ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Sur la majoration de sommes de Weyl biquadratiques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 19, nº 2 (1992), p. 291-304

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1992_4_19_2_291_0>

Sur la majoration de sommes de Weyl biquadratiques

JEAN-MARC DESHOUILLERS*

Les *sommes trigonométriques* de la forme

$$S(f, P, H) := \sum_{P<n\leq P+H} \exp(2\pi i f(n)),$$

où f est un polynôme à coefficients réels, jouent un rôle crucial dans plusieurs domaines de la théorie des nombres, notamment la répartition modulo 1 et les problèmes additifs.

Dans l'étude du problème de Waring pour les puissances k-ièmes, avec $k \geq 4$, le succès de la *méthode du cercle* de Ramanujan, Hardy et Littlewood repose sur l'obtention d'une majoration non triviale de la somme $S(f, P, H)$ lorsque f est un polynôme de degré k dont le coefficient directeur n'est pas proche d'un rationnel à petit dénominateur (l'énoncé du résultat principal donne un cadre précis à cette formulation). Dans ce cas, il résulte des travaux de Weyl que l'on a pour $H \leq P$ et $\epsilon > 0$:

$$|S(f, P, H)| = O_\epsilon(P^{1-2^{-k+1}+\epsilon}).$$

Le membre de droite vaut ainsi $O_\epsilon(P^{7/8+\epsilon})$ lorsque $k = 4$, et de nombreux efforts sont jusqu'à ce jour restés vains pour abaisser l'exposant $7/8$.

Notre propos est ici de donner une forme complètement explicitée, indispensable dans l'étude du problème de Waring pour les bicarrés. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant:

THÉORÈME. *Soit P un réel supérieur à 10^{80}, et $0 < a < q$ deux entiers premiers entre eux, avec*

$$4.10^6 P < q \leq \frac{P^3}{974}. \tag{1}$$

* Ce travail a été partiellement subventionné par le PRC Mathématiques et Informatique, et l'Institute for Advanced Study (Princeton).

Pervenuto alla Redazione il 26 Luglio 1991.

Pour tout nombre réel α avec

(2) $$|q\alpha - a| \leq 975P^{-3},$$

et tout entier ϵ valant 0 *ou* 1, *on a*

(3) $$\left| \sum_{P-\frac{\epsilon}{2}<x\leq 2P-\frac{\epsilon}{2}} \exp\left(2\pi i\left(\alpha(2x+\epsilon)^4\right)\right)\right| \leq 15,7P^{0,884}\operatorname{Log}^{0,25}P.$$

Ce théorème permet de montrer, selon le programme développé dans les notes [2] et [3], que tout entier supérieur à 10^{367} est somme de 19 bicarrés: la démonstration complète de ce dernier résultat est fournie dans l'article [4].

La démonstration du Théorème est fondée sur la méthode introduite par Balasubramanian en [1]. Dans un certain sens, l'amélioration est modeste (pour $P = 1,4\ 10^{90}$, le membre de droite de la relation (3) est inférieur à $386\,P^{7/8}$, tandis que la méthode originale de [1] conduirait à $2033\,P^{7/8}$); en revanche, pour l'application au problème de Waring pour les bicarrés, cette amélioration est cruciale, car la majoration de [1] permet seulement de montrer que tout entier supérieur à 10^{400} est somme de 19 bicarrés.

Nous avons tenté de simplifier au maximum notre argument, tout en présentant un résultat compatible avec notre objectif. Le Lecteur attentif remarquera plusieurs améliorations possibles, notamment:

la prise en compte du module 3 dans le traitement de la somme T de la Proposition 1,

la prise en compte des facteurs relatifs aux diviseurs de r dans cette même somme,

la prise en compte de ce que s_1 et s_2 sont premiers entre eux, toujours dans la somme T,

l'évaluation du terme d'erreur dans le Lemme 1,

une sommation par parties dans la majoration de la somme T_5.

Le premier paragraphe, consacré à la majoration de moyennes de fonctions multiplicatives, est le cœur de ce travail. Le second paragraphe traite d'une somme $\sum \min\left(P, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right)$ traditionnelle dans la méthode de Weyl et le troisième paragraphe présente la démonstration du Théorème. On trouvera enfin quelques remarques sur le calcul des produits eulériens qui interviennent.

1. - Moyennes de fonctions multiplicatives

LEMME 1. *Soit a et b deux réels positifs ou nuls dont la somme est inférieure à* '1, *et soit ρ une fonction multiplicative non-négative telle que le* *produit infini*

$$K = \prod_p \left(1 + \max(\rho(p)p^b - 1, 0)/p\right) \tag{4}$$

converge.

Pour tout couple d'entiers h et $k > 0$, et tout réel $X \geq 1$, on a

$$\sum_{\substack{m \leq X \\ m \equiv h (\operatorname{mod} k)}} m^{-a} \prod_{p|m} (1 + \rho(p)) \tag{5}$$
$$\leq \frac{X^{1-a}}{k(1-a)} \prod_{p \nmid k} \left(1 + \frac{\rho(p)}{p}\right) \prod_{\substack{p|k \\ p|h}} (1 + \rho(p)) + \frac{KX^{1-a-b}}{1-a-b}$$

en outre, si h est un multiple de k, on peut remplacer par 0 *le second terme du membre de droite de l'inégalité précédente.*

DÉMONSTRATION. Notons $\sum$ la somme que nous voulons majorer. On a

$$\sum = \sum_{\substack{m \leq X \\ m \equiv h (\operatorname{mod} k)}} m^{-a} \sum_{d|m} \mu^2(d)\rho(d).$$

que l'on écrit, en utilisant le théorème chinois:

$$\sum = \sum_{\substack{d \leq X \\ (d,k)|h}} \mu^2(d)\rho(d) \sum_{\substack{m \leq X \\ m \equiv l (\operatorname{mod} [d,k])}} m^{-a}$$

où l est congru à h modulo k et 0 modulo d.

Considérons d'abord le cas où h est multiple de k; on a

$$\sum_{\substack{0 < n \leq X \\ n \equiv 0 (\operatorname{mod} u)}} n^{-a} \leq u^{-a} \sum_{0 < m \leq X/u} m^{-a} \leq u^{-a} \int_0^{\frac{X}{u}} t^{-a} dt = \frac{X^{1-a}}{(1-a)u},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\sum &\le \frac{X^{1-a}}{1-a} \sum_{\substack{d\le X\\(d,k)|h}} \frac{\mu^2(d)\rho(d)}{[d,k]}\\ &\le \frac{X^{1-a}}{k(1-a)} \sum_{\substack{d\\(d,k)|h}} \frac{\mu^2(d)\rho(d)(d,k)}{d}\\ &= \frac{X^{1-a}}{k(1-a)} \prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{\rho(p)}{p}\right)\prod_{\substack{p|k\\p|h}}(1+\rho(p)),\end{aligned}$$

ce qui établit le cas particulier du Lemme. (On notera que dans ce cas, la condition $p|h$ est superflue).

Passons maintenant au cas général. On a

$$\sum_{\substack{m\le X\\ m\equiv l(\mathrm{mod}[d,k])}} m^{-a} \le d^{-a} + \sum_{\substack{0<m\le X\\ m\equiv 0(\mathrm{mod}[d,k])}} m^{-a},$$

puisque l est congru à 0 modulo d. On en déduit

$$\sum \le \sum_{\substack{d\le X\\(d,k)|h}} \frac{\mu^2(d)\rho(d)}{d^a} + \sum_{\substack{d\le X\\(d,k)|h}} \mu^2(d)\rho(d)\frac{X^{1-a}}{(1-a)[d,k]};$$

le second terme se traite comme dans le cas particulier et conduit au premier terme dans la majoration du Lemme. Pour le premier terme, on applique le cas particulier du Lemme à la fonction fortement multiplicative définie par

$$\sigma(p) = \max(\rho(p)p^b - 1, 0).$$

Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\le X\\(d,k)|h}} \frac{\mu^2(d)\rho(d)}{d^a} &\le \sum_{d\le X} d^{-a-b}\prod_{p|d}(1+\sigma(p))\\ &\le \frac{KX^{1-a-b}}{1-a-b},\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 1. □

PROPOSITION 1. *Soit la fonction multiplicative f définie par*

(6) $$f(n) = n^{0,036}\prod_{p|n}(1-p^{-0,072})^{1/2}.$$

Pour tout réel $P \geq 10^{80}$, *on a:*

$$\sum_n \frac{1}{f^2(n)} \left(\sum_{\substack{l|n \\ l\leq P,\, n/l\leq P}} f(l) \right)^2 \leq 187400\, P^{1{,}928} \log P \tag{7}$$

et

$$\sum_{n\leq P} f^{-1}(n) \leq 40{,}18\, P^{0{,}964}. \tag{8}$$

DÉMONSTRATION. On pose $\beta := 0{,}036$ et on introduit les fonctions multiplicatives, nulles en dehors de l'ensemble des entiers sans facteur carré, définies par les relations

$$\Phi(p) = (1 - p^{-2\beta})^{1/2},\ \phi(p) = \Phi(p) - 1,\ F(p) = 1 + \phi(p)/p$$
$$\Gamma(p) = (1 - p^{-2\beta})^{-1},\ \gamma(p) = \Gamma(p) - 1,\ G(p) = 1 + \gamma(p)/p$$
$$\Lambda(p) = \frac{1}{G(p)\Phi(p)},\ \lambda(p) = \Lambda(p) - 1,\ L(p) = 1 + \lambda(p)/p$$
$$\Theta(p) = (1 - p^{-2\beta})^{-1/2},\ \theta(p) = \Theta(p) - 1,\ TH(p) = 1 + \theta(p)/p.$$

On pose enfin

$$g(n) = \frac{1}{f^2(n)} \text{ et } K = \prod_p (1 + \max(\lambda(p)\cdot p^{2\beta} - 1, 0)/p).$$

On a les valeurs numériques

$$K \leq 1{,}11; \qquad \prod_p G(p) \leq 15224;$$
$$\prod_{p>3} L(p) \leq 3{,}71; \qquad \prod_p TH(p) \leq 38{,}73.$$

On remarque que l'on a:

$$f(n) = n^\beta \prod_{p|n} \Phi(p) = n^\beta \prod_{p|n} (1 + \phi(p)) = n^\beta \sum_{d|n} \phi(d),$$
$$g(n) = \frac{1}{f^2(n)} = n^{-2\beta} \prod_{p|n} \Phi^{-2}(p) = n^{-2\beta} \prod_{p|n} \Gamma(p)$$
$$= n^{-2\beta} \prod_{p|n} (1 + \gamma(p)) = n^{-2\beta} \sum_{d|n} \gamma(d),$$

de telle sorte qu'en notant S le membre de gauche de (7), on a

$$S \leq 2 \sum_{m_1 \leq P} f(m_1) \sum_{m_2 \leq m_1} f(m_2) \sum_{\substack{n \leq Pm_2 \\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}[m_1, m_2])}} g(n);$$

on applique le Lemme 1; il vient

$$S \leq 2 \sum_{m_1 \leq P} f(m_1) \sum_{m_2 \leq m_1} f(m_2) \frac{(Pm_2)^{1-2\beta}}{(1-2\beta)[m_1, m_2]} \prod_{p \nmid [m_1, m_2]} G(p) \prod_{p \mid [m_1, m_2]} \Gamma(p)$$

$$\leq \frac{2P^{1-2\beta}}{1-2\beta} \prod_p G(p) \cdot T,$$

où

$$T := \sum_{m_1 \leq P} f(m_1) \sum_{m_2 \leq m_1} f(m_2) \frac{m_2^{1-2\beta}(m_1, m_2)}{m_1 m_2} \prod_{p \mid [m_1, m_2]} \frac{\Gamma(p)}{G(p)}.$$

On écrit alors $r = (m_1, m_2)$, $m_1 = rs_1$, $m_2 = rs_2$, de telle sorte que choisir m_1 et m_2 avec $m_1 \leq P$ et $m_2 \leq m_1$ équivaut à choisir r, s_1 et s_2 avec $r \leq P$, $s_1 \leq P/r$, $s_2 \leq s_1$, et $(s_1, s_2) = 1$. On a

$$T = \sum_{r \leq P} \sum_{s_1 \leq P/r} s_1^{\beta-1} \sum_{\substack{s_2 \leq s_1 \\ (s_2, s_1)=1}} s_2^{-\beta} \prod, \tag{9}$$

où

$$\prod := \prod_{p \mid rs_1s_2} \frac{\Gamma(p)}{G(p)} \prod_{p \mid rs_1} \Phi(p) \prod_{p \mid rs_2} \Phi(p).$$

On sépare maintenant les variables en remarquant que s_1 et s_2 sont premiers entre eux, et en écrivant $r = tt_1t_2$, où $(t, s_1s_2) = 1$ et $t_i | s_i^\infty$ pour $i = 1, 2$. On remarque que $\Gamma(p) = 1/\Phi^2(p)$; il vient

$$\prod = \prod_{p \mid s_1} \frac{1}{G(p)\Phi(p)} \prod_{p \mid s_2} \frac{1}{G(p)\Phi(p)} \prod_{p \mid t} \frac{1}{G(p)} \prod_{p \mid t_1} \Phi(p) \prod_{p \mid t_2} \Phi(p),$$

et puisque $\Phi(p) \leq 1$, $G(p) \geq 1$ et $G(3)\Phi(3) \geq 1$ on a

$$\prod \leq \prod_{\substack{p \mid s_1 \\ p \nmid 3}} \frac{1}{G(p)\Phi(p)} \prod_{\substack{p \mid s_2 \\ p \nmid 3}} \frac{1}{G(p)\Phi(p)} \prod_{p \mid t} \frac{1}{G(p)}$$

$$= \prod_{\substack{p \mid s_1 \\ p \nmid 3}} \Lambda(p) \prod_{\substack{p \mid s_2 \\ p \nmid 3}} \Lambda(p) \prod_{p \mid t} \frac{1}{G(p)}$$

$$\leq \prod_{\substack{p \mid s_1 \\ p \nmid 3}} \Lambda(p) \prod_{\substack{p \mid s_2 \\ p \nmid 3}} \Lambda(p) \prod_{p \mid (t,2)} \frac{1}{G(p)};$$

en reportant dans (9), il vient

$$T \leq \sum_{r \leq P} \sum_{s_1 \leq P/r} s_1^{\beta-1} \prod_{\substack{p|s_1 \\ p\nmid 3}} \Lambda(p) \sum_{\substack{s_2 \leq s_1 \\ (s_2,s_1)=1}} s_2^{-\beta} \prod_{\substack{p|s_2 \\ p\nmid 3}} \Lambda(p) \prod_{\substack{p|(r,2) \\ p\nmid s_1 s_2}} \frac{1}{G(p)}.$$

Tous les termes qui interviennent sont positifs, et l'on peut donc majorer T en remplaçant la condition $(s_2, s_1) = 1$ par $(s_2, s_1, 2) = 1$. Il est utile de séparer les classes de r, s_1 et s_2 modulo 2; à cette fin, on introduit les sommes

$$U(\epsilon, \eta_1, \eta_2) = \sum_{\substack{r \leq P \\ r \equiv \epsilon[2]}} \sum_{\substack{s_1 \leq P/r \\ s_1 \equiv \eta_1[2]}} s_1^{\beta-1} \prod_{\substack{p|s_1 \\ p\nmid 6}} \Lambda(p) \sum_{\substack{s_2 \leq s_1 \\ s_2 \equiv \eta_2[2]}} s_2^{-\beta} \prod_{\substack{p|s_2 \\ p\nmid 6}} \Lambda(p),$$

et l'on a

$$T \leq \frac{1}{G(2)} U(2,1,1) + \Lambda(2) \cdot U(2,2,1) + \Lambda(2) \cdot U(2,1,2) + U(1,1,1)$$
$$+ \Lambda(2) \cdot U(1,2,1) + \Lambda(2) \cdot U(1,1,2).$$

Par le Lemme 1, et le fait que $\Lambda(p) \geq 1$ pour $p > 3$, on a

$$\sum_{\substack{s_2 \leq s_1 \\ s_2 \equiv \eta_2[2]}} s_2^{-\beta} \prod_{\substack{p|s_2 \\ p\nmid 6}} \Lambda(p) \leq \frac{s_1^{1-\beta}}{2(1-\beta)} \prod_{p>3} L(p) + \frac{K s_1^{1-3\beta}}{1-3\beta},$$

où K est défini par (4). En utilisant ce résultat, il vient

$$\sum_{\substack{s_1 \leq P/r \\ s_1 \equiv \eta_1[2]}} s_1^{\beta-1} \prod_{\substack{p|s_1 \\ p\nmid 6}} \Lambda(p) \sum_{\substack{s_2 \leq s_1 \\ s_2 \equiv \eta_2[2]}} s_2^{-\beta} \prod_{\substack{2|s_2 \\ p\nmid 6}} \Lambda(p)$$
$$\leq \frac{1}{2(1-\beta)} \prod_{p>3} L(p) \sum_{\substack{s_1 \leq P/r \\ s_1 \equiv \eta_1[2]}} \prod_{\substack{p|s_1 \\ p\nmid 6}} \Lambda(p) + \frac{K}{1-3\beta} \sum_{\substack{s_1 \leq P/r \\ s_1 \equiv \eta_1[2]}} s_1^{-2\beta} \prod_{\substack{p|s_1 \\ p\nmid 6}} \Lambda(p),$$

et deux nouvelles applications du Lemme 1 permettent de majorer cette expression par

$$\frac{P}{4(1-\beta)r} \prod_{p>3} L^2(p) + \frac{K}{2(1-\beta)(1-2\beta)} \prod_{p>3} L(p) \left(\frac{P}{r}\right)^{1-2\beta}$$
$$+ \frac{K}{2(1-3\beta)(1-2\beta)} \prod_{p>3} L(p) \left(\frac{P}{r}\right)^{1-2\beta} + \frac{K^2}{(1-3\beta)(1-4\beta)} \left(\frac{P}{r}\right)^{1-4\beta}.$$

On effectue maintenant la sommation sur r, en utilisant les relations:

$$\sum_{\substack{r\equiv\epsilon(\mathrm{mod}\,2)\\ r\leq P}} \frac{1}{r} \leq 1+\sum_{\substack{r\equiv 0[2]\\ r\leq P}} \frac{1}{r} \leq 1+\frac{1}{2}\left(1+\log\left(\frac{P}{2}\right)\right)$$

$$\leq 1,2+\frac{1}{2}\log P,$$

et

$$\sum_{\substack{r\equiv\epsilon(\mathrm{mod}\,2)\\ r\leq P}} r^{-\delta} \leq 1+2^{-\delta}\sum_{r\leq P/2} r^{-\delta} \leq 1+\frac{P^{1-\delta}}{2(1-\delta)} \leq 7\cdot P^{1-\delta}$$

pour $0<\delta\leq 1-2\beta$ et $P\geq 10^{80}$. On en déduit

$$U(\epsilon,\eta_1,\eta_2) \leq \frac{\prod_{p>3} L^2(p)}{8(1-\beta)} P\log P + \left(0,32\prod_{p>3} L^2(p)+8,2K\prod_{p>3} L(p)+9,2K^2\right)P.$$

En utilisant les valeurs numériques calculées pour $\prod_{p>3} L(p)$ et K, on trouve, pour $P\geq 10^{80}$

$$U(\epsilon,\eta_1,\eta_2)\leq 2,054 \quad P\log P$$

d'où

$$T\leq 5,71 \quad P\log P$$

et finalement

$$S\leq 187400 \quad P^{1,928}\log P,$$

ce qui établit la relation (7).

La relation (8) est une conséquence directe du Lemme 1. □

2. - Sur la somme $\sum \min(P,\|\alpha n\|^{-1})$

PROPOSITION 2. *Soit P et α deux nombres réels satisfaisant les conditions du Théorème. On a*

$$\sum_{n\leq P^3/27} \min\left(P,\frac{1}{2\|384\,n\alpha\|}\right)\leq 0,1149\,P^3\log P. \tag{10}$$

DÉMONSTRATION. On pose

$$q' := q/(384,q) \text{ et } a' := 384\,aq'/q \tag{11}$$

où a et q satisfont les conditions du Théorème, et on commence par montrer que pour tout intervalle I contenant au plus q' entiers positifs, inférieurs ou égaux à $P^3/27$, on a:

$$\sum_{n\in I} \min\left(P, \frac{1}{2\|384\,n\alpha\|}\right) \leq 28000\,P + q' \log 2q'. \tag{12}$$

On a

$$\sum_{n\in I} \min\left(P, \frac{1}{2\|384\,n\alpha\|}\right) \leq \sum_{m=0}^{q'-1} \min\left(P, \frac{1}{2\|(m+\gamma_m)/q'\|}\right).$$

où

$$|\gamma_m| \leq q' \cdot 384 \cdot \frac{P^3}{27} \cdot \frac{975}{qP^3} \leq \frac{384 \times 975}{27} \leq 13867.$$

On utilise alors les majorations suivantes:

$$\begin{aligned}
m < 14000 \text{ ou } m > q' - 14000:\ & \min\left(P, \frac{1}{2\|\dots\|}\right) \leq P,\\
14000 \leq m \leq \frac{q'}{2} - 14000:\ & \min\left(P, \frac{1}{2\|\dots\|}\right) \leq \frac{q'}{2(m-13867)},\\
\frac{q'}{2} + 14000 \leq m \leq q' - 14000:\ & \min\left(P, \frac{1}{2\|\dots\|}\right) \leq \frac{q'}{2(q'-m-13867)},\\
\frac{q'}{2} - 14000 < m < \frac{q'}{2} + 14000:\ & \min\left(P, \frac{1}{2\|\dots\|}\right) \leq 2;
\end{aligned}$$

(pour démontrer cette dernière relation, on vérifie que pour les valeurs de m considérées, on a $\frac{q'}{4} < m + \gamma_m < \frac{3q'}{4}$).

On a donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{q'-1} \min\left(P, \frac{1}{2\|(m+\gamma_m)/q'\|}\right)\\
&\leq 28000\,P + 2\sum_{l+1}^{q'/2} \frac{q'}{2l} + 2 \times 28000\\
&\leq 28000\,P + q'\left(\log q' + 1 - \log 2 + \frac{56000}{q'}\right).
\end{aligned}$$

d'où la relation (12).

Pour obtenir la Proposition 2, on découpe l'intervalle $[0, P^3/27]$ en au plus $\left(\frac{P^3}{27q'} + 1\right)$ intervalles sur chacun desquels on applique (12). Il vient

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \leq P^3/27} \min\left(P, \frac{1}{2\|384\, n\alpha\|}\right) \\
&\leq \left(\frac{P^3}{27q'} + 1\right)(28000\, P + q' \log 2q') \\
&\leq (P^3 \log 2P^3)\left(\frac{28000\, P}{27q' \log P^3} + \frac{28000}{P^2} + \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{974}\right)\right) \\
&\leq 0,1149\, P^3 \log P. \qquad \square
\end{aligned}$$

3. - Démonstration du Théorème

On commence par remplacer la somme que l'on veut majorer par

$$T_o(\alpha) := \sum_{P+1}^{2P} e(\alpha(2x + \epsilon)^4),$$

commettant une erreur au plus égale à 2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|T_o(\alpha)|^2 &= \sum_x \sum_y e(\alpha((2y + \epsilon)^4 - (2x + \epsilon)^4)) \\
&\leq P + 2T_1(\alpha).
\end{aligned}$$

où

$$T_1(\alpha) := \sum_{h_1=1}^{P} \left| \sum_{x=P}^{2P-h_1} e(\alpha(64\, h_1 x^3 + \cdots)) \right|.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$|T_1(\alpha)|^2 \leq \left(\sum_{h_1=1}^{P} f^{-1}(h_1)\right) T_2(\alpha),$$

où la fonction f est introduite dans l'énoncé de la Proposition 2, et où T_2 est définie par

$$T_2(\alpha) := \sum_{h_1-1}^{P} f(h_1) \left| \sum_{x=P+1}^{2P-h_1} e(\alpha(64\, h_1 x^3 + \ldots)) \right|^2.$$

On développe le carré intervenant dans T_2; en changeant de variables, il vient

$$T_2(\alpha) \leq P \sum_{h_1=1}^{P} f(h_1) + 2T_3(\alpha),$$

où

$$T_3(\alpha) := \sum_{h_1=1}^{P} f(h_1) \sum_{h_2=1}^{P-h_1} \left| \sum_{x=P}^{2P-h_1-h_2} e(\alpha(192\, h_1 h_2 x^2 + \ldots)) \right|$$

$$\leq \sum_{n} \left(\sum_{\substack{l|n \\ l \leq P\ \frac{n}{l} \leq P}} f(l) \right) \max_{h_1 h_2 = N} \left| \sum_{x=P}^{2P-h_1-h_2} e(\alpha(192\, n x^2 + \cdots)) \right| .$$

Par une dernière application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|T_3(\alpha)|^2 \leq \left(\sum_{n} f^{-2}(n) \left(\sum_{\substack{l/n \\ l \leq P,\ \frac{n}{l} \leq P}} f(l) \right)^2 \right) T_4(\alpha),$$

où

$$T_4(\alpha) = \sum_{n} f^2(n) \max_{h_1 h_2 = n} \left| \sum_{x=P}^{2P-h_1-h_2} e(\alpha(192\, n x^2 + \cdots)) \right|^2 .$$

On développe le carré et on change de variables; il vient

$$T_4(\alpha) \leq P \sum_{n \leq P^2/4} f^2(n) + 2T_5(\alpha),$$

où

$$T_5(\alpha) = \sum_{n} f^2(n) \max_{h_1 h_2 = n} \sum_{h_3=1}^{P} \left| \sum_{x=P}^{2P-h_1-h_2-h_3} e(\alpha(384\, n h_3 x)) \right|$$

$$\leq \sum_{n} f^2(n) \max_{h_1 h_2 = n} \sum_{h_3=1}^{P} \min\left(P, \frac{1}{2\|384\, n h_3 \alpha\|}\right) .$$

Notre construction est sous-tendue par le fait que l'on a

$$\sum_{d|m} f^2(m) = \prod_{p^a \| m} \left(1 + (p^{0,072} - 1) + \cdots + (p^{0,072\, a} - p^{0,072(a-1)})\right)$$

$$= \prod_{p^a \| m} p^{0,072\, a} = m^{0,072};$$

on en déduit

$$T_5(\alpha) \leq \sum_{m \leq P^3/27} m^{0,072} \min\left(P, \frac{1}{2\|384\, m\alpha\|}\right),$$

où la borne supérieure de la sommation provient de ce que l'on peut se restreindre aux $m = h_1 h_2 h_3$, où $0 < h_1 + h_2 + h_3 \leq P$.

Par la Proposition 2 et la majoration triviale $m^{0,072} \leq \left(\frac{P^3}{27}\right)^{0,072}$, on a

$$T_5(\alpha) \leq 0,0907\, P^{3,216} \log P.$$

Cette majoration, jointe à la majoration banale

$$\sum_{n \leq P^2/4} f^2(n) \leq \left(\frac{P^2}{4}\right)^{1,072}$$

conduit à

$$T_4(\alpha) \leq 0,1815\, P^{3,216} \log P.$$

Grâce à la Proposition 1, on a

$$T_3(\alpha) \leq 185,6\, P^{2,572} \log P$$

et la majoration banale

$$\sum_{h \leq P} f(h) \leq P^{1,036}$$

conduit à

$$T_2(\alpha) \leq 371,3\, P^{2,572} \log P.$$

Il résulte de la Proposition 2 que l'on a

$$T_1(\alpha) \leq 122,2\, P^{1,768} \log^{0,5} P.$$

On a donc

$$T_o(\alpha) \leq 15,65\, P^{0,884} \log^{0,25} P,$$

d'où le Théorème. □

4. - Sur le calcul des produits eulériens

On conserve les notations introduites au début de la démonstration de la Proposition 1. En utilisant le système PARI, avec ses valeurs initiales (28 décimales, nombres premiers jusqu'à 500 000), on calcule

$$\prod_{p\le 490000} G(p) = 11028,\ 1636\ldots$$

$$\prod_{3<p\le 490000} L(p) = 3,19439879\ldots$$

$$\prod_{p\le 490000} TH(p) = 33,354245\ldots .$$

Pour accélérer la convergence, on remarque que l'on a, pour $0 \le x \le 0,4$;

$$\frac{1}{1-x} \le 1 + x + x^2 + \cdots + x^5 + 1,7x^6,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \le 1 + 0,5x + 0,375x^2 + 0,313x^3 + 0,274x^4 + 0,247x^5 + 0,4x^6.$$

On en déduit, pour $p \ge 400000$:

$$G(p) \le 1 + \frac{1}{p^{1+a}} + \frac{1}{p^{1+2a}} + \frac{1}{p^{1+3a}} + \frac{1}{p^{1+4a}} + \frac{1}{p^{1+5a}} + \frac{1,7}{p^{1+6a}}$$

avec $a = 0,072$, et

$$\Lambda(p) \le TH(p) \le 1 + \frac{0,5}{p^{1+a}} + \frac{0,375}{p^{1+2a}} + \frac{0,313}{p^{1+3a}} + \frac{0,274}{p^{1+4a}} + \frac{0,247}{p^{1+5a}} + \frac{0,4}{p^{1+6a}}.$$

Chacune de ces expressions est de la forme

$$X(p) \le 1 + \sum_{j=1}^{J} \frac{a_j}{p^{s_j}}, \text{ pour } p \ge P,$$

où les a_i sont positifs et les s_i supérieurs à 1. De la relation

$$(1 + rx) \le (1 - x)^{-r},$$

valable pour $x \ge 0$ et $r \ge 0$, on déduit

$$X(p) \le \prod_{j=1}^{J} \left(1 + \frac{a_j}{p^{s_j}}\right) \le \prod_{j=1}^{J} (1 - p^{-s_j})^{-a_j},$$

ce qui permet de majorer

$$\prod_{p\ge P} X(p) \le \prod_{p\le P} \left\{ \prod_{j=1}^{J} (1 - p^{-s_j})^{aj} \right\} \prod_{j=1}^{J} \zeta^{a_j}(s_j);$$

la fonction ς est évaluée par la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin.

Pour $P = 490000$, le produit relatif à la fonction G est inférieur à $1,276709$, et celui relatif aux fonctions Λ et TH est inférieur à $1,160925$.

Le produit K figurant dans la démonstration de la Proposition 2 est en fait un produit fini, car on a $\lambda(p) < p^{-a}$ pour $p \geq 1000$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BALASUBRAMANIAN, *On Waring's problem: $g(4) \leq 20$*, Hardy-Ramanujan J. **8** (1985), 1-40.

[2] R. BALASUBRAMANIAN - J-M. DESHOUILLERS - F. DRESS, *Problème de Waring pour les bicarrés, 1: schéma de la solution*, C.R. Acad. Sci. Paris **303** (1986), 85-88.

[3] R. BALASUBRAMANIAN - J-M. DESHOUILLERS - F. DRESS, *Problème de Waring pour les bicarrés, 2: résultats auxiliaires pour le théorème asymptotique*, C.R. Acad. Sci. Paris **303** (1986), 161-163.

[4] J-M. DESHOUILLERS, F. DRESS, *Sums of 19 biquadrates: on the representation of large integers*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **19** (1992), 113-153.

Mathématiques stochastiques, Jeune Equipe D.R.E.D.
Université Bordeaux 2, BP 26
F 33076 Bordeaux Cedex
France