ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

YUE-JUN PENG

Solutions faibles globales pour un modèle d'écoulements diphasiques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 21, nº 4 (1994), p. 523-540

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1994_4_21_4_523_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Solutions faibles globales pour un modèle d'écoulements diphasiques

YUE-JUN PENG

1. - Introduction

Considérons le problème de Cauchy pour le système hyperbolique provenant d'un modèle d'écoulements diphasiques gaz/liquide dans le cas le plus simple:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho c u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho(1+c)u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho(1+c)u^2 + p)}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$t = 0 : (\rho, u, c) = (\rho_0(x), u_0(x), c_0(x)) \tag{1.2}$$

où les variables ρ, u, c, avec $0 < \rho < 1$, $c > 0$, sont respectivement la fraction massique de liquide, la vitesse du gaz et une concentration gaz/liquide. La loi d'état est donnée par $p = p(\rho, c) = \dfrac{a^2 c\rho}{1-\rho}$, avec $a > 0$ constante.

Le système (1.1) possède trois valeurs propres $\lambda_1 = u - z$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + z$, où $z = \dfrac{a\sqrt{c}}{\sqrt{1+c}(1-\rho)}$. Dans le domaine $H = \{(\rho, c) | c > 0, 0 < \rho < 1\}$, le système est strictement hyperbolique. On peut vérifier que les 1 et 3-champs caractéristiques sont vraiment non linéaires au sens de Lax, alors que le second champ caractéristique étant linéairement dégénéré est de type Temple, c'est-à-dire: les surfaces de niveau de c, qui est le 2-invariant de Riemann classique, sont des hyperplans en variables conservatives.

Le système présenté ici est introduit dans [1] pour un problème en recherche pétrolière. C'est le cas le plus simplifié d'un modèle d'écoulements

Pervenuto alla Redazione il 30 Giugno 1992 e in forma definitiva l'1 Luglio 1993.

diphasiques. De nombreux essais numériques ont été effectués pour des modèles plus généraux (voir [1]). Récemment, S. Benzoni et D. Serre ont étudié le problème de Cauchy pour certains systèmes qui possèdent essentiellement la même propriété que (1.1): deux champs vraiment non linéaires et un champ de type Temple. Ils ont démontré l'existence globale de solutions faibles dans L^∞ pourvu qu'il existe un domaine invariant borné. Sous cette hypothèse, ils ont trouvé que les suites approchées soit par la perturbation parabolique, soit par le schéma de Godunov convergent fortement vers les solutions du système. Ceci généralise le résultat de Di Perna dans le cas du système 2×2 et celui de D. Serre pour le système complètement de type Temple (voit [3], [10]).

Le système (1.1) ressemble beaucoup à celui de la dynamique des gaz. Cette ressemblance sera observée plus nettement en coordonnées Lagrangiennes où le système se réduit sous une forme simple. En particulier, lorsque c_0 est une constante, on retrouve le résultat de T. Nishida pour la dynamique des gaz isotherme [8].

On s'intéresse ici aux solutions faibles dans la classe des fonctions à variation bornée. Grâce à la particularité du système, on peut obtenir une solution faible en autorisant une grande condition initiale dans BV. De plus, lorsque c est une constante, notre résultat entraîne celui de Nishida sans aucune hypothèse supplémentaire. La démonstration emploie la méthode de Glimm. Il s'agit de montrer les estimations BV et L^∞ pour la solution approchée. Ces estimations sont la conséquence directe de la décroissance de certaines fonctionnelles de Glimm. Donc le choix de ces fonctionnelles joue un rôle essentiel dans la preuve.

Dans le reste de cet article, on va étudier la stabilité de la solution du problème de Riemann dans les coordonnées Lagrangiennes, à l'aide d'une résolution du problème de Riemann généralisé. Les travaux initiaux dans cette voie sont dus à Li Ta-Tsien et ses collaborateurs. Dans le cas du système général de n équations, ils ont prouvé que la solution du problème de Riemann est stable pour le petite amplitude de discontinuité de la condition initiale, c'est-à-dire: il existe une solution unique du problème de Riemann généralisé possédant la même structure que celle du problème de Riemann correspondant [7].

Remarquons que le système est aussi strictement hyperbolique dans le domaine $H^c = \{(\rho, c) | c > 0, \rho > 1\}$. On a donc des résultats analogues dans H^c.

2. - Préliminaire

2.1 *Invariant de Riemann.*

Soit r_k le vecteur propre à droite du système associé à la valeur propre λ_k. Si $Dw \cdot r_k = 0$, alors w s'appelle le k-invariant de Riemann au sens de Lax. Par un calcul simple, on trouve:

(i) les 1-invariants de Riemann sont: c et $w_1 = A \operatorname{Log} \dfrac{\rho}{1-\rho} + u$;

(ii) les 2-invariants de Riemann sont: u et p;

(iii) les 3-invariants de Riemann sont: c et $w_3 = A \operatorname{Log} \dfrac{\rho}{1-\rho} - u$,

où $A = a\sqrt{\dfrac{c}{1+c}}$ est aussi le 2-invariant de Riemann classique.

2.2 *Détentes.*

Soient les indices "$-$" et "$+$" les états à gauche et à droite d'une discontinuité. Pour la 1-détente (analogue pour la 3-onde), les 1-invariants de Riemann sont constants, c'est-à-dire: $c_+ = c_-$ et $w_1^+ = w_1^-$. Ce qui entraîne

$$\frac{p_+(1-\rho_+)}{\rho_+} = \frac{p_-(1-\rho_-)}{\rho_-}, \tag{2.1}$$

$$A \operatorname{Log} \frac{\rho_+}{1-\rho_+} + u_+ = A \operatorname{Log} \frac{\rho_-}{1-\rho_-} + u_-, \tag{2.2}$$

où $A = A_+ = A_-$. Par la condition d'entropie de Lax, on doit avoir $\lambda_1^+ > \lambda_1^-$. Ce qui équivaut à, d'après (2.1)-(2.2), $\rho_- > \rho_+$, $p_+ > p_-$ et $u_+ > u_-$.

2.3 *Chocs.*

Puisque le 2-champ est de type Temple et c est le 2-invariant de Riemann classique (i.e. $Dc \cdot Df = \lambda_2 Dc$), alors c reste aussi constant au travers les 1 et 3-chocs (dans le cas ici, cette propriété peut être vérifiée de façon directe). Ce qui implique que c n'est discontinue que sur les discontinuité de contact. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont alors:

$$\begin{cases} c_+ = c_- = c \\ \rho_+ u_+ - \rho_- u_- = s(\rho_+ - \rho_-) \\ p_+ + \rho_+(1+c)u_+^2 - [p_- + \rho_-(1+c)u_-^2] = s(\rho_+ u_+ - \rho_- u_-), \end{cases}$$

où s est la vitesse des chocs. Après l'élimination de s, il vient:

$$\frac{p_+(1-\rho_+)}{\rho_+} = \frac{p_-(1-\rho_-)}{\rho_-},$$

$$u_+ - u_- = \mp \frac{A(\rho_+ - \rho_-)}{\sqrt{\rho_+\rho_-(1-\rho_+)(1-\rho_-)}},$$

où les signes (non indices) "$-$" et "$+$" correspondent respectivement aux 1 et 3-chocs.

2.4 *Ondes non linéaires.*

Notons $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ un paramètre définissant la force des ondes simples, par

$$2\varepsilon_1 = \operatorname{Log}\frac{\rho_-}{1-\rho_-} - \operatorname{Log}\frac{\rho_+}{1-\rho_+}, \text{ pour la 1-onde,} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_2 = A_+ - A_-, \text{ pour la 2-onde,} \tag{2.4}$$

$$2\varepsilon_3 = \operatorname{Log}\frac{\rho_+}{1-\rho_+} - \operatorname{Log}\frac{\rho_-}{1-\rho_-}, \text{ pour la 3-onde,} \tag{2.5}$$

où les indices "$-$" et "$+$" désignent les états à gauche et à droite d'une discontinuité. D'après l'analyse précédente, on a obtenu pour les 1 et 3-ondes non linéaires:

$$\frac{p_+}{p_-} = e^{-2\varepsilon_1}, \ A_+ = A_-, \ u_+ - u_- = A_- h(\varepsilon_1), \text{ pour la 1-onde,} \tag{2.6}$$

$$\frac{p_+}{p_-} = e^{+2\varepsilon_3}, \ A_+ = A_-, \ u_+ - u_- = A_+ h(\varepsilon_3), \text{ pour la 3-onde,} \tag{2.7}$$

où

$$h(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ e^x - e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

2.5 *Problème de Riemann.*

Considérons le problème de Riemann pour des conditions initiales constantes par morceaux:

$$t = 0 : (\rho, u, c) = \begin{cases} (\rho_g, u_g, c_g), & x < 0 \\ (\rho_d, u_d, c_d), & x > 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Il est bien connu que ce problème n'a été résolu dans le cas général que pour deux états initiaux voisins. Mais dans le cas particulier étudié ici, le problème de Riemann possède toujours une solution unique composée d'ondes simples (chocs, détentes et discontinuité de contact), lorsque les données initiales sont dans le domaine hyperbolique H.

Puisque (ρ_g, c_g) et (ρ_d, c_d) restent dans H, on a $p_g > 0$ et $p_d > 0$. On cherche des états intermédiaires (ρ_-, u_-, c_-) et (ρ_+, u_+, c_+) tels que (ρ_-, u_-, c_-) relie (ρ_g, u_g, c_g) par une 1-onde non linéaire, (ρ_d, u_d, c_d) relie (ρ_+, u_+, c_+) par une 3-onde non linéaire, avec $u_+ = u_-$, $p_+ = p_-$, $c_- = c_g$ et $c_+ = c_d$. On va commencer par résoudre ε_1 et ε_3, les solutions sont fournies par les formules précédentes.

D'après (2.6)-(2.7), on a

$$\begin{cases} \Delta p = 2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \\ \Delta u = A_g h(\varepsilon_1) + A_d h(\varepsilon_3), \end{cases} \tag{2.9}$$

où $\Delta p = \mathrm{Log}\left(\frac{ac_d\rho_d}{1-\rho_d}\right) - \mathrm{Log}\left(\frac{ac_g\rho_g}{1-\rho_g}\right)$ et $\Delta u = u_d - u_g$ sont déterminés par la condition initiale (2.8). En éliminant la variable ε_3, il vient:

$$\Delta u = A_g h(\varepsilon_1) + A_d h(\varepsilon_1 + \Delta p/2).$$

Comme $h(x)$ est une fonction continue, strictement croissante, et $h(\pm\infty) = \pm\infty$, alors h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il existe donc un couple unique ε_1 et ε_3 tels que (2.9) soit vérifié. Ceci implique l'existence et l'unicité de solutions pour le problème de Riemann. On observe de plus qu'il n'apparaît pas de vide ($\rho = 0$) dans la solution, pourvu qu'il n'y en ait pas pour la condition initiale. On obtient alors:

LEMME 1. *Dans le domaine hyperbolique H (ou H^c), le problème de Riemann* (1.1) *et* (2.8) *admet une unique solution auto-similaire.*

2.6 *Domaine invariant.*

Puisque A est le 2-invariant de Riemann qui correspond au champ de Temple, il est discontinu seulement au travers des discontinuités de contact. Ceci implique que

$$D = \{(\rho, u, c) | 0 < A_- \leq A \leq A_+\} \tag{2.10}$$

est un domaine invariant pour le problème de Riemann. Il en est donc aussi pour le schéma de Glimm d'après la construction du schéma.

3. - Existence de solutions faibles

Pour le problème de Cauchy (1.1)-(1.2), on fait les hypothèses suivantes (la notation VT désigne la variation totale):

(H1) $VT(\rho_0) + VT(u_0) + VT(c_0) < +\infty$,

(H2) $2VT(A_0) < \inf_{x\in\mathbb{R}} A_0(x)$, où $A_0 \overset{\text{déf}}{=} a\sqrt{\frac{c_0}{1+c_0}}$,

(H3) $0 < \rho_- \leq \rho_0(x) \leq \rho_+ < 1$, $0 < c_- \leq c_0(x)$, avec ρ_-, ρ_+ et c_- trois constantes.

Le résultat d'existence globale est le suivant:

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* (H1)-(H3), *il existe une solution faible entropique pour le problème de Cauchy* (1.1). *De plus, la solution* $(\rho(x,t), u(x,t), c(x,t))$ *vérifie* $VT(\rho(\cdot,t)) + VT(u(\cdot,t)) + VT(c(\cdot,t)) < +\infty$ *pour tout* $t \geq 0$, *et* $(\rho(x,t), c(x,t)) \in$ *un compact de* H *pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

On utilise le schéma de Glimm pour démontrer le résultat. Pour cela, l'estimation essentielle est celle des interactions des ondes. Soit $w^{\Delta x} = (\rho^{\Delta x}, u^{\Delta x}, c^{\Delta x})$ une suite de solution approchée construite par le schéma de Glimm à l'aide d'une suite équirépartie $(a_n)_{n\geq 1}$. On fixe les pas d'espace Δx et de temps Δt tels que la condition de CFL soit vérifiée:

$$\Delta x/\Delta t = \lambda \geq \max_{1\leq i\leq 3} \sup_{w} |\lambda_i(w)|,$$

où le choix de λ sera précisé ultérieurement.

Pour la discontinuité de contact, comme le champ est de type Temple, il est clair que (voir [10]) la variation totale des invariants de Riemann est décroissante par rapport à temps, i.e. $VT(A^{\Delta x}(\cdot, t_2)) \leq VT(A^{\Delta x}(\cdot, t_1)) \leq VT(A_0(\cdot))$, $\forall t_2 \geq t_1 \geq 0$. D'autre part, le domaine invariant D entraîne que $\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}} A_0(x) \leq A^{\Delta x}(x,t) \leq \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} A_0(x)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Il reste à établir une estimation des interactions pour les ondes non linéaires. Pour cela, on va employer les variables u, p et A pour étudier les interactions des ondes (voir Figure 1).

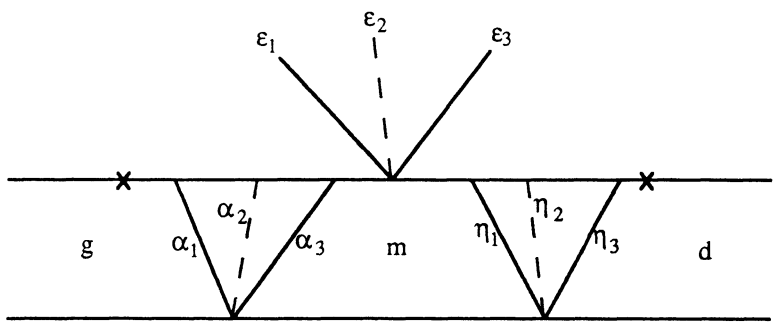

Figure 1

LEMME 2. *Supposons que les ondes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ interagissent avec les ondes $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ et qu'il sort les ondes $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Alors on a*

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \alpha_3 + \eta_3 - \alpha_1 - \eta_1, \quad \varepsilon_2 = \alpha_2 + \eta_2, \tag{3.1}$$

$$A_g h(\varepsilon_1) + A_d h(\varepsilon_3) = A_g h(\alpha_1) + A_m h(\alpha_3) + A_m h(\eta_1) + A_d h(\eta_3). \tag{3.2}$$

Le Lemme 2 est obtenu par un calcul direct en utilisant la définition (2.6)-(2.7).

LEMME 3. *Notons* $A_{\min} = \min(A_g, A_m, A_d) > 0$, *on a:*

$$|\varepsilon_1| + |\varepsilon_3| \leq |\alpha_1| + |\alpha_3| + |\eta_1| + |\eta_3| + \frac{2}{A_{\min}}(|\alpha_2| \cdot |\eta_1| + |\alpha_3| \cdot |\eta_2|). \tag{3.3}$$

DÉMONSTRATION. On fait la démonstration en précisant les trois cas:

(a) $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \leq 0$, l'estimation (3.3) est une conséquence immédiate de (3.1).

(b) $\varepsilon_1 \geq 0$ et $\varepsilon_3 \geq 0$, i.e. la 1-onde ε_1 et la 3-onde ε_3 sont des détentes. Donc $h(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1$, et $h(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$. D'après les formules (3.1)-(3.2), on obtient directement la somme des deux ondes non linéaires:

$$\begin{aligned}(A_g + A_d)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) &= A_g h(\alpha_1) + A_d h(\eta_3) + A_m h(\eta_1) + A_m h(\alpha_3) \\ &\quad + (A_g - A_d)(\alpha_3 + \eta_3 - \alpha_1 - \eta_1) \\ &= A_g(h(\alpha_1) - 2\alpha_1) + A_d(h(\eta_3) - 2\eta_3) \\ &\quad + A_m(h(\eta_1) - 2\eta_1) + A_m(h(\alpha_3) - 2\alpha_3) \\ &\quad + (A_g + A_d)(\alpha_1 + \alpha_3 + \eta_1 + \eta_3) + 2(A_m - A_g)\eta_1 \\ &\quad + 2(A_m - A_d)\alpha_3.\end{aligned}$$

On vérifie sans peine que $h(x) \leq 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc

$$(A_g + A_d)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \leq (A_g + A_d)(\alpha_1 + \alpha_3 + \eta_1 + \eta_3) + 2(A_m - A_g)\eta_1 + 2(A_m - A_d)\alpha_3.$$

Ce qui entraîne (3.3).

(c) $\varepsilon_1 \leq 0$, $\varepsilon_3 \leq 0$.

C'est le cas le plus délicat qui implique quinze cas possibles d'interactions au total selon la valeur de la suite équirépartie $(a_n)_{n\geq 1}$, sauf le cas impossible $R_1C_2R_3 + R_1C_2R_3 \to S_1C_2S_3$, où S, C et R désignent respectivement choc, discontinuité de contact et détente. Pour simplifier la discussion, on ne considère que le cas le plus typique suivante: $S_1C_2S_3 + S_1C_2S_3 \to S_1C_2S_3$. Les autres cas peuvent être traités de façon analogue.

Soit $f(x) = e^x - e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Comme $\alpha_i \leq 0$, $\eta_i \leq 0$ et $\varepsilon_i \leq 0$ $(i = 1, 3)$, il est facile d'obtenir les deux équations sur les interactions d'après le Lemme 2:

$$|\varepsilon_1| - |\varepsilon_3| = |\alpha_1| + |\eta_1| - |\alpha_3| - |\eta_3|, \tag{3.4}$$

$$A_g f(|\varepsilon_1|) + A_d f(|\varepsilon_3|) = A_g f(|\alpha_1|) + A_m f(|\alpha_3|) + A_m f(|\eta_1|) + A_d f(|\eta_3|). \tag{3.5}$$

Notons $\Delta = |\varepsilon_1| - |\alpha_1| - |\eta_1| = |\varepsilon_3| - |\alpha_3| - |\eta_3|$. Si $\Delta \leq 0$, le Lemme 2 est évidemment vrai. Supposons donc que $\Delta > 0$, alors $|\varepsilon_1| > |\alpha_1| + |\eta_1|$ et $|\varepsilon_3| > |\alpha_3| + |\eta_3|$. En réécrivant l'équation (3.5) sous la forme suivante:

$$A_g[f(|\varepsilon_1|) - f(|\alpha_1|)] + A_d[f(|\varepsilon_3|) - f(|\eta_3|)] = A_m f(|\alpha_3|) + A_m f(|\eta_1|).$$

(i) Si $A_g[f(|\varepsilon_1|) - f(|\alpha_1|)] \leq A_m f(|\eta_1|)$, on a

(i1) ou bien $|\alpha_1| \geq |\eta_1|$, donc

$$A_g[f(|\varepsilon_1|) - f(|\alpha_1|)] \leq (A_m - A_g)f(|\eta_1|) + A_g f(|\eta_1|).$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_1 \in (|\alpha_1|, |\varepsilon_1|)$ et $\xi_2 \in (0, |\eta_1|)$ avec $\xi_1 \geq \xi_2$, tels que $f(|\varepsilon_1|) - f(|\alpha_1|) = f'(\xi_1)(|\varepsilon_1| - |\alpha_1|)$ et $f(|\eta_1|) = f'(\xi_2)|\eta_1|$. Or par $\alpha_2 = A_m - A_g$, on obtient:

$$A_g f'(\xi_1)(|\varepsilon_1| - |\alpha_1|) \leq |\alpha_2| f'(\xi_2)|\eta_1| + A_g f'(\xi_2)|\eta_1|.$$

Comme $f'(x) = e^x + e^{-x}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2) > 0$. Donc

$$\Delta = |\varepsilon_1| - |\alpha_1| - |\eta_1| \leq \frac{1}{A_{\min}} |\alpha_2||\eta_1|.$$

Ce qui donne (3.3).

(i2) ou bien $|\alpha_1| \leq |\eta_1|$, donc

$$A_g[f(|\varepsilon_1|) - f(|\eta_1|)] \leq (A_m - A_g)f(|\eta_1|) + A_g f(|\alpha_1|).$$

Une discussion analogue donnera aussi (3.3).

(ii) Si $A_g[f(|\varepsilon_1|) - f(|\alpha_1|)] \geq A_m f(|\eta_1|)$, alors $A_d[f(|\varepsilon_3|) - f(|\eta_3|)] \leq A_m f(|\alpha_3|)$. Comme ces deux inégalités sont symétriques, on répète la même analyse et on obtient (3.3).

REMARQUE. Si c est une constante, la seconde équation de (1.1) est triviale. On a donc $\alpha_2 = \eta_2 = 0$. Ce qui donne, par le Lemme 3:

$$|\varepsilon_1| + |\varepsilon_3| \leq |\alpha_1| + |\alpha_3| + |\eta_1| + |\eta_3|, \text{ si } c \text{ est une constante.}$$

D'après les définitions (2.3) et (2.5), cette estimation signifie que la variation totale de Lnp est décroisante au cours du temps.

Pour démontrer l'existence d'une solution faible, on doit définir certaines fonctionnelles de Glimm. Soit J une courbe polygonale. On note

$$L_1(J) = \sum_{\varepsilon \text{ croise } J} (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_3|), \quad L_2(J) = \sum_{\varepsilon \text{ croise } J} |\varepsilon_2|, \tag{3.6}$$

$$Q(J) = \sum_{\substack{\varepsilon,\delta \text{ croisent } J \\ \varepsilon \text{ est à gauche de } \delta}} D(\varepsilon, \delta), \quad F(J) = L_1(J) + KQ(J), \tag{3.7}$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et $D(\varepsilon, \delta) = (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_3|)|\delta_2| + (|\delta_1| + |\delta_3|)|\varepsilon_2|$, K est une constante positive à déterminer.

LEMME 4. *Soient I et J deux courbes polygonales, J est un successeur immédiat de I. Si $2VT(A_0) < A^*$ et $K \geq 2(A^* - 2VT(A_0))^{-1}$, alors*

$$F(J) \leq F(I), \tag{3.8}$$

où $A^* = \operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}} A_0(x)$.

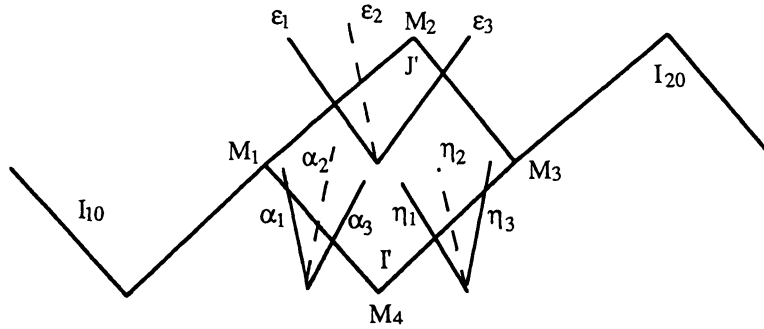

Figure 2

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 3, on a $L_1(J) - L_1(I) \leq \dfrac{2}{A^*} D(\alpha, \eta)$. D'autre part,

$$Q(J) = Q(I_0) + Q(I_0, J') = Q(I_0) + \sum_{\delta \text{ croise } I_0} D(\varepsilon, \delta),$$

$$\begin{aligned} Q(I) &= Q(I_0) + Q(I_0, I') + Q(I') \\ &= Q(I_0) + \sum_{\delta \text{ croise } I_0} D(\alpha, \delta) + \sum_{\delta \text{ croise } I_0} D(\eta, \delta) + D(\alpha, \eta), \end{aligned}$$

où $I_0 = I_{10} \cup I_{20}$, $J = J' \cup I_0$, $I = I' \cup I_0$, $J' = \overline{M_1M_2} \cup \overline{M_2M_3}$, $I' = \overline{M_1M_4} \cup \overline{M_4M_3}$. Donc

$$\begin{aligned} Q(J) - Q(I) &= \sum_{\delta \text{ croise } I_0} [D(\varepsilon, \delta) - D(\alpha, \delta) - D(\eta, \delta)] - D(\alpha, \eta) \\ &= \sum_{\delta \text{ croise } I_0} [(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_3| - (|\alpha_1| + |\alpha_3|) - (|\eta_1| + |\eta_3|))|\delta_2| \\ &\qquad + (|\delta_1| + |\delta_3|)(|\varepsilon_2| - |\alpha_2| - |\eta_2|)] - D(\alpha, \eta) \\ &= \sum_{\delta \text{ croise } I_0} (L_1(J) - L_1(I)) \cdot |\delta_2| \\ &\qquad + \sum_{\delta \text{ croise } I_0} (|\delta_1| + \delta_3|)(L_2(J) - L_2(I)) - D(\alpha, \eta). \end{aligned}$$

Comme $L_2(J) \leq L_2(I) \leq VT(A_0)$, on obtient

$$Q(J) - Q(I) \leq \frac{2}{A^*} VT(A_0) D(\alpha, \eta) - D(\alpha, \eta).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} F(J) - F(I) &= L_1(J) - L_1(I) + K(Q(J) - Q(I)) \\ &\leq \frac{2}{A^*} D(\alpha, \eta) + K \left(\frac{2}{A^*} VT(A_0) D(\alpha, \eta) - D(\alpha, \eta) \right) \\ &= \left(\frac{2}{A^*} + \frac{2K}{A^*} VT(A_0) - K \right) D(\alpha, \eta) \leq 0. \end{aligned}$$

LEMME 5. *Soit $U = (\rho, \rho c, \rho u(1+c))$. Alors la variation totale de la solution approchée $U^{\Delta x}(\cdot, t)$ construite par le schéma de Glimm est bornée uniformément par rapport à t et Δx.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $VT(\rho^{\Delta x}(\cdot, t))$ et $VT(u^{\Delta x}(\cdot, t))$ sont bornées. D'après le Lemme 4, on a $F(J) \leq F(0)$, où 0 désigne la courbe polygonale 0. Par la définition de $F(J)$, on obtient

$$\begin{aligned} F(J) \leq F(0) &= L_1(0) + KQ(0) \leq L_1(0) + 2KVT(A_0) L_1(0) \\ &\leq C_0(1 + 2KVT(A_0)) VT(\operatorname{Log} p_0) \leq C_1(VT(\rho_0) + VT(c_0)). \end{aligned}$$

D'autre part, pour une courbe polygonale particulière variant entre $t = t_n$ et $t = t_{n+1}$, on a

$$VT(\operatorname{Log} p^{\Delta x}(\cdot, t)) = L_1(J) \leq F(J) \leq F(0).$$

Ce qui entraîne

$$VT(\operatorname{Log} p^{\Delta x}(\cdot, t)) \leq C_1(VT(\rho_0) + VT(c_0)).$$

Donc

$$VT(u^{\Delta x}(\cdot, t)) \leq C_2(VT(\rho_0) + VT(c_0)), \quad VT(\rho^{\Delta x}(\cdot, t)) \leq C_2(VT(\rho_0) + VT(c_0)).$$

Ici les constantes C_0, C_1 et C_2 ne dépendent que de la norme L^∞ de la condition initiale et de $VT(A_0)$.

Remarquons que le Lemme 4 donne aussi une estimation L^∞ des solutions: $|u(x,t)| \leq u_2$, $0 < p_1 \leq p(x,t) \leq p_2$. Ce qui entraîne que $0 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 < 1$. Et cela nous permet de choisir le pas de temps uniforme:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lambda = u_2 + \frac{1}{1 - \rho_1} \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} A_0(x).$$

Le Théorème 1 est alors fourni par le résultat de Glimm [4].

4. - Coordonnées Lagrangiennes

Comme le système de la dynamique des gaz, (1.1) possède aussi une formulation Lagrangienne sous laquelle le système s'écrit sous une forme simple. En introduisant la variable y (noté par x dans la suite) par $dy = \rho dx - \rho u dt$ et en notant $v(y,t) = \rho^{-1} - 1 > 0$, on obtient un nouveau système qui équivaut à (1.1) pour des solutions régulières dans le domaine $0 < \rho < 1$:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ ((1+c)u)_t + q_x = 0 \\ c_t = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$t = 0 : (v, u, c) = (v_0(x), u_0(x), c_0(x)), \tag{4.2}$$

où $q(v,c) = p(\rho, c) = a^2 c/v$. Remarquons que l'équivalence de (1.1) et (4.1) est aussi valable pour des solutions faibles dans L^∞, d'après les résultats de D. Wagner [13] et de D. Serre [11].

THÉORÈME 2. *Supposons que la variation totale de la condition initiale* (v_0, u_0, c_0) *est bornée et que* v_0 *et* c_0 *ont une borne inférieure strictement positive, alors le problème de Cauchy possède une solution faible entropique pourvu que* $2VT(A_0) < \operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}} A_0(x)$.

Grâce à la vitesse nulle de la discontinuité de contact, la démonstration du Théorème 2 est plus simple que dans le cas des coordonnées précédentes en utilisant la même définition des fonctionnelles. En particulier, si la condition initiale c_0 est une constante, l'hypothèse $(H2)$ est triviale. Dans ce cas, la résolution du problème de Riemann et le schéma de Glimm entrâinent que la solution c est constante c_0. Donc le système (4.1) devient exactement la dynamique des gaz isotherme traité par T. Nishida [8] et notre fonctionnelle $F(J)$ définie par (3.7) devient $L_1(J)$. Mais elle est différente de celle de Nishida qui est composée seulement de forces de chocs.

Comme dans [5] et [9], on peut aussi considérer le problème mixte dans le quadrant $x > 0$ et $t > 0$. Sur la frontière caractéristique $x = 0$, la condition aux limites est décrite par

$$x = 0 : q = q_1(t), \ \ t \geq 0 \tag{4.3}$$

ou

$$x = 0 : u = u_1(t), \ \ t \geq 0. \tag{4.4}$$

Dans ces deux cas, nous pouvons obtenir une solution faible à l'aide du schéma de Glimm modifié (voir [9] pour la définition). L'estimation majeure est encore celle des interactions des ondes simples. En effet, l'estimation précise sur la frontière $x = 0$ est la suivante (voir Figure 3):

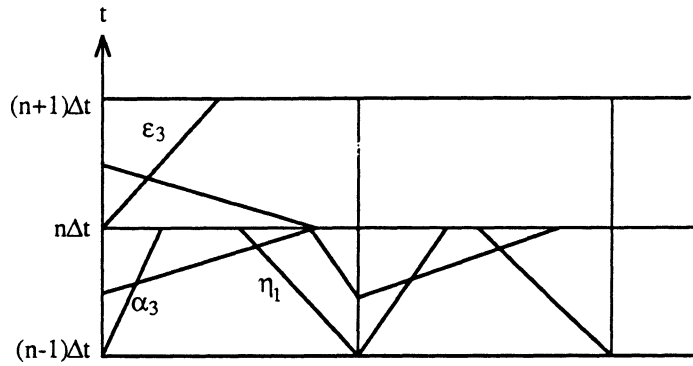

Figure 3

$$|\varepsilon_3| \leq |\alpha_3| + |\eta_1| + C|\Delta r_n|, \tag{4.5}$$

où

$$\Delta r_n = \begin{cases} \operatorname{Log} q_1\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) - \operatorname{Log} q_1\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right), & \text{dans le cas (4.3)} \\ & (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ u_1\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) - u_1\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right), & \text{dans le cas (4.4)} \end{cases} \tag{4.6}$$

la constante $C > 0$ ne dépend que de la norme L^∞ de la condition initiale. On en déduit qu'il existe deux constantes C_1, $C_2 > 0$ telles que

$$VT(S^{\Delta x}(\cdot, t)) \leq C_1 VT(S_0(\cdot, t)) + C_2 VT(r(\cdot)), \quad t \geq 0 \tag{4.7}$$

où $S = (v, u, c)$, et

$$r(t) = \begin{cases} q_1(t), & \text{dans le cas (4.3)} \\ u_1(t), & \text{dans le cas (4.4).} \end{cases} \tag{4.8}$$

Finalement, on a:

THÉORÈME 3. *Supposons que la variation totale de la condition initiale* (v_0, u_0, c_0) *et de la condition aux limites* q_1 *(ou* u_1*) est bornée avec des contraintes* v_0, c_0, $q_1 \geq cte > 0$, *alors le problème aux limites* (4.1)-(4.3) *(ou* (4.4)*) admet une solution faible globale en temps pourvu que* $2VT(A_0) < \operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}} A_0(x)$.

5. - Stabilité de la solution du problème de Riemann

On s'intéresse maintenant à la stabilité de la solution du problème de Riemann. Pour cela, on étudie le problème de Riemann généralisé qui est le cas particulier du problème de Cauchy, avec une condition initiale régulière par morceaux. Pour simplifier la discussion, on va le traiter dans les coordonnées Lagrangiennes. La condition initiale est donnée par:

$$t = 0 : V = (v, (1+c)u, c) = \begin{cases} (v_g, (1+c_g)u_g, c_g)(x), & t < 0 \\ (v_d, (1+c_d)u_d, c_d)(x), & t > 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $(v_g(x), u_g(x), c_g(x))$ et $(v_d(x), u_d(x), c_d(x))$ sont des fonctions assez régulières respectivement sur $x < 0$ et $x > 0$, telles que $v_g(x)$, $c_g(x)$, $v_d(x)$, $c_d(x) \geq$ constante > 0. Pour éviter le cas trivial, on suppose que $(v_g(0), u_g(0), c_g(0)) \neq (v_d(0), u_d(0), c_d(0))$.

On dit que la solution du problème de Riemann est localement stable si le problème de Riemann généralise admet une solution unique ayant la même structure que celle du problème de Riemann correspondant au voisinage de l'origine. Dans le cas du système général, le problème de Riemann généralisé a été résolu par Li Ta Tsien et Yu Wen-Ci pour la petite amplitude de discontinuité à l'origine [7]. Dans le cas particulier courant, on peut lever cette hypothèse, c'est-à-dire: $|V_d(0) - V_g(0)|$ n'est pas nécessairement petite. La méthode à employer est établie dans [7] concernant la résolution des problèmes à frontière libre (dans le cas des chocs) et d'onde centrée (dans le cas des détentes).

THÉORÈME 4. *La solution du problème de Riemann* (4.1) *et* (5.1) *est localement stable.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est constructive qui est basée sur une analyse fine des conditions des discontinuités. Dans le problème de Riemann, il y a quatre cas. Pour chacun, la solution est composée de

(i) 1-choc, 2-discontinuité de contact et 3-choc,

(ii) 1-choc, 2-discontinuité de contact et 3-détente,

(iii) 1-détente, 2-discontinuité de contact et 3-choc,

(iv) 1-détente, 2-discontinuité de contact et 3-détente.

On ne démontre le théorème 4 que pour le cas (i), qui est aussi le plus dur pour faire des calculs. Le trois autres cas sont faciles à traiter, car il y a plus d'éléments nuls dans la matrice caractéristique grâce à détentes (voir par exemple [6]). Le système (4.1) a trois valeurs propres: $\lambda_1 = -\dfrac{A}{v}$, $\lambda_2 = 0$,

$\lambda_3 = \dfrac{A}{v}$, où $A = a\sqrt{\dfrac{c}{1+c}}$. Les vecteurs propres à gauche sont:

$$\begin{cases} l_1 = \left(-\dfrac{a^2c}{v}, -A, Au + a^2\right) \\ l_2 = (0,0,1) \\ l_3 = \left(-\dfrac{a^2c}{v}, A, -Au + a^2\right). \end{cases} \tag{5.2}$$

On cherche une solution unique de (4.1) et (5.1) qui est décrite par Figure 4, où

$$OA_i : x = x_i(t), \ \ (x_i(0) = 0), \ \ i = 1,3 \tag{5.3}$$

sont deux frontières libres à déterminer.

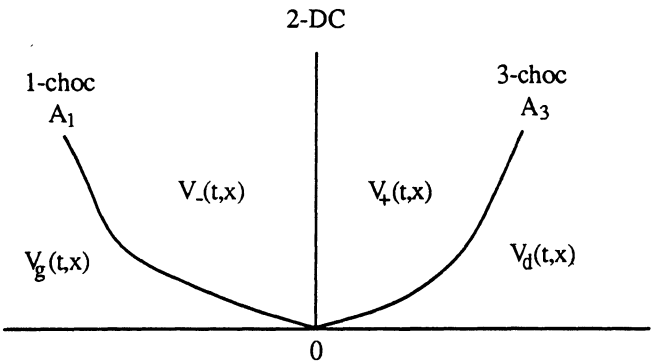

Figure 4

En utilisant la donnée initiale $V_g(x)$ sur $x < 0$, on obtient, par résolution d'un problème de Cauchy, une solution régulière locale (notée par $V_g(t,x)$) dans le domaine déterminé

$$\overline{D}_1(\delta) = \{(t,x) | 0 \le t \le \delta, x \le \overline{x}_1(t)\}, \ \ \delta > 0, \tag{5.4}$$

où $O\overline{A}_1 : x = \overline{x}_1(t)$ est la première courbe caractéristique passant par l'origine. Par la condition d'entropie de Lax, la frontière libre OA_1 se trouve à gauche de $O\overline{A}_1$. Donc la solution à gauche de OA_1 est déterminée uniquement par la solution $V_g(t,x)$.

Parallèlement, la solution à droite de $OA_3 : x = x_3(t)$ est déterminée uniquement par la donnée initiale $V_d(x)$ sur $x > 0$, en la notant $V_d(t,x)$. En

évidence, on a

$$V_g(0,0) = V_g(0) \overset{\text{déf}}{=} \overline{V}_g \text{ et } V_d(0,0) = V_d(0) \overset{\text{déf}}{=} \overline{V}_d. \tag{5.5}$$

Notons $V_-(t,x) = (v_-(t,x), (1 + c_-(t,x))u_-(t,x), c_-(t,x))$ et $V_+(t,x) = (v_+(t,x), (1 + c_+(t,x))u_+(t,x), c_+(t,x))$ respectivement les solutions à déterminer dans les domaines angulaires

$$D_-(\delta) = \{(t,x) | 0 \leq t \leq \delta, x_1(t) \leq x \leq 0\} \tag{5.6}$$

et

$$D_+(\delta) = \{(t,x) | 0 \leq t \leq \delta, 0 \leq x \leq x_3(t)\}, \tag{5.7}$$

où $\delta > 0$ est petit. Elles sont régulières et vérifient le système (4.1) dans le domaine respectif. On a de plus

$$V_-(0,0) = \overline{V}_-, \quad V_+(0,0) = \overline{V}_+, \tag{5.8}$$

où $\overline{V}_-$ et $\overline{V}_+$ sont données par la solution du problème de Riemann correspondant.

D'après la relation de Rankine-Hugoniot, sur la courbe OA_1 (1-choc), on a

$$x = x_1(t) : \begin{cases} c_- = c_g \\ u_- = u_g - A_g \left(\sqrt{\dfrac{v_g}{v_-}} - \sqrt{\dfrac{v_-}{v_g}} \right), \end{cases} \qquad v_- < v_g. \tag{5.9}$$

De même, sur la courbe OA_3 (3-choc), on a

$$x = x_3(t) : \begin{cases} c_+ = c_d \\ u_+ = u_d + A_d \left(\sqrt{\dfrac{v_d}{v_+}} - \sqrt{\dfrac{v_+}{v_d}} \right), \end{cases} \qquad v_+ < v_d. \tag{5.10}$$

La droite $x = 0$ est la 2-discontinuité de contact sur laquelle on a

$$x = 0 : u_+ = u_-, \quad \frac{c_+}{v_+} = \frac{c_-}{v_-}. \tag{5.11}$$

Notons $L = (l_1, l_2, l_3)^t$ la matrice carrée d'ordre 3 composée des vecteurs propres à gauche. On pose "les variables diagonales"

$$W^- = L(\overline{V}_-)V_- \text{ et } W^+ = L(\overline{V}_+)V_+. \tag{5.12}$$

Alors, ce n'est difficile de vérifier que les conditions aux limites (5.9)-(5.11) puissent s'écrire localement sous une nouvelle représentation:

$$(5.9)' \qquad x = x_1(t) : \begin{cases} W_2^- = c_g(t, x_1(t)) = f_2(t) \\ W_3^- = f_3(t, x_1(t), W_1^-), \end{cases}$$

$$(5.10)' \qquad x = x_3(t) : \begin{cases} W_1^+ = g_1(t, x_3(t), W_3^+) \\ W_2^+ = c_d(t, x_3(t)) = g_2(t), \end{cases}$$

$$(5.11)' \qquad x = 0 : \begin{cases} W_1^- = f_1(t, W_2^-, W_3^-, W_1^+, W_2^+) \\ W_3^- = g_3(t, W_2^-, W_3^-, W_1^+, W_2^+). \end{cases}$$

D'après des calculs élémentaires, on obtient au point $(t, x) = (0, 0)$, $V^- = \overline{V}_-$ et $V^+ = \overline{V}_+$,

$$f_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial W_1^-} = -\frac{\left(\sqrt{\overline{v}_-} - \sqrt{\overline{v}_g}\right)^2}{\left(\sqrt{\overline{v}_-} + \sqrt{\overline{v}_g}\right)^2}, \quad g_{16} = \frac{\partial g_1}{\partial W_3^+} = \frac{\left(\sqrt{\overline{v}_+} - \sqrt{\overline{v}_d}\right)^2}{\left(\sqrt{\overline{v}_+} + \sqrt{\overline{v}_d}\right)^2},$$

$$f_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial W_3^-} = \frac{\overline{c}_g \overline{A}_d(1 + \overline{c}_d) - \overline{c}_d \overline{A}_g(1 + \overline{c}_g)}{\overline{c}_g \overline{A}_d(1 + \overline{c}_d) + \overline{c}_d \overline{A}_g(1 + \overline{c}_g)},$$

$$f_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial W_1^+} = \frac{2\overline{c}_g \overline{A}_g(1 + \overline{c}_g)}{\overline{c}_g \overline{A}_d(1 + \overline{c}_d) + \overline{c}_d \overline{A}_g(1 + \overline{c}_g)},$$

$$g_{34} = \frac{\partial g_3}{\partial W_1^+} = \frac{\overline{c}_d \overline{A}_g(1 + \overline{c}_g) - \overline{c}_g \overline{A}_d(1 + \overline{c}_d)}{\overline{c}_d \overline{A}_g(1 + \overline{c}_g) + \overline{c}_g \overline{A}_d(1 + \overline{c}_d)},$$

$$g_{33} = \frac{\partial g_3}{\partial W_3^-} = \frac{2\overline{c}_d \overline{A}_g(1 + \overline{c}_d)}{\overline{c}_g \overline{A}_d(1 + \overline{c}_d) + \overline{c}_d \overline{A}_g(1 + \overline{c}_g)}.$$

Soient

$$\tau_1^- = \frac{\lambda_1(\overline{V}_-) - \overline{\sigma}_1}{\lambda_1(\overline{V}_-)}, \quad \tau_2^- = 0, \quad \tau_3^- = \frac{\lambda_3(\overline{V}_-)}{\lambda_3(\overline{V}_-) - \overline{\sigma}_1},$$

$$\tau_1^+ = \frac{\lambda_1(\overline{V}_+)}{\lambda_1(\overline{V}_+) - \overline{\sigma}_3}, \quad \tau_2^+ = 0, \quad \tau_3^- = \frac{\lambda_3(\overline{V}_+) - \overline{\sigma}_3}{\lambda_3(\overline{V}_+)},$$

où $\overline{\sigma}_1$ et $\overline{\sigma}_3$ sont les vitesses des 1 et 3-chocs dans le problème de Riemann correspondant. Par conditions d'entropie, on a $0 \leq \tau_1^+, \tau_1^-, \tau_3^+, \tau_3^- \leq 1$.

On définit maintenant la matrice caractéristique au point $(t, x) = (0, 0)$, $V^- = \overline{V}_-$ et $V^+ = \overline{V}_+$, par

$$(5.13) \qquad H = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3)}{\partial(W_1^-, W_2^-, W_3^-, W_1^+, W_2^+, W_3^+)}.$$

D'après (5.9)'-(5.11)', on obtient:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$H_k = H\tau^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\tau_3^-)^k f_{13} & (\tau_1^+)^k f_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\tau_1^-)^k f_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\tau_3^+)^k g_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\tau_3^-)^k g_{33} & (\tau_1^+)^k g_{34} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\tau = \mathrm{diag}(\tau_1^-, \tau_2^-, \tau_3^-, \tau_1^+, \tau_2^+, \tau_3^+)$.

Soient

$$\theta = -f_{13},\ \beta_1 = f_{31},\ \beta_2 = g_{16},\ \alpha = \bar{c}_g/\bar{c}_d,\ \gamma_i = \tau_i^-,\ \gamma_{i+3} = \tau_i^+,\ i = 1, 3.$$

Alors $f_{14} = \alpha(1+\theta)$, $g_{33} = \dfrac{1-\theta}{\alpha}$, $g_{34} = \theta$. Ce qui entraîne

$$I - H_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma_3^k\theta & -\gamma_4^k\alpha(1+\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1^k\beta_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_6^k\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\gamma_3^k(1+\theta)}{\alpha} & -\gamma_4^k\theta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \text{dét}(I - H_k) \\ &= (1 + \gamma_1^k\gamma_2^k\theta\beta_1)(1 - \gamma_4^k\gamma_6^k\theta\beta_2) - \gamma_1^k\gamma_3^k\gamma_4^k\gamma_6^k\beta_1\beta_6(1-\theta)(1+\theta) \\ &= \frac{1}{2}(1-\theta)(1-\beta_1\gamma_1^k\gamma_3)(1+\beta_2\gamma_4^k\gamma_6^k) + \frac{1}{2}(1+\theta)(1+\beta_1\gamma_1^k\gamma_3^k)(1-\beta_2\gamma_4^k\gamma_6^k) \end{aligned}$$

Comme $0 \le \beta_i,\ \gamma_i,\ \theta < 1$, on obtient $\Delta_k \neq 0$ pour $k = 1, 2, 3, \cdots$. Ceci prouve le Théorème 4, d'après le résultat dans [6].

RÉFÉRENCES

[1] S. BENZONI-GAVAGE, Thèse. Université de Lyon 1, 1991.

[2] S. BENZONI-GAVAGE - D. SERRE, *Compacité par compensation pour une classe de systèmes hyperboliques de p lois de conservation ($p \geq 3$)*. Prépublication, n. 59 (1992), ENSL.

[3] R.J. DIPERNA, *Convergence of approximate solutions to conservation laws*. Arch. Rational Mech. Anal. **82**, (1983), 27-70.

[4] J. GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl., Math., **18** (1965), 697-715.

[5] T.P. LIU, *Initial-boundary-value problems for gas dynamics*. Arch. Rational Mech. Anal., **64** (1977), 137-168.

[6] LI TA-TSIEN - PENG YUE-JUN, *Problème de Riemann généralisé pour une sorte de systèmes des câbles*, Mathematica Portugalia **50** (1993), 407-434.

[7] LI TA-TSIEN - YU WEN-CI, Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems. Duke University, Mathematics Series V, 1985.

[8] T. NISHIDA, *Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **44** (1968), 642-646.

[9] T. NISHIDA - J. SMOLLER, *Mixte problem for nonlinear conservation laws*, J. Differential Equations, **23** (1977), 244-269.

[10] D. SERRE, *Solutions à variations bornées pour certains systèmes hyperboliques de lois de conservation*, J. Differential Equations, **68** (1987), 137-168.

[11] D. SERRE, *Temple's fields and integrability of hyperbolic systems of conservation laws*, Prépublication, n. 72 (1992), ENSL.

[12] B. TEMPLE, *Systems of conservation laws with invariant submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., **280** (1983), 781-795.

[13] D.H. WAGNER, *Equivalence of the Euler and Lagrangian Equations of Gas Dynamics for Weak Solutions*, J. Differential Equations, **68** (1987), 118-136.

CeReMaB, URA 226
Université de Bordeaux I
351, Cours de la libération
33405 TALENCE
France