeta \in B_{m_n,2}^{K_0}(z, C^M \delta)$ pour $n \geq n_0$ et la Proposition 3.4 et le Lemme 2.2 donnent (quite à diminuer δ_0 ce qui est possible puisque B ne dépend que de M)

$$R_2^{mn}(z, \delta) \leq B R_2^{mn}(\zeta, \delta) \leq R_2^{mn}(\zeta, B^M \delta), \quad n \geq n_0,$$

et

$$r_1^{mn}(z, \delta) \leq B r_1^{mn}(\zeta, \delta) \leq r_1^{mn}(\zeta, B^M \delta), \quad n \geq n_0.$$

Par passage à la limite, il vient

$$R_2(z, \delta) \leq B R_2(\zeta, \delta)$$

et

$$R_2(z, \delta) \leq R_2(\zeta, B^M \delta),$$

et, comme la définition même de r_1^m et R_1 donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_1^{mn}(z, \delta) = R_1(z, \delta)$, on a de même

$$R_1(z, \delta) \leq B R_1(\zeta, \delta)$$

et

$$R_1(z, \delta) \leq R_1(\zeta, B^M \delta).$$

Vu la définition des pseudo-boules $B_0^{K_0}$, on a donc $z \in B_0^{K_0}(\zeta, B^M \delta)$.

Alors, quite à remplacer δ_0 par δ_0/B^M , en appliquant de nouveau la Proposition 3.4 et le Lemme 2.2, on montre que

$$R_i(\zeta, B^M \delta) \leq B R_i(z, B^M \delta) \text{ et } R_i(\zeta, \delta) \leq B^M R_i(z, \delta), \quad i = 1, 2,$$

ce qui achève la preuve du corollaire en prenant pour B , B^M □

En suivant exactement la même démonstration que dans la Proposition 2.8, on démontre le résultat principal de ce sous-paragraphe.

Quite à réduire U_1 (c.f. le sous-paragraphe précédent juste avant l'énoncé de la Proposition 2.8), on peut supposer que $\forall z \in U_1, \forall \delta \leq \delta_0$ (intervenant dans le Corollaire 3.6 pour $C = 1$) on a $B_0^{K_0}(z, \delta) \subset U_0$. Alors:

PROPOSITION 3.7. *Il existe une constante B ne dépendant que de M et des constantes $K_0 \geq 1$ et δ_0 ne dépendant que des données, telles que, pour $K_0 \geq K_0$, $\delta \leq \delta_0$ et $z \in U_1$, on a:*

$$\forall \zeta \in B_0^{K_0}(z, \delta), \quad B_0^{K_0}(z, \delta) \subset B_0^{K_0}(\zeta, B\delta).$$

3.3. – Comparaison des pseudo-boules $B^{K_0}(z, \delta)$ et des pseudo-boules $B_0^{K_0}(z, \delta)$ et preuve du Théorème 1.3

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 1.3. Comme dans le Paragraphe 2.2, tout est basé sur une bonne comparaison des pseudo-boules $B_0^{K_0}(z, \delta)$ et $B^{K_0}(z, \delta)$ qui ont été définies respectivement dans les Sous-Paragraphe 3.2 et 1.3.

La proposition fondamentale s'énonce comme suit:

PROPOSITION 3.8. *Il existe des constantes K et $K_0 \geq 1$ ne dépendant que des données ρ , $\mathcal{B}$ et M telles que, pour $K_0 \geq K_0$ il existe une constante $\delta_0 = \delta_0(K_0)$ dépendant de K_0 et des données telle que, pour $\delta \leq \delta_0$ et $z \in U_0 \cap \partial\Omega$ on a*

$$B_0^{K_0}\left(z, \frac{\delta}{K}\right) \subset B^{K_0}(z, \delta).$$

PREUVE DU THÉORÈME 1.3. C'est une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus et de la Proposition 3.7. $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.8. C'est exactement la même que celle de la Proposition 2.9: il suffit de reprendre celle-ci en remplaçant le Lemme 2.10 par le lemme suivant dont la preuve sera donnée au Sous-Paragraphe 5.2:

LEMME 3.9. *Il existe des constantes K et δ_2 ne dépendant que de ρ , $\mathcal{B}$ et M telles que, pour $z \in U_0 \cap \partial\Omega$ et $\delta \leq \delta_2$, on a, pour tout $K_0 \geq 1$ et tout $\zeta \in B^{K_0}(z, \delta)$:*

- a) *pour $(i, j) \in \{1, \dots, 4\} \times \{1, \dots, 5\} \cup \{5, 5\}$, $\mathcal{R}_i(z, \delta)|\mathcal{W}_i\Psi_j^z(\zeta)| \leq K\mathcal{R}_j(z, \delta)$*
- b) *pour $j \in \{1, \dots, 4\}$, $\mathcal{R}_5(z, \delta)|\mathcal{W}_5\Psi_j^z(\zeta)| \leq K\delta^{1/M}\mathcal{R}_j(z, \delta)$.*

4. – Application aux courants positifs fermés

Dans ce paragraphe nous allons démontrer le Théorème 1.5. Le principe général de la preuve est celui de [2]: on applique la formule de Stokes à une forme différentielle ω bien choisie de sorte que l'un des termes de la formule que l'on obtient soit celui que l'on veut estimer. Il faut alors majorer convenablement tous les autres termes. Il faudrait donc que dans la forme ω apparaissent les poids S_i^M (ou tout au moins l'un des deux sur le bon coefficient du courant θ). Malheureusement ces poids ne sont pas dérivables et nous sommes obligés, comme dans [2], d'utiliser les poids S_i^m . Alors pour obtenir le résultat, nous introduisons une partition de l'unité dans la forme ω et choisissons des valeurs de m différentes dans les supports de chacune des fonctions de la partition.

La base de la construction de cette partition est l'utilisation des pseudo-boules du paragraphe précédent sur certaines surfaces de niveau de ρ . Les constantes *ne dépendant que des données* du paragraphe précédent sont évidemment indépendantes des surfaces de niveau considérées.

Les deux premiers sous-paragraphes sont consacrés à la construction de cette partition, la démonstration du Théorème 1.5 est faite au Sous-Paragraphe 4.3.

4.1. – Fonctions de troncature au voisinage d'un point

Dans ce paragraphe nous définissons les fonctions de base relatives aux localisations et nous donnons des estimations des dérivées de ces fonctions.

Pour simplifier les notations, dans ce paragraphe, nous notons $\delta(\zeta) = -\rho(\zeta)$, $\zeta \in \Omega$.

Le domaine Ω étant C^∞ , les courbes intégrales de la normale réelle au voisinage du bord de Ω sont bien définies. En particulier, il existe un voisinage V de $\partial\Omega$ tel que, pour tout z de ce voisinage, il existe une et une seule telle courbe passant par z . Pour tout $z \in V$ nous notons alors $\zeta \mapsto \pi^z(\zeta)$ l'application qui à ζ fait correspondre l'intersection de la courbe intégrale de la normale réelle passant par ζ avec la surface de niveau $\rho = \rho(z)$. Il est clair que $(z, \zeta) \mapsto \pi^z(\zeta)$ est C^∞ dans $V \times V$.

Dans la suite, nous aurons à utiliser des propriétés élémentaires de π^z :

- $\rho(z) = \rho(z') \Rightarrow \pi^z = \pi^{z'}$;
- la différentielle $d(\pi^z)_z$ de π^z au point z est l'identité sur l'espace tangent à la surface $\{\rho = \rho(z)\}$;
- Le noyau de la différentielle $d(\pi^z)_\zeta$ de π^z au point ζ est engendré par $\Re N(\zeta)$.

Par ailleurs, pour pouvoir appliquer sans difficultés les résultats sur les pseudo-boules, soit U_1 un voisinage de z_0 tel que, pour tout $\eta > 0$, les pseudo-boules $B^{K_0}(z, \delta)$ et $B_{m,2}^{K_0}(z, \delta)$ sont définies sur les surfaces de niveau $\{\rho = -\eta\} \cap U_1$ et satisfont aux propriétés décrites aux Paragraphes 1 et 3, les constantes ne dépendant que des données ρ , B et M .

Soient $K_0 \geq 1$, $\epsilon > 0$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $0 < \mu_1 < \mu_2$ fixés. Pour $z \in U_0$ tel que $\delta(z)$ soit assez petit (au sens où $\zeta \in \Omega$ et $\delta(\zeta) < \mu_2\delta(z)$ impliquent $\zeta \in V$ et $\delta(z)/\epsilon \leq \delta_0$), posons

$$Q_{\mu, \epsilon}^{K_0}(z) = \left\{ \zeta \in \Omega \text{ t.q. } \pi^z(\zeta) \in B_{\delta(z)}^{K_0}\left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon}\right), \mu_1\delta(z) \leq \delta(\zeta) \leq \mu_2\delta(z) \right\},$$

où $B_{\delta(z)}^{K_0}(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon})$ est la pseudo-boule $B_B^{K_0}(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon})$ construite sur la surface de niveau $\{\delta(\zeta) = \delta(z)\}$, centrée en z , définie au Sous-Paragraphe 1.3.

Soient α , ϵ^1 et ϵ^2 trois réels fixés, $0 < \alpha < 1$, $0 < \epsilon^2 < \epsilon^1$. Posons $K_1 = (\frac{1}{\alpha})^{1/\alpha}$ et définissons les pavés $Q_{\alpha, \epsilon^i}^{i, K_0}(z) = Q_{\mu^i, \epsilon^i}^{K_0}(z)$ où les couples μ^i sont définis par $\mu_2^1 = 1$, $\mu_1^1 = \frac{1}{K_1}$, $\mu_2^2 = K_1$ et $\mu_1^2 = \frac{1}{K_1^2}$.

Les deux pavés $Q_{\alpha, \epsilon^i}^{i, K_0}(z)$ sont donc emboîtés. Nous allons définir la fonction de base adaptée à ces deux pavés identiquement égale à 1 sur $Q_{\alpha, \epsilon^1}^{1, K_0}(z)$ et à support dans $Q_{\alpha, \epsilon^2}^{2, K_0}(z)$, de façon à avoir de bonnes estimations de ses dérivées.

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ sur l'intervalle $[\frac{\delta(z)}{K_1}, \delta(z)]$, à support dans l'intervalle $[\frac{\delta(z)}{K_1^2}, K_1\delta(z)]$ et telle que

$$(4.8) \quad \begin{cases} \varphi' \geq 0, & \text{sur } \left[\frac{\delta(z)}{K_1^2}, \delta(z) \right], \\ \varphi' \leq 0, & \text{sur } [\delta(z), K_1\delta(z)], \\ |\varphi'(t)| \leq \alpha \frac{\varphi(t)}{t}, & \text{sur } \left[\delta(z), \frac{K_1\delta(z)}{2} \right], \\ |\varphi'(t)| \leq \frac{4\alpha}{t}, & \text{sur } \left[\frac{K_1\delta(z)}{2}, K_1\delta(z) \right]. \end{cases}$$

Une telle fonction φ s'obtient en "lissant" convenablement une fonction $\tilde{\varphi}$ croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\delta(z)}{K_1^2}, \frac{\delta(z)}{K_1} \right]$, constante égale à 1 sur $\left[\frac{\delta(z)}{K_1}, \delta(z) \right]$, égale à $\left(\frac{\delta(z)}{t} \right)^\alpha$ sur $\left[\delta(z), \frac{K_1\delta(z)}{2} \right]$, et linéaire sur le dernier intervalle $\left[\frac{K_1\delta(z)}{2}, K_1\delta(z) \right]$. La dernière majoration de (4.8) est valide car la définition de $\tilde{\varphi}$ sur l'avant dernier intervalle donne $\tilde{\varphi}\left(\frac{K_1\delta(z)}{2}\right) = 2^\alpha \alpha < 2\alpha$.

Rappelons que les pseudo-boules $B^{K_0}(z, \delta)$ sont les images par l'application $\exp_z$ de cubes centrés à l'origine dans $\mathbb{R}^5$. Soit alors $C_{K_0}^i$ le cube dont l'image par $\exp_z$ est $B_{\delta(z)}^{K_0}(z, \delta(z)/\epsilon^i)$, $i = 1, 2$. En particulier $C_{K_0}^1 \subset C_{K_0}^2$ strictement. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^5)$ telle que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ sur $C_{K_0}^1$, $\text{Supp}(\psi) \subset C_{K_0}^2$ et, si τ_j^i , $j = 1, \dots, 5$, sont les rayons des cubes $C_{K_0}^i$,

$$(4.9) \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(u) \right| \leq 2 \frac{1}{\tau_j^2 - \tau_j^1}, \quad 1 \leq j \leq 5.$$

Nous définissons alors la fonction de troncature au voisinage de z relative aux paramètres α et $\beta = (\epsilon^1, \epsilon^2)$ en posant

$$(4.10) \quad \varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta) = \varphi(\delta(\zeta)) \psi \left(\exp_z^{-1}(\pi^z(\zeta)) \right).$$

Avant de donner les estimations précises des dérivées de $\varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}$, rappelons que les rayons τ_j^i sont donnés par: $\tau_j^i = \frac{1}{K_0} \mathcal{R}_j(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^i})$, $1 \leq j \leq 4$ et $\tau_5^i = \mathcal{R}_5(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^i}) = \frac{\delta(z)}{\epsilon^i}$. On a donc

$$(4.11) \quad \frac{1}{\tau_5^2 - \tau_5^1} = \frac{\epsilon^1 \epsilon^2}{\epsilon^1 - \epsilon^2} \frac{1}{\delta(z)},$$

et, en tenant compte du Lemme 2.2,

$$(4.12) \quad \frac{1}{\tau_k^2 - \tau_k^1} \leq \frac{K_0}{1 - (\epsilon^2/\epsilon^1)^{1/M}} \frac{1}{\mathcal{R}_k\left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2}\right)}, \quad 1 \leq k \leq 4.$$

Nous en déduisons les majorations de la dérivée normale complexe de $\varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}$ suivantes:

LEMME 4.1. *Il existe une constante $K > 0$ ne dépendant que des données $\rho, \mathcal{B}$ et M telle que, pour $z \in U_1$ et $\delta(z)$ assez petit, on a :*

- 1) $\Re N \varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta) \leq 0$, pour $\frac{\delta(z)}{K_1^2} \leq \delta(\zeta) \leq \delta(z)$;
- 2) $|\Re N \varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta)| \leq \alpha \frac{\varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta)}{\delta(\zeta)}$, pour $\delta(z) \leq \delta(\zeta) \leq \frac{K_1 \delta(z)}{2}$;
- 3) $|\Re N \varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta)| \leq \frac{4\alpha}{\delta(\zeta)}$, pour $\frac{K_1 \delta(z)}{2} \leq \delta(\zeta) \leq K_1 \delta(z)$;
- 4)

$$\left| T \varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta) \right| \leq K K_1^2 \left[\frac{\epsilon^1 \epsilon^2}{\epsilon^1 - \epsilon^2} + \frac{K_0 (\epsilon^2)^{1-\frac{1}{M}} \delta(z)^{1/M}}{1 - (\epsilon^2/\epsilon^1)^{1/M}} \right] \frac{1}{\delta(\zeta)}.$$

où, comme dans les paragraphes précédents, $T = \Im m N$.

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que les trois premières majorations du lemme sont des conséquences immédiates des propriétés (4.8) de la définition de φ car $\Re N \rho \equiv 1$. Vérifions donc simplement la majoration 4).

Par définition de $\varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}$ on a

$$T \varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta) = \psi \left(\exp_z^{-1} \circ \pi^z \right) (\zeta) T(\varphi \circ \delta)(\zeta) + \varphi(\delta(\zeta)) T \left(\psi(\exp_z^{-1} \circ \pi^z) \right) (\zeta).$$

Comme $T(\varphi \circ \delta)(\zeta) \equiv 0$,

$$T \psi \left(\exp_z^{-1} \circ \pi^z \right) (\zeta) = \sum_{k=1}^5 \frac{\partial \psi}{\partial u_k} \left(\exp_z^{-1} \circ \pi^z \right) (\zeta) T \left((\exp_z^{-1})_k \circ \pi^z \right) (\zeta),$$

et, les formules (4.9), (4.11) et (4.12) donnent aussitôt, en utilisant le fait que $(z, \zeta) \rightarrow \pi^z(\zeta)$ ainsi que $(z, \zeta) \rightarrow \exp_z^{-1}(\zeta)$ sont C^∞ ,

$$\left| T \psi \left(\exp_z^{-1} \circ \pi^z \right) (\zeta) \right| \leq K \left\{ \frac{\epsilon^1 \epsilon^2}{\epsilon^1 - \epsilon^2} \frac{1}{\delta(z)} + \frac{K_0}{1 - (\epsilon^2/\epsilon^1)^{1/M}} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mathcal{R}_k \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right)} \right\}.$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer, que, par définition des $\mathcal{R}_k$, $1 \leq k \leq 4$, on a $\mathcal{R}_k(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2}) \geq (\frac{\delta(z)}{\epsilon^2})^{1-1/M}$, et de comparer $\delta(z)$ et $\delta(\zeta)$ dans le support de $\varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}$. $\square$

Dans la suite, nous aurons aussi besoin d'une majoration de la dérivée dans la direction $L_2 = \mathcal{W}_3$ de $\varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}$:

LEMME 4.2. *Il existe une constante K ne dépendant que des données telle que, pour $z \in U_1$ et $\delta(z)$ assez petit, on a*

$$\left| L_2 \varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta) \right| \leq K \left[\frac{K_0(1 + K_1)}{1 - \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^1} \right)^{1/M}} + K_1 \left(\frac{\epsilon^1}{\epsilon^1 - \epsilon^2} + \epsilon^2 \right) \right] \frac{1}{\mathcal{R}_3 \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right)}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque $L_2(\varphi \circ \delta) \equiv 0$, on a

$$L_2 \varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}(\zeta) = \varphi(\delta(\zeta)) L_2 \left(\psi(\exp_z^{-1} \circ \pi^z) \right)(\zeta).$$

Pour simplifier les notations, posons $\exp_z^{-1} = \Psi$. D'après (4.11) et (4.12),

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \left| L_2(\psi(\Psi \circ \pi^z))(\zeta) \right| &\leq \sum_{k=1}^4 \frac{K_0}{1 - (\epsilon^2/\epsilon^1)^{1/M}} \frac{1}{\mathcal{R}_k \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right)} \left| L_2(\Psi_k \circ \pi^z)(\zeta) \right| \\ &\quad + \frac{\epsilon^1 \epsilon^2}{\epsilon^1 - \epsilon^2} \frac{1}{\delta(z)} \left| L_2(\Psi_5 \circ \pi^z)(\zeta) \right|. \end{aligned}$$

Evaluons maintenant $|L_2(\Psi_k \circ \pi^z)(\zeta)|$. Tout d'abord, remarquons qu'il suffit de le faire pour $\zeta \in Q_{\alpha, \epsilon^2}^{2, K_0}(z)$ car, sur le complémentaire de cet ensemble, $\varphi_{\alpha, \beta}^{z, K_0}$ est identiquement nulle. Par ailleurs,

$$L_2(\Psi_k \circ \pi^z)(\zeta) = (d\Psi_k)_{\pi^z(\zeta)}((d\pi^z)_\zeta(L_2(\zeta))),$$

et, comme $(d\pi^z)_\zeta(L_2(\zeta)) = (d\pi^{\pi^z(\zeta)})_\zeta(L_2(\zeta))$, les propriétés élémentaires de π^ξ donnent

$$(d\pi^{\pi^z(\zeta)})_{\pi^z(\zeta)}(L_2(\zeta)) = L_2(\pi^z(\zeta)) + O(\max_i |1 - \mu_i^2|) \delta(z),$$

et

$$(d\pi^z)_z(L_2(\zeta)) = L_2(\pi^z(\zeta)) + O\left(\max_i |1 - \mu_i^2|\right) \delta(z),$$

les constantes intervenant dans le O ne dépendant que des données. Il vient donc

$$L_2(\Psi_k \circ \pi^z)(\zeta) = L_2 \Psi_k(\pi^z(\zeta)) + O\left(\max_i |1 - \mu_i^2| \delta(z)\right).$$

Comme $\pi^z(\zeta) \in B(z, \delta(z)/\epsilon^2)$, le Lemme 3.9 donne (à condition que $\delta(z)/\epsilon^2 \leq \delta_2$)

$$\left| L_2(\Psi_k \circ \pi^z)(\zeta) \right| \leq K \frac{\mathcal{R}_k \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right)}{\mathcal{R}_3 \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right)} + K \left(\max_i |1 - \mu_i^2| \right) \delta(z).$$

Combiné avec (4.13), ceci donne

$$\begin{aligned} \left| L_2 \left(\psi(\exp_z^{-1} \circ \pi^z) \right) (\zeta) \right| &\leq K \left\{ \frac{K_0}{1 - (\epsilon^2/\epsilon^1)^{1/M}} + \frac{\epsilon^1}{\epsilon^1 - \epsilon^2} \right\} \frac{1}{\mathcal{R}_2 \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right)} \\ &+ K \left(\max_i |1 - \mu_i^2| \right) \left[\sum_{k=1}^4 \frac{K_0}{1 - (\frac{\epsilon^2}{\epsilon^1})^{1/M}} \frac{\delta(z)}{\mathcal{R}_k \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right)} + \frac{\epsilon^1 \epsilon^2}{\epsilon^1 - \epsilon^2} \right]. \end{aligned}$$

Si on remarque alors que $\mathcal{R}_k(z, \delta) \geq \delta/K$ entraîne

$$\frac{\delta(z)}{\mathcal{R}_k \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right)} \leq K \epsilon^2, \quad \text{et que,} \quad \mathcal{R}_3 \left(z, \frac{\delta(z)}{\epsilon^2} \right) \leq K,$$

la démonstration du lemme est achevée. $\square$

4.2. – Une partition de l'unité

Dans ce paragraphe, nous construisons, à l'aide des fonctions de troncature, une (presque) partition de l'unité dépendant de trois paramètres ρ_0 , α et ϵ . C'est une telle partition, associée à un choix judicieux des paramètres, qui permettra, dans le dernier sous-paragraphe, de démontrer l'estimation des coefficients tangents des courants positifs fermés (Théorème 1.5).

Soient ρ_0 , α et ϵ trois réels fixés, $-1 < \rho_0 < 0$, $0 \leq \alpha < 1$ et $\epsilon > 0$. Posons, comme dans le sous-paragraphe précédent $K_1 = \frac{1}{\alpha}^{1/\alpha}$, et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\rho_n = \frac{\rho_0}{K_1^n}$, $\delta_n = -\rho_n$ et $S_n = U \cap \{\rho = \rho_n\}$.

D'après le Théorème 1.3, il existe des constantes K , K_0 et δ_0 ne dépendant que des données telles que $\forall z \in U_1$, $\forall \zeta \in B_{\delta(z)}^{K_0}(z, \delta)$, $\forall \delta \leq \delta_0$, $B_{\delta(z)}^{K_0}(z, \delta) \subset B_{\delta(\zeta)}^{K_0}(\zeta, K\delta)$.

Pour $K_0 \geq K_0$, notons $Q^{1, K_0}(z)$ et $Q^{2, K_0}(z)$ les pavés $Q_{\alpha, \frac{\epsilon}{K^2}}^{1, K_0}(z)$ et $Q_{\alpha, \frac{\epsilon}{2K^2}}^{2, K_0}(z)$ définis dans le sous-paragraphe précédent, c'est-à-dire

$$Q^{1, K_0}(z) = \left\{ \zeta \in \Omega / \pi^z(\zeta) \in B_{\delta(z)}^{K_0} \left(z, \frac{K^2 \delta(z)}{\epsilon} \right), \frac{1}{K_1} \delta(z) < \delta(\zeta) < \delta(z) \right\},$$

et

$$Q^{2, K_0}(z) = \left\{ \zeta \in \Omega / \pi^z(\zeta) \in B_{\delta(z)}^{K_0} \left(z, \frac{2K^2 \delta(z)}{\epsilon} \right), \frac{1}{K_1^2} \delta(z) < \delta(\zeta) < K_1 \delta(z) \right\}.$$

Notons que ces pavés ne sont définis que pour les z tels que $\delta(z)$ soit assez petit, ceci dépendant de K_1 , ϵ et des données (c.f. Sous-Paragraphe 4.1).

D'après la Proposition 1.4, il existe, pour tout n assez grand indépendant de K_0 , un système fini de points de S_n , $(z_i^n)_{1 \leq i \leq i_n}$, maximal pour la relation

$$i \neq j \Rightarrow B_{\delta_n}^{K_0} \left(z_i^n, \frac{-\rho_n}{\epsilon} \right) \cap B_{\delta_n}^{K_0} \left(z_j^n, \frac{-\rho_n}{\epsilon} \right) = \emptyset$$

LEMME 4.3. *Il existe un entier n_0 dépendant de K_1 , ϵ , K_0 et des données tel que pour $n \geq n_0$, les pavés $Q^{1,K_0}(z_i^n)$, $1 \leq i \leq i_n$, forment un recouvrement de $U_1 \cap \{\rho_n \leq \rho \leq \rho_{n+1}\}$.*

DÉMONSTRATION. En effet, compte tenu de la définition des pavés $Q^{1,K_0}(z_i^n)$, il suffit de voir que, pour tout $n \geq n_0$ les boules $B_{\delta_n}^{K_0}(z_i^n, \frac{K^2 \delta_n}{\epsilon})$ forment un recouvrement de $S_n \cap U_0$. Choisissons n_0 de sorte que, d'une part les pavés soient définis et d'autre part que $\frac{K^2(-\rho_n)}{\epsilon} \leq \delta_0$ (c.f. Théorème 1.3).

Alors, si tel n'était pas le cas, le Théorème 1.3 entrainerait l'existence d'un $z \in S_n$ tel que, $\forall i$, $B_{\delta_n}^{K_0}(z, \frac{\delta_n}{\epsilon}) \cap B_{\delta_n}^{K_0}(z_i^n, \frac{\delta_n}{\epsilon}) = \emptyset$, ce qui contredit la maximalité du système $(z_i^n)_{1 \leq i \leq i_n}$. $\square$

LEMME 4.4. *Il existe deux constantes $\mathcal{N}$ et K_0 ne dépendant que des données ρ , B et M telles que, $\forall \epsilon > 0$, $\forall \alpha > 0$, $\forall K_0 \geq K_0$, il existe n_0 dépendant de K_1 , ϵ , K_0 , et des données tel que:*

- a) $\forall \xi \in U_1$ il existe au plus $\mathcal{N}$ pavés $Q^{2,K_0}(z_i^n)$, $1 \leq i \leq i_n$, $n \geq n_0$, contenant le point ξ .
- b) $\forall n \geq n_0$ fixé, $\forall i \in \{1, \dots, i_n\}$, il existe au plus $\mathcal{N}$ boules $B_{\delta_n}^{K_0}(z_j^n, \frac{2K^2 \delta_n}{\epsilon})$, $1 \leq j \leq i_n$ qui rencontrent la boule $B_{\delta_n}^{K_0}(z_i^n, \frac{2K^2 \delta_n}{\epsilon})$.

DÉMONSTRATION. Choisissons tout d'abord n_0 assez grand pour que les pavés soient définis et que l'on puisse appliquer le Théorème 1.3.

En considérant la projection "normale" de ξ sur une surface de niveau de ρ convenable, on voit aussitôt que le a) résulte du b). Vérifions donc ce dernier.

Soient $B_{\delta_n}^{K_0}(z_{i_p}^n, \frac{2K^2(-\rho_n)}{\epsilon})$, $1 \leq p \leq m$, les boules qui rencontrent la boule donnée. D'après le Théorème 1.3, on a $\bigcup_{1 \leq p \leq m} B_{\delta_n}^{K_0}(z_{i_p}^n, \frac{2K^2 \delta_n}{\epsilon}) \subset B_{\delta_n}^{K_0}(z_i^n, \frac{2K^4 \delta_n}{\epsilon})$, ce qui, d'après la Proposition 1.4 implique

$$\sum_{p=1}^m \frac{1}{K_2 K_0^4} R_2 \left(z_{i_p}^n, \frac{\delta_n}{\epsilon} \right)^2 R_1 \left(z_{i_p}^n, \frac{\delta_n}{\epsilon} \right)^2 \leq \frac{K_2}{K_0^4} R_2 \left(z_i^n, 2K^4 \frac{\delta_n}{\epsilon} \right)^2 R_1 \left(z_i^n, 2K^4 \frac{\delta_n}{\epsilon} \right)^2.$$

Comme il résulte du Lemme 2.2 que

$$R_i \left(z_i^n, \frac{\delta_n}{\epsilon} \right) \geq \frac{1}{2K^4} R_i \left(z_i^n, 2K^4 \frac{\delta_n}{\epsilon} \right),$$

en choisissant n_0 assez grand de manière à pouvoir appliquer le Corollaire 3.6, on a $R_i(z_i^n, \frac{\delta_n}{\epsilon}) \leq B R_i(z_{i_p}^n, \frac{\delta_n}{\epsilon})$, $\forall p$, et il vient $m \leq 2K^4 K_2^2 B^4$ ce qui achève la preuve. $\square$

Considérons maintenant, pour $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, les fonctions de troncature $\varphi_{n,i} = \varphi_{\alpha,\beta}^{\alpha} = \varphi_{\alpha,\beta}^{z_i^n}$ obtenues en prenant $\beta = (\epsilon^1, \epsilon^2)$ où $\epsilon^2 = \frac{\epsilon}{2K^2}$ et $\epsilon^1 = \frac{\epsilon}{K^2}$, de sorte que $\varphi_{n,i}$ vaut 1 sur le pavé $Q^{1,K_0}(z_i^n)$ et a son support contenu dans le pavé $Q^{2,K_0}(z_i^n)$. Les Lemmes 4.4 et 4.3 montrent que les fonctions $\varphi_{n,i}$ forment une partition de l'unité. Plus précisément nous avons le lemme suivant:

LEMME 4.5. *Dans les conditions ci-dessus et avec les notations du Lemme 4.4, on a:*

Pour $n \geq n_0$ et $\zeta \in U_1 \cap \{\rho_n \leq \rho \leq \rho_{n+1}\}$, $1 \leq \sum_{1 \leq i \leq i_n} \varphi_{n,i}(\zeta) \leq \mathcal{N}$;

Nous allons maintenant donner les estimées sur les dérivées des fonctions $\varphi_{n,i}$ qui nous serviront dans le sous-paragraphe suivant.

Soit

$$\mathfrak{S}_2(z) = \inf_{2 \leq m \leq M} \mathfrak{S}_2^m(z).$$

Il nous faut tout d'abord contrôler la variation de $\mathfrak{S}_2$ dans les cubes $Q^{2,K_0}(z)$:

LEMME 4.6. *Il existe une constante B ne dépendant que de M et une constante K_0 dépendant des paramètres et des données ρ , B et M telles que, $\forall K_0 \geq K_0$, il existe un entier n_0 dépendant de K_0 des paramètres et des données tel que, pour $n \geq n_0$ et $\zeta \in Q^{2,K_0}(z_i^n)$, $1 \leq i \leq i_n$ on a:*

- 1) $e^{-BK_1^3} \mathfrak{S}_2^m(z_i^n) \leq \mathfrak{S}_2^m(\zeta) \leq e^{BK_1^3} \mathfrak{S}_2^m(z_i^n)$, pour tout m tel que $\mathfrak{S}_2^m(z_i^n) \leq 2\mathfrak{S}_2(z_i^n)$;
- 2) $e^{-BK_1^3} \mathfrak{S}_2(z) \leq \mathfrak{S}_2(\zeta) \leq e^{BK_1^3} \mathfrak{S}_2(z_i^n)$.

DÉMONSTRATION. Pour $m \in [2, M]$, $D > 0$ et $z \in U_0$, notons $Q_{m,D}^{2,K_0}(z)$ le pavé obtenu en remplaçant dans la définition du pavé $Q^{2,K_0}(z)$ la pseudo-boule $B_{\delta(z)}^{K_0}\left(z, \frac{K^2\delta(z)}{\epsilon}\right)$ par la pseudo-boule $B_{m,2}^{K_0}\left(z, \frac{K^2D\delta(z)}{\epsilon}\right)$ sur la surface de niveau $\{\rho = \rho(z)\}$ de ρ (n_0 et K_0 étant choisis assez grands de sorte que ces pavés ainsi que ceux de l'énoncé soient définis et que l'on puisse appliquer les résultats des paragraphes précédents en particulier la Proposition 3.4 et le Corollaire 3.6 avec $C = \frac{DK^2}{\epsilon}$).

Montrons tout d'abord que, pour $K_0 \geq K_0$ et $\delta(z) \leq \delta_0$, K_0 et δ_0 dépendant en particulier de D , $\forall \zeta \in Q_{m,D}^{K_0}(z)$ on a

$$(4.14) \quad e^{-BK_1^3} \mathfrak{S}_2^m(z) \leq \mathfrak{S}_2^m(\zeta) \leq e^{BK_1^3} \mathfrak{S}_2^m(z),$$

où B ne dépend que de M .

Pour $n \geq n_0$, soit $\pi^z(\zeta)$ la "projection normale" de ζ sur la surface de niveau de ρ contenant z . Soit $\varphi(t)$ une paramétrisation de la courbe intégrale de la normale réelle passant par ζ c'est-à-dire telle que $\varphi'(t) = a\Re(\varphi(t))$, $\varphi(0) = \pi^z(\zeta)$, $\varphi(1) = \zeta$ et $|a| \leq K_1^2\delta(\pi^z(\zeta))$. Posons $s(t) = \mathfrak{S}_2^m(\varphi(t))$. Alors $s'(t) = a\Re N \mathfrak{S}_2^m(\varphi(t))$.

Le choix de $n = 2M$ et la Proposition 3 de [2] montrent que, pour n_0 assez grand (dépendant des données) on a

$$\left| \frac{s'(t)}{s(t)} \right| \leq 4MK_1^2 \frac{\delta(z)}{\delta(\varphi(t))} \leq 4MK_1^3.$$

En posant $u(t) = \log(s(t))$, il vient $|u'(t)| \leq 4MK_1^3$ et on trouve

$$e^{-4MK_1^3} s(0) \leq s(1) \leq e^{4MK_1^3} s(0),$$

et la formule (4.14) se déduit de cette inégalité et de la Proposition 3.4.

Le 1) du Lemme 4.6 se déduit immédiatement de (4.14) car avec ce choix de m et $D = 4^M K^2$, on a $Q^{2, K_0}(z_i^n) \subset Q_{m, D}^{2, K_0}(z_i^n)$.

La seconde inégalité du 2) est immédiate par passage à la limite. Pour voir la première, on fixe tout d'abord m comme il est dit au 1). On remarque alors qu'il résulte de ce qui précède qu'il existe une constante K dépendant des paramètres et des données telle que

$$\frac{1}{K} R_2^m(z_i^n, \delta(z_i^n)) \leq R_2^m(\zeta, \delta(\zeta)) \leq K R_2^m(z_i^n, \delta(z_i^n))$$

et, en utilisant une méthode analogue à celle utilisée dans la démonstration de la Proposition 3.4 pour l'étude des variations de la fonction $W(\zeta, \delta(\zeta))$, le même raisonnement que ci-dessus pour $\mathfrak{S}_2^m$ montre que cette inégalité est vraie si on remplace R_2^m par r_1^m .

On en déduit alors qu'il existe une constante D dépendant des paramètres et des données telle que $z_i^n \in Q_{m, D}^{2, K_0}(\zeta)$. Par suite, si on choisit m_1 tel que $\mathfrak{S}_2^{m_1}(\zeta) \leq 2\mathfrak{S}_2(\zeta)$, quitte à multiplier la constante D par une constante ne dépendant que des données, on a $z_i^n \in Q_{m_1, D}^{2, K_0}(\zeta)$. De cette manière, on a échangé les rôles de ζ et z_i^n et on peut conclure quitte à changer K_0 . $\square$

LEMME 4.7. *Il existe une constante K ne dépendant que des données, et une constante K_0 dépendant des données et des paramètres et, pour tout $K_0 \geq K_0$ un entier n_0 dépendant de K_0 des paramètres et des données tels que pour $n \geq n_0$ et tous i , $1 \leq i \leq i_n$, on a, pour $\zeta \in U_1$:*

- 1) $\Re N\varphi_{n,i}(\zeta) \leq 0$ pour $\rho_n \leq \rho(\zeta) \leq \rho_{n+2}$;
- 2) $|\Re N\varphi_{n,i}(\zeta)| \leq \alpha \frac{\varphi_{n,i}(\zeta)}{-\rho(\zeta)}$ pour $\frac{\rho_{n-1}}{2} \leq \rho(\zeta) \leq \rho_n$;
- 3) $|\Re N\varphi_{n,i}(\zeta)| \leq \frac{4\alpha}{(\rho(\zeta))}$ pour $\rho_{n-1} \leq \rho(\zeta) \leq \frac{\rho_{n-1}}{2}$;
- 4) Pour $\zeta \in U_0$,

$$|T\varphi_{n,i}(\zeta)| \leq K \left(K_1^2 \left(\epsilon + K_0 \epsilon^{1-1/M} (-\rho_n)^{1/M} \right) \right) \frac{1}{-\rho(\zeta)},$$

et,

$$|L_2\varphi_{n,i}(\zeta)| \leq \tilde{K} \left(\frac{S_2(\zeta)}{-\rho(\zeta)} \right)^{1/2}.$$

où $\tilde{K}$ dépend de α , K_0 et des données.

DÉMONSTRATION. Les trois premières inégalités du lemme résultent immédiatement des trois premières du Lemme 4.1 et, la première du 4) résulte du 4) du même lemme.

Vérifions donc la seconde du 4). D'après le Lemme 4.2, on a

$$|L_2\varphi_{n,i}(\zeta)| \leq K K_0 K_1 \epsilon^{1/2} \left(\frac{S_2\left(z_i^n, \frac{K^2(-\rho(z_i^n))}{\epsilon}\right)}{-\rho(z_i^n)} \right)^{1/2}$$

Par ailleurs, d'après le Lemme 2.2, on a

$$S_2\left(z_j^n, \frac{K^2(-\rho(z_j^n))}{\epsilon}\right) \leq \frac{K^2}{\epsilon} S_2(z_j^n),$$

et comme ζ appartient au support de la fonction $\varphi_{n,i}$, on déduit facilement du Lemme 4.6 que

$$S_2(z_j^n) \leq e^{BK_1^3} S_2(\zeta).$$

Le résultat provient finalement de l'inégalité $-\rho(z_j^n) \geq \frac{-\rho(\zeta)}{K_1^2}$. $\square$

4.3. – Démonstration du Théorème 1.5

Dans ce dernier sous-paragraphe, bien que quelque peu différentes de celles utilisées jusqu'à présent, nous allons utiliser les notations définies dans [2].

Précisément, nous reprenons les notations définies au Paragraphe 1 de la partie IV pp. 327-328 de [2]: les fonctions ψ , χ_1 et χ_2 , les écritures $\mathcal{L}(\partial\rho)$, $\mathcal{L}(\chi_2)$ et $\mathcal{L}(\gamma)$ et les fonctions $\mathfrak{S}_0^m$ et $\mathfrak{S}_2^m$ (ces fonctions étant notées $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ dans [2]). Nous supposons de plus $B(z_0, r) \subset U_1$. Enfin rappelons que nous avons posé $\mathfrak{S}_2(z) = \inf_m \mathfrak{S}_2^m(z)$.

Le principe de la démonstration étant le même que celui utilisé dans [2], nous allons reprendre la preuve faite au Paragraphe 3 de la partie IV (pp. 337-345). Pour des raisons de notations, le paramètre ϵ de [2] (pp. 339-340) sera noté ici η .

Nous allons démontrer l'inégalité cherchée, comme dans [2], lorsque θ est de classe C^∞ dans un voisinage de $\bar{\Omega}$. La constante intervenant dans l'inégalité finale ne dépendant pas du courant θ , le Théorème 1.5 s'en déduit par une régularisation classique dont nous ne parlerons pas.

La modification fondamentale dans la démonstration est l'introduction d'une partition de l'unité du type de celles définies au sous-paragraphe précédent.

Nous nous fixons tout d'abord des paramètres α et ϵ . Fixons $K_0 \geq K_1$ assez grand ainsi que n_0 de façon à ce que les lemmes du Sous-Paragraphe 4.2 relatifs à la partition $(\varphi_{n,i})_{n \geq n_0, 1 \leq i \leq i_n}$ soient vérifiés.

Comme dans [2], p. 338, considérons une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^3)$, à support dans $\Omega' = \Omega \setminus \Omega_{2\eta}$ (où $\Omega_s = \{\rho < -s\}$), identiquement égale à 1 dans $\Omega \setminus \Omega_\eta$.

Posons, avec $\mathfrak{S}_0(z) = \mathfrak{S}_0^M(z)$,

$$\begin{aligned} \omega = & (-\rho)\psi \frac{i^2\theta \wedge \bar{\partial}\rho \wedge (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2)}{(\mathfrak{S}_0)^{1/n}} \\ & + (-\rho)\psi \sum_{\substack{1 \leq i \leq i_k \\ k \geq n_0}} \varphi_{k,i} \frac{i^2\theta \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1}{\left(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}}\right)^{1/n}}, \end{aligned}$$

$m_{k,i}$ étant choisi, pour $k \geq n_0$, tel que

$$(4.15) \quad \mathfrak{S}_2^{m_{k,i}}(z_i^k) \leq 2\mathfrak{S}_2(z_i^k).$$

Enfin, soit

$$\begin{aligned} I = & \int_{\Omega} \psi \frac{i^2\theta \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2)}{\mathfrak{S}_0^{1/n}} \\ & + \sum_{k,i} \int_{\Omega} \psi \varphi_{k,i} \frac{i^2\theta \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1}{\left(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}}\right)^{1/n}}. \end{aligned}$$

Comme dans [2] p. 338, en appliquant la formule de Stokes à la forme différentielle $\varphi\omega$ il vient

$$(4.16) \quad I \leq \sum_{j=1}^7 I_j + \frac{K}{\eta^2} \int_{\Omega} (-\rho)|\theta|,$$

où les I_j sont essentiellement les mêmes que dans [2] pour $1 \leq j \leq 4$ et les I_j pour $5 \leq j \leq 7$ sont des termes nouveaux apparaissant lors des dérivations des fonctions $\varphi_{k,i}$:

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{\Omega'} \left\{ \frac{(-\rho)}{\mathfrak{S}_0^{1/n}} |\partial\psi \wedge \theta \wedge \bar{\partial}\rho \wedge (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2)| \right. \\ & \left. + \sum_{k,i} \varphi_{k,i} \frac{(-\rho)}{\left(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}}\right)^{1/n}} |\partial\psi \wedge \theta \wedge \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2| \right\}, \\ I_2 = & \int_{\Omega'} \left\{ \frac{\psi(-\rho)}{\mathfrak{S}_0^{1/n}} |\theta \wedge \partial\bar{\partial}\rho \wedge (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2)| \right. \\ & \left. + \sum_{k,i} \varphi_{k,i} \frac{\psi(-\rho)}{\left(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}}\right)^{1/n}} |\theta \wedge \partial\bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1| \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\Omega'} \left\{ \frac{\psi(-\rho)}{\mathfrak{S}_0^{1/n}} |\theta \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \partial(\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2)| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k,i} \varphi_{k,i} \frac{\psi(-\rho)}{(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{1/n}} |\theta \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \partial(\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1)| \right\}, \\
I_4 &= \frac{1}{n} \int_{\Omega'} \left\{ \frac{\psi(-\rho)}{\mathfrak{S}_0^{1+1/n}} |\partial\mathfrak{S}_0 \wedge \theta \wedge \bar{\partial}\rho \wedge (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2)| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k,i} \varphi_{k,i} \frac{\psi(-\rho)}{(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{1+1/n}} |\partial\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}} \wedge \theta \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1| \right\}, \\
I_5 &= \sum_{k,i} \int_{\{\rho \leq \rho_k\}} \psi(-\rho) |\Re N \varphi_{k,i}| \frac{|\theta \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{1/n}}, \\
I_6 &= \sum_{k,i} \int_{\Omega'} \psi(-\rho) |T \varphi_{k,i}| \frac{|\theta \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{1/n}},
\end{aligned}$$

et

$$I_7 = \sum_{k,i} \int_{\Omega'} \psi(-\rho) |L_2 \varphi_{k,i}| \frac{|\theta \wedge \omega_2 \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{1/n}}.$$

En effet, en appliquant directement la formule de Stokes on obtient, à la place de I_5 , une majoration de la forme $I_5 + I'_5$ où

$$I'_5 = \int_{\{\rho \geq \rho_k\}} \psi(-\rho) \Re N \varphi_{k,i} \frac{|\theta \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{1/n}}.$$

et, d'après le Lemme 4.7, I'_5 est négative et on peut la négliger pour l'inégalité (4.16).

Le principe de la preuve consiste à majorer le second membre de (4.16) par $CI + K \int (-\rho)|\theta|$ avec $0 \leq C < 1$.

Reprenons tout d'abord rapidement les majorations faites dans [2] pour les quatre premières intégrales ci-dessus.

a) Majoration de I_1 :

Les mêmes arguments que dans [2] donnent

$$(4.17) \quad I_1 \leq K \int_{\Omega} (-\rho) |\theta|,$$

où K est une constante ne dépendant que des données.

b) Majoration de I_2 .

Là aussi il suffit de reprendre le calcul fait dans [2]: on obtient, pour toute constante C positive,

$$(4.18) \quad I_2 \leq \frac{K}{C} I + CK \int_{\Omega} (-\rho) |\theta|,$$

où K est une constante ne dépendant encore que des données.

c) Majoration de I_3 .

Les calculs de [2] se reproduisent encore stricto-sensu, la seule différence concerne le terme contrôlé par la Proposition 2 p. 330. Celle-ci donnant une majoration indépendante de m , on a

$$(-\rho) \frac{|\gamma|^2}{(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{2/n}} \leq \frac{K}{(\mathfrak{S}_0^{m_{k,i}})^{1/n}},$$

et si on remarque que $\mathfrak{S}_0 \leq K \mathfrak{S}_0^m$, $2 \leq m \leq M$, la majoration de I_3 p. 343 de [2] et le lemme 4.5 donnent finalement, pour toute constante positive C ,

$$(4.19) \quad I_3 \leq \frac{K}{C} I + KC \int_{\Omega} (-\rho) |\theta|,$$

où K est une constante ne dépendant que des données.

d) Majoration de I_4 .

Les Propositions 3 et 4 de [2] étant valables pour $m \in [2, M]$ avec des constantes indépendantes de m , la majoration faite dans [2] p. 343-344 s'applique ici sans difficulté et il vient, pour toute constante positive C ,

$$(4.20) \quad I_4 \leq \left(c_0 + K \eta^{2/M} + \frac{K}{C} \right) I + KC \int_{\Omega} (-\rho) |\theta|,$$

où $0 < c_0 < 1$ et K est une constante ne dépendant que des données.

En regroupant (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) et (4.20) on obtient

$$(4.21) \quad I \leq \left(c_0 + K \eta^{2/M} + \frac{K}{C} \right) I + \left(\frac{K}{\eta^2} + CK \right) \int_{\Omega} (-\rho) |\theta| + I_5 + I_6 + I_7,$$

les constantes K ne dépendant que des données ρ , B et M (en particulier elles ne dépendent pas des paramètres de la partition de l'unité choisie). Alors, en choisissant η assez petit et C assez grand pour que

$$c_0 + K \eta^{2/M} + \frac{K}{C} < 1,$$

et en posant

$$2s = 1 - c_0 - K\eta^{2/M} - \frac{K}{C},$$

il vient

$$(4.22) \quad 2sI \leq K \int_{\Omega} (-\rho)|\theta| + I_5 + I_6 + I_7,$$

où $s > 0$ et K sont des constantes ne dépendant que des données ρ , $\mathcal{B}$ et M .

Nous en arrivons maintenant aux termes nouveaux par rapport à notre précédent travail: nous allons voir que l'on peut choisir les paramètres α , ϵ et K_0 dont dépend la partition de l'unité pour conclure.

Majoration de I_5 .

Posons $I_5 = I_5^1 + I_5^2$ où, dans I_5^1 l'intégration est étendue au domaine $\{\frac{\rho_{k-1}}{2} \leq \rho \leq \rho_k\}$ et, dans I_5^2 , étendue au domaine $\rho_{k-1} \leq \rho \leq \frac{\rho_{k-1}}{2}$.

Il résulte tout d'abord immédiatement du Lemme 4.7 que

$$(4.23) \quad I_5^1 \leq \alpha I$$

D'autre part, ce même lemme donne, en notant $\chi_{k,i}$ la fonction caractéristique de $(\text{Supp}\varphi_{k,i}) \cap \{\rho_{k-1} \leq \rho \leq \frac{\rho_{k-1}}{2}\}$,

$$I_5^2 \leq I_{n_0} + 4\alpha \sum_{k,i,k>n_0} \int_{\Omega'} \psi \chi_{k,i} \frac{|\theta \wedge \rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{\mathfrak{S}_2^{1/n}},$$

où I_{n_0} est la somme des termes de I_5^2 pour lesquels $k = n_0$. D'après le Lemme 4.5, on a $\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_{k-1,j} \geq 1$ sur $\{\rho_{k-1} \leq \rho \leq \rho_k\}$, et, en intercalant $\sum_j \varphi_{k-1,j}$ dans l'inégalité précédente et en échangeant les sommations, il vient, en utilisant le Lemme 4.4,

$$I_5^2 \leq I_{n_0} + 4\alpha \mathcal{N} \sum_{k,j,k>n_0} \int_{\Omega'} \psi \chi_k \varphi_{k-1,j} \frac{|\theta \wedge \partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{\mathfrak{S}_2^{1/n}},$$

où χ_k est la fonction caractéristique de la bande $\{\rho_{n-1} \leq \rho \leq \frac{\rho_{n-1}}{2}\}$.

Notons maintenant que la Proposition 3.4 et le Lemme 4.6 montrent qu'il existe une constante K ne dépendant que des données telle que, sur le support de $\chi_k \varphi_{k-1,j}$, on a $\mathfrak{S}_2^{m_{k-1,j}} \leq K \mathfrak{S}_2$, ce qui donne

$$(4.24) \quad I_5^2 \leq I_{n_0} + 4\alpha \mathcal{N} K I.$$

En regroupant (4.23) et (4.24) on obtient la majoration de I_5 :

$$(4.25) \quad I_5 \leq I_{n_0} + \alpha \mathcal{N} K I.$$

Majoration de I_6 :

Posons $K_k(\alpha, \epsilon, K_0) = K K_1^2(\epsilon + K_0(-\rho_k)^{1/M})$ (où $K_1 = \frac{1}{\alpha}^{1/\alpha}$). Le Lemme 4.7 donne

$$I_6 \leq \sum_{k,i} \int_{\Omega'} \psi \chi_{k,i} K_k(\alpha, \epsilon, K_0) \frac{|\theta \wedge \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{\mathfrak{S}_2^{1/n}},$$

où $\chi_{k,i}$ est la fonction caractéristique du support de $\varphi_{k,i}$. Le Lemme 4.5 entraîne donc

$$I_6 \leq \sum_{l,j} \int_{\Omega'} \psi \varphi_{l,j} \left(\sum_{k,i,k \geq n_0} \chi_{k,i} K_k(\alpha, \epsilon, K_0) \right) \frac{|\theta \wedge \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{\mathfrak{S}_2^{1/n}}.$$

Par ailleurs, la Proposition 1.4 et le Lemme 4.4 montrent qu'il existe une constante $\tilde{K}(\alpha)$ ne dépendant que de α et des données telle que, pour l et j fixés, le nombre de couples (k, i) tels que $\varphi_{l,j} \chi_{k,i}$ soit non identiquement nul est majoré par $\tilde{K}(\alpha)$. Alors le Lemme 4.6 et le choix des paramètres $m_{k,i}$ impliquent

$$(4.26) \quad I_6 \leq K(\alpha) K_{n_0}(\alpha, \epsilon, K_0) I,$$

où $K(\alpha)$ est une constante qui ne dépend que de α et des données.

Majoration de I_7 :

Le Lemme 4.7 et un raisonnement similaire à celui fait ci-dessus montrent que

$$I_7 \leq \tilde{K} \sum_{k,i} \int_{\Omega'} \psi \varphi_{k,i} (-\rho)^{1/2} \frac{|\theta \wedge \omega_2 \wedge \bar{\partial} \rho \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1|}{(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{1/n}},$$

où $\tilde{K}$ est une constante dépendant de α de K_0 et des données. Si nous appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient, pour toute constante $C > 0$

$$(4.27) \quad I_7 \leq \frac{1}{C} I + K(\alpha, K_0, C) \int_{\Omega} (-\rho) |\theta|,$$

où $K(\alpha, K_0, C)$ dépend de α , K_0 , C et des données.

En regroupant (4.22), (4.25), (4.26) et (4.27) on obtient finalement

$$(4.28) \quad \begin{aligned} 2sI &\leq \left(\alpha \mathcal{N} K + K(\alpha) K_{n_0}(\alpha, \epsilon, K_0) + \frac{1}{C} \right) I \\ &\quad + I_{n_0} + K(\alpha, K_0, C) \int_{\Omega} (-\rho) |\theta|. \end{aligned}$$

Choisissons alors $\alpha = \frac{s}{NK}$. Ceci nous fixe $K(\alpha)$ et $K_1 > 1$. Considérons alors

$$K_{n_0}(\alpha, \epsilon, K_0) = K K_1^2 \left(\epsilon + K_0 \left(\frac{-\rho_0}{K_1^n} \right)^{1/M} \right).$$

Comme K_1 et $K(\alpha)$ sont fixés, nous pouvons choisir $\epsilon > 0$ de sorte que $KK(\alpha)K_1^2\epsilon \leq \frac{s}{4}$. Fixons maintenant K_0 et $K_0 \geq K_0$ (on rappelle que K_0 ne dépend que de ϵ et des données). Ces choix impliquent

$$K(\alpha)K_{n_0}(\alpha, \epsilon, K_0) \leq \frac{s}{4} + \frac{KK(\alpha)(-\rho_0)^{1/M}}{K_1^{n_0-2}}.$$

Comme nous l'avons vu au sous-paragraphe précédent (c.f. Lemme 4.6), n_0 dépend des paramètres α, ϵ, K_0 et des données. Comme ceux-ci sont maintenant fixés, quitte à l'augmenter, on peut supposer de plus $K_{n_0}(\alpha, \epsilon, K_0) \leq s/2$.

Si nous choisissons enfin C de sorte que $\frac{1}{C} \leq \frac{s}{4}$, puisque s ne dépend que des données, n_0 ne dépend finalement que des données, et l'inégalité (4.28) devient

$$2sI \leq \frac{7}{4}sI + I_{n_0} + K \int_{\Omega} (-\rho)|\theta|,$$

où K ne dépend que des données ρ, B et M .

Comme

$$I_{n_0} \leq 2\alpha \mathcal{N} \left(\frac{K_1^{n_0+1}}{-\rho_0} \right)^{1-\frac{2}{M}} \int_{(-\rho) > \frac{K_1^{n_0+1}}{-\rho_0}} |\theta|,$$

il existe une constante K ne dépendant que des données telle que

$$I \leq K \int_{\Omega} (-\rho)|\theta|.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, quitte à changer la constante K de l'inégalité ci-dessus, d'après le Lemme 4.6 on peut remplacer, dans les intégrales de I , les fonctions $(\mathfrak{S}_2^{m_{k,i}})^{1/n}$ par S_2 . $\square$

5. – Appendice: estimations des dérivées de l'application exponentielle

Le but de ce paragraphe est de démontrer les Lemmes 2.10 et 3.9.

Rappelons qu'au Sous-Paragraphe 2.2 nous avons posé, pour $z \in U$,

$$\mathcal{W}_u = \sum_{i=1}^5 u_i \mathcal{W}_i, \quad \Phi^z(u) = \exp_z(\mathcal{W}_u) \quad \text{et} \quad \Psi^z = (\Phi^z)^{-1},$$

où, pour $i = 1, 2, \dots, 5$, $\mathcal{W}_i$ désigne les champs $L_1, \bar{L}_1, L_2, \bar{L}_2$ et T .

Notons $d(\Phi^z)_u$ la différentielle de Φ^z au point $u \in \mathbb{R}^5$.

Comme dans [5] le point de départ de la démonstration est le lemme suivant (c.f. [5] Lemme 2.12, p. 127):

LEMME 5.1. *Il existe des constantes absolues α_i , $i \in \mathbb{N}$, et des constantes ϵ_0 et K_n , $n \in \mathbb{N}$, ne dépendant que de $\mathcal{B}$, telles que, pour $z \in U \cap \partial\Omega$ et $|u| \leq \epsilon_0$, on a*

$$\left| d(\Phi^z)_u \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right) - \left(\mathcal{W}_i(\zeta_u) + \sum_{k=2}^n \alpha_k [\mathcal{W}_u \dots [\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] \dots](\zeta_u) \right) \right| \leq K_n |u|^{n+1},$$

où le crochet facteur de α_k est de longueur k .

Nous utiliserons ce lemme sous une forme plus précise.

Soit F une fonction $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\partial\Omega \cap U$ et soit $f(u) = F \circ \Phi^z(u) = F(\zeta_u)$, $|u| \leq \epsilon_0$. Les champs $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \dots, 5$ formant une base de champs tangents à $\partial\Omega$ il existe des fonctions $\alpha_i^k(\zeta)$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(u) = \sum_{k=1}^5 \alpha_i^k(\zeta_u) \mathcal{W}_k(F)(\zeta_u).$$

Par ailleurs, avec les notations du Lemme 5.1, et pour la même raison, il existe des fonctions β_i^k telles que

$$\mathcal{W}_i(\zeta_u) + \sum_{l=2}^M \alpha_l [\mathcal{W}_u \dots [\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] \dots](\zeta_u) = \sum_{k=1}^5 \beta_i^k(\zeta_u) \mathcal{W}_k(\zeta_u).$$

Alors, le Lemme 5.1 (avec $n = M$) peut s'écrire:

LEMME 5.2. *Il existe une constante δ_0 ne dépendant que des données ρ , $\mathcal{B}$ et M telle que, pour $z \in U_0 \cap \partial\Omega$, $\delta \leq \delta_0$ et, soit $|u_i| \leq \mathcal{R}_i^m(z, \delta)$, $i = 1, \dots, 5$, soit $|u_i| \leq \mathcal{R}_i(z, \delta)$, $i = 1, \dots, 5$, on a,*

$$\left| \alpha_i^k(\zeta_u) - \beta_i^k(\zeta_u) \right| \leq \delta, \quad 1 \leq i, j \leq 5.$$

En effet, dans le cas $|u_i| \leq \mathcal{R}_i^m(z, \delta)$, on voit aisément que, pour δ assez petit, $\delta = \mathcal{R}_5^m(z, \delta) \leq \mathcal{R}_i^m(z, \delta) \leq \mathcal{R}_j^m(z, \delta) \leq \delta^{1/M}$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4$.

Dans le second cas (i.e. $|u_i| \leq \mathcal{R}_i(z, \delta)$), vérifions que les mêmes inégalités sont vraies pour δ assez petit:

$$\delta = \mathcal{R}_5(z, \delta) \leq \mathcal{R}_i(z, \delta) \leq \mathcal{R}_j(z, \delta), \quad i = 1, 2, \quad j = 3, 4.$$

En effet, toutes les inégalités, sauf l'avant dernière, découlent immédiatement des définitions des $\mathcal{R}_i$. Montrons donc seulement que $\mathcal{R}_1(z, \delta) \leq \mathcal{R}_3(z, \delta)$. Par définition, $\mathcal{R}_3(z, \delta) = \frac{\delta^{1/2}}{(\inf_m S_2^m(z, \delta))^{1/2}}$. Examinons, dans les termes composant $S_2^m(z, \delta)$, la puissance de δ . Les seules puissances négatives ne peuvent provenir que des termes $|\mathcal{L}(\partial\rho)|^{\frac{2}{c}} \delta^{1-\frac{2}{c}}$ avec $\mathcal{L} \in W_2$. Comme $1 - \frac{2}{c} = 1 - \frac{2}{l_2} \left(1 - \frac{l_1}{m}\right)$,

la seule possibilité est d'avoir $l_2 = 1$ ce qui donne $1 - \frac{2}{c} = -1 + \frac{2l_1}{m}$ qui est minimal pour $l_1 = 1$ soit $1 - \frac{2}{c} = -1 + \frac{2}{m}$.

En conclusion $S_2^m(z, \delta) \leq K\delta^{-1+\frac{2}{m}}$, où K est une constante ne dépendant que des données. En particulier, pour $m = 2$, $S_2^m(z, \delta) \leq K$ et donc $\mathcal{R}_3(z, \delta) \geq \frac{\delta^{1/2}}{K}$. L'inégalité cherchée découle maintenant trivialement de la définition des $\mathcal{R}_i$, et du fait que $\mathcal{R}_3(z, \delta) \leq \delta^{1/M}$, pour δ assez petit.

Le principe de la démonstration des Lemmes 2.10 et 3.9 consiste à estimer les dérivées de Ψ^z dans les pseudo-boules à partir d'une estimation des coefficients $\alpha_i^k(\zeta_u)$. Ceci est fait au Sous-Paragraphe 5.2.

Le Lemme 5.2 sert à estimer les $\alpha_i^k(\zeta_u)$ à partir d'une estimation des coefficients $\beta_i^k(\zeta_u)$. Pour estimer ces derniers nous allons tout d'abord, dans le Sous-Paragraphe 5.1 calculer avec suffisamment de précision les crochets $[\mathcal{W}_u \dots [\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] \dots]$.

5.1. – Estimations des crochets $[\mathcal{W}_u \dots [\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] \dots]$

Considérons donc un crochet $[\mathcal{W}_u \dots [\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] \dots]$ de longueur n inférieure ou égale à M et posons

$$(5.29) \quad [\mathcal{W}_u \dots [\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] \dots](\xi) = \sum_{k=1}^5 \eta_i^{k,n}(\xi) \mathcal{W}_k(\xi),$$

pour $\xi \in U$ et $|u| \leq \epsilon_0$, de sorte que $\beta_i^k(\xi_u) = \delta_i^k + \sum_{n=2}^M \alpha_n \eta_i^{k,n}(\xi_u)$ où δ_i^k désigne le symbole de Kronecker.

L'estimation des coefficients β_i^k va résulter d'une estimation des coefficients $\eta_i^{k,n}$. Comme cette dernière (Corollaire 5.5) sera écrite sous une forme indépendante de la longueur n du crochet, dans la suite de cet appendice nous omettrons l'indice n du coefficient $\eta_i^{k,n}$ pour alléger les notations.

Pour des raisons de commodité d'écriture, nous allons introduire de nouvelles notations pour ce sous-paragraphe.

Posons:

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= a_{i,j}^1 L_1 + a_{i,j}^2 L_2, \\ [L_i, \bar{L}_j] &= a_{i,\bar{j}}^1 L_1 + a_{i,\bar{j}}^2 L_2 + a_{i,\bar{j}}^{\bar{1}} \bar{L}_1 + a_{i,\bar{j}}^{\bar{2}} \bar{L}_2 + c_{i,j} T, \end{aligned}$$

et

$$[L_i, T] = d_{i,1} L_1 + d_{i,\bar{1}} \bar{L}_1 + d_{i,2} L_2 + d_{i,\bar{2}} \bar{L}_2 + e_i T.$$

Les fonctions ainsi définies sont C^∞ au voisinage de z_0 et on notera que $a_{2,\bar{2}}^1 = \gamma$.

A l'aide de ces fonctions définissons des classes $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n$:

Soit $\mathcal{A}_1$, l'ensemble constituée de -1 , $+1$ et de tous les coefficients définis dans les trois formules ci-dessus ainsi que de leurs conjugués. Puis, par récurrence, $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n \cdot \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n \cup_{i=1}^4 \{\mathcal{W}_i \mathcal{A}_n\}$.

Soient maintenant α et β deux réels tels que $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$. Nous appellerons **fonction de type** $b_n(\alpha^i \beta^j)$ toute fonction de la forme $\sum_{0 \leq k \leq k(n)} c_k f_k$ où les c_k sont des constantes telles que $|c_k| \leq \alpha^i \beta^j$ et les f_k des fonctions appartenant à $\mathcal{B}_{n-1}$. Par souci de simplification, toutes les fonctions de type $b_n(\alpha^i \beta^j)$ seront notées $b_n(\alpha^i \beta^j)$. Dans le même ordre d'idée, l'écriture $b_n(\alpha^i \beta^j)(F_1 + F_2)$ désigne la somme de F_1 et F_2 chacune multipliée par une fonction de type $b_n(\alpha^i \beta^j)$.

Enfin, en plus de la notation $\mathcal{L}(f)$ introduite au Paragraphe 1.1, nous utiliserons, dans les Lemmes 5.3 et 5.4, la convention suivante: si $\mathcal{L} = (L^1, \dots, L^k)$ est une liste de champs et f une fonction C^∞ , on notera $\mathcal{L}f = L^1 \dots L^k f$.

Remarquons que si on pose $\mathcal{W}'_u = \sum_{i=1}^4 u_i \mathcal{W}_i$, on a

$$[\mathcal{W}_u \dots [\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] \dots] = [\mathcal{W}'_u \dots [\mathcal{W}'_u, \mathcal{W}_i] \dots] + O(u_5),$$

et, comme le calcul des crochets nous sera utile pour $|u_5| \leq \delta$, pour pouvoir obtenir les majorations du sous-paragraphe suivant, il nous suffit de calculer $[\mathcal{W}'_u \dots [\mathcal{W}'_u, \mathcal{W}_i] \dots]$.

Considérons donc $\mathcal{W}_u = \sum_{i=1}^4 u_i \mathcal{W}_i$ avec $|u_i| \leq \alpha$, $i = 1, 2$, $|u_i| \leq \beta$, $i = 3, 4$, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ et notons $\mathcal{W}^i = [\mathcal{W}_u \dots [\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] \dots] = \sum_{k=1}^5 A_k^i \mathcal{W}_k$ le crochet de longueur n , de sorte que $A_k^i = \eta_i^k(u_1, u_2, u_3, u_4, 0)$.

Alors:

LEMME 5.3. *Pour $i = 1, 2$, on a:*

$$A_k^i = b_n(\beta), \text{ pour } 1 \leq k \leq 4,$$

et,

$$\begin{aligned} A_5^i &= \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{|\mathcal{L}|=k} b_n(\alpha^l \beta^{l_2+1}) (\mathcal{L}c_{1,2} + \mathcal{L}c_{2,1}) \\ &\quad + b_n(\alpha^{l_1+1} \beta^{l_2}) \mathcal{L}c_{1,1} + b_n(\alpha^{l_1} \beta^{l_2+2}) \mathcal{L}c_{2,2}. \end{aligned}$$

LEMME 5.4. *Pour $i = 3, 4$, on a:*

$$A_k^i = b_n(\alpha) + \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=l \\ l_1=0}} b_n(\beta^{l+1}) (\mathcal{L}\gamma + \beta \mathcal{L}c_{2,2}), \text{ pour } k = 1, 2,$$

$$A_k^i = b_n(\beta), \text{ pour } k = 3, 4,$$

et, pour $k = 5$, $A_5^i = A_{51}^i + A_{52}^i + A_{53}^i + A_{54}^i$, avec

$$A_{51}^i = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k \\ k=l_1+l_2}} b_n(\alpha^{l_1+1} \beta^{l_2}) (\mathcal{L}c_{1,2} + \mathcal{L}c_{2,1}),$$

$$A_{52}^i = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k \\ k=l_1+l_2}} b_n \left(\alpha^{l_1} \beta^{l_2+1} \right) \mathcal{L} c_{2,2},$$

$$A_{53}^i = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k \\ k=l_1+l_2}} b_n \left(\alpha^{l_1+2} \beta^{l_2} \right) \mathcal{L} c_{1,1},$$

et

$$A_{54}^i = \sum_{k=0}^{n-3} \sum_{\substack{|\mathcal{L}'|+|\tilde{\mathcal{L}}|=k \\ |\mathcal{L}'|=l'_1+l'_2 \\ |\tilde{\mathcal{L}}|=l_1+l_2}} b_n \left(\alpha^{l'_1+l_2} \beta^{l'_2+l_2+2} \right) (\mathcal{L}' c_{1,2} + \mathcal{L}' c_{2,1}) (\tilde{\mathcal{L}} \gamma + \tilde{\mathcal{L}} c_{2,2})$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-3} \sum_{\substack{|\mathcal{L}'|+|\tilde{\mathcal{L}}|=k \\ |\mathcal{L}'|=l'_1+l'_2 \\ |\tilde{\mathcal{L}}|=l_1+l_2}} b_n \left(\alpha^{l'_1+l_1+1} \beta^{l'_2+l_2+1} \right) \mathcal{L}' c_{1,1} (\tilde{\mathcal{L}} \gamma + \tilde{\mathcal{L}} c_{2,2}).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.3. Nous la faisons par récurrence sur n . Tout d'abord, pour $n = 2$, on a, pour $i = 1, 2$,

$$[\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] = \sum_{k=1}^4 u_k [\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_i]$$

$$= b_2(\beta) \left(\sum_{i=1}^4 \mathcal{W}_i \right) + (b_2(\alpha) c_{1,1} + b_2(\beta) (c_{1,2} + c_{2,1})) \mathcal{W}_5.$$

Supposons donc le lemme vrai pour tout crochet le longueur n . Un crochet $\mathcal{W}^i$ de longueur $n+1$ s'écrit $\mathcal{W}^i = [\mathcal{W}_u, \tilde{\mathcal{W}}^i]$ où $\tilde{\mathcal{W}}^i$ est un crochet de longueur n . Posons $\tilde{\mathcal{W}}^i = \sum_{k=1}^5 \tilde{A}_k^i \mathcal{W}_k$ et $\mathcal{W}^i = \sum_{k=1}^5 A_k^i \mathcal{W}_k$. Pour $1 \leq k \leq 4$, les A_k^i s'obtiennent soit en multipliant les $\tilde{A}_k^i$ par une fonction de $\mathcal{A}_2$ soit par dérivation en $\mathcal{W}_i$, $1 \leq i \leq 4$, des $\tilde{A}_k^i$. La première partie du Lemme 5.3 résulte donc de la définition même des classes $\mathcal{B}_n$.

Évaluons maintenant A_5^i . Développons $\mathcal{W}^i$ plus précisément:

$$(5.30) \quad \mathcal{W}^i = \sum_{l=1}^4 u_l [\mathcal{W}_l, \tilde{\mathcal{W}}^i] = \sum_{l=1}^4 u_l \left[\left(\sum_{k=1}^5 \tilde{A}_k^i [\mathcal{W}_l, \mathcal{W}_k] \right) + \sum_{k=1}^5 \mathcal{W}_l (\tilde{A}_k^i) \mathcal{W}_k \right].$$

Considérons tout d'abord la contribution des termes avec $l = 1$: la formule ci-dessus montre que leur contribution est

$$u_1 \left(\tilde{A}_2^i c_{1,1} + \tilde{A}_4^i c_{1,2} + \tilde{A}_5^i e_1 \right) + u_1 \mathcal{W}_1 (\tilde{A}_5^i).$$

Clairement ceci donne

$$b_{n+1}(\alpha)c_{1,1} + b_{n+1}(\beta)c_{1,2} + b_2(\alpha)\tilde{A}_5^i + u_1\mathcal{W}_1(\tilde{A}_5^i).$$

Les trois premiers termes de cette somme rentrent dans la décomposition de A_5^1 donnée dans l'énoncé du Lemme 5.3. Considérons donc le dernier terme: en appliquant l'hypothèse de récurrence, on conclut aussitôt en remarquant que $u_1b_n(\alpha^i\beta^j) = b_n(\alpha^{i+1}\beta^j)$, $W_1b_n(\alpha^i\beta^j) = b_{n+1}(\alpha^i\beta^j)$, $b_n(\alpha^i\beta^j) = b_{n+1}(\alpha^i\beta^j)$ et $|L_1\mathcal{L}| = |\mathcal{L}| + 1$.

Les termes avec $l = 2$ contribuent de manière strictement identique en remplaçant $c_{1,2}$ par $c_{2,1}$.

Pour les termes avec $l = 3$, en regardant de la même manière la formule (5.30), on voit que leur contribution est de la forme

$$b_{n+1}(\beta)c_{2,1} + b_{n+1}(\beta^2)c_{2,2} + b_2(\beta)\tilde{A}_5^i + u_3W_3(\tilde{A}_5^i),$$

et on conclut comme précédemment. $\square$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.4. Comme pour le lemme précédent, nous raisonnons par récurrence sur n . Pour $n = 2$ on a

$$[\mathcal{W}_u, \mathcal{W}_i] = (b_2(\alpha) + b_2(\beta)\gamma)(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) + b_2(\beta)(\mathcal{W}_3 + \mathcal{W}_4) + (b_2(\alpha)(c_{2,1} + c_{1,2}) + b_2(\beta)c_{2,2})\mathcal{W}_5.$$

Supposons donc le résultat vrai pour tout crochet de longueur n et montrons le pour un crochet $\mathcal{W}^i$, $i = 3, 4$, de longueur $n+1$. Reprenons les notations pour $\mathcal{W}^i$ et $\widetilde{\mathcal{W}}^i$ introduites dans la preuve précédente. En utilisant l'hypothèse de récurrence, écrivons $\widetilde{\mathcal{W}}^i = \sum_{k=1}^5 \tilde{A}_k^i \mathcal{W}_k$ où les $\tilde{A}_k^i$ sont donnés par les formules du Lemme 5.4 et posons $\widetilde{\mathcal{W}}^i = \sum_{j=1}^6 \widetilde{\mathcal{W}}_j^i$ où

$$\widetilde{\mathcal{W}}_1^i = b_n(\alpha)(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) + b_n(\beta)(\mathcal{W}_3 + \mathcal{W}_4),$$

$$\widetilde{\mathcal{W}}_2^i = \sum_{k=1}^2 \left(\tilde{A}_k^i - b_n(\alpha) \right) \mathcal{W}_k,$$

où $b_n(\alpha)$ est exactement la fonction $b_n(\alpha)$ intervenant dans la formule précédente, et,

$$\widetilde{\mathcal{W}}_j^i = \tilde{A}_{5j-2}^i \mathcal{W}_5, \quad 3 \leq j \leq 6.$$

L'estimation des coefficients du crochet $[\mathcal{W}_u, \widetilde{\mathcal{W}}_1^i]$ résulte aussitôt du Lemme 5.3 ainsi que ceux du crochet $[\mathcal{W}_u, \widetilde{\mathcal{W}}_3^i]$ car ils diffèrent d'un facteur α/β de ceux considérés au lemme précédent.

L'estimation des coefficients des crochets $[\mathcal{W}_u, \widetilde{\mathcal{W}}_j^i]$ pour $j = 4, 5$ se fait simplement en utilisant uniquement les propriétés des classes $b_n(\alpha^i\beta^j)$.

Examinons maintenant les coefficients du crochet

$$(5.31) \quad [\mathcal{W}_u, \widetilde{\mathcal{W}}_2^i] = \sum_{k=1}^4 u_k [\mathcal{W}_k, \widetilde{\mathcal{W}}_2^i].$$

Considérons tout d'abord la contribution des termes ayant pour indice $k = 1, 2$. Les coefficients obtenus sur les $\mathcal{W}_l$, $l = 1, \dots, 4$ étant de type $b_{n+1}(\alpha)$ (donc $b_{n+1}(\beta)$) il nous suffit de considérer le coefficient sur $\mathcal{W}_5$. Or celui-ci se trouve dans la seconde somme de l'expression du terme A_{54}^i dans l'énoncé du Lemme 5.4. Estimons maintenant la contribution des termes ayant pour indice $k = 3, 4$ dans la formule (5.31). Tout d'abord les coefficients sur $\mathcal{W}_l$, $l = 3, 4$ sont du type $b_{n+1}(\beta)$. D'autre part les coefficients sur $\mathcal{W}_l$, $l = 1, 2$ s'obtiennent essentiellement en multipliant ceux de $\widetilde{\mathcal{W}}_2^i$ par u_k , $k = 3, 4$. Reste donc le coefficient sur $\mathcal{W}_5$. Celui-ci se trouve dans la première somme de la formule donnant A_{54}^i du lemme.

Pour terminer, il faut considérer le crochet

$$(5.32) \quad [\mathcal{W}_u, \widetilde{\mathcal{W}}_6^i] = \sum_{k=1}^4 u_k [\mathcal{W}_k, \widetilde{\mathcal{W}}_6^i].$$

La contribution des termes d'indices $k = 1, 2$ sur les $\mathcal{W}_l$, $l = 1, \dots, 4$ est triviale par définition des classes b_n car α est en facteur. La contribution de ces même termes sur $\mathcal{W}_5$ est conséquence directe de l'hypothèse de récurrence et des propriétés des b_n .

De même pour la contribution des termes d'indices $k = 3, 4$ de (5.32) sur $\mathcal{W}_l$, $l = 3, 4$. Considérons maintenant la contribution de ces termes sur $\mathcal{W}_l$, $l = 1, 2$. Elle est composée d'une part de termes de la forme

$$b_2(1)b_n(\alpha'^{l'_1+\tilde{l}_2+1}\beta'^{l'_2+\tilde{l}_2+3})\mathcal{L}'_{c_{1,1}}(\tilde{\mathcal{L}}\gamma + \tilde{\mathcal{L}}c_{2,2}),$$

qui sont du type $b_{n+1}(\alpha)$ et, d'autre part, de termes de la forme

$$b_2(1)b_n(\alpha'^{l'_1+\tilde{l}_1}\beta'^{l'_2+\tilde{l}_2+2})(\mathcal{L}'_{c_{1,2}} + \mathcal{L}'_{c_{2,1}})(\tilde{\mathcal{L}}\gamma + \tilde{\mathcal{L}}c_{2,2}),$$

qui sont du même type si $l'_1 + \tilde{l}_1 > 0$ et du type $b_{n+1}(\beta^{k+2})(\tilde{\mathcal{L}}\gamma + \tilde{\mathcal{L}}c_{2,2})$ avec $\tilde{l}_1 = 0$, $\tilde{l}_2 = k$. Pour terminer, il faut examiner la contribution des ces même termes sur $\mathcal{W}_5$. Mais le contrôle de celle-ci provient simplement de l'hypothèse de récurrence et des propriétés des classes b_n .

Ceci achève la preuve du Lemme 5.4. □

Nous introduisons maintenant quatre nouvelles familles de listes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= \{(L^1, \dots, L^k), k \in \mathbb{N}, k \geq 1, L^i \in \{\mathcal{W}_j\}_{1 \leq j \leq 5}, L^k \text{ ou } L^{k-1} \in \{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\} = \{L_1, \bar{L}_1\}\} \\ \mathcal{L}^2 &= \{(L^1, \dots, L^k), k \in \mathbb{N}, k \geq 1, L^i \in \{\mathcal{W}_j\}_{1 \leq j \leq 5}, L^k \text{ ou } L^{k-1} \in \{\mathcal{W}_3, \mathcal{W}_4\} = \{L_2, \bar{L}_2\}\} \\ \mathcal{L}^{1,1} &= \{(L^1, \dots, L^k), k \in \mathbb{N}, k \geq 2, L^i \in \{\mathcal{W}_j\}_{1 \leq j \leq 5}, L^k \text{ et } L^{k-1} \in \{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\} = \{L_1, \bar{L}_1\}\} \\ \mathcal{L}^{2,2} &= \{(L^1, \dots, L^k), k \in \mathbb{N}, k \geq 2, L^i \in \{\mathcal{W}_j\}_{1 \leq j \leq 5}, L^k \text{ et } L^{k-1} \in \{\mathcal{W}_3, \mathcal{W}_4\} = \{L_2, \bar{L}_2\}\} \end{aligned}$$

Si l'on remarque que, pour $K_0 \geq 1$, les boules B^{K_0} et $B_m^{K_0}$ sont contenues respectivement dans B^1 et B_m^1 , des Lemmes 5.3 et 5.4 on déduit immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 5.5. *Il existe une constante K ne dépendant que des données telle que, pour $\zeta \in B^{K_0}(z, \delta)$ (respectivement $\zeta \in B_m^{K_0}(z, \delta)$), et en notant R_1 , les rayons $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et R_2 les rayons $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ (respectivement $\mathcal{R}_1^m$ et $\mathcal{R}_2^m$, et, $\mathcal{R}_3^m$ et $\mathcal{R}_4^m$) on a les estimations suivantes pour les coefficients $\eta_p^q(\zeta)$:*

1) Pour $p = 1, 2$,

$$\left| \eta_p^5(\zeta) \right| \leq K \sum_{k=2}^M \left(\sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k \\ k=l_1+l_2 \\ \mathcal{L} \in \mathfrak{L}^1}} R_1^{l_1-1} R_2^{l_2} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)| + \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k \\ k=l_1+l_2 \\ \mathcal{L} \in \mathfrak{L}^{2,2}}} R_1^{l_1} R_2^{l_2} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)| \right) + K\delta.$$

2) Pour $p = 3, 4$,

$$\begin{aligned} \left| \eta_p^5 \right| &\leq K \sum_{k=2}^M \left(\sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k \\ k=l_1+l_2 \\ \mathcal{L} \in \mathfrak{L}^2}} R_1^{l_1} R_2^{l_2-1} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)| + \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k \\ k=l_1+l_2 \\ \mathcal{L} \in \mathfrak{L}^{1,1}}} R_1^{l_1} R_2^{l_2} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)| \right) \\ &+ K \sum_{k=4}^{M+1} \sum_{\substack{|\mathcal{L}|+|\tilde{\mathcal{L}}|=k \\ |\mathcal{L}|=l_1+l_2 \\ |\tilde{\mathcal{L}}|=l_1+l_2 \\ \mathcal{L} \in \mathfrak{L}^1, \tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{L}^{2,2}}} R_1^{l_1+l_1-1} R_2^{l_2+l_2-1} |\mathcal{L}(\partial\rho)| \left(|\tilde{\mathcal{L}}(\gamma)| + |\tilde{\mathcal{L}}(\partial\rho)| \right) + K\delta. \end{aligned}$$

3) Pour $p = 3, 4$ et $q = 1, 2$,

$$\left| \eta_p^q(\zeta) \right| \leq K \left(\sum_{k=2}^M \sum_{\substack{|\mathcal{L}|=k \\ l_1=0}} R_2^{k-1} (|\mathcal{L}(\gamma)(\zeta)| + R_2 |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)|) + R_1 \right) + K\delta$$

5.2. – Démonstration des Lemmes 2.10 et 3.9

Reprenons les notations $\beta_i^k(\zeta_u)$ introduites après le Lemme 5.1, et donnons tout d'abord de bonnes estimations de ces coefficients.

LEMME 5.6. *Il existe des constantes $K, K_0 \geq 1$ et δ_0 ne dépendant que des données telles que, pour $K_0 \geq K_0, \delta \leq \delta_0, z \in U_0$ et $\zeta \in B^{K_0}(z, \delta)$ (respectivement $\zeta \in B_m^{K_0}(z, \delta)$), en notant $\tilde{\mathcal{R}}_i$ les rayons $\mathcal{R}_i$ (respectivement $\mathcal{R}_i^m$), on a:*

1) $|\det(\alpha_i^j(\zeta))| \geq 1/2$;

2) $\forall p, q \in \{1, \dots, 5\}, \tilde{R}_p(z, \delta) |\beta_p^q(\zeta)| \leq \tilde{R}_q(z, \delta).$

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que, puisque $|\mathcal{W}_u| \leq K|u|$, le Lemme 5.2 implique $|\alpha_i^j - \delta_{ij}| \leq K\delta^{1/M}$ et on obtient le 1) en choisissant δ_0 assez petit.

Vérifions maintenant le 2). Comme $\beta_p^q = \delta_p^q + \sum_{n=2}^M \alpha_n \eta_p^{q,n}$ (voir (5.29)), il suffit de vérifier que pour $|u_i| \leq \tilde{R}_i(z, \delta)$ et $\zeta \in B^{K_0}(z, \delta)$ (respectivement $\zeta \in B_m^{K_0}(z, \delta)$), on a (en omettant comme précédemment l'indice n de $\eta_p^{q,n}$)

$$(5.33) \quad \tilde{R}_p(z, \delta) \left| \eta_p^q(\zeta) \right| \leq K \tilde{R}_q(z, \delta).$$

Notons tout d'abord qu'un certain nombre de ces inégalités sont triviales. D'une part, puisque $\tilde{R}_5(z, \delta) = \delta \leq \tilde{R}_p(z, \delta)$, (5.33) est évidente pour $p = 5$. D'autre part, puisque $\tilde{R}_1(z, \delta) \leq \tilde{R}_3(z, \delta)$ cette inégalité est encore triviale pour $p = 1, 2$ et $q = 1, \dots, 4$. Il n'y a donc que deux types d'inégalités à montrer:

$$(5.34) \quad \tilde{R}_p(z, \delta) \left| \eta_p^5(\zeta) \right| \leq K\delta, \quad \text{pour } p = 1, \dots, 4,$$

et

$$(5.35) \quad \tilde{R}_p(z, \delta) \left| \eta_p^q(\zeta) \right| \leq K \tilde{R}_q(z, \delta), \quad \text{pour } p = 3, 4 \text{ et } q = 1, 2.$$

DÉMONSTRATION DE (5.34) POUR $p = 1, 2$. Les Lemmes 3.3 et 3.1 montrent que, pour toute liste $\mathcal{L}$, $|\mathcal{L}| = k = l_1 + l_2$ et tout $\xi \in U$ on a (avec, comme dans le Corollaire 5.5 $R_1 = \mathcal{R}_1^m$ ou $\mathcal{R}_1$ et $R_2 = \mathcal{R}_3^m$ ou $\mathcal{R}_3$)

$$R_1(\xi, \delta)^{l_1} R_2(\xi, \delta)^{l_2} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\xi)| \leq K\delta.$$

Pour K_0 assez grand et δ_0 assez petit, les Corollaires 2.7 et 3.6 (et l'inclusion triviale des pseudo-boules B^{K_0} dans les $B_0^{K_0}$ et de même avec le paramètre m) donnent, pour $\zeta \in B_m^{K_0}(z, \delta)$ ou $\zeta \in B^{K_0}(z, \delta)$,

$$R_1(z, \delta)^{l_1} R_2(z, \delta)^{l_2} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)| \leq K\delta.$$

L'inégalité (5.34) pour $p = 1, 2$ provient alors du 1) du Corollaire 5.5. $\square$

DÉMONSTRATION DE (5.34) POUR $p = 3, 4$ DANS LE CAS $R_1 = \mathcal{R}_1$ ET $R_2 = \mathcal{R}_3$. Utilisons ici la majoration du 2) du Corollaire 5.5. La première somme du second membre de cette inégalité est, une fois multipliée par $R_2(z, \delta)$ inférieure à la somme traitée dans le cas précédent.

Considérons donc simplement la seconde somme. Le même raisonnement que dans le premier cas donne

$$R_1(z, \delta)^{l_1 + \tilde{l}_1 - 1} R_2(z, \delta)^{l_2 + \tilde{l}_2} |\mathcal{L}(\partial\rho)(\zeta)| \leq K\delta R_1(z, \delta)^{\tilde{l}_1 - 1} R_2(z, \delta)^{\tilde{l}_2}.$$

Si $\tilde{l}_1 \geq 1$ le second membre de cette dernière inégalité est majoré par $K\delta$.

Supposons $\tilde{l}_1 = 0$. Alors $\tilde{l}_2 = \tilde{k}$ et comme $\delta \leq R_1(z, \delta)$, le Lemme 3.3 donne

$$\delta R_1(z, \delta)^{-1} R_2(z, \delta)^{\tilde{l}_2} \left| \tilde{\mathcal{L}}(\partial \rho)(\zeta) \right| \leq K \delta.$$

D'autre part, comme $|\mathcal{L}| \geq 2$, on a $|\tilde{\mathcal{L}}| \leq M - 1$, et, la définition même de $R_1(z, \delta)$ et le Corollaire 3.6 donnent, pour K_0 assez grand et δ_0 assez petit,

$$R_2(z, \delta)^{\tilde{l}_2} \left| \tilde{\mathcal{L}}(\gamma)(\zeta) \right| \leq R_1(z, \delta),$$

ce qui termine ce cas.

L'autre cas se traite de la même façon en utilisant le Corollaire 2.7 et le Lemme 3.1 quitte à changer K_0 et δ_0 . $\square$

DÉMONSTRATION DE (5.35). Cette inégalité résulte de la définition même de $R_1(\xi, \delta)$ du Corollaire 3.6 et du 3) du Lemme 5.5 pour le cas sans paramètre m , et, dans le second cas du Corollaire 2.7, du Lemme 3.1 et du même Lemme 5.5. $\square$

FIN DE LA DÉMONSTRATION DES LEMMES 2.10 ET 3.9. Juste après l'énoncé du Lemme 5.2, nous avons remarqué que $S_2^m(z, \delta) \leq K \delta^{-1 + \frac{2}{m}}$. Comme S_0^m est borné, on en déduit que $\mathcal{R}_1^m(z, \delta) \geq \frac{1}{K} \delta^{1 - \frac{1}{M}}$ (et donc $\mathcal{R}_3^m(z, \delta) \geq \frac{1}{K} \delta^{1 - \frac{1}{M}}$) ce qui, en utilisant $\mathcal{R}_5^m(z, \delta) = \delta$ démontre le b) du Lemme 2.10.

Par définition $\mathcal{R}_1(z, \delta) \geq \delta^{1 - \frac{1}{M}}$, et, comme, pour δ assez petit, $\mathcal{R}_1(z, \delta) \leq \mathcal{R}_3(z, \delta)$, le b) du Lemme 3.9 est aussi démontré.

Démontrons maintenant le a) de ces lemmes.

Reprenons les notations α_i^k introduites après le Lemme 5.1. Soit (γ_i^k) la matrice inverse de la matrice (α_i^k) . Alors, avec les notations ci-dessus, on a

$$\mathcal{W}_i(F)(\zeta_u) = \sum_{k=1}^5 \gamma_i^k(\zeta_u) \frac{\partial f}{\partial u_k}(u).$$

Par suite,

$$\mathcal{W}_i \Psi_j^z(\zeta_u) = \gamma_i^j(\zeta_u) = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(\alpha_i^j(\zeta_u))} \sum_{\sigma: (i) \rightarrow (j)} \prod_{l \in (i)} \alpha_l^{\sigma(l)}(\zeta_u),$$

la somme portant sur toutes les permutations de $\{1, \dots, 5\}$ privé de i sur $\{1, \dots, 5\}$ privé de j .

Alors les a) des Lemmes 2.10 et 3.9 résultent, par une récurrence élémentaire, des Lemmes 5.2 et 5.6. $\square$

REFERENCES

- [1] A. BONAMI - PH. CHARPENTIER, *Estimations des $(1, 1)$ -courants positifs fermés dans les domaines de $\mathbb{C}^2$* , Lecture Notes in Math. 1094 (1984), pp. 44-52.
- [2] PH. CHARPENTIER - Y. DUPAIN, *Une estimation des coefficients tangents d'un courant positif fermé dans un domaine de $\mathbb{C}^3$* , Publ. Mat. **36** (1992), 319-349.
- [3] G.M.H. HENKIN, *Lewy's equation and analysis on pseudoconvex manifolds*, I Russian Math. Surv. **32** (1977), 59-130.
- [4] G.M.H. HENKIN, *Lewy's equation and analysis on a pseudoconvex manifold*, II Math. USSR-Sb. **31** (1977), 63-94.
- [5] A. NAGEL - E. STEIN - S. WAINGER, *Balls and metrics defined by vectors fields: basic properties*, Acta Mathematica **155** (1985), 103-147.
- [6] A. NAGEL - J.-P. ROSAY - E. STEIN - S. WAINGER, *Estimates for the Bergman and Szegő kernels in $\mathbb{C}^2$* , Ann. of Math. **129** (1989), 113-149.
- [7] H. SKODA, *Valeurs au bord pour les solutions de l'équation $\bar{\partial}$ et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 225-299.

Université de Bordeaux I
U.F.R. de Mathématiques et Informatiques
351 Cours de la Libération
33405 Talence, France