

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

THIERRY VUST

Plongements d'espaces symétriques algébriques : une classification

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 17, n° 2 (1990), p. 165-195

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1990_4_17_2_165_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Plongements d'espaces symétriques algébriques: une classification

THIERRY VUST

Soit G un groupe algébrique réductif connexe et H un sous-groupe algébrique de G (le corps de base est algébriquement clos et de caractéristique nulle). Dans [LV] est développée une théorie des plongements de l'espace homogène G/H : par *plongement* de G/H , on entend une G -variété algébrique intégrale normale X munie d'un plongement ouvert équivariant $G/H \hookrightarrow X$. Ce travail est une illustration de cette théorie et contient une classification abstraite des plongements des espaces homogènes symétriques.

Au §1, après avoir précisé la notion d'espace symétrique, on donne un résumé ad hoc de théorie des plongements qui s'inspire de très près du "Report on spherical varieties" de D. Luna, juillet 86 (non publié).

Les résultats sont exposés au §2 et démontrés au §3. Bien sûr, un peu de technique d'espace symétrique est nécessaire et bien qu'existant déjà dans la littérature, on a quelquefois inclus des démonstrations. Les §§4 à 7 sont consacrés à des exemples.

Plusieurs personnes ont influencé ce travail ou participé à sa rédaction: M. Brion, W. Casselman, C. De Concini, H. Kraft, D. Luna, F. Pauer, C. Procesi, G. Schwarz, T. Uzawa; je tiens à les remercier vivement.

1.

Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe et H un sous-groupe algébrique de G . On dit que l'espace homogène G/H est *symétrique* s'il existe un automorphisme involutif $\sigma \neq \text{id}$ de G tel que

$$G^\sigma \subset H \subset N_G(G^\sigma),$$

où G^σ désigne l'ensemble des $g \in G$ tels que $\sigma(g) = g$ et $N_G(\cdot)$ le normalisateur de $(\cdot)$ dans G .

Dans ce paragraphe, on passe en revue des généralités concernant la théorie des plongements de l'espace homogène symétrique G/H .

On rappelle qu'un plongement de G/H est la donnée d'une variété algébrique intègre X dans laquelle G opère algébriquement et d'un plongement ouvert équivariant $G/H \hookrightarrow X$. Dans toute la suite, la variété sous-jacente à un plongement est supposée *normale*.

Les espaces homogènes symétriques sont "sphériques", i.e. il existe un sous-groupe de Borel B de G tel que BH est ouvert dans G ([V]); dans ce cas, la théorie des plongements comme exposée dans [LV] est particulièrement simple (ibid. 8.1c): en voici un résumé.

1.1. Soit B un sous-groupe de Borel de G tel que BH est ouvert dans G .

On note ${}^B\mathcal{D}(G/H) = {}^B\mathcal{D}$ l'ensemble des fermés irréductibles de G/H qui sont de codimension 1 et stables par B ; autrement dit, puisque

$$BH/H = B/B \cap H$$

est affine, ${}^B\mathcal{D}$ est l'ensemble des composantes irréductibles de

$$G/H - BH/H.$$

Pour $D \in {}^B\mathcal{D}$, on désigne par u_D la valuation discrète normalisée du corps $k(G/H)$ des fonctions rationnelles sur G/H dont l'anneau est l'anneau local $\mathcal{O}_{G/H,D}$ de G/H en D .

On note $\mathcal{V}(G/H) = \mathcal{V}$ l'ensemble des valuations discrètes normalisées de $k(G/H)$ qui sont invariantes par G , i.e. des valuations v qui vérifient $v(s \cdot f) = v(f)$, $s \in G$, $f \in k(G/H)$.

Soit $G/H \hookrightarrow X$ un plongement *simple*: par définition cela signifie que X possède une seule orbite fermée qu'on notera Y . On désigne par $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des $D \in {}^B\mathcal{D}$ dont l'adhérence dans X contient Y . Puisque G/H est affine, chacune des composantes Z_i ($i = 1, \dots, \alpha$) de $X - G/H$ est de codimension 1; puisque X est normale, l'anneau $\mathcal{O}_{X,Z_i}$ est l'anneau d'une valuation $v_i \in \mathcal{V}$. On pose $\mathcal{V}_X = \{v_1, \dots, v_\alpha\} \subset \mathcal{V}$.

RÉSULTAT 1. ([LV] 8.3) *Le couple $(\mathcal{D}_X, \mathcal{V}_X)$ détermine le plongement simple X .*

Autrement dit, si X, X' sont deux plongements simples avec

$$(\mathcal{D}_X, \mathcal{V}_X) = (\mathcal{D}_{X'}, \mathcal{V}_{X'}),$$

alors X et X' sont isomorphes.

Mais quels sont les couples constitués d'un sous-ensemble $\mathcal{D}_0$ de ${}^B\mathcal{D}$ et d'un sous-ensemble fini $\mathcal{V}_0$ de $\mathcal{V}$, qui proviennent d'un plongement simple de G/H ? Pour répondre à cette question, il faut introduire encore quelques notions.

1.2. On note $\mathcal{P}^H$ le sous-groupe du groupe multiplicatif $k(G/H)^*$ constitué des vecteurs propres f de B (pour l'opération induite par les translations à

gauche) normalisés en sorte que $f(H/H) = 1$. Pour $v \in \mathcal{V}$, on désigne encore par v la restriction de v à $\mathcal{P}^H$; pour $D \in {}^B\mathcal{D}$, par $\rho(u_D)$ la restriction de u_D à $\mathcal{P}^H$: la nuance d'écriture provient du fait que l'opération de restriction à $\mathcal{P}^H$ d'une valuation discrète de $k(G/H)$ est injective sur $\mathcal{V}$ [ce qui permet d'identifier $\mathcal{V}$ à une partie de $\text{Hom}(\mathcal{P}^H, \mathbb{Z})$] ([LV] 7.4)], mais en général pas sur $\{u_D\}_{D \in {}^B\mathcal{D}}$.

On note $\mathcal{C}\mathcal{V}$ le cône convexe de $\text{Hom}(\mathcal{P}^H, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$ engendré par les $v \in \mathcal{V}$.

Soit $(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0)$ avec $\mathcal{D}_0 \subset {}^B\mathcal{D}$ et $\mathcal{V}_0$ une partie finie de $\mathcal{V}$. On note $\mathcal{C}(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0)$ le cône convexe de $\text{Hom}(\mathcal{P}^H, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$ engendré par les $\rho(u_D)$, $D \in \mathcal{D}_0$ et les $v \in \mathcal{V}_0$. On dit alors que la paire $(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0)$ est *admissible* si

- 1) $\mathcal{C}(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0)$ est saillant;
- 2) $\mathcal{C}(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0 - \{v\}) \subsetneq \mathcal{C}(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0)$ pour tout $v \in \mathcal{V}_0$;
- 3) l'intérieur relatif de $\mathcal{C}(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0)$ rencontre $\mathcal{C}\mathcal{V}$.

Soit $(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)$, $i = 1, 2$, deux couples admissibles; on dit que $(\mathcal{D}_1, \mathcal{V}_1)$ est *plus petit* que $(\mathcal{D}_2, \mathcal{V}_2)$ si $\mathcal{C}(\mathcal{D}_1, \mathcal{V}_1)$ est une facette de $\mathcal{C}(\mathcal{D}_2, \mathcal{V}_2)$ et si $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des $D \in \mathcal{D}_2$ tels que $\rho(u_D) \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_1, \mathcal{V}_1)$.

RÉSULTAT 2. ([LV] §8) (i) *L'application $X \mapsto (\mathcal{D}_X, \mathcal{V}_X)$ est une bijection de l'ensemble des plongements simples de G/H vers l'ensemble des couples admissibles.*

(ii) *Soit X_i un plongement simple de G/H ; on note $(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)$ le couple admissible qui lui correspond ($i = 1, 2$). Alors, pour qu'il existe un (unique) morphisme (de plongements) $\rho : X_1 \rightarrow X_2$, il faut et il suffit que $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{C}(\mathcal{D}_1, \mathcal{V}_1) \subset \mathcal{C}(\mathcal{D}_2, \mathcal{V}_2)$; de plus ρ est une immersion ouverte si et seulement si $(\mathcal{D}_1, \mathcal{V}_1)$ est plus petit que $(\mathcal{D}_2, \mathcal{V}_2)$.*

1.3. Maintenant la méthode pour décrire combinatoirement les plongements de G/H n'offre pas de surprise. Soit $X \hookrightarrow G/H$ un plongement; on note $(Y_i)_{i \in I}$ l'ensemble des orbites (non ouvertes) de G dans X . On observe que $X_i := \{x \in X \mid \overline{G \cdot x} \supset Y_i\}$ est un ouvert de X (se rappeler qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de G dans X , voir par exemple [LV] 7.5) et un plongement simple de G/H d'orbite fermée Y_i , $i \in I$. On note $(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)$ le couple admissible associé à X_i , $i \in I$; la famille $(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)_{i \in I}$ s'appelle la *donnée combinatoire* de X .

RÉSULTAT 3. ([LV] §8) *Pour que la famille $(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)_{i \in I}$ de couples admissibles soit la donnée combinatoire d'un plongement (complet) de G/H , il faut et il suffit que*

- a) *cette famille est saturée inférieurement par l'ordre introduit en 1.2;*
- b) *les sous-ensembles constitués de l'intersection de l'intérieur relatif de $\mathcal{C}(\mathcal{D}_i, \mathcal{V}_i)$ avec $\mathcal{C}\mathcal{V}$ sont disjoints (forment une partition de $\mathcal{C}\mathcal{V}$).*

Soit enfin $X' \hookrightarrow G/H$ un autre plongement; on note $(X'_j)_{j \in J}$ la famille des sous-plongements simples de X' associés aux orbites (non ouvertes) de G

dans X' . Alors, pour qu'il existe un morphisme $\rho : X \rightarrow X'$, il faut et il suffit que, pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ et un morphisme $X_i \rightarrow X'_j$. Vu le résultat 2, on peut exprimer, si nécessaire, l'existence d'un morphisme $X \rightarrow X'$ en termes des données combinatoires.

1.4. On suppose que $G = T$ est un tore; alors l'espace homogène T est sphérique (et même un espace homogène symétrique d'un tore T'); les résultats ci-dessus généralisent la théorie maintenant classique des plongements toriques (voir par exemple [TE], [D]). Pour apprécier, on expose rapidement cette théorie.

Tout d'abord, par restriction de $k(T)$ au groupe $X(T)$ des caractères de T , on obtient une bijection de l'ensemble des valuations discrètes de $k(T)$ invariantes par T vers $X_*(T) := \text{Hom}(X(T), \mathbb{Z})$ (ici $\rho^H = X(T)$).

D'après un résultat de Sumihiro [Su], tout plongement simple de T est affine.

Soit $X \hookrightarrow T$ un plongement affine de T ; alors $\mathcal{V}_X$ est l'ensemble des $v \in \mathcal{V}(T)$ qui sont essentielles pour l'algèbre $k[X]$ des fonctions régulières sur X ,

$$k[X] = \{f \in k[T] \mid v(f) \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}_X\}$$

et $\mathcal{V}_X$ détermine entièrement le plongement simple X (ici ${}^B\mathcal{D} = \emptyset$).

Les plongements simples de T sont classés par les cônes convexes rationnels polyédraux (ccrp) de $X_*(T)_{\mathbb{R}}$ qui sont saillants; les plongements complets de T sont classés par les décompositions finies de $X_*(T)_{\mathbb{R}}$ en ccrp saillants.

2.

Dans le résumé du paragraphe précédent, on a retenu seulement de l'espace symétrique G/H qu'il est affine et sphérique. Pour pousser plus loin une classification des plongements de G/H il reste à étudier l'application

$${}^B\mathcal{D}(G/H) \longrightarrow \text{Hom}(\rho^H, \mathbb{Z})$$

$$D \longmapsto u_D$$

ainsi que l'image de l'injection naturelle de $\mathcal{V}(G/H)$ dans $\text{Hom}(\rho^H, \mathbb{Z})$.

Dans ce paragraphe, on montre que $\text{Hom}(\rho^H, \mathbb{Z})$ est naturellement muni d'un système de racines et on indique comment ces deux applications lui sont reliées. Un peu de technique des espaces symétriques est nécessaire.

2.1. Pour simplifier l'exposé, on suppose que G est *semi-simple* connexe; le cas général où G est réductif est semblable, mais techniquement plus lourd.

Soit $\sigma \neq \text{id}$ un automorphisme involutif de G .

On note $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ le revêtement universel de G ; alors ([St]) σ se relève en une involution $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{G}$ telle que $\pi\tilde{\sigma} = \sigma\pi$. Il est évident que si G/H est symétrique, alors $\pi^{-1}(H)$ contient et normalise $\pi^{-1}(G^\sigma)$, donc normalise aussi

$(\pi^{-1}(G^\sigma))^0 = (\tilde{G})^{\tilde{\sigma}}$ (ibid.); ici on a écrit $(\cdot)^0$ pour la composante connexe de l'élément neutre de $(\cdot)$. Par conséquent, $G/H = \tilde{G}/\pi^{-1}(H)$ est aussi un espace homogène symétrique du groupe $\tilde{G}$. Comme la théorie des plongements pour G/H et $\tilde{G}/\pi^{-1}(H)$ est la même, sans restreindre la généralité, on peut supposer que G est *simplement connexe*.

REMARQUE. Des manipulations du même ordre montrent que dans le cas général, il suffit de considérer la situation où $G = G_0 \times Z$ avec G_0 semi-simple simplement connexe, Z un tore, $\sigma(G_0) = G_0$, $\sigma(z) = z^{-1}$ pour tout $z \in Z$.

2.2. Dans ce numéro, on introduit quelques notations et on rappelle deux résultats techniques au sujet des espaces homogènes symétriques.

Si aucune confusion n'en résulte, on pose $K = G^\sigma$.

LEMME 1. (cf. [DP]_I (1.7)) *Le normalisateur de K dans G coïncide avec l'ensemble des $g \in G$ tels que $g\sigma(g)^{-1}$ est central dans G .*

PREUVE. Soit $n \in N = N_G(K)$; dire que $n\sigma(n)^{-1}$ est central dans G signifie que $n\sigma(n)^{-1}$ appartient au noyau de la représentation adjointe Ad de G .

L'automorphisme σ induit un automorphisme (encore noté σ) de

$$\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$$

qui normalise $\text{Ad}(N)$; ainsi le sous-groupe L de $GL(\mathcal{G})$ engendré par $\text{Ad}(N)$ et σ est réductif. Le sous- L -module $\text{Lie}(K)$ de $\mathcal{G}$ admet donc un supplémentaire stable par L et celui-ci ne peut être que $\{X \in \mathcal{G} | \sigma(X) = -X\}$. Par suite $\text{Ad}(N)$ et σ commutent. Alors, pour tout $n \in N$, on a

$$\text{Ad}(n\sigma(n)^{-1}) = \text{Ad}(n)\sigma \text{Ad}(n)^{-1}\sigma = 1.$$

L'autre inclusion est banale. □

On se fixe dans la suite un tore σ -anisotrope maximal S de G : on a $\sigma(s) = s^{-1}$, pour tout $s \in S$, et S est maximal pour cette propriété; on choisit ensuite un tore maximal T de G contenant S . On note $X(T)$ (resp. $X_*(T)$) le groupe des caractères (resp. des sous-groupes à un paramètre) de T et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité naturelle $X_*(T) \times X(T) \rightarrow \mathbb{Z}$. On désigne par R l'ensemble des racines de G relatives à T et pour $\lambda \in X_*(T)$, on pose $P(\lambda)$ pour le sous-groupe parabolique de G contenant T et associé à $\{\alpha \in R | \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0\}$. On choisit enfin $\lambda_+ \in X_*(S)$ et $\mu_+ \in X_*(T)$ en sorte que

$$Z_G(\lambda_+) = Z_G(S),$$

$$Z_G(\mu_+) = Z_G(T) \text{ et}$$

$$P(\mu_+) \subset P(\lambda_+)$$

(ici $Z_G(\cdot)$ désigne le centralisateur de $(\cdot)$ dans G); alors $P(\mu_+)$ est un sous-groupe de Borel de G tel que $P(\mu_+)K = P(\lambda_+)K$ est ouvert dans G (voir [V]).

On pose $P = P(\lambda_+)$; par construction $P \cap \sigma(P) = Z_G(S)$.

LEMME 2. (cf. [R] §8) Soit G/H un espace symétrique. Alors

- (i) $H = (S \cap H)K$;
- (ii) $\sigma(H) = H$;
- (iii) $P \cap H = Z_G(S) \cap H$.

PREUVE. (i) Soit $h \in H$; alors d'après le lemme 1, $t : h\sigma(h)^{-1}$ appartient au centre de G ; puisque $\sigma(t) = t^{-1}$ il s'ensuit que $t \in S$; il existe donc $s \in S$ tel que $s^2 = t$. On a alors

$$h\sigma(h)^{-1} = t = s^2 = s\sigma(s)^{-1},$$

d'où $s^{-1}h \in K$.

(ii) Est une conséquence directe de (i).

(iii) D'après (i), on a

$$\begin{aligned} P \cap H &= P \cap \bigcup_{s \in S \cap H} sK = \bigcup_{s \in S \cap H} s(P \cap K) = \bigcup_{s \in S \cap H} s(P \cap \sigma(P) \cap K) \\ &= \bigcup_{s \in S \cap H} s(Z_G(S) \cap K) = Z_G(S) \cap H. \end{aligned}$$

□

2.3. On note $\mathcal{P}(P \times H) = \mathcal{P}$ le sous-groupe multiplicatif de $k(G)^*$ constitué des vecteurs propres communs à P (pour l'opération induite par les translations à gauche) et à H (pour l'opération induite par les translations à droite) normalisés en sorte qu'ils prennent la valeur 1 en l'élément neutre de G ; on pose $\mathcal{P}^H = \mathcal{P} \cap k(G/H)$, $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P} \cap k[G]$ et $\mathcal{P}_+^H = \mathcal{P}^H \cap k[G]$ (si X est une variété algébrique intègre, on désigne par $k(X)$ (resp. $k[X]$) le corps des fonctions rationnelles (resp. l'algèbre des fonctions régulières) sur X).

Soit $f \in \mathcal{P}$; il existe $\omega \in X(P)$ et $\chi \in X(H)$ tels que

$$(p, h) \cdot f(x) = f(p^{-1}xh) = \omega(p)\chi(h)f(x), \quad p \in P, \quad h \in H, \quad x \in G.$$

Puisque $f(e) = 1$, on a en particulier $f(ph) = \omega^{-1}(p)\chi(h)$: on dispose donc d'un homomorphisme injectif

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P} &\longrightarrow X(P \times H) \\ f &\longmapsto [(p, h) \longmapsto f(ph) = \omega^{-1}(p)\chi(h)]. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2 de (2.2) et le fait que le sous-groupe dérivé de $Z_G(S)$ est contenu dans K ([V]), on a un isomorphisme

$$P^u \times (S *_{S \cap H} H) \xrightarrow{\sim} PH \subset G$$

où P^u est le radical unipotent de P et où $S *_{S \cap H} H$ est le quotient de $S \times H$ par l'opération de $S \cap H$ définie par $g \cdot (s, h) = (sg^{-1}, gh)$, $g \in S \cap H$, $s \in S$, $h \in H$.

Donc, en fait, ϕ induit un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} X(S) \times_{X(S \cap H)} X(H)$$

entre $\mathcal{P}$ et le sous-groupe de $X(S) \times X(H)$ constitué des (ω, χ) tels que $\omega|_{S \cap H} = \chi|_{S \cap H}$.

Par restriction, on obtient un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{P}^H \longrightarrow X(S/S \cap H).$$

D'après les lemmes de (2.2), le sous-groupe $X(S/S \cap H)$ de $X(S)$ est d'indice fini; via ϕ , $\text{Hom}(\mathcal{P}^H, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$ s'identifie donc à $X_*(S)_{\mathbb{R}}$.

On montre maintenant que $X_*(S)_{\mathbb{R}}$ est naturellement muni d'un système de racines.

On rappelle qu'on a choisi un tore maximal T de G qui contient S ; alors $\sigma(T) = T$ ([V]). On a déjà introduit le système R des racines de G relatives à T ; on a $\sigma(R) = R$. On note $\bar{S} = S/S \cap K$; le groupe $X(\bar{S})$ des caractères de $\bar{S}$ s'identifie avec

$$\{\bar{\chi} := \chi - \sigma(\chi) \mid \chi \in \chi(T)\}.$$

On désigne par $\bar{R}$ l'ensemble des éléments non nuls de $X(\bar{S})$ de la forme $\bar{\alpha} = \alpha - \sigma(\alpha)$, $\alpha \in R$.

LEMME. (cf. [R] §4; [Sa] Appendix) *L'ensemble $\bar{R}$ est un système de racines de $X(S)_{\mathbb{R}}$.*

PREUVE. Soit $\alpha \in R$ tel que $\bar{\alpha} \neq 0$. Puisque α et $\sigma(\alpha)$ sont de même longueur, il y a à priori quatre possibilités:

- 1) $\sigma(\alpha) = -\alpha$;
- 2) $\langle \alpha^\vee, \sigma(\alpha) \rangle = 0$;
- 3) $\langle \alpha^\vee, \sigma(\alpha) \rangle = 1$;
- 4) $\langle \alpha^\vee, \sigma(\alpha) \rangle = -1$.

On observe pour commencer que la dernière éventualité ne se présente pas. On écrit en effet

$$\mathcal{G} = \mathcal{T} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathcal{G}^\alpha$$

la décomposition de $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$ en sous-espaces propres relatifs à T ($\mathcal{T} = \text{Lie}(T)$). On choisit

$$X_\alpha \in \mathcal{G}^\alpha - \{0\} \text{ et } X_{\sigma(\alpha)} \in \mathcal{G}^{\sigma(\alpha)} - \{0\};$$

on a

$$\sigma(X_\alpha) = uX_{\sigma(\alpha)}, \quad \sigma(X_{\sigma(\alpha)}) = vX_\alpha$$

avec $u, v \in k$ et $uv = 1$; par conséquent

$$\sigma([X_\alpha, X_{\sigma(\alpha)}]) = -[X_\alpha, X_{\sigma(\alpha)}].$$

Or, si $\langle \alpha^\vee, \sigma(\alpha) \rangle = -1$, $\beta := \alpha + \sigma(\alpha)$ est une racine qui est laissée fixe par σ ; par conséquent $\mathcal{G}^\beta$ est contenu dans la sous-algèbre dérivée du centralisateur de S dans G , sous-algèbre dont on sait ([V]) qu'elle est contenue dans $\text{Lie}(K)$. Cette contradiction écarte donc le cas 4).

Dans le cas 1), on pose $(\bar{\alpha})^\vee = \frac{1}{2}\alpha^\vee$. Puisque $\sigma(\alpha)^\vee = \sigma(\alpha^\vee)$, on a pour tout $\chi \in X(T)$,

$$\langle (\bar{\alpha})^\vee, \bar{\chi} \rangle = \frac{1}{2}\alpha^\vee, \chi - \sigma(\chi) = \langle \alpha^\vee, \chi \rangle$$

qui est un entier; en particulier $\langle (\bar{\alpha})^\vee, \bar{\alpha} \rangle = 2$. De plus, pour $\beta \in R$, $s_{\bar{\alpha}}(\bar{\beta}) = \overline{s_\alpha(\beta)}$ (on note ici comme d'habitude s_α la réflexion $x \mapsto x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha$).

Dans le cas 2), on pose

$$(\bar{\alpha})^\vee = \frac{1}{2}(\alpha^\vee - \sigma(\alpha)^\vee).$$

Pour tout $\chi \in X(T)$, on a

$$\langle (\bar{\alpha})^\vee, \bar{\chi} \rangle = \frac{1}{2}(\alpha^\vee - \sigma(\alpha)^\vee), \chi - \sigma(\chi) = \langle \alpha^\vee, \chi \rangle - \langle \sigma(\alpha)^\vee, \chi \rangle$$

qui est un entier; en particulier $\langle (\bar{\alpha})^\vee, \bar{\alpha} \rangle = 2$. De plus, pour $\beta \in R$, on a

$$S_{\bar{\alpha}}(\bar{\beta}) = \overline{s_{\sigma(\alpha)}s_\alpha(\beta)}.$$

Enfin, dans le cas 3), on observe que $\bar{\alpha} = \alpha - \sigma(\alpha)$ est une racine; on pose

$$(\bar{\alpha})^\vee = (\alpha - \sigma(\alpha))^\vee = \alpha^\vee - \sigma(\alpha)^\vee.$$

Pour tout $\chi \in X(T)$, on a

$$\langle (\bar{\alpha})^\vee, \bar{\chi} \rangle = 2\langle \alpha^\vee - \sigma(\alpha)^\vee, \chi \rangle$$

qui est un entier; en particulier $\langle (\bar{\alpha})^\vee, \bar{\alpha} \rangle = 2$. De plus, pour $\beta \in R$,

$$s_{\bar{\alpha}}(\bar{\beta}) = \overline{s_{\alpha - \sigma(\alpha)}(\beta)}.$$

□

REMARQUES. On conserve les notations de la preuve ci-dessus.

1) La présence d'une racine du type 3) implique que $\bar{R}$ n'est pas réduit et admet pour base des $\beta \in \bar{R}$ provenant de racines du type 1) et 2) seulement.

2) Si $\alpha \in R$ est du type 1) (resp. 2), 3)) et $\chi \in X(T)$, on a

$$\langle (\bar{\alpha})^\vee, \bar{\chi} \rangle = \langle \bar{\alpha}^\vee, \chi \rangle \quad (\text{resp. } \langle \alpha^\vee, \bar{\chi} \rangle, 2\langle \alpha^\vee, \bar{\chi} \rangle).$$

2.4. Soit G/H un espace homogène symétrique. On note ${}^P\mathcal{D}(G/H) = {}^P\mathcal{D}$ l'ensemble des sous-variétés irréductibles de codimension 1 de G/H qui sont stables par P . On sait que P possède un nombre fini d'orbites dans G/H ([M], [Vi], [Br]); ainsi ${}^P\mathcal{D}$ coïncide avec l'ensemble des composantes irréductibles de $G/H - PH/H$. Comme $B := P(\mu_+)$ est un sous-groupe de Borel de G tel que $BH = PH$ est ouvert dans G , on a ${}^P\mathcal{D} = {}^B\mathcal{D}$: dans tous les résultats du §1, on peut remplacer B par P et donc oublier celui-là. (Pour une description des doubles classes BgK , $g \in G$, voir par exemple [Sp]).

Pour $D \in {}^P\mathcal{D}$, on note f_D un générateur de l'idéal de $\pi^{-1}(D)$ dans $k[G]$, où $\pi : G \rightarrow G/H$ est le morphisme canonique: l'algèbre $k[G]$ est factorielle puisqu'on a supposé G semi-simple simplement connexe ([Vo], [P]). Alors les $f_D, D \in {}^P\mathcal{D}$, convenablement normalisés constituent une base de $\mathcal{P}_+ = P \cap k[G]$. On désigne par $u_D : k(G/H)^* \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation discrète correspondant à $D \in {}^P\mathcal{D}$; elle se prolonge en un homomorphisme du groupe des vecteurs propres de H dans $k(G)^*$ (cf. [LV] 7.1) et induit donc une forme linéaire (encore) notée $u_D : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$; il est clair que les u_D constituent la base duale des f_D . On note $\rho(u_D)$ la restriction de u_D à $\mathcal{P}^H$; via $\phi, \rho(u_D) \in X_*(S/S \cap H)$.

PROPOSITION 1. *Via ϕ , les $\rho(u_D), D \in {}^P\mathcal{D}$, s'identifient à l'ensemble des opposées des coracines simples de $\bar{R}$ (relativement à l'ordre induit par λ_+). Si G/H ne contient pas de facteurs de type hermitien, alors ρ est injective; sinon, les fibres de ρ contiennent au plus deux points.*

On dit que G/H contient un facteur de type hermitien si le centre de K est de dimension strictement positive.

La preuve de cette proposition est donnée plus loin au numéro 3.5.

On rappelle que $\mathcal{V}(G/H) = \mathcal{V}$ désigne l'ensemble des valuations discrètes normalisées de $k(G/H)$ qui sont invariantes par G . Par restriction de $k(G/H)$ à $\mathcal{P}^H$, on obtient une injection de $\mathcal{V}$ dans $\text{Hom}(\mathcal{P}^H, \mathbb{Z})$ ([LV] 7.4), donc, via ϕ , dans $X_*(S/S \cap H)$. On désigne par $\bar{\mathcal{C}} \subset X_*(S)_{\mathbb{R}}$ la chambre définie par λ_+ .

PROPOSITION 2. *Via ϕ , l'ensemble $\mathcal{V}(G/H)$ s'identifie avec les éléments indivisibles de $\bar{\mathcal{C}} \cap X_*(S/S \cap H)$.*

Autrement dit, avec les notations du §1, l'application ϕ identifie $\mathcal{C}\mathcal{V}$ et $\bar{\mathcal{C}}$.

La preuve de cette proposition est donnée plus loin au numéro 3.6.

3.

Dans ce paragraphe, on démontre les propositions 1 et 2 ci-dessus.

3.1. Voici tout d'abord un complément au lemme 2.3.

LEMME. (cf. [Lo] chap. VI §2, [DS] chap. VII §8) *Le réseau des poids (resp. des poids radiciels) de $\bar{R}$ est $X(\bar{S})$ (resp. $X(S/N_S(K))$).*

PREUVE. On note $P(\cdot)$ (resp. $Q(\cdot)$) le réseau des poids (resp. des poids radiciels) du système de racines $(\cdot)$.

D'après le lemme 1 de 2.2,

$$N_S(K) = \{s \in S \mid \bar{\alpha}(s) = 1 \text{ pour tout } \bar{\alpha} \in \bar{R}\}$$

ce qui signifie que $Q(\bar{R}) = X(S/N_S(K))$.

Puisque $P(\bar{R})$ et $Q(\bar{R}^\vee)$ sont en dualité, l'autre assertion du lemme signifie aussi que $Q(\bar{R}^\vee) = X_*(\bar{S})$.

De la description 2.3 de $\bar{R}^\vee$ suit que

$$2Q(\bar{R}^\vee) \subset Q(R^\vee) \cap X_*(S)_\mathbb{R} \subset 2P(\bar{R}^\vee).$$

Or $Q(R^\vee)$ est égal à $X_*(T)$ puisque G est simplement connexe; ainsi $Q(R^\vee) \cap X_*(S)_\mathbb{R}$ coïncide avec $X_*(S)$ et il suffit de voir que

$$2Q(\bar{R}^\vee) = Q(R^\vee) \cap X_*(S)_\mathbb{R}.$$

A cette fin, on introduit les diagrammes de R et $\bar{R}$ resp.:

$$D(R) = \bigcup_{\alpha \in R} \{\mu \in X_*(T)_\mathbb{R} \mid \langle \mu, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}\},$$

$$D(\bar{R}) = \bigcup_{\alpha \in R} \{\lambda \in X_*(S)_\mathbb{R} \mid \langle \lambda, \bar{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}\};$$

on choisit une alcôve A de $\frac{1}{2}\bar{R}$ (i.e. une composante connexe de

$$X_*(S)_\mathbb{R} - 2D(\bar{R}))$$

dont l'adhérence $\bar{A}$ contient 0. On sait alors que l'indice de $2Q(\bar{R}^\vee)$ dans $Q(R^\vee) \cap X_*(S)_\mathbb{R}$ est égal au nombre d'éléments de l'ensemble

$$Q(R^\vee) \cap X_*(S)_\mathbb{R} \cap \bar{A}$$

(voir [Lo] vol. II p. 31).

Par ailleurs, il existe une alcôve B de R dont l'adhérence $\bar{B}$ contient $\bar{A}$. Sinon, il existe $\alpha \in R$, un entier n et deux points $\lambda_1, \lambda_2 \in \bar{A}$ tels que

$$\langle \lambda_1, \alpha \rangle < n \quad \text{et} \quad \langle \lambda_2, \alpha \rangle > n;$$

on a donc

$$\left\langle \lambda_1, \frac{\bar{\alpha}}{2} \right\rangle = \langle \lambda_1, \alpha \rangle < n \quad \text{et} \quad \left\langle \lambda_2, \frac{\bar{\alpha}}{2} \right\rangle > n$$

ce qui est absurde.

Maintenant, on a

$$Q(R^\vee) \cap X_*(S)_{\mathbb{R}} \cap \bar{A} \subset Q(R^\vee) \cap \bar{B} = (0),$$

ce qui achève de démontrer que $P(\bar{R}) = X(\bar{S})$. $\square$

3.2. On note $\text{Dom}(\bar{R}_+)$ le monoïde des poids dominants (relatifs à λ_+) de $\bar{R}$: d'après le lemme précédent, c'est un sous-monoïde libre de $X(\bar{S})$ qui l'engendre.

LEMME. On a $\phi(\mathcal{P}_+^K) = -\text{Dom}(\bar{R}_+)$.

PREUVE. Soit $f \in \mathcal{P}_+^K$: il existe alors un poids dominant ω de R (relatif à μ_+) tel que $p \cdot f = \omega(p)f$, $p \in P$, i.e. $f(ph) = \omega^{-1}(p)$, $p \in P$, $h \in K$. Par définition de ϕ , on a

$$\phi(f) = -\omega|_S.$$

On rappelle que l'ensemble des ω qui apparaissent de cette manière sont ceux qui vérifient

$$\text{a)} \quad \sigma(\omega) = -\omega;$$

$$\text{b)} \quad \omega|_S \in 2X(S);$$

(voir [V] ou [GGA] chap. V §4).

Or ces deux conditions a) et b) pour $\rho \in X(T)$ sont équivalentes à

$$\varphi \in X(\bar{S}) = \{\bar{\chi} = \chi - \sigma(\chi) | \chi \in X(T)\} :$$

observer que l'intersection des noyaux des caractères de T qui appartiennent à l'un ou l'autre des sous-groupes en question est $T \cap K$. Maintenant, pour toute racine positive α (relative à μ_+) et tout $\varphi \in X(\bar{S})$, on a

$$\langle \alpha^\vee, \varphi \rangle \geq 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \bar{\alpha}^\vee, \varphi \rangle \geq 0$$

(remarque 2 de 2.3), d'où l'assertion d'après 3.1. $\square$

REMARQUE. Soit U un sous-groupe unipotent maximal de G ; on note ${}^U k[G]^K$ l'algèbre des fonctions régulières sur G invariantes par U (pour les translations à gauche) et par K (pour les translations à droite). D'après le lemme, ${}^U k[G]^K$ est un algèbre de polynômes de dimension égale à la dimension de S (cf. [Vr] §2).

3.3. Le lemme que voici sera encore utile plus loin; c'est pourquoi on l'énonce dans une situation un peu plus générale que celle qui nous occupe ici.

Tout d'abord une notation: si Q est un sous-groupe parabolique de G avec QK ouvert dans G , on désigne par $\mathcal{P}(Q \times K)_+$ l'ensemble des vecteurs propres f de $Q \times K$ opérant dans $k[G]$ par translations à gauche et à droite, et normalisés en sorte que $f(e) = 1$.

LEMME. Soit Q un sous-groupe parabolique de G tel que Q et $\sigma(Q)$ soient opposés. Il existe une involution $f \mapsto f'$ du monoïde $\mathcal{P}(Q \times K)_+$ telle que, si $f(xh) = \chi(h)f(x)$, alors $f'(xh) = \chi(h)^{-1}f'(x)$, pour $x \in G$, $h \in K$.

PREUVE. Il est bien connu qu'il existe un automorphisme involutif θ de G possédant les deux propriétés suivantes:

- a) $\theta\sigma = \sigma\theta$;
- b) il existe un tore maximal T' de G qui contient un tore maximal de K et tel que $\theta(t) = t^{-1}$ pour tout $t \in T'$. (Choisir un sous-groupes de Borel B' de G tel que $\sigma(B') = B'$; un tore maximal T' de B' avec $\sigma(T') = T'$ ([St] §7); une involution τ de G telle que $\tau(t) = t^{-1}$ pour tout $t \in T'$; enfin $t \in T'$ tel que $\tau \text{ Ad}(t)$ commute avec σ).

Pour tout sous-groupe parabolique P de G , les deux sous-groupes P et $\theta(P)$ appartiennent à des classes de conjugaisons duales. Par hypothèse, Q et $\sigma(Q)$ appartiennent à des classes duales, par conséquent, Q et $\sigma\theta(Q)$ sont conjugués. Or QK et $\sigma\theta(Q)K$ sont tous les deux des ouverts de G : il existe donc $k_0 \in K$ tel que

$$k_0^{-1}Qk_0 = \sigma\theta(Q).$$

Pour $f \in \mathcal{P}(Q \times K)_+$, on pose alors

$$f'(x) = f(k_0\sigma\theta(x)k_0^{-1}), \quad x \in G.$$

Montrons que $f' \in \mathcal{P}(Q \times K)_+$. On note ω et χ les caractères de Q et K respectivement tels que

$$f(q^{-1}xh) = \omega(q)\chi(h)f(x), \quad q \in Q, \quad x \in G, \quad h \in K;$$

alors

$$\begin{aligned} f'(q^{-1}xh) &= f[(k_0\sigma\theta(q^{-1})k_0^{-1})(k_0\sigma\theta(x)k_0^{-1})(k_0\sigma\theta(h)k_0^{-1})] \\ &= \omega[k_0\sigma\theta(q^{-1})k_0^{-1}]\chi[\theta(h)]f'(x) \end{aligned}$$

i.e. $f' \in \mathcal{P}(Q \times K)_+$. De plus, puisque T' contient un tore maximal de K et $\theta(t) = t^{-1}$ pour tout $t \in T'$, on $\chi(\theta(h)) = \chi(h^{-1})$, $h \in K$.

Pour achever la preuve du lemme il reste à se convaincre que $f \mapsto f'$ est involutif. De $k_0^{-1}Qk_0 = \sigma\theta(Q)$ suit que

$$k_1 := k_0\theta(k_0) \in K \cap Q;$$

et de l'observation $(\text{Ad}(k_0)\sigma\theta)^2 = \text{Ad}(k_1)$ que

$$(f')'(x) = f(k_1xk_1^{-1}) = \omega(k_1^{-1})\chi(k_1^{-1})f(x) = f(k_1k_1^{-1})f(x) = f(x). \quad \square$$

3.4. On considère la base f_D , $D \in {}^P\mathcal{D}$, de $\mathcal{P}_+$; on numérote ces éléments $f_1, \dots, f_m$ en sorte que $f_1, \dots, f_n$ sont ceux des f_D qui appartiennent à $\mathcal{P}_+^K$; pour $j > n$, on note $\chi_j \in X(K)$ le caractère tel que

$$f_j(xh) = \chi_j(h)f_j(x), \quad x \in G, \quad h \in K.$$

Pour un groupe algébrique L , on pose $r(L) = \text{rang } X(L)$.

LEMME. (i) On a $m = n + 2r(K)$;

(ii) quitte à renuméroter, on a $\chi_{n+j} = -\chi_{n+r(K)+j}$, $j = 1, \dots, r(K)$, et $\{\chi_{n+j}\}_{j=1, \dots, r(K)}$ est une base de $X(K)$;

(iii) le monoïde $\mathcal{P}_+^K$ est libre de base

$$\{f_1, \dots, f_n, f_{n+1}f_{n+r(K)+1}, \dots, f_{n+r(K)}f_{n+2r(K)}\}.$$

PREUVE. L'involution $f \mapsto f'$ de $\mathcal{P}_+$, construite en 3.3, permute les éléments de la base de $\mathcal{P}_+$; par conséquent la famille $\{\chi_j\}_{j>n}$ est laissée stable par l'opération $\chi \mapsto -\chi$. On observe que $X(K)$ est un groupe abélien libre puisque K est connexe ([St] §8); il s'ensuit que $m - n = 2q$ est pair. On renumérote en sorte que $\chi_{n+j} = -\chi_{n+q+j}$, pour $j = 1, \dots, q$.

Maintenant, pour que $\mathcal{P}_+^K$ soit libre (ce qui est effectivement le cas d'après 3.2) il faut et il suffit que $\{\chi_{n+j}\}_{j=1, \dots, q}$ soient linéairement indépendants. D'un autre côté, puisque G/K est affine, $\{\chi_{n+j}\}_{j=1, \dots, q}$ engendrent $X(K)$ ([BHM]). On a donc $q = r(K)$ et les affirmations du lemme sont dès lors claires. $\square$

3.5. *Preuve de la proposition 1 (2.4).*

Démontrons que les $\rho(u_D)$, $D \in {}^P\mathcal{D}(G/H)$, coïncident avec l'ensemble des coracines simples de $\bar{R}$.

On observe pour commencer qu'il suffit de considérer le cas $H = K$. En effet, si E est une composante irréductible de l'image réciproque de D par $G/K \rightarrow G/H$, alors la forme $\rho(u_E)$ prolonge $\rho(u_D)$. Maintenant, lorsque $H = K$, d'après (3.4), qui décrit l'inclusion $\mathcal{P}(P \times K)_+^K \subset \mathcal{P}(P \times K)_+$, on constate que l'ensemble des $\rho(u_E)$, $E \in {}^P\mathcal{D}(G/K)$, constitue la base duale de la base de $\mathcal{P}(P \times K)_+^K$, d'où l'assertion puisque $\phi(\mathcal{P}(P \times K)_+^K) = -\text{Dom}(\bar{R}_+)$ (3.2).

Pour tout G -module irréductible M , on a $\dim({}^K M) \leq 1$; il s'ensuit immédiatement que le monoïde libre $\mathcal{P}(P \times H)_+$ contient $\mathcal{P}(P \times K)_+^K$ et admet pour base $f_1, \dots, f_n$, les $\{f_{n+i}\}_{i \in I}$, $\{f_{n+r(K)+i}\}_{i \in I}$ et les $\{f_{n+j}f_{n+r(K)+j}\}_{j \in J}$ où $I \cup J$ est une partition de $\{1, \dots, r(K)\}$ et les notations sont celles de 3.4. Puisque $\mathcal{P}(P \times H)_+^H$ est d'indice fini dans $\mathcal{P}(P \times K)_+^K$, on voit bien dans le cas général que $\rho^{-1}(\rho(u_D))$ est constitué d'au plus deux éléments, $D \in {}^P\mathcal{D}(G/H)$.

Enfin, si G/H ne contient pas de facteurs de type hermitien, on a $X(K) = (0)$; le groupe $X(H)$ est donc fini, $\mathcal{P}(P \times H)^H$ est d'indice fini dans $\mathcal{P}(P \times H)$ et ρ est injective.

La démonstration de la proposition 1 (2.4) est terminée. $\square$

3.6. Preuve de la proposition 2 (2.4).

Comme on va le voir, ce résultat est essentiellement une conséquence de [BLV]. (Pour l'esquisse d'une autre preuve, voir la remarque à la fin de 5.1).

On conserve les notations introduites en (2.2).

Soit $v \in \mathcal{V}$; on note X_v le plongement élémentaire associé à v : il s'agit d'une G -variété lisse constituée de deux orbites, l'une ouverte isomorphe à G/H et l'autre Y_v de codimension 1 et telle que la valuation de $k(X_v) = k(G/H)$ associée à Y_v soit égale à v . Notant x_v le point base de X_v , on sait que

$$\overline{S \cdot x_v} \cap Y_v \neq \emptyset$$

([BLV] 3.5 et 4.1): par suite, il existe $\lambda \in X_*(S/S \cap H)$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x_v \in Y_v.$$

D'après [LV] §4, cela signifie que v est équivalente à v_λ , où

$$v_\lambda(f) = \text{ord}_t(t \mapsto f(s\lambda(t))),$$

$s \in G$, $f \in k[G/H]$.

Puisque tout élément du groupe de Weyl de $\overline{R}$ possède un représentant dans K ([R] §4), on peut supposer que $\lambda \in \overline{C}$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{P}_+^H$; il existe un G -module irréductible M , un élément $x \in M$ laissé fixe par H et une forme linéaire η sur M qui est un vecteur propre de P de poids ω tels que

$$f(s) = \langle \eta, s \cdot x \rangle, \quad s \in G;$$

en particulier

$$f(ph) = \omega(p), \quad p \in P, \quad h \in H,$$

i.e.

$$\phi(f) = -\omega.$$

On observe que le plus petit poids de M est $(-\omega)$. De plus, si $x = \sum x_\chi$, où x_χ est un vecteur propre pour T de poids χ , on a $x_{-\omega} \neq 0$ puisque PH est ouvert dans G . Alors, pour $\lambda \in \overline{C} \cap X_*(S/S \cap H)$, on a

$$\lambda(t) \cdot x = t^{(\lambda, -\omega)}(x_{-\omega} + o(t)),$$

d'où la formule

$$v_\lambda(f) = \langle \lambda, \phi(f) \rangle.$$

Cela montre d'une part que, via ϕ , v_λ s'identifie à λ et d'autre part que v_{λ_1} et v_{λ_2} ne sont pas équivalentes pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{C} \cap X_*(S/S \cap H)$ non proportionnels [on rappelle que $\phi(\mathcal{P}_+^K) = -\text{Dom}(\overline{R}_+)$, (3.2)].

La démonstration de la proposition 2 (2.4) est terminée. $\square$

4.

Soit M un G -module irréductible tel que ${}^K M \neq (0)$; on note $\bar{x} \in \mathbb{P}(M)$ la droite de M qui est laissée fixe par K et on considère l'adhérence $\overline{G \cdot \bar{x}}$ de $G \cdot \bar{x}$ dans $\mathbb{P}(M)$. Dans ce paragraphe, on recherche à quelle donnée combinatoire correspond cette "compactification du type Satake" (cf. [Sa]) de $G/G_{\bar{x}}$.

4.1. Soit $f \in \mathcal{P}_+^K$; il existe alors un G -module irréductible M , un élément non nul $x \in {}^K M$ et une forme linéaire η sur M qui est un vecteur propre de P , tels que $f(s) = \langle \eta, s \cdot x \rangle$, $s \in G$; le triple (M, x, η) est unique à isomorphisme près.

On note $G_{\bar{f}}$ l'ensemble des éléments de G qui admettent f comme vecteur propre (pour l'opération induite par les translations à gauche); c'est un sous-groupe parabolique de G qui contient P .

LEMME. On a $G_{\bar{f}}K = \{x \in G \mid f(x) \neq 0\}$.

PREUVE. On note g le produit des générateurs de $\mathcal{P}(G_{\bar{f}} \times K)_+$ (notations de 3.3). On a donc

$$G_{\bar{f}}K = \{x \in G \mid g(x) \neq 0\},$$

et puisque $G_{\bar{f}}$ et $\sigma(G_{\bar{f}})$ sont opposés, on sait que g est invariant par K (3.3).

Montrons que $G_{\bar{f}} = G_{\bar{g}}$. Puisque $g \in \mathcal{P}(G_{\bar{f}} \times K)_+$, on a $G_{\bar{f}} \subset G_{\bar{g}}$. Pour démontrer l'autre inclusion, on observe pour commencer que

$$\mathcal{P}(G_{\bar{g}} \times K)_+ = \mathcal{P}(G_{\bar{f}} \times K)_+ :$$

on note f_i les divers générateurs de $\mathcal{P}(G_{\bar{f}} \times K)_+$; alors chacun des f_i est aussi un vecteur propre pour $G_{\bar{g}}$ (puisque $G_{\bar{g}}$ est connexe et $g = \prod f_i$), d'où

$$\mathcal{P}(G_{\bar{f}} \times K)_+ \subset \mathcal{P}(G_{\bar{g}} \times K)_+;$$

l'inclusion réciproque est banale. Maintenant que f appartient à $\mathcal{P}(G_{\bar{g}} \times K)_+$, on a bien $G_{\bar{g}} \subset G_{\bar{f}}$, d'où l'assertion.

On rappelle ensuite qu'on dispose d'un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{P}^K \longrightarrow -\text{Dom}(\overline{R}_+) \subset X(\overline{S})$$

$$f \longmapsto f|_S = -\omega$$

avec $f(p^{-1}x) = \omega(p)f(x)$, $p \in P$, $x \in G$ (3.2); de plus $G_{\bar{f}}$ est le sous-groupe parabolique associé à ω . D'un autre côté, pour $\omega \in \text{Dom}(\overline{R}_+)$, on a aussi $\omega \in \text{Dom}(R_+)$ et

$$\{\alpha \in R \mid \langle \alpha^\vee, \omega \rangle \geq 0\} = \{\alpha \in R \mid \langle \bar{\alpha}^\vee, \omega \rangle \geq 0\}$$

(2.3) de sorte que le calcul du parabolique de G associé à ω se fait essentiellement dans $\overline{R}$.

Cela dit, l'égalité $G_{\overline{g}} = G_{\overline{f}}$ signifie que $-\phi(f)$ et $-\phi(g)$ appartiennent à la même facette ouverte de $\overline{C}$, d'où f et g ont le même "support" lorsque on les exprime dans la base de $\mathcal{P}_+^K$; on a donc

$$\{x \in G \mid g(x) = 0\} = \{x \in G \mid f(x) = 0\},$$

ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

4.2. On désigne par $\overline{x}$ l'image de x dans $\mathbb{P}(M)$ et par $X = X(f)$ l'adhérence dans $\mathbb{P}(M)$ de l'orbite $G \cdot \overline{x}$: on obtient ainsi une version (complexe si $k = \mathbb{C}$) des compactifications du type Satake [Sa] de l'espace symétrique $G/G_{\overline{x}}$. On remarque que le sous-groupe d'isotropie $G_{\overline{x}}$ est égal à $N = N_G(K)$ si le noyau de la représentation de G dans M est fini, hypothèse qu'on fera jusqu'à la fin de ce paragraphe pour ne pas changer d'espace homogène.

On note $y \in M$ un vecteur propre pour $\sigma(P)$; en fait on a $G_{\overline{y}} = \sigma(G_{\overline{f}})$. On dispose alors d'une carte affine U dans X stable par $G_{\overline{f}}$ de la forme

$$U \simeq (G_{\overline{f}})^u \times W$$

où $(G_{\overline{f}})^u$ désigne le radical unipotent de $G_{\overline{f}}$ et W une sous-variété affine de X contenant $\overline{y}$, stable par $G_{\overline{f}} \cap \sigma(G_{\overline{f}})$ et qui rencontre chaque orbite de G dans X ([BLV]).

Soit $D \in {}^P\mathcal{D}(G/N)$. Si $f(D) = 0$, alors l'adhérence $\overline{D}$ de D dans X est contenue dans $\mathbb{P}(\text{Ker}(\eta))$, d'où suit que $\overline{D}$ ne contient pas l'orbite fermée $G \cdot y$ de G dans X . Si par contre $f(D) \neq 0$, alors D est contenu dans l'ouvert $G_{\overline{f}}/G_{\overline{f}} \cap N$ (lemme ci-dessus) et on voit facilement que l'adhérence de D dans U contient $(G_{\overline{f}})^u \times \{y\}$, puis que $\overline{D}$ contient l'orbite fermée de G dans X .

On note $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ la normalisation de X . Alors

$$\pi^{-1}(U) \simeq (G_{\overline{f}})^u \times \tilde{W},$$

où $\tilde{W}$ jouit de propriétés analogues à celles de W . On voit que $\tilde{X}$ est un plongement (normal) simple complet (en fait projectif) de G/N tel que

$$\mathcal{D}_{\tilde{X}} = \{D \in {}^P\mathcal{D}(G/N) \mid f(D) \neq 0\};$$

le deuxième terme $\mathcal{V}_{\tilde{X}}$ de la paire caractéristique de $\tilde{X}$ (1.2) est constitué des valuations appartenant aux arêtes extrémales à la fois de $\overline{C}$ et du cône convexe de $X_*(S)_{\mathbb{R}}$ engendré par $\overline{C} \cup \{\rho(u_D)\}_{D \in \mathcal{D}_{\tilde{X}}}$. On observera que, puisque $f \in \mathcal{P}_+^K$, on a $\mathcal{D}_{\tilde{X}} = \rho^{-1}\rho(\mathcal{D}_{\tilde{X}})$.

QUESTION. La variété $X(f)$ construite ci-dessus est-elle normale? C'est le cas lorsque $f^{-1}(0) = G - PK$: voir [DP]_I et aussi [DP]_i $i = \text{II, III, IV, [DSp], [DGMP]}$ pour des études détaillées. Par contre si on exige seulement que f

appartienne à $\mathcal{P}_+$ (et pas à $\mathcal{P}_+^K$), i.e. que x soit un vecteur propre de K , alors la variété $X(f)$ n'est en général pas normale: voir plus loin en (7.2).

5.

Soit N un espace vectoriel de dimension $(n+1)$, $n \geq 2$. On note $Q_n = Q$ la variété des quadriques non dégénérées de $\mathbb{P}(N)$: c'est un espace homogène symétrique du groupe $SL(N)$. Dans ce paragraphe, on explicite dans ce cas particulier les objets introduits aux §§1 et 2, ainsi que la classification des plongements de Q .

5.1. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur N . On note $SO(N)$ le groupe spécial orthogonal de q et $SO(N)'$ le normalisateur de $SO(N)$ dans $SL(N)$. Alors $Q \simeq SL(N)/SO(N)'$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de N telle que

$$q\left(\sum a_i e_i\right) = \sum a_i^2$$

et on identifie $SL(N)$ avec le groupe des matrices de déterminant 1; le groupe $SO(N)$ est alors l'ensemble des points fixes de l'automorphisme involutif $A \mapsto {}^t A^{-1}$ de $SL(N)$ de sorte que Q est une espace symétrique.

On désigne par S le tore maximal de $SL(N)$ constitué des matrices diagonales et par B le sous-groupe de Borel de $SL(N)$ constitué des matrices triangulaires supérieures. Le tore S est anisotrope maximal et $BSO(N)$ est ouvert dans $SL(N)$; ici $B = P$ (cf. (2.2)).

Le complémentaire de $BSO(N)$ dans $SL(N)$ est constitué des n hypersurfaces $p_i^{-1}(0)$, $i = 1, \dots, n$, où

$$\begin{aligned} p_i : SL(N) &\longrightarrow k \\ A &\longmapsto \det_i({}^t A^{-1} A^{-1}); \end{aligned}$$

ici, pour la matrice $M = (m_{pq})$, on a posé

$$\det_i(M) = \det((m_{pq})_{1 \leq p, q \leq i}).$$

Les p_i sont vecteurs propres pour l'opération de $SO(N)'$ (par translations à droite) et de B (par translations à gauche): en fait

$$p_i(bs) = \omega_i^{-2}(b)p_i(s), \quad b \in B, \quad s \in SL(N),$$

où $\omega_i(b) = \det_i(b)$ est le i -ème poids fondamental de $SL(N)$ relatif à B ; ils constituent la base de

$$\mathcal{P}(B \times SO(N)')_+ = \mathcal{P}(B \times SO(N))_+^{SO(N)}.$$

Géométriquement, l'hypersurface

$$D_i = p_i^{-1}(0)/SO(N)'$$

de Q est l'ensemble des quadriques tangentes au sous-espace engendré par $e_1, \dots, e_i$, $i = 1, \dots, n$.

On note comme d'habitude $\bar{S}$ le quotient de S par son sous-groupe des éléments d'ordre 2.

On vient de voir que $\phi(p_i) = -2\omega_i \in X(S)$, de sorte que la base $(u_1, \dots, u_n)$ de $X_*(S)$ duale de $(p_1, \dots, p_n)$ est

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha_1^\vee, \dots, -\frac{1}{2}\alpha_n^\vee\right),$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est la base du système de racines de $(SL(N), S)$ relative à B : la vérification de la proposition 1 de 2.4, dans ce cas particulier, n'offre pas de difficulté.

On note $\bar{C}$ la chambre de $X_*(S)_{\mathbb{R}}$ définie par B . La proposition 2 de 2.4 affirme que $\mathcal{V}(Q)$ s'identifie aux éléments indivisibles de $\bar{C} \cap X_*(S/S \cap SO(N)')$. On peut retrouver ce résultat par la méthode suivante.

On identifie $SL(N)/SO(N)$ avec l'ensemble E des matrices symétriques $(n+1) \times (n+1)$ à coefficients dans k et de déterminant 1; on introduit l'ensemble $E_{k((t))}$ des matrices symétriques $(n+1) \times (n+1)$ à coefficients dans $k((t))$ et de déterminant 1. Soit $\lambda \in E_{k((t))}$ et $f \in k[E]$; on considère l'élément $f(A\lambda^t A)$, $A \in SL(N)$, comme appartenant à $k(SL(N))((t))$ et on pose $v_\lambda(f)$ pour l'ordre en t de cette série: la valuation v_λ sur $k(E)$ ainsi définie est invariante par $SL(N)$ et appartient donc à $\mathcal{V}(E)$, à normalisation près. De plus, pour $M \in SL(n+1, k[[t]])$, les deux valuations v_λ et $v_{M\lambda t_M}$ sont équivalentes et, à normalisation près, $\mathcal{V}(E)$ s'identifie à l'espace quotient de $E_{k((t))}$ par l'opération naturelle de $SL(n+1, k[[t]])$ (voir [LV] §4). Maintenant, il est bien connu que

$$\left\{ \text{diag}(t^{a_1}, \dots, t^{a_{n+1}}), a_1 \geq \dots \geq a_{n+1}, \sum_i a_i = 0 \right\}$$

constitue un système complet de représentants pour les orbites de $SL(n+1, k[[t]])$ dans $E_{k((t))}$, d'où la description de $\mathcal{V}(E)$ et aussitôt celle de $\mathcal{V}(Q)$.

REMARQUE. Dans le cas général d'un espace homogène symétrique, il est vraisemblable qu'on dispose d'une "décomposition de Cartan": toute orbite de $G_{k[[t]]}$ dans $(G/H)_{k((t))}$ coupe $X_*(S/S \cap H)$ suivant une orbite du groupe de Weyl de $\bar{R}$ (cf. [Uz] §2). La méthode précédente fournit donc une autre preuve de la proposition 2 de 2.4.

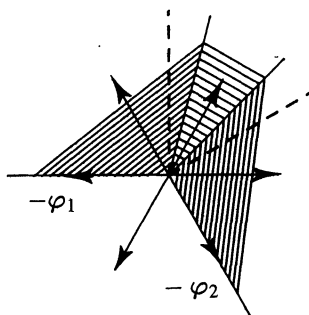
5.2. Puisqu'ici il revient au même de se donner une paire admissible $(D_0, \mathcal{V}_0)$ ou le cône $\mathcal{C}(D_0, \mathcal{V}_0)$ qu'elle engendre, la classification abstraite des plongements de $Q = SL(N)/SO(N)'$ prend l'allure suivante.

Soit $\Phi(= \bar{R}^V) \subset V(= X_*(S)_{\mathbb{R}})$ un système de racines de type A_n . On choisit une base $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de $\Phi(\varphi_i = \bar{\alpha}_i^V)$, on désigne par $\bar{C}$ la chambre correspondante et par $P(\Phi) (= X_*(S/S \cap SO(N)')$ le réseau des poids de Φ .

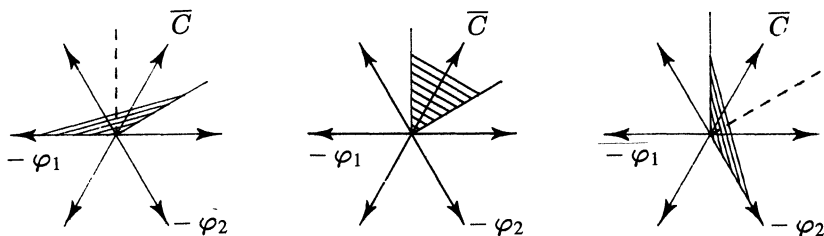
Un *plongement complet* de Q est la donnée d'une famille finie (Γ_i) de ccpr (rationnels relatifs à $P(\Phi)$) telle que

- pour tout i , les Γ_i vérifient les trois conditions:
 Γ_i est engendré par une partie finie de $\bar{C} \cap P(\Phi) \cup \{-\varphi_1, \dots, -\varphi_n\}$;
 $\Gamma_i \cap \bar{C} \neq \emptyset$;
 Γ_i est saillant;
- pour tout i , si Δ est une face de Γ_i telle que $\overset{\circ}{\Delta} \cap \bar{C} \neq \emptyset$, alors $\Delta = \Gamma_j$ pour un indice j ;
- $\{\overset{\circ}{\Gamma}_i \cap \bar{C}\}_i$ est une partition de $\bar{C}$.

Par exemple, pour $n = 2$, il y a 3 plongements simples de Q_2 , à savoir



et la figure ci-dessous représente un plongement complet de Q_2



qui contient, outre l'orbite ouverte, 2 orbites de codimension 1 et 3 orbites fermées.

6.

Soit T un tore maximal de $SL(2)$ et X un plongement complet de $SL(2)/T$ de point base x . On observe que le groupe $SL(2)$ n'a pas de point fixe dans X . Soit en effet x_0 un point fixe; puisque X est normale, d'après [Su] et la réductivité de $SL(2)$, il existe un ouvert affine X_0 de X qui contient x_0 et est laissé stable par $SL(2)$: on obtient ainsi un plongement affine non trivial de $SL(2)/T$, ce qui contredit [Ko, remark 11], (voir aussi [Lu]). Maintenant, si $B_i, i = 1, 2$, désigne les deux sous-groupes de Borel de $SL(2)$ qui contiennent T , le morphisme naturel

$$SL(2) *_{B_i} \overline{B_i \cdot x} \longrightarrow X$$

est birationnel, surjectif et à fibres finies, donc un isomorphisme d'après le théorème principal de Zariski; il s'ensuit que X est lisse réglée de deux manières différentes, i.e.

$$X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = SL(2)/B_1 \times SL(2)/B_2.$$

Outre le plongement banal, il n'existe donc qu'un seul plongement de $SL(2)/T$ (on remarque que l'hypothèse de normalité est essentielle: voir plus loin en 7.2).

Voyons comment retrouver ce résultat avec la théorie du §1.

Soit B un sous-groupe de Borel de $SL(2)$ tel que BT est ouvert dans $SL(2)$. Le complémentaire de BT/T dans $SL(2)/T$ consiste en deux composantes irréductibles D_+ et D_- , de sorte que $\mathcal{P}(B \times T)_+$ est un monoïde libre à deux générateurs p_+ et p_- . Les valuations u_+ et u_- correspondant à D_+ et D_- respectivement prennent la valeur 1 sur p_+p_- . D'autre part, $\mathcal{V}(SL(2)/T)$ est réduit à un seul élément v qui prend la valeur (-1) sur p_+p_- . Il est alors immédiat qu'il n'existe qu'un seul couple admissible (1.2), à savoir $(\emptyset, \{v\})$, i.e. un seul plongement (non banal) de $SL(2)/T$.

Dans ce paragraphe on généralise cet exemple. Soit V un espace vectoriel de dimension n et r un entier, $1 \leq r \leq n-1$. On considère l'espace $E = E_r$ des paires $(V_r, V_{r'})$ de sous-espaces de V , $\dim V_i = i$, telles que $V_r \oplus V_{r'} = V$: c'est un espace homogène symétrique de $SL(V)$. Du fait que E est *hermitien* découle certain phénomène qui distingue la théorie des plongements de E de celle des plongements des quadriques (§5) par exemple. Cela montrera aussi qu'il faut adapter avec prudence la théorie des plongements toriques au cas général.

6.1. Soit V un espace vectoriel de dimension n et r un entier avec $1 \leq r \leq n-1$ et $n-2r \geq 0$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V et on identifie $SL(V)$ avec le groupe des matrices $n \times n$ de déterminant 1. On pose

$\sigma = \text{Ad}(I_{r,s})$, où

$$I_{r,s} = \begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}$$

avec I_p la matrice identité à p lignes et p colonnes. On note K le centralisateur de $I_{r,s}$ dans $SL(V)$; alors $E \simeq SL(V)/K$.

Le tore

$$S = \{\text{diag}(a_1, \dots, a_r, a_1^{-1}, \dots, a_r^{-1}, 1, \dots, 1)\}$$

est σ -anisotrope maximal. Le sous-groupe $P = P(\lambda_+)$, où

$$\lambda_+ : t \longmapsto \text{diag}(t^r, \dots, t, t^{-r}, \dots, t^{-1}, 1, \dots, 1),$$

est parabolique σ -anisotrope minimal: c'est le stabilisateur d'un drapeau du type

$$\{0\} \subset V_1^0 \subset \dots \subset V_r^0 \subset V_{r+s}^0 \subset \dots \subset V_n^0 = V, \quad (\dim V_i^0 = i).$$

Pour $i = 1, \dots, r-1$, on considère

$$\begin{aligned} \psi_i : \bigwedge^i(V) &\longrightarrow \bigwedge^i(V) \\ e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i} &\longmapsto \begin{cases} 0, & \text{si } (j_1, \dots, j_i) \neq (r+1, \dots, r+i) \\ e_1 \wedge \dots \wedge e_i, & \text{sinon;} \end{cases} \end{aligned}$$

cet endomorphisme de $\bigwedge^i(V)$ est un vecteur propre de P pour l'opération "adjointe" de $SL(V)$ dans $\text{End} \left(\bigwedge^i(V) \right)$:

$$g \cdot \psi = \bigwedge^i(g) \psi \bigwedge^i(g^{-1}),$$

$g \in SL(V)$, $\psi \in \text{End}(\bigwedge^i(V))$; en fait

$$p \cdot \psi_i = (\omega_i + \omega_{n-i})(p) \psi_i, \quad p \in P,$$

où ω_i , ω_{n-i} sont les caractères de P dont la restriction au tore constitué des matrices diagonales est

$$\begin{aligned} \omega_i : \text{diag}(a_1, \dots, a_n) &\longmapsto a_1 \dots a_i \\ \omega_{n-i} : \text{diag}(a_1, \dots, a_n) &\longmapsto (a_{r+1} \dots a_{r+i})^{-1}. \end{aligned}$$

Les fonctions

$$\begin{aligned} f_i : SL(V) &\longrightarrow k \\ g &\longmapsto \operatorname{tr} \left(\bigwedge^i (g I_{r,s} g^{-1}) \psi_i \right) \end{aligned}$$

appartiennent à $\mathcal{P}_+^K : (p, h) \cdot f_i = (\omega_i + \omega_{n-i})(p) f_i$, $p \in P$, $h \in K$.

Par ailleurs, on introduit

$$\begin{aligned} \xi_+ &= (e_1 + e_{r+1}) \wedge \dots \wedge (e_r + e_{2r}) \wedge e_{2r+1} \wedge \dots \wedge e_{2r+s} \in \bigwedge^{r+s}(V) \\ \xi_- &= (e_1 - e_{r+1}) \wedge \dots \wedge (e_r - e_{2r}) \in \bigwedge^r(V); \end{aligned}$$

on a $h \cdot \xi_+ = \chi(h) \xi_+$ et $h \cdot \xi_- = \chi(h)^{-1} \xi_-$, où $h \in K$ et χ est un générateur de $X(K)$.

Alors les deux fonctions

$$\begin{aligned} SL(V) &\longrightarrow k \\ f_+ : g &\longmapsto \langle g \cdot \xi_+, e_1 \wedge \dots \wedge e_r \rangle \\ f_- : g &\longmapsto \langle g \cdot \xi_-, e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge e_{2r+1} \wedge \dots \wedge e_{2r+s} \rangle \end{aligned}$$

appartiennent à $\mathcal{P}_+$:

$$\begin{aligned} (p, h) \cdot f_+ &= \omega_r(p) \chi(h) f_+, \\ (p, h) \cdot f_- &= \omega_{n-r}(p) \chi(h)^{-1} f_-, \end{aligned}$$

$p \in P$, $h \in K$.

LEMME. (i) *Le monoïde $\mathcal{P}_+$ est libre de base $(f_1, \dots, f_{r-1}, f_+, f_-)$;*

(ii) *le monoïde $\mathcal{P}_+^K$ est libre de base $(f_1, \dots, f_{r-1}, f_+ f_-)$.*

PREUVE. On sait (2.3) que $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}(P \times K)_+$ est un monoïde libre de rang égal au rang de $X(S) \times X(K)$, i.e. de rang $(r+1)$. Pour démontrer (i), il suffit donc de prouver que chacun de $f_1, \dots, f_{r-1}, f_+, f_-$ est irréductible. Par exemple, supposons que f_i ($i = 1, \dots, r-1$) admette une décomposition $f_i = g' g''$ dans $\mathcal{P}_+$; on peut supposer que le poids de g' est ω_i ; or le $SL(V)$ -module $\bigwedge^{n-i}(V)$ ne contient pas de vecteur propre pour K .

L'affirmation (ii) est conséquence immédiate de (i). $\square$

L'ensemble ${}^P\mathcal{D}(E)$ consiste donc en $(r+1)$ éléments $D_1, \dots, D_{r-1}, D_+, D_-$ correspondant à $f_1, \dots, f_{r-1}, f_+, f_-$ resp.; on écrira u_i pour u_{D_i} et u_+, u_- pour u_{D_+}, u_{D_-} resp. La suite $(\rho(u_1), \dots, \rho(u_{r-1}), \rho(u_+) = \rho(u_-))$ est la base duale de $(f_1, \dots, f_{r-1}, f_+ f_-)$.

Géométriquement, on a

$$D_i = \{(V_r, V_{r'}) | V_{r'} \cap (V_i^0 + V_r \cap V_{n-i}^0) \neq (0)\} \quad i = 1, \dots, r-1;$$

$$D_+ = \{(V_r, V_{r'}) | V_r \cap V_{r'}^0 \neq (0)\};$$

$$D_- = \{(V_r, V_{r'}) | V_{r'} \cap V_r^0 \neq (0)\}.$$

LEMME. *Le système de racines $\bar{R}$ est du type C_r si $s = 0$ et du type BC_r si $s > 0$; il admet pour base $(\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_{r-1} - \bar{\chi}_r, 2\bar{\chi}_r)$ si $s = 0$ et $(\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_{r-1} - \bar{\chi}_r, \bar{\chi}_r)$ si $s > 0$, où*

$$\bar{\chi}_i : \text{diag}(a_1, \dots, a_r, a_1^{-1}, \dots, a_r^{-1}, 1, \dots, 1) \mapsto a_i^2;$$

ses poids fondamentaux sont $\bar{\chi}_1 + \dots + \bar{\chi}_i = \omega_i + \omega_{n-i}$, $i = 1, \dots, r$.

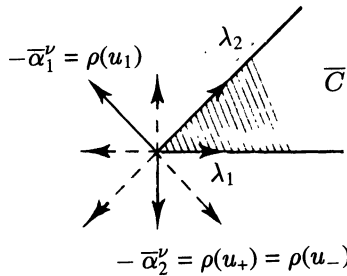
PREUVE. C'est un calcul banal. □

Via l'isomorphisme $\mathcal{P}^K \longrightarrow X(\bar{S})$, l'ensemble $\{-\bar{\alpha}_1^\vee, \dots, -\bar{\alpha}_r^\vee\}$ des opposées des coracines simples de $\bar{R}_+$ coïncide avec

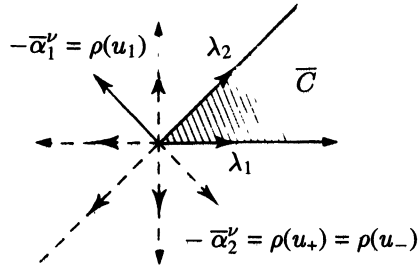
$$\{\rho(u_1), \dots, \rho(u_{r-1}), \rho(u_+) = \rho(u_-)\} :$$

c'est la proposition 1 de 2.4.

Pour $r = 2$ et $s = 0$, $\bar{R}^\vee$ est de type B_2 ; $2\lambda_1$ est représenté par $\text{diag}(t, 1, t^{-1}, 1)$ et $2\lambda_2$ par $\text{diag}(t, t, t^{-1}, t^{-1})$; $X_*(\bar{S})$ est engendré par $\rho(u_1)$ et $\rho(u_+)$.



Pour $r = 2$ et $s > 0$, $\bar{R}^\vee$ est du type BC_2 ; $2\lambda_1$ est représenté par $\text{diag}(t, 1, t^{-1}, 1, \dots, 1)$ et $2\lambda_2$ par $\text{diag}(t, t, t^{-1}, t^{-1}, 1, \dots, 1)$; $X_*(\bar{S})$ est engendré par $\rho(u_1)$ et $\rho(u_+)$.



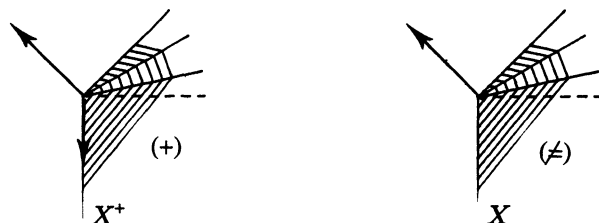
6.2. Pour exprimer commodément la classification des plongements complets de E , on introduit la notion de ccrp *coloriés* de $X_*(S)_{\mathbb{R}}$ (rationnels relatifs à $X_*(\bar{S})$): quatre couleurs en tout sont permises, à savoir $(\cdot)$, $(+)$, $(-)$ et $(\neq)$; les ccrp admettant $\rho(u_+) = \rho(u_-)$ comme arête peuvent prendre les couleurs $(+)$, $(-)$ et $(\neq)$; tout autre ccrp a la couleur $(\cdot)$. Soit Γ et Δ deux ccrp coloriés, où on suppose que Δ est une face de Γ ; on dit alors que Δ est une face coloriée de Γ si $\Delta \not\supset \rho(u_+) = \rho(u_-)$ ou bien si la couleur de Δ est la même que celle de Γ lorsque $\Delta \ni \rho(u_+) = \rho(u_-)$. Enfin on ordonne les couleurs: toute couleur est plus terne qu'elle-même; $(\cdot)$ est plus terne que $(+)$, $(-)$ et $(\neq)$; $(+)$ et $(-)$ sont plus ternes que $(\neq)$.

Cela dit, les résultats des §§1 et 2 se résument ainsi: un plongement complet de $E = E_r$ est la donnée d'une famille finie (Γ_i) de ccrp coloriés de $X_*(S)_{\mathbb{R}}$ telle que

- a) pour tout i , Γ_i vérifie les trois conditions
 Γ_i est engendré par une partie finie de $\{\bar{C} \cap X_*(\bar{S})\} \cup \{-\bar{\alpha}_1^\vee, \dots, -\bar{\alpha}_r^\vee\}$;
 $\overset{\circ}{\Gamma}_i \cap \bar{C} \neq \emptyset$;
 Γ_i est saillant;
- b) pour tout i , si Δ est une face coloriée de Γ_i et $\overset{\circ}{\Delta} \cap \bar{C} \neq \emptyset$, alors il existe un indice j tel que $\Delta = \Gamma_j$;
- c) $\{\overset{\circ}{\Gamma}_i \cap \bar{C}\}_i$ est une partition de $\bar{C}$.

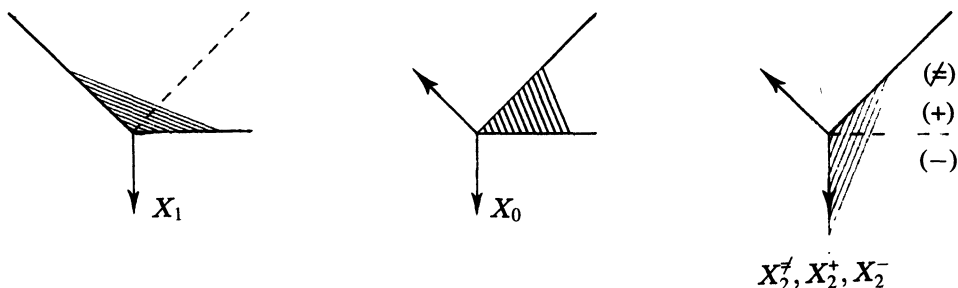
Soit $X' = \{\Gamma'_i\}$ et $X'' = \{\Gamma''_j\}$ deux plongements complets de E ; alors, pour qu'il existe un (unique) morphisme $X' \rightarrow X''$, il faut et il suffit que, pour tout i , il existe j avec $\Gamma'_i \subset \Gamma''_j$ et la couleur de Γ'_i est plus terne que la couleur de Γ''_j .

6.3. Voici quelques exemples lorsque $r = 2$ et $s \geq 0$ (où on ne marque pas la couleur $(\cdot)$).



Il existe un morphisme $X^+ \rightarrow X$ et chacun de ces plongements contient, en plus de l'orbite ouverte, 3 orbites de codimension 1 et 3 orbites fermées.

Il y a 5 plongements complets simples de E_2 :



On a $N_{SL(V)}(K) = K$ lorsque $s > 0$ et $X_1, X_0, X_2^\neq$ sont les 3 plongements du type Satake; si par contre $s = 0$, X_1, X_0 et $X_2^\neq$ sont les revêtements à deux feuilles des plongements du type Satake de $SL(V)/N(K)$. En particulier,

$$X_1 \simeq SL(V)/P_- \times SL(V)/P_+$$

où P_- (resp. P_+) est le stabilisateur dans $SL(V)$ d'un sous-espace de dimension 2 (resp. $n - 2$).

On reviendra à l'exemple $X_2^\neq$ plus loin au numéro 7.1.

6.4. Dans ce numéro, on montre comment construire les deux plongements X_2^+ et X_2^- ci-dessus.

Pour alléger les notations, on pose $G = SL(V)$ et $X = X_2^\neq$, et on note x son point base. On désigne par X^+ l'adhérence de l'orbite de $(x, P_+/P_+)$ pour l'opération diagonale de G dans $X \times G/P_+$.

ASSERTION. Les deux plongements X^+ et X_2^+ sont isomorphes.
(Construction et résultat analogue pour X_2^-).

On observe pour commencer qu'il n'y a qu'une seule orbite fermée dans X^+ . En effet, par projection de X^+ sur le deuxième facteur, on obtient un isomorphisme $X^+ \simeq G *_P Z^+$, où Z^+ est l'adhérence de $P^+ \cdot x$ dans X . Maintenant, soit $z \in Z^+$ un point dont l'orbite $P^+ \cdot z$ est fermée; alors, puisque P^+ est parabolique, $Y := G \cdot z$ est l'unique orbite fermée de G dans X ; or, on sait bien qu'un sous-groupe parabolique n'a qu'une orbite fermée dans Y .

Pour démontrer que X^+ est normale, on utilise [LV] §8: il existe un ouvert affine U de X qui rencontre Y , est stable par P et de la forme

$$\text{Spec}(k[G]_{f_1}^K \cap \mathcal{O}_{v_2}),$$

où v_2 est la valuation invariante associée à

$$\lambda_2(t) = \text{diag}(t, t, t^{-1}, t^{-1}, 1, \dots, 1)$$

et f_1 comme en 6.1.

On considère d'autre part l'ouvert W de G/P_+ , image de

$$\{s \in G \mid f_+(s) \neq 0\}$$

par l'application canonique $G \longrightarrow G/P_+$; alors

$$W \simeq \text{Spec} \left[\bigoplus_{n \geq 0} \frac{M(n\omega_2)}{f_+^n} \right],$$

où $M(n\omega_2)$ est un G -module irréductible de poids dominant $n\omega_2$ et la multiplication dans

$$\bigoplus_{n \geq 0} \frac{M(n\omega_2)}{f_+^n}$$

est graduée:

$$\frac{M(n\omega_2)}{f_+^n} \cdot \frac{M(m\omega_2)}{f_+^m} = \frac{M((m+n)\omega_2)}{f_+^{m+n}}$$

(voir [VP]). Alors $U^+ := X^+ \cap (U \times W)$ est un ouvert affine qui rencontre l'orbite fermée de G dans X^+ ; son algèbre des fonctions régulières est la sous-algèbre de $k(G)$ engendrée par $k[U]$ et $k[W]$ et on montre sans difficulté que

$$k[U^+] = (k[G]_{f_1 f_+})^K \cap \mathcal{O}_{v_2},$$

d'où suit que U^+ (puis X^+) est normale.

Enfin, le fait que X^+ est égal à X_2^+ est une conséquence directe de la description ci-dessus de $k[U^+]$.

6.5. On suppose maintenant que $\dim V = 2r$ et on considère la variété $\tilde{E} = \tilde{E}_r$ constituée des paires non ordonnées (V_r, W_r) de sous-espaces de dimension r de V , avec $V_r \oplus W_r = V$: on a là un espace homogène symétrique isomorphe à $SL(V)/N(K)$ où K est comme en 6.1.

Puisque le rang de $X(N(K))$ est égal à 0, le phénomène “des ccrp coloriés” disparaît: en fait $\mathcal{P}(P \times N(K))^{N(K)}$ est d'indice fini dans

$$\mathcal{P}(P \times N(K)) = \mathcal{P}(P \times K)^K$$

et un couple admissible $(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0)$ est déterminé par le cône $\mathcal{C}(\mathcal{D}_0, \mathcal{V}_0)$ qu'il engendre.

7.

Soit G/H un espace symétrique. On note $\mathbb{M}$ le “plongement magnifique” de G/H , i.e. le plongement simple complet correspondant à la paire admissible $(\emptyset, \{v_1, \dots, v_r\})$, où les v_i sont les éléments de $\mathcal{V}(G/H)$ portés par les arêtes extrémales de la chambre de Weyl $\overline{C}$ de $X_*(S)_{\mathbb{R}}$. On désigne par $(\longrightarrow \mathbb{M})$ l'ensemble des plongements complets X de G/H qui admettent un morphisme $X \longrightarrow \mathbb{M}$.

D'après (1.3), on a une bijection entre $(\longrightarrow \mathbb{M})$ et l'ensemble des décompositions finies de $\overline{C}$ en ccrp. Dans [DP]_{II}, De Concini et Procesi démontrent ce résultat avec une approche différente. Ils observent pour commencer que pour un plongement X de point base x , le groupe de Weyl $\overline{W}$ de $\overline{R}$ opère dans l'adhérence $\overline{S \cdot x}$ de $S \cdot x$ dans X : en effet tout élément de $\overline{W}$ possède un représentant dans K ([R] §4); ils prouvent ensuite que lorsque X domine $\mathbb{M}$, la variété $\overline{S \cdot x}$ est normale, de sorte que $\overline{S \cdot x}$ appartient à $(\xrightarrow{\overline{w}} \mathbb{S})$, l'ensemble des $\overline{W}$ -plongements Y de $S/S \cap H$ qui admettent un $\overline{W}$ -morphisme

$$Y \longrightarrow \mathbb{S} := \overline{S \cdot x_{\mathbb{M}}}$$

($x_{\mathbb{M}}$ est le point base de $\mathbb{M}$); ensuite $X \mapsto \overline{S \cdot x}$ est une bijection entre $(\longrightarrow \mathbb{M})$ et $(\xrightarrow{\overline{w}} \mathbb{S})$ qui préserve le type de singularité; enfin, puisque la décomposition de $X_*(S)_{\mathbb{R}}$ en ccrp correspondant à $\mathbb{S}$ (cf. 1.4) est la décomposition par les chambres de Weyl, on voit que $(\xrightarrow{\overline{w}} \mathbb{S})$ est classé par les décompositions finies de $X_*(S)_{\mathbb{R}}$ en ccrp qui sont $\overline{W}$ -invariantes et qui raffinent la décomposition par les chambres de Weyl, d'où aussitôt le résultat.

En exploitant les exemples du §6, on va montrer que la correspondance $X \mapsto \overline{S \cdot x}$ n'est en général pas aussi bonne qu'on aurait pu le penser.

7.1. Reprenons les exemples de 6.3 et 6.4. Soit V un espace vectoriel de dimension 4 avec la base $(e_1, \dots, e_4)$. On considère l'opération adjointe de

$SL(V)$ dans $\text{End}(V)$, puis l'opération sur $\mathbb{P}(\text{End}(V))$ qu'on en déduit. On pose

$$X = \overline{SL(V) \cdot x} \subset \mathbb{P}(\text{End}(V)),$$

où x est le point de l'espace projectif correspondant à l'endomorphisme de V de matrice

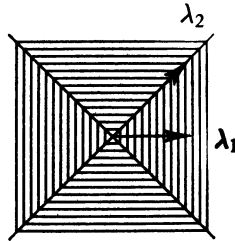
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base $(e_1, \dots, e_4)$. Le sous-groupe d'isotropie en x est le sous-groupe K des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

comme en 6.1.

On vérifie immédiatement que $\overline{S \cdot x}$ est normal [où S désigne le tore anisotrope maximal constitué des matrices $\text{diag}(s_1, s_2, s_1^{-1}, s_2^{-1})$] et que la décomposition correspondante de $X_*(S)_{\mathbb{R}}$ est, avec les notations de 6.1,



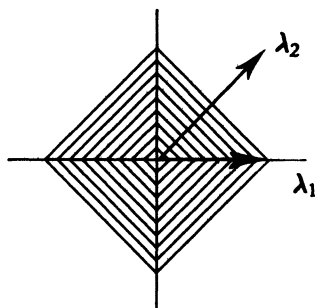
Utilisant [BLV] 3.5 et 4.1, on voit que, en plus de l'orbite ouverte, X contient l'orbite de $x' = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_2(t) \cdot x$ qui est de codimension 1 et l'orbite $x'' = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_1(t) \cdot x$ qui est fermée isomorphe à $SL(V)/P(\lambda_1)$, où x' (resp. x'') est représenté par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

et $P(\lambda_1)$ est le stabilisateur du drapeau $ke_3 \subset ke_2 \oplus ke_3 \oplus ke_4$. Avec la carte de [BLV] 1.4, on trouve ensuite que X est en fait normale avec $SL(V) \cdot x''$ comme lieu singulier. Enfin, puisque on est ici essentiellement dans la situation

de Satake (cf. §4) relative à la fonction f_1 de 6.1, le plongement X coïncide avec $X_2^\mathcal{F}$ de 6.3.

On désigne par P_+ le stabilisateur du sous-espace de V engendré par $e_1 + e_3$ et $e_2 + e_4$; l'adhérence de l'orbite par S de P_+/P_+ dans $SL(V)/P_+$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et la décomposition correspondante de $X_*(S)_\mathbb{R}$ est



On considère alors le plongement X_2^+ qui se réalise comme l'adhérence de l'orbite de

$$x_+ = (x, P_+/P_+) \in X_2^\mathcal{F} \times SL(V)/P_+.$$

Des observations ci-dessus suit que $\overline{S \cdot x_+}$ est un plongement normal de $\overline{S}$ qui correspond à la décomposition de $X_*(S)_\mathbb{R}$ en les chambres de Weyl, circonstance qui est la même que pour le plongement magnifique $\mathbb{M}$ ([DP]_{II})!

7.2. Il serait peut-être intéressant de savoir si pour le plongement X de point base x , les types de singularité de X et $\overline{S \cdot x}$ sont les mêmes; en particulier, si $\overline{S \cdot x}$ est normale, ce qui est apparemment vrai dans de nombreux cas (on rappelle que par convention, la variété sous-jacente à un plongement est normale). Dans le même ordre d'idées, on remarquera que la réciproque n'est pas vraie.

On considère en effet l'espace vectoriel k^2 avec sa base canonique (e_1, e_2) . On désigne par $S^3(k^2)$ la puissance symétrique troisième de k^2 avec l'opération naturelle de $SL(2)$ et par x le point de $\mathbb{P}(S^3(k^2))$ représenté par $(e_1 + e_2)^2(e_1 - e_2)$. Il est clair que $SL(2)_x$ est le tore T qui stabilise les droites $k(e_1 + e_2)$ et $k(e_1 - e_2)$. L'adhérence X de $SL(2) \cdot x$ dans $\mathbb{P}(S^3(k^2))$ est la surface quartique d'équation le discriminant (pour les formes binaires de degré 3); géométriquement X est la surface développable constituée des tangentes à la cubique gauche C de $\mathbb{P}^3$ et X n'est pas normale puisque tous les points de C sont singuliers. D'autre part, le tore S de $SL(2)$ constitué des matrices diagonales est anisotrope pour l'espace symétrique $SL(2)/T$ et il est immédiat de vérifier que $\overline{S \cdot x}$ est lisse.

REFERENCES

- [BHM] A. BIALYNICKI-BIRULA - G. HOCHSCHILD - G. MOSTOW, *Extensions of representations of algebraic linear groups*, Amer. J. Math. **85** (1963), 131-144.
- [Br] M. BRION, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Prépublication de l'Institut Fourier, **24** (1985).
- [BLV] M. BRION - D. LUNA - TH. VUST, *Espaces homogènes sphériques*, Invent. Math. **84** (1986), 617-632.
- [D] V.I. DANILOV, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys **33** (1978), 97-154.
- [DGMP] C. DE CONCINI - M. GORESKY - R. MACPHERSON - C. PROCESI, *On the geometry of quadrics and their degenerations*, Preprint.
- [DS] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press (1978).
- [DSp] C. DE CONCINI - T.A. SPRINGER, *Betti numbers of complete symmetric varieties*, In Geometry today, Int. conf. Roma (1984), Prog. Math. **60** (1985), 87-104.
- [DP]_I C. DE CONCINI - C. PROCESI, *Complete symmetric varieties*, In Invariant theory, Proceedings, Montecatini, 1982, Springer LN **996** (1983), 1-44.
- [DP]_{II} C. DE CONCINI - C. PROCESI, *Complete symmetric varieties II*, In Algebraic groups and related topics, Proc. Symp. Kyoto and Nagoya 1983, Adv. Stud. Pure Math. **6** (1985), 481-513.
- [DP]_{III} C. DE CONCINI - C. PROCESI, *Cohomology of compactifications of algebraic groups*, Duke Math. J. **53** 3 (1986), 585-594.
- [DP]_{IV} C. DE CONCINI - C. PROCESI, *Cohomology of complete algebraic groups and Hilbert's 15th problem*, Preprint.
- [GGA] S. HELGASON, *Groups and geometric analysis*, Academic Press (1984).
- [Ko] B. KOSTANT, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327-404.
- [Lo] O. LOOS, *Symmetric spaces*, Vol. I, II. Benjamin (1969).
- [Lu] D. LUNA, *Adhérences d'orbite et invariants*, Invent. Math. **29** (1975), 231-238.
- [LV] D. LUNA - TH. VUST, *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 186-245.
- [M] T. MATSUKI, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 332-357.
- [P] V.L. POPOV, *Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one dimensional homogeneous vector bundles*, Math. USSR-Izv. **8** (1974), 301-327.
- [R] R.W. RICHARDSON, *Orbits, invariants and representations associated to involutions of reductives groups*, Invent. Math. **66** (1982), 287-312.
- [Sa] I. SATAKE, *On representations and compactifications of symmetric riemannian spaces*, Ann. of Math. **71** (1960), 77-110.
- [Sp] T.A. SPRINGER, *Some results on algebraic groups with involutions*, In Algebraic groups and related topics, Proc. Symp. Kyoto and Nagoya 1983, Adv. Stud. Pure Math. **6** (1985), 525-543.

- [St] R. STEINBERG, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the AMS **80** (1980).
- [Su] H. SUMIHIRO, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974) 1-28.
- [TE] G. KEMPF et al., *Toroidal embeddings*, Springer LN **339** (1973).
- [Uz] T. UZAWA, *On equivariant completion of algebraic symmetric spaces*, In Algebraic and topological theories - to the memory of Dr. T. Miyata (1985), 569-577.
- [Vi] E.B. VINBERG, *Complexity of action of reductive groups*, Functional Anal. Appl. **20** (1986), 1-11.
- [VP] E.B. VINBERG - V.L. POPOV, *On a class of quasihomogeneous affine varieties*, Math. USSR-Izv. **6** (1972) 4, 743-758.
- [Vo] V.E. VOSKRESENSKII, *Picard groups of linear algebraic groups*, Studies in Number theory **3**, Izdat. Saratov Univ., Saratov (1969), 7-16.
- [Vr] L. VRETARE, *Elementary spherical functions on symmetric spaces*, Math. Scand. **39** (1976), 343-358.
- [V] TH. VUST, *Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes*, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 317-334.

Université de Genève
 Section de Mathématiques
 2-4, rue du Lièvre
 Case postale 240
 CH-1211 Genève 24