

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

XAVIER SAINT RAYMOND

**Résultats d'unicité de Cauchy instable dans des situations où
la condition de pseudo-convexité dégénère**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 13,
n° 4 (1986), p. 661-687

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1986_4_13_4_661_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Résultats d'unicité de Cauchy instable dans des situations où la condition de pseudo-convexité dégénère.

XAVIER SAINT RAYMOND

Depuis une trentaine d'années, l'étude de l'unicité de Cauchy locale pour les problèmes C^∞ linéaires a fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Un panorama des résultats obtenus est présenté dans Alinhac [3], et Zuily [15] en fournit des preuves d'une bonne partie.

Pour les opérateurs de type principal, Hörmander [7, chap. 8] a montré l'importance d'une propriété de convexité de la surface S portant les données de Cauchy, la pseudo-convexité, qui correspond au signe de certaines dérivées secondes de l'équation de S calculées aux zéros réels et complexes du symbole principal p de l'opérateur. Dans ce travail, nous avons cherché à préciser le rôle de cette condition de pseudo-convexité, mais, afin de limiter la complexité des phénomènes, nous nous sommes contentés d'examiner un cas où l'on sait bien que cette condition ne dépend que des zéros réels du symbole principal p (auxquels nous associons les bicaractéristiques correspondantes): lorsque *l'opérateur est du deuxième ordre* (le premier ordre est traité dans Saint Raymond [12]) *de type principal réel* (voir Bahouri [5], Nirenberg [10] et Alinhac [2] lorsque ce n'est plus de type principal), et que *la surface S n'est pas caractéristique* (dans le cas contraire, se reporter à Saint Raymond [11]).

La littérature contient déjà de nombreux résultats pour cette catégorie de problème. D'abord, Calderón [6] a montré qu'il y avait unicité en $x_0 \in S$ si toutes les bicaractéristiques passant par x_0 sont transverses à S . Hörmander [7, th 8.9.1] a étendu ce résultat au cas où l'ordre de contact des bicaractéristiques avec S ne dépasse pas 2, en ajoutant l'hypothèse qu'aucune bicaractéristique passant par x_0 n'est entièrement située, localement, dans le futur (hypothèse de pseudo-convexité). Alinhac [1, th. 2] a complété ce résultat en montrant que cette restriction était nécessaire à l'unicité

(en supposant toujours que l'ordre de contact est au plus égal à 2). Enfin, Lerner et Robbiano [9], puis Hörmander [8, th. 28.4.3] qui en a simplifié les hypothèses, ont prouvé une propriété d'unicité compacte sans aucune restriction sur l'ordre de contact des bicaractéristiques en supposant que, dans tout un voisinage de x_0 , aucune bicaractéristique d'ordre de contact égal à 2 n'est entièrement contenue dans le futur (pour les conséquences géométriques de ces hypothèses, voir le Corollaire 2.7. ci-dessous).

Tous les résultats précédents possèdent la propriété de stabilité suivante: lorsque les hypothèses sont vérifiées en x_0 , elles le sont aussi en tout point x suffisamment proche de x_0 sur S et donc il y a unicité également en ces points-là. Ici, nous abordons des situations qui ne possèdent plus cette propriété de stabilité. Dans un premier théorème (théorème 2.1) nous établissons l'unicité en un point x_0 de la frontière d'un domaine où S est pseudo-convexe. Nous relierons ensuite les hypothèses de ce théorème à la position par rapport à S des bicaractéristiques passant par x_0 : nous montrons qu'aucune d'entre elles n'est alors entièrement située, localement, dans le futur. Enfin, nous prouvons (au théorème 2.9) que cette dernière propriété est nécessaire à l'unicité même lorsque l'ordre de contact est strictement supérieur à 2.

Les méthodes que nous utilisons ici nous ont été inspirées par celles introduites par Hörmander [7, th. 5.2.1 & th. 5.3.2] puis développées par Zachmanoglou [13] & [14] pour étudier les problèmes analytiques. Ainsi nous démontrons le théorème d'unicité par une technique de déformation de surface qui se combine avec le théorème d'unicité de Hörmander ([7, th. 8.9.1], cf. th. 1.1 ci-dessous); de l'autre côté, nous déduisons notre théorème de non-unicité de celui d'Alinhac & Baouendi ([4, th. 2], cf. th. 1.4 ci-dessous) après construction de phases.

1. – Hypothèses. Notations. Résultats antérieurs.

1.1. Hypothèses générales sur l'opérateur P et la surface S .

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et, avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$,

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur différentiel linéaire du deuxième ordre où les fonctions a_α sont C^∞ à valeurs complexes au voisinage de x_0 . Nous noterons p le symbole principal de cet opérateur qui est la fonction définie sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ par la

formule:

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Nous supposerons tout au long de ce papier que l'opérateur P est *de type principal réel*, c'est-à-dire que p est à valeurs réelles et que $d_\xi p \neq 0$ sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Considérons maintenant une hypersurface orientée de $\mathbb{R}^n$, S , passant par x_0 ; nous supposerons que cette hypersurface S *n'est pas caractéristique en x_0* , c'est-à-dire que si $\varphi(x) = 0$ en est une équation, où φ est une fonction C^∞ à valeurs réelles telle que $\varphi(x_0) = 0$ et $d\varphi(x_0) \neq 0$,

$$(1.1) \quad p(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0.$$

Avec ces hypothèses, nous nous intéressons à l'unicité des solutions au problème de Cauchy avec données sur S , ce qui se ramène classiquement par linéarité à la question: est-ce-que

$$P(x, D)u(x) = 0 \quad \text{et} \quad u(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(x) < 0$$

au voisinage de x_0 impliquent que u est nulle au voisinage de x_0 ?

Signalons dès maintenant que dans les différents théorèmes que nous montrons ici ces hypothèses générales peuvent être affaiblies. Ainsi: (i) au théorème 2.1 et au corollaire 2.4, nous pouvons remplacer la condition « $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ » par « $a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ » pour $|\alpha| < 2$; (ii) au corollaire 2.12 et dans tous les résultats du paragraphe 5, nous pouvons remplacer les hypothèses « P d'ordre 2 et S non caractéristique » par « P d'ordre $m \in \mathbb{N}$ et $H_\varphi^2 p \neq 0$ sur $\text{Car}_p^2(S, x_0)$ » (pour les notations, voir le paragraphe suivant); (iii) enfin, dans le théorème 2.9, nous pouvons remplacer les hypothèses « P d'ordre 2 et de type principal » par « P d'ordre $m \in \mathbb{N}$ et $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$ »; on peut aussi y supprimer l'hypothèse « S non caractéristique » à condition de perturber l'opérateur à l'ordre $m - 1$ dans la conclusion (cf. Hörmander [7, th. 8.9.4] et Saint Raymond [11, §.II]).

1.2. Ordre de contact avec S des bicaractéristiques.

Pour toute fonction q appartenant à l'anneau des fonctions C^∞ à valeurs réelles définies sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, noté $C^\infty(T^*\mathbb{R}^n \setminus 0)$, le champ hamiltonien de q est donné par la formule

$$H_q = q_\xi(x, \xi) \cdot \partial_x - q_x(x, \xi) \cdot \partial_\xi.$$

Ainsi, à la fonction φ définissant S (considérée comme fonction sur $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$

en posant $\varphi(x, \xi) = \varphi(x)$, correspond le champ $-\varphi_x(x) \cdot \partial_\xi$; la condition (1.1) peut alors être réécrite sous la forme

$$(1.2) \quad H_\varphi^2 p(x_0) \neq 0$$

puisque la fonction $H_\varphi^2 p(x, \xi)$ ne dépend plus de ξ .

Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, notons $\mathcal{H}_p^k(S)$ l'idéal de $C^\infty(T^*\mathbf{R}^n \setminus 0)$ engendré par les fonctions p et $H_p^j \varphi$ pour $0 \leq j < k$. La formule

$$(1.3) \quad H_p^k(\lambda \varphi) = \sum_{i=0}^k C_i^k(H_p^{i-1} \lambda)(H_p^i \varphi)$$

montre que cet idéal ne dépend pas de la fonction φ mais seulement de l'hypersurface S . Notons encore $\text{Car}_p^k(S)$ ($\subset T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$) l'ensemble des zéros de $\mathcal{H}_p^k(S)$, puis

$$\text{Car}_p^k(S, x_0) = \{(x, \xi) \in \text{Car}_p^k(S) : x = x_0\}.$$

En un point de $\text{Car}_p^k(S)$, le signe de la quantité $H_p^k \varphi$ ne dépend que de l'hypersurface *orientée* S car (1.3) montre que

$$H_p^k(\lambda \varphi) = \lambda H_p^k \varphi \text{ mod. } \mathcal{H}_p^k(S).$$

Pour $j \in \mathbf{N}$, il est clair que $\text{Car}_p^{k+j}(S) \subset \text{Car}_p^k(S)$, et on notera Car_p^0 la variété caractéristique $\text{Car}_p^0(S) = p^{-1}(0)$ qui est indépendante de S . Le champ H_p est tangent à Car_p^0 , et on appelle bicaractéristiques les courbes intégrales de H_p dessinées sur Car_p^0 . Comme $H_p^j \varphi$ représente la j -ème dérivée de la fonction φ le long de la bicaractéristique, il est clair que si $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^k(S) \setminus \text{Car}_p^{k+1}(S)$, la projection sur la base de la bicaractéristique issue de (x_0, ξ_0) possède un contact d'ordre k exactement avec l'hypersurface S . $\text{Car}_p^k(S)$ représente donc l'ensemble des bicaractéristiques dont l'ordre de contact avec S est au moins égal à k .

1.3. Résultats classiques.

Les deux résultats classiques concernant le problème que nous étudions ici sont les suivants:

THÉORÈME 1.1 (Hörmander [7, th. 8.9.1]). *Supposons que $H_p^2 \varphi < 0$ sur $\text{Car}_p^2(S, x_0)$. Alors toute fonction à valeurs complexes $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n)$ vérifiant au voisinage de x_0*

$$P(x, D)u(x) = 0 \quad \text{et} \quad u(x) = 0 \text{ pour } \varphi(x) < 0$$

s'annule au voisinage de x_0 .

THÉOREME 1.2 (Alinhac [1, th. 2]). *Supposons qu'il existe $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^2(S, x_0)$ tel que $H_p^2 \varphi(x_0, \xi_0) > 0$. Alors il existe deux fonctions C^∞ à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de x_0*

$$[P(x, D) + a(x)]u(x) = 0 \quad \text{et} \quad \text{supp } a \subset \text{supp } u = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \geq 0\}.$$

DÉFINITION 1.3. *La condition $H_p^2 \varphi < 0$ sur $\text{Car}_p^2(S, x_0)$ a été introduite dans un cadre plus général par Hörmander [7, chap. 8]; lorsqu'elle est vérifiée, on dit que l'hypersurface S est pseudo-convexe en x_0 .*

Avec ces deux résultats, qui règlent la question si $\text{Car}_p^2(S, x_0) = \emptyset$, nous en citons un troisième qui nous servira au paragraphe 4 (cf. aussi Hörmander [7, th. 8.9.4]):

THÉOREME 1.4 (Alinhac & Baouendi [4, th. 2]). *Supposons qu'il existe deux fonctions C^∞ à valeurs réelles Φ et Ψ définies au voisinage de x_0 telles que:*

- (i) $p(x, d\Phi(x)) = 0$;
- (ii) $X = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot \partial_x \neq 0$ et $X\Psi(x) = 0$;
- (iii) $p(x_0, d\Psi(x_0)) \neq 0$.

Alors il existe deux fonctions C^∞ à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de x_0

$$[P(x, D) + a(x)]u(x) = 0 \quad \text{et} \quad \text{supp } a \subset \text{supp } u = \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x) \geq \Psi(x_0)\}.$$

COMMENTAIRE 1.5. Afin de comparer ce théorème avec les précédents, supposons que $\Psi(x) = \Psi(x_0) + \varphi(x)$ auquel cas (iii) équivaut à (1.1); alors les conditions (i) et (ii) entraînent que $(x_0, d\Phi(x_0)) \in \text{Car}_p^\infty(S, x_0)$, et même que la bicaractéristique issue de ce point reste dans S .

2. – Enoncé des résultats.

2.1. Le théorème d'unicité.

THÉOREME 2.1. *Supposons qu'il existe au voisinage de x_0 une fonction C^∞ à valeurs réelles φ telle que:*

(i) *pour tout point $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^2(S, x_0)$, il existe $k \in \mathbb{N}$, $c > 0$ et un voisinage de (x_0, ξ_0) sur lequel:*

$$\begin{cases} (x, \xi) \in \text{Car}_p^2(S) \\ \text{et } \varphi(x) \geq \varphi(x_0) \end{cases} \Rightarrow H_p^2 \varphi(x, \xi) \leq -c[\varphi(x) - \varphi(x_0)]^k;$$

(ii) $H_p \varphi \neq 0$ sur $\text{Car}_p^3(S, x_0)$.

Alors toute fonction à valeurs complexes $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant au voisinage de x_0

$$P(x, D)u(x) = 0 \quad \text{et} \quad u(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(x) < 0$$

s'annule au voisinage de x_0 .

COMMENTAIRES 2.2. L'hypothèse (i) signifie qu'on suppose que S est pseudo-convexe dans le domaine $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ au bord duquel se trouve x_0 ; en réalité cette hypothèse est un peu plus forte puisqu'elle réclame aussi un contrôle de $H_p^2 \varphi$ en fonction de la distance au bord. L'hypothèse (ii) signifie que les bicaractéristiques ayant un contact strictement supérieur à 2 sont obligatoirement transverses au bord du domaine $\varphi(x) > \varphi(x_0)$. L'exemple suivant montre que si les hypothèses du théorème sont vérifiées en x_0 , elles ne le sont pas nécessairement en tout point voisin de x_0 (instabilité).

EXEMPLE 2.3. Soient $x = (t, y_1, y_2)$ les points de $\mathbb{R}^3$, $x_0 = (0, 0, 0)$, $\varphi(x) = t$ et $p(t, y_1, y_2; \tau, \eta_1, \eta_2) = \tau^2 + \eta_1 \eta_2 + t \eta_1^2 + t y_1^{k-2} \eta_2^2$ où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On calcule que

$$H_p \varphi = 2\tau, \quad \text{Car}_p^2(S) = \{t = \tau = \eta_1 \eta_2 = 0, \eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0\},$$

$$H_p^2 \varphi = -2\eta_1^2 - 2y_1^{k-2} \eta_2^2$$

et

$$\text{Car}_p^3(S, x_0) = \{t = y_1 = y_2 = \tau = \eta_1 = 0, \eta_2 \neq 0\}$$

si $k > 2$, $\text{Car}_p^3(S, x_0) = \emptyset$ si $k = 2$. Les hypothèses du théorème 1.1 sont donc vérifiées avec $\varphi(x) = y_1$. Dans cet exemple, $\text{Car}_p^2(S, x_0)$ possède deux éléments (aux équivalences projectives près) dont l'un fournit une bicaractéristique d'ordre de contact 2 tangente au bord, et l'autre fournit une bicaractéristique d'ordre de contact k transverse au bord; on remarquera en outre que si k est impair, le théorème de non-unicité d'Alinhac (th. 1.2 ci-dessus) peut s'appliquer en n'importe quel point x voisin de x_0 sur S tel que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, ce qui illustre bien l'instabilité du théorème 2.1.

Lorsqu'il n'y a pas de bicaractéristique d'ordre de contact strictement supérieur à 3, il suffit de vérifier que S est pseudo-convexe dans un domaine $\varphi(x) > \varphi(x_0)$. Précisément:

COROLLAIRE 2.4. Supposons que $\text{Car}_p^4(S, x_0) = \emptyset$ et qu'il existe au voisinage de x_0 une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ telle que $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$ et $H_p^2 \varphi \leq 0$

sur $\text{Car}_p^2(S, x)$ pour tout x voisin de x_0 tel que $\varphi(x) > \varphi(x_0)$. Alors, même conclusion qu'au théorème 2.1.

2.2. Conséquences géométriques des hypothèses du théorème 2.1.

Il est intéressant de relier les hypothèses du théorème 2.1, à la position (par rapport à S) des bicaractéristiques dont la projection sur la base passe par x_0 .

PROPOSITION 2.5. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, toutes les bicaractéristiques dont la projection sur la base passe par x_0 possèdent au moins une branche localement contenue dans $\{(x, \xi) \in \text{Car}_p^0; \varphi(x) < 0\}$ (demi-espace du passé).*

On pourrait démontrer directement cette proposition en précisant les arguments donnés au paragraphe 5.4. Ici, nous la déduisons de la proposition suivante qui est plus délicate à obtenir:

PROPOSITION 2.6. *Supposons qu'il existe au voisinage de x_0 une fonction C^∞ à valeurs réelles φ telle que $H_p^2 \varphi \leq 0$ sur $\text{Car}_p^2(S, x)$ pour tout x voisin de x_0 tel que $\varphi(x) > \varphi(x_0)$. Alors pour tout $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^2(S, x_0)$, il existe $s_0 > 0$ tel que*

$$\varphi(\exp[sH_p](x_0, \xi_0)) \leq 0 \quad \text{pour} \quad 0 < sH_p \varphi(x_0, \xi_0) < s_0.$$

La proposition 2.6 fournit en outre l'énoncé suivant:

COROLLAIRE 2.7. *Supposons que $H_p^2 \varphi \leq 0$ sur $\text{Car}_p^2(S)$ au voisinage de x_0 . Alors toutes les bicaractéristiques issues des points de $\text{Car}_p^2(S, x_0)$ sont localement contenues dans $\{(x, \xi) \in \text{Car}_p^0; \varphi(x) \leq 0\}$.*

COMMENTAIRES 2.8. Ce corollaire, dont une première version avait été démontrée par Lerner & Robbiano [9, 1, 2.2.1] conduit notamment aux deux constatations suivantes: (i) dans le théorème d'unicité compacte de Hörmander [8, th. 28.4.3], les hypothèses impliquent que toutes les bicaractéristiques dont la projection sur la base passe par x_0 plongent dans le domaine où on suppose que u est nulle; (ii) chaque fois qu'une bicaractéristique issue d'un point de $\text{Car}_p^2(S, x_0)$ n'est pas entièrement contenue dans le domaine $\varphi(x) \leq 0$ (par exemple lorsque son ordre de contact est impair et supérieur à 2), on peut trouver des points x arbitrairement proches de x_0 et des points $(x, \xi) \in \text{Car}_p^2(S, x)$ tels que $H_p^2 \varphi(x, \xi) > 0$, où l'on peut donc appliquer le théorème de non-unicité d'Alinhac (th. 1.2 ci-dessus); ceci prolonge la remarque sur l'instabilité que nous avons faite à propos de l'exemple 2.3 lorsque k est impair.

2.3. Le théorème de non-unicité.

D'après la proposition 2.5 et le commentaire 2.8 (i), tous les résultats d'unicité connus dans notre contexte supposent que les bicaractéristiques plongent dans le domaine où u est supposée nulle. Lorsque ce n'est plus le cas, on peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.9. *Supposons qu'il existe un entier $k > 0$ et un point $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^{2k}(S)$ tel que $H_p^{2k}\varphi(x_0, \xi_0) > 0$, et ajoutons les deux hypothèses suivantes:*

$$(i) \quad \forall q_1 \text{ et } q_2 \in \mathcal{H}_p^k(S),$$

$$H_{q_1}\varphi(x_0, \xi_0) = H_{q_2}\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow H_{q_1}q_2(x_0, \xi_0) = 0;$$

$$(ii) \quad \forall q \in \mathcal{H}_p^k(S),$$

$$d_\xi q(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow (dq \wedge d\varphi)(x_0, \xi_0) = 0.$$

Alors il existe deux fonctions C^∞ à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de x_0

$$[P(x, D) + a(x)]u(x) = 0,$$

$$x_0 \in \text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \text{supp } a \subset \text{supp } u.$$

COMMENTAIRES 2.10. (i) on notera que nos hypothèses ne portent que sur les valeurs en (x_0, ξ_0) des dérivées de p et de φ sans aucune hypothèse au voisinage; (ii) pour les cas où on dispose d'une bicaractéristique d'ordre de contact infini, il y a un résultat de Bahouri ([5, th. 2.1]) qui prolonge le théorème d'Alinhac & Baouendi (th. 1.4 ci-dessus).

EXEMPLE 2.11. Soient $x = (t, y_1, y_2)$ les points de $\mathbb{R}^3$, $x_0 = (0, 0, 0)$, $\varphi(x) = t$, $p(t, y_1, y_2; \tau, \eta_1, \eta_2) = \tau^2 + \eta_1\eta_2 + t\eta_1^2 - ty_1^{2k-2}\eta_2^2$ où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $\xi_0 = (0, 0, 1)$. On calcule que

$$H_p\varphi = 2\tau, \quad H_p^2\varphi = -2\eta_1^2 + 2y_1^{2k-2}\eta_2^2, \quad \text{puis pour } 3 \leq j \leq 2k,$$

$$H_p^j\varphi = 2 \frac{(2k-2)!}{(2k-j)!} y_1^{2k-j} \eta_2^j + O(|x-x_0| + |\xi-\xi_0|^{2k+1-j}).$$

Il en résulte que $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^{2k}(S, x_0)$ et que $H_p^{2k}\varphi(x_0, \xi_0) = 2[(2k-2)!] > 0$. Les autres hypothèses du théorème 2.9 sont également vérifiées car:

(i) d'après les formules précédentes,

$$a) \text{ pour } j < 2k, \quad H_{H_p^j\varphi}\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \Leftrightarrow j \neq 1;$$

b) pour $0 \leq j, l < k, j \neq 1$ et $l \neq 1$, $H_p H_p^j \varphi = H_p^{j+1} \varphi$, et $H_{H_p^j \varphi} H_p^l \varphi = 0 ([|x - x_0| + |\xi - \xi_0|]^{k+1})$.

(ii) pour $1 < j < 2k - 1$, et donc pour $1 < j < k$, $(dH_p^j \varphi)(x_0, \xi_0) = 0$; il suffit alors d'écrire

$$\begin{aligned} d_\xi(\alpha p + \beta \varphi + \gamma H_p \varphi)(x_0, \xi_0) &= 0 \Rightarrow \alpha(x_0, \xi_0) d\eta_1 + \gamma(x_0, \xi_0) d\tau = 0 \\ \Rightarrow \alpha(x_0, \xi_0) &= \gamma(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow [d(\alpha p + \beta \varphi + \gamma H_p \varphi) \wedge d\varphi](x_0, \xi_0) = 0. \end{aligned}$$

Dans [1] (cf. th. 1.2 ci-dessus), Alinhac avait montré que lorsque $k = 1$, il suffit de supposer $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^2(S, x_0)$ et $H_p^2 \varphi(x_0, \xi_0) > 0$ pour obtenir le résultat. C'est également vrai si $k = 2$:

COROLLAIRE 2.12. *Supposons qu'il existe un point $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^4(S, x_0)$ tel que $H_p^4 \varphi(x_0, \xi_0) > 0$. Alors même conclusion qu'au théorème 2.9.*

3. - Démonstration des résultats d'unicité.

3.1. Principe de la déformation de surface.

LEMME 3.1. *Supposons qu'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, et une fonction $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles telle que $d\varphi_1 \neq 0$ dans Ω et*

- (i) $K = \{x \in \Omega: \varphi(x) \geq 0 \text{ et } \varphi_1(x) \leq \varphi_1(x_0)\}$ est compact;
- (ii) $H_p^2 \varphi_1 < 0$ sur $\{(x, \xi) \in \text{Car}_p^0: x \in K \text{ et } H_p \varphi_1(x, \xi) = 0\}$.

Alors toute fonction à valeurs complexes $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ vérifiant $P(x, D)u(x) = 0$ dans Ω et $u(x) = 0$ dans $\{x \in \Omega: \varphi(x) < 0\}$ s'annule au voisinage de x_0 .

DÉMONSTRATION. Soit $k = \{x \in \text{supp } u: \varphi_1(x) \leq \varphi_1(x_0)\}$; comme $\text{supp } u \subset \{x \in \Omega: \varphi(x) \geq 0\}$, on a $k \subset K$ et k est compact grâce à (i).

Raisonnons par l'absurde: supposons que $x_0 \in \text{supp } u$; alors $x_0 \in k \neq \emptyset$, et la fonction φ_1 atteint son minimum sur k en un point $x_1 \in k$ ($\subset K$). On a donc

$$(3.1) \quad x_1 \in \text{supp } u,$$

$$(3.2) \quad x_1 \in K,$$

$$(3.3) \quad \varphi_1(x_1) \leq \varphi_1(x_0) \quad \text{et} \quad k \subset \{x \in \Omega: \varphi_1(x) \geq \varphi_1(x_1)\}$$

par définitions de k et de x_1 : Or

$$\text{supp } u \subset (k \cup \{x \in \Omega: \varphi_1(x) \geq \varphi_1(x_0)\}) \subset \{x \in \Omega: \varphi_1(x) \geq \varphi_1(x_1)\}$$

grâce à (3.3); de plus, grâce à (3.2) et à l'hypothèse (ii) du lemme, l'hyper-surface orientée $\{x \in \Omega: \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1)\}$ est pseudo-convexe en x_1 : on ne peut donc avoir (3.1) à cause du théorème d'unicité de Hörmander (th. 1.1 ci-dessus).

3.2. Démonstration du théorème 2.1: choix de la déformation et compacité.

Nous allons maintenant démontrer le théorème 2.1 en nous ramenant à la situation décrite ci-dessus; le présent paragraphe est consacré au choix de la déformation φ_1 et à la vérification de l'hypothèse (i) du lemme 3.1; la démonstration du théorème sera ensuite complétée au paragraphes 3.3 & 3.4.

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 2.1 et remarquons que si $\text{Car}_p^2(S, x_0) = \emptyset$, l'hypothèse (i) entraîne que $H_p^2 \varphi < 0$ sur $\text{Car}_p^2(S, x_0)$, et il n'y a donc plus rien à démontrer puisque ce sont là les hypothèses du théorème 1.1. Nous pouvons donc supposer que $\text{Car}_p^3(S, x_0) \neq \emptyset$ et d'après l'hypothèse (ii), il existe donc un point (x_0, ξ_0) où $H_p \varphi = 0$ et $H_p \psi \neq 0$; cela nous permet d'une part de conclure que $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$ et d'autre part d'utiliser les résultats du lemme 5.2 dont la démonstration sera donnée au paragraphe 5.1.

Choisissons comme coordonnées locales sur $\mathbf{R}^n: x_n = \varphi(x)$, $x_{n-1} = \psi(x) - \varphi(x_0)$, et complétons avec $x' = (x_1, \dots, x_{n-2})$. Si q est un voisinage compact de x_0 dans $\mathbf{R}^n$ où tout est défini et où on peut appliquer les résultats du lemme 5.2, posons $Q = \{(x, \xi) \in \text{Car}_p^0: x \in q \text{ et } |\xi|^2 = 1\}$ avec $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$. En utilisant l'hypothèse (i) du théorème 2.1 et la compacité de $\text{Car}_p^2(S, x_0) \cap Q$, on a, avec des constantes $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $c_0 > 0$, une estimation (uniforme)

$$(3.4) \quad H_p^2 \varphi \leq -c_0 x_{n-1}^k \quad \text{sur} \quad \text{Car}_p^2(S) \cap \{(x, \xi) \in Q: x_{n-1} \geq 0\}$$

pourvu que l'on ait choisi q assez petit. Si nous notons $C_0 = \sup |H_p \psi|$, notre déformation de surface sera définie par la formule

$$(3.5) \quad \varphi_\varepsilon(x) = x_n - \varepsilon^{k+1} x_{n-1} - \varepsilon^k \frac{x_{n-1}^2}{2} + \frac{c_0}{C_0^2} \frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \varepsilon^{k+1} |x'|^2$$

où le réel $\varepsilon > 0$ reste à choisir.

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par la formule

$$f(t) = t + \frac{t^2}{2} - \frac{c_0}{C_0^2} \frac{t^{k+2}}{(k+1)(k+2)};$$

cette fonction vérifie

$$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty;$$

il existe donc trois réels α , β et γ tels que $\alpha < 0 < \beta < \gamma$ et

$$(3.6) \quad \{t \in]\alpha, \gamma[: f(t) \geq 0\} = [0, \beta];$$

nous posons alors:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x', x_{n-1}, x_n) : |x'| < \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha\varepsilon < x_{n-1} < \gamma\varepsilon \quad \text{et} \quad |x_n| < \varepsilon\}$$

et

$$K_\varepsilon = \{x \in \Omega_\varepsilon : \varphi(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi_\varepsilon(x) \leq 0\}.$$

D'après (3.5),

$$\begin{aligned} K_\varepsilon = & \left\{ x \in \Omega_\varepsilon : 0 \leq x_n \leq \varepsilon^{k+1} x_{n-1} + \varepsilon^k \frac{x_{n-1}^2}{2} - \frac{c_0}{C_0^2} \frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \varepsilon^{k+1} |x'|^2 \right\} \subset \\ & \subset \left\{ x \in \Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon^{k+1} x_{n-1} + \varepsilon^k \frac{x_{n-1}^2}{2} - \frac{c_0}{C_0^2} \frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = \varepsilon^{k+2} f\left(\frac{x_{n-1}}{\varepsilon}\right) \right\}. \end{aligned}$$

D'après (3.6), on a donc $K_\varepsilon \subset \{x \in \Omega_\varepsilon : x_{n-1} \in [0, \beta\varepsilon]\}$, puis on montre de même que pour $x \in K_\varepsilon$, $|x'| \leq (\beta + \beta^2/2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et $0 \leq x_n \leq (\beta + \beta^2/2) \varepsilon^{k+2}$. Il existe alors clairement un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$(3.7) \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \quad \Omega_\varepsilon \subset q \quad \text{et} \quad K_\varepsilon \text{ est compact dans } \Omega_\varepsilon.$$

3.3. Démonstration du théorème 2.1: propriété de pseudo-convexité.

LEMME 3.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et avec les notations précédentes, il existe $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0[$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$, $H_p^2 \varphi_\varepsilon < 0$ sur $\{(x, \xi) \in Q : x \in K_\varepsilon \text{ et } H_p \varphi_\varepsilon(x, \xi) = 0\}$.*

DÉMONSTRATION. Comme toutes les fonctions ne dépendant que de p , de φ et de ψ envisagées ici sont continues sur le compact Q , les différentes constantes C_j apparaissant ci-dessous en désigneront des bornes (indépendantes de ε et de $(x, \xi) \in Q$).

Les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2.1 entraînent que $H_p^2 \varphi < 0$ sur $\text{Car}_p^2(S, x_0) \cap \{(x, \xi) \in Q : H_p \psi(x, \xi) = 0\}$, et donc il existe $c_1 > 0$ telle que $H_p^2 \varphi \leq -2c_1$ sur ce compact, puis il en existe un voisinage ouvert U tel que $H_p^2 \varphi \leq -c_1$ dans $U \cap Q$. Si nous posons

$$\delta = \inf_{q \notin U} \max \{|x - x_0|, |H_p \varphi(x, \xi)|, |H_p \psi(x, \xi)|\},$$

$\delta > 0$ par continuité des fonctions considérées et définition de U , et on a

$$(3.8) \quad \forall (x, \xi) \in Q, \quad \begin{cases} |x - x_0| < \delta, \\ |H_p \varphi(x, \xi)| < \delta \text{ et } \Rightarrow H_p^2 \varphi(x, \xi) \leq -c_1. \\ |H_p \psi(x, \xi)| < \delta \end{cases}$$

Comme $x_n = \varphi(x)$ et $x_{n-1} = \psi(x) - \psi(x_0)$, la formule (3.5) donne

$$(3.9) \quad \begin{cases} H_p \varphi_\varepsilon = H_p \varphi - H_p \psi \left(\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^k x_{n-1} - \frac{c_0}{C_0^2} \frac{x_{n-1}^{k+1}}{k+1} \right) + \varepsilon^{k+1} H_p |x'|^2, \\ \text{et} \\ H_p^2 \varphi_\varepsilon = H_p^2 \varphi - H_p^2 \psi \left(\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^k x_{n-1} - \frac{c_0}{C_0^2} \frac{x_{n-1}^{k+1}}{k+1} \right) - \\ \quad - (H_p \psi)^2 \left(\varepsilon^k - \frac{c_0}{C_0^2} x_{n-1}^k \right) + \varepsilon^{k+1} H_p^2 |x'|^2. \end{cases}$$

La première de ces deux formules prouve que pour $(x, \xi) \in Q$ et $x \in K_\varepsilon$,

$$|H_p \varphi_\varepsilon - H_p \varphi| \leq C_1 \varepsilon^{k+1},$$

et nous avons donc un $\varepsilon_2 > 0$ ne dépendant que de p , de φ et de ψ tel que

$$(3.10) \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_2[, |x - x_0| < \delta \text{ et } |H_p \varphi_\varepsilon - H_p \varphi| < \delta \text{ pour } (x, \xi) \in Q \text{ et } x \in K_\varepsilon.$$

Dans la suite, nous supposons que $0 < \varepsilon < \min \{\varepsilon_0, \varepsilon_2\}$.

Soit maintenant un point $(x, \xi) \in Q$ tel que $x \in K_\varepsilon$ et $H_p \varphi_\varepsilon(x, \xi) = 0$. Nous distinguerons deux cas:

a) Si $|H_p \psi(x, \xi)| < \delta$, alors grâce à (3.10) et à (3.8), on a $H_p^2 \varphi(x, \xi) \leq -c_1$ d'où, d'après (3.9),

$$H_p^2 \varphi_\varepsilon(x, \xi) \leq -c_1 + C_2 \varepsilon^k.$$

Il existe donc un $\varepsilon_3 > 0$ ne dépendant que de c_1 et de C_2 (i.e. que de p , de q et de ψ) tel que $H_p^2 \varphi_\varepsilon(x, \xi) \leq -c_1/2$ pourvu que $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$.

b) Si $|H_p \psi(x, \xi)| > \delta$, la formule (3.9) donne

$$H_p^2 \varphi_\varepsilon(x, \xi) \leq H_p^2 \varphi(x, \xi) + c_0 x_{n-1}^k - \delta^2 \varepsilon^k + C_3 \varepsilon^{k+1}.$$

Comme (x, ξ) est ici tel que $|\varphi(x)| \leq (\beta + \beta^2/2) \varepsilon^{k+2}$ et $|H_p \varphi(x, \xi)| \leq C_1 \varepsilon^{k+1}$, nous pouvons, grâce au lemme 5.2, trouver un point $(y, \eta) \in Q \cap \text{Car}_p^2(S)$ tel que

$$\psi(y) = \psi(x) \quad \text{et} \quad |H_p^2 \varphi(y, \eta) - H_p^2 \varphi(x, \xi)| \leq C_4 \varepsilon^{k+1};$$

nous pouvons alors appliquer l'estimation (3.4) au point (y, η) qui vérifie $y_{n-1} = \psi(y) - \psi(x_0) = \psi(x) - \psi(x_0) = x_{n-1} > 0$, ce qui donne finalement

$$H_p^2 \varphi_\varepsilon(x, \xi) \leq -\delta^2 \varepsilon^k + C_5 \varepsilon^{k+1}$$

qui est le résultat cherché pourvu qu'on choisisse $\varepsilon < \varepsilon_4 = \delta^2/C_5$.

Nous obtenons donc le lemme 3.2 en prenant $\varepsilon_1 = \min \{\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

3.4. Démonstration du théorème 2.1: choix de ε .

Soit $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que, au voisinage de x_0

$$P(x, D)u(x) = 0 \quad \text{et} \quad u(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(x) < 0.$$

Il existe alors un $\varepsilon_u > 0$ tel que ces propriétés aient lieu dans l'ouvert Ω_ε dès que $\varepsilon < \varepsilon_u$. Si donc nous choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_u\}$, nous pouvons appliquer le lemme 3.1 avec $\Omega = \Omega_\varepsilon$ et $\varphi_1 = \varphi_\varepsilon$ puisque la compacité est assurée par (3.7) et la pseudo-convexité par le lemme 3.2. La démonstration du théorème est donc complète.

3.5. Démonstration du corollaire 2.4.

Quitte à remplacer $\psi(x)$ par $\psi(x) - \psi(x_0)$, nous pouvons supposer que $\psi(x_0) = 0$. D'après le théorème 2.1, et comme les hypothèses du corollaire 2.4 entraînent que $H_p^2 \varphi \leq 0$ sur $\text{Car}_p^2(S, x_0)$, il nous suffit d'établir que pour tout $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^3(S, x_0)$: (i) $H_p \psi(x_0, \xi_0) \neq 0$; (ii) il existe une constante $c > 0$ telle que dans un voisinage de (x_0, ξ_0) ,

$$(x, \xi) \in \text{Car}_p^2(S) \quad \text{et} \quad \psi(x) \geq 0 \Rightarrow H_p^2 \varphi(x, \xi) \leq -c\psi(x).$$

Soit donc un point $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^3(S, x_0)$.

(i) *Supposons que $H_p \psi(x_0, \xi_0) = 0$.* Comme p est de type principal, on pourra trouver une autre fonction ψ_2 telle que $\psi_2(x_0) = 0$ et $H_p \psi_2(x_0, \xi_0) = 1$. Alors $(d\varphi \wedge d\psi \wedge d\psi_2)(x_0) \neq 0$ puisque par hypothèse $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$ et que $H_p \varphi = H_p \psi = 0 \neq H_p \psi_2$ en (x_0, ξ_0) . D'après le lemme 5.1 (propriété (5.2)), nous pouvons donc utiliser φ , $H_p \varphi$, ψ et ψ_2 comme coordonnées sur Car_p^0 près de (x_0, ξ_0) . Plus précisément, nous choisirons des coordonnées $(t, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-4} \times \mathbb{R}^2$ définies de la façon suivante: comme $H_p \psi_2(x_0, \xi_0) \neq 0$, il existe, pour tout (x, ξ) dans un voisinage, un unique réel t tel que

$$\psi_2(\exp[-tH_p](x, \xi)) = 0;$$

comme $H_p \psi_2(x_0, \xi_0) = 1$, cette formule nous assure que $\psi_2 \sim t$ et que $H_p t \equiv 1$; nous prenons ensuite $y_1 = \psi$, $z_1 = \varphi$, $z_2 = H_p \varphi$, et nous complétons ce système de coordonnées par des fonctions $y_2, \dots, y_{2n-4}$ choisies arbitrairement sur $\{t = 0\}$, puis prolongées au voisinage avec la condition $H_p y_j \equiv 0$.

Par ce choix de coordonnées, on a $\text{Car}_p^2(S) = \{(t, y, z) \in \text{Car}_p^0 : z = 0\}$ et $\omega(s) = \exp[sH_p](x_0, \xi_0) = (s; \psi[\omega(s)], 0, \dots, 0; \varphi[\omega(s)], H_p \varphi[\omega(s)])$. Grâce à une formule de Taylor, on peut donc écrire

$$H_p^2 \varphi[\omega(s)] = H_p^2 \varphi(s, 0, 0) + \psi[\omega(s)]f(s) + \varphi[\omega(s)]g(s) + H_p \varphi[\omega(s)]h(s),$$

d'où en dérivant: $\partial_t H_p^2 \varphi(0, 0, 0) = H_p^3 \varphi(x_0, \xi_0) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites donne donc

$$(3.11) \quad H_p^2 \varphi(t, y, 0) = c(t, y) (t + a(y))$$

où $c(0, 0) = c_0 \neq 0$ et $a(0) = 0$. Si donc nous posons $\omega_\varepsilon = (c_0 \varepsilon; \varepsilon^2, 0, \dots, 0; 0, 0)$, ω_ε tend vers (x_0, ξ_0) quand ε tend vers 0, et

$$\omega_\varepsilon \in \text{Car}_p^2(S), \quad \psi(\omega_\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0, \quad \text{mais } H_p^2 \varphi(\omega_\varepsilon) = c_0^2 \varepsilon + O(\varepsilon^2) > 0$$

pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit, ce qui contredit l'hypothèse du corollaire 2.4.

(ii) *Maintenant que nous savons que $H_p \psi(x_0, \xi_0) = \lambda \neq 0$,* nous reprenons la construction de coordonnées locales donnée ci-dessus avec des modifications évidentes de façon à obtenir

$$H_p t \equiv 1, \quad \psi \sim \lambda t, \quad H_p y_j \equiv 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, 2n-4,$$

$$z_1 = \varphi, \quad z_2 = H_p \varphi \quad \text{et } \text{Car}_p^2(S) = \{(t, y, z) \in \text{Car}_p^0 : z = 0\}.$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, on établit la formule (3.11); l'hypothèse du corollaire 2.4 nous assure que pour $\lambda t \geq 0$, $H_p^2 \varphi(t, y, 0) \leq 0$, d'où on tire, en remplaçant y par 0 puis t par 0, que $c_0/\lambda < 0$ puis que $c_0 a(y) < 0$, ce qui donne finalement que pour $\lambda t \geq 0$,

$$H_p^2 \varphi(t, y, 0) < c(t, y) t \leq \frac{1}{2} (c_0/\lambda) (\lambda t);$$

comme $\varphi \sim \lambda t$ et que $\text{Car}_p^2(S) = \{(t, y, z) \in \text{Car}_p^0: z = 0\}$, cela signifie que

$$(x, \xi) \in \text{Car}_p^2(S) \text{ et } \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow H_p^2 \varphi(x, \xi) \leq \frac{1}{2} (c_0/\lambda) \varphi(x),$$

d'où le corollaire 2.4.

4. - Démonstration des résultats de non-unicité.

Le théorème 2.9 s'obtient par application directe du théorème 2 de Alinhac & Baouendi [4] (th. 1.4 ci-dessus); il reste toutefois à construire les phases Φ et Ψ permettant d'utiliser ce résultat.

4.1. Démonstration du théorème 2.9: construction de la phase Φ .

LEMME 4.1. *Sous les hypothèses du théorème 2.9, il existe une application linéaire symétrique $F: T_{x_0} \mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_0}^* \mathbb{R}^n$ telle que*

$$(4.1) \quad d_x p(x_0, \xi_0) + F[d_\xi p(x_0, \xi_0)] = 0;$$

$$(4.2) \quad \forall q \in \mathcal{H}_p^k(S), \quad (d_x q(x_0, \xi_0) + F[d_\xi q(x_0, \xi_0)]) \wedge d\varphi(x_0) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Choisissons sur $\mathbb{R}^n$ des coordonnées locales (x', x'', x_n) avec $x' = (x_1, \dots, x_{r-1})$, $x'' = (x_r, \dots, x_{n-1})$ et $x_n = \varphi(x)$ telles que $d_\xi p(x_0, \xi_0) = d\xi_{n-1}$ et

$$\{d_\xi q(x_0, \xi_0): q \in \mathcal{H}_p^k(S)\} = \begin{cases} \left\{ \sum_j X_j d\xi_j: X' = 0 \right\} \text{ s'il existe } q_0 \in \mathcal{H}_p^k(S) \\ \text{tel que } H_{q_0} \varphi(x_0, \xi_0) \neq 0 \text{ (cas no. 1), ou} \\ \left\{ \sum_j X_j d\xi_j: X' = X_n = 0 \right\} \text{ si } \forall q \in \mathcal{H}_p^k(S), \\ H_q \varphi(x_0, \xi_0) = 0 \text{ (cas no. 2).} \end{cases}$$

Puis nous choisissons des éléments $q_j \in \mathcal{H}_p^k(S)$ pour $r \leq j \leq n$ (cas no. 1) ou

$r \leq j < n$ (cas no. 2) tels que $q_{n-1} = p$ et

$$(4.3) \quad d_{\xi} q_j(x_0, \xi_0) = d\xi_j;$$

nous posons alors pour $r \leq j \leq n$ (ou $r \leq j < n$ suivant le cas)

$$(4.4) \quad F_{j,l} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_l}(x_0, \xi_0) \quad \text{pour } 1 \leq l < n,$$

et de plus, si nous sommes dans le cas no. 2,

$$(4.5) \quad F_{n,n-1} = -\frac{\partial p}{\partial x_n}(x_0, \xi_0).$$

Les quantités $F_{j,l}$ et $F_{l,j}$ ne sont simultanément définies que pour $r \leq j < n$ et $r \leq l < n$, et on a alors d'après (4.3) et (4.4)

$$H_{q_j} \varphi(x_0, \xi_0) = H_{q_l} \varphi(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{et} \quad F_{j,l} - F_{l,j} = H_{q_l} q_j(x_0, \xi_0),$$

d'où $F_{j,l} = F_{l,j}$ grâce à l'hypothèse (i) du théorème 2.9; nous pouvons donc compléter le tableau des $F_{j,l}$ en une matrice symétrique, et nous définissons l'application linéaire F par la formule

$$F\left[\sum_{j=1}^n X_j d\xi_j\right] = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n F_{j,l} X_j\right) dx_l;$$

nous obtenons alors en utilisant (4.3) et (4.4) que pour $r \leq j \leq n$ (ou $r \leq j < n$ suivant le cas)

$$(4.6) \quad \frac{\partial q_j}{\partial x_l}(x_0, \xi_0) + (F[d_{\xi} q_j(x_0, \xi_0)])_l = \frac{\partial q_j}{\partial x_l}(x_0, \xi_0) + F_{j,l} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq l < n.$$

Le même calcul, pour $j = n-1$ et $l = n$ donne

$$\frac{\partial p}{\partial x_n}(x_0, \xi_0) + (F[d_{\xi} p(x_0, \xi_0)])_n = \begin{cases} 0 & \text{d'après (4.5) dans le cas no. 2, ou} \\ -H_p q_n(x_0, \xi_0) & \text{dans le cas no. 1,} \end{cases}$$

et cette dernière expression est nulle puisque $H_p q_n \in \mathcal{H}_p^{k+1}(S)$ et que $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^{2k}(S) \subset \text{Car}_p^{k+1}(S)$; avec les équations (4.6), cela nous donne donc (4.1).

Enfin, si $q \in \mathcal{H}_p^k(S)$, il existe grâce à notre choix des q_j des coefficients

$X_j \in \mathbf{R}$ tels que

$$(4.7) \quad d_{\xi} q(x_0, \xi_0) = \sum_{j=r}^{n(-1)} X_j d_{\xi} q_j(x_0, \xi_0),$$

et on calcule alors qu'en (x_0, ξ_0)

$$d_x q + F[d_{\xi} q] = d_x q + \sum X_j F[d_{\xi} q_j] = d_x q - \sum X_j d_x q_j + \alpha_0 d x_n$$

d'après (4.6), puis

$$(d_x q(x_0, \xi_0) + F[d_{\xi} q(x_0, \xi_0)]) \wedge d\varphi(x_0) = (d_x [q - \sum X_j q_j](x_0, \xi_0)) \wedge d\varphi(x_0)$$

d'où (4.2) grâce à (4.7) et à l'hypothèse (ii) du théorème 2.9.

LEMME 4.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.9, il existe au voisinage de x_0 une fonction Φ de classe C^∞ à valeurs réelles telle que*

$$(4.8) \quad d\Phi(x_0) = \xi_0 \quad \text{et} \quad p(x, d\Phi(x)) = 0 \quad \text{près de } x_0;$$

$$(4.9) \quad \forall q \in \mathcal{H}_s^k(S), (dQ \wedge d\varphi)(x_0) = 0 \quad \text{où on a posé } Q(x) = q(x, d\Phi(x)).$$

DÉMONSTRATION. En reprenant les notations de la démonstration précédente, nous posons $\xi_0 = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ puis

$$(4.10) \quad \Phi(x_1, \dots, x_{n-2}, 0, x_n) = \sum_{j \neq n-1} x_j \left(\xi_j + \frac{1}{2} \sum_{l \neq n-1} F_{j,l} x_l \right).$$

Par un théorème classique (cf. Hörmander [7, th. 1.8.2]) nous pouvons étendre cette fonction en une solution de (4.8) car $d_{\xi} p(x_0, \xi_0) = d\xi_{n-1}$ (cf. (4.3)). En dérivant (4.10) lorsque j et l sont différents de $n-1$, et en dérivant (4.8) et en comparant avec (4.1) dans les autres cas, on obtient que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_l}(x_0) = F_{j,l} \quad \text{pour } 1 \leq j, l \leq n,$$

ce qui entraîne que pour $q \in \mathcal{H}_s^k(S)$,

$$(dQ \wedge d\varphi)(x_0) = (d_x q(x_0, \xi_0) + F[d_{\xi} q(x_0, \xi_0)]) \wedge d\varphi(x_0)$$

d'où (4.9) grâce à (4.2).

4.2. Démonstration du théorème 2.9 : construction de la phase Ψ .

LEMME 4.3. Soient Φ une solution C^∞ de l'équation $p(x, d\Phi(x)) = 0$ et $X = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot \partial_x$ le champ de transport correspondant; alors pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout entier $j \in \mathbb{N}$, $X^j \psi(x) = H_p^j \psi(x, d\Phi(x))$.

DÉMONSTRATION. Par récurrence. Pour $j = 0$ ou 1 , c'est bien clair; puis

$$\begin{aligned} X[H_p^j \psi(x, d\Phi(x))] &= p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot ([H_p^j \psi(x, \xi)]_\xi)_x + \\ &+ \Phi_{xx}(x) [H_p^j \psi(x, \xi)]_{\xi} \Big|_{\xi=d\Phi(x)} = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot [H_p^j \psi(x, \xi)]_\xi - \\ &- p_x(x, d\Phi(x)) \cdot [H_p^j \psi(x, \xi)]_{\xi} \Big|_{\xi=d\Phi(x)} = H_p^{j+1} \psi(x, d\Phi(x)) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot \Phi_{xx}(x) = -p_x(x, d\Phi(x))$, résultat qui s'obtient en dérivant l'équation $p(x, d\Phi(x)) = 0$.

D'après le théorème 2 de Alinhac & Baouendi [4] (th. 1.4 ci-dessus), le théorème 2.9 résulte maintenant du:

LEMME 4.4. Sous les hypothèses du théorème 2.9, il existe deux fonctions C^∞ à valeurs réelles Φ et Ψ définies au voisinage de x_0 et possédant les propriétés suivantes:

$$(4.11) \quad p(x, d\Phi(x)) = 0;$$

$$(4.12) \quad X = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot \partial_x \neq 0 \quad \text{et} \quad X\Psi(x) = 0;$$

$$(4.13) \quad x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x) \geq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \geq 0\}.$$

DÉMONSTRATION. Comme fonction Φ , nous prenons celle qui nous est fournie par le lemme 4.2. La propriété (4.8) entraîne la propriété (4.11), et aussi que $X \neq 0$ et $X\varphi(x_0) = 0$. Nous pouvons donc trouver des coordonnées locales (x', x_{n-1}, x_n) , avec $x' = (x_1, \dots, x_{n-2})$, qui redressent le champ X en

$$(4.14) \quad X = \partial_{x_{n-1}}$$

et telles que $x_0 = (0, 0, 0)$ et $d\varphi(x_0) = dx_n$. Grâce au théorème des fonctions implicites, S possède une équation de la forme $\varphi_1(x) = 0$ avec $\varphi_1(x', x_{n-1}, x_n) = x_n + \varphi_0(x', x_{n-1})$ où φ_0 est une fonction C^∞ à valeurs réelles telle que $\varphi_0(0, 0) = 0$ et $d\varphi_0(0, 0) = 0$. Les hypothèses du théorème étant invariantes par changement d'équation de S , nous pouvons supposer que c'est φ elle-même qui s'écrit ainsi. Un développement de Taylor en x'

nous donne donc

$$(4.15) \quad \varphi(x', x_{n-1}, x_n) = x_n + \varphi(0, x_{n-1}, 0) + x' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x'}(0, x_{n-1}, 0) + O(|x'|^2)$$

où $|x'|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2$.

Utilisons maintenant l'hypothèse: $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_{\mathfrak{p}}^{2k}(S)$ et $H_{\mathfrak{p}}^{2k}\varphi(x_0, \xi_0) > 0$; avec (4.8), le lemme 4.3 et (4.14), cela entraîne que $\partial_{n-1}^j \varphi(0, 0, 0) = 0$ pour $0 \leq j < 2k$ et $\partial_{n-1}^{2k} \varphi(0, 0, 0) = 2c > 0$; il en résulte que pour $|x_{n-1}|$ suffisamment petit

$$(4.16) \quad \varphi(0, x_{n-1}, 0) \geq cx_{n-1}^{2k};$$

puis, toujours d'après le lemme 4.3 et (4.14), $\partial_{n-1}^j \varphi(x) = q_j(x, d\Phi(x))$ pour des fonctions $q_j \in \mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^k(S)$ pourvu que $0 \leq j < k$; grâce à (4.9), nous obtenons ainsi que $\partial_x^j \partial_{n-1}^j \varphi(0, 0, 0) = 0$ pour $0 \leq j < k$ d'où

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x'}(0, x_{n-1}, 0) \right| \leq C_1 |x_{n-1}|^k, \quad \text{puis } x' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x'}(0, x_{n-1}, 0) \geq -cx_{n-1}^{2k} - \frac{C_1^2}{4c} |x'|^2.$$

En rapprochant cette estimation de (4.15) et (4.16), nous obtenons

$$\varphi(x', x_{n-1}, x_n) \geq x_n - C_2 |x'|^2.$$

Si donc nous posons $\Psi(x', x_{n-1}, x_n) = x_n - C_2 |x'|^2$, (4.14) entraîne (4.12), et l'estimation précédente entraîne (4.13).

4.3. Démonstration du corollaire 2.12.

Il nous suffit de vérifier que pour $k = 2$, les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2.9 sont automatiquement vérifiées dès qu'on suppose que $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_{\mathfrak{p}}^4(S, x_0)$. Rappelons que $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^2(S)$ est l'idéal formé des fonctions de la forme $q = \alpha p + \beta \varphi + \gamma H_{\mathfrak{p}} \varphi$, α, β et $\gamma \in C^\infty(T^* \mathbb{R}^n \setminus 0)$.

(i) *La condition*

$$H_{q_i} \varphi(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{avec} \quad q_i = \alpha_i p + \beta_i \varphi + \gamma_i H_{\mathfrak{p}} \varphi$$

entraîne que $\gamma_i(x_0, \xi_0) = 0$ puisque $H_{\mathfrak{p}} \varphi(x_0, \xi_0) = H_{\varphi} \varphi(x_0, \xi_0) = 0$ et que $H_{H_{\mathfrak{p}} \varphi} \varphi(x_0, \xi_0) = H_{\varphi}^2 p(x_0) \neq 0$ d'après (1.2). Si $\gamma_1(x_0, \xi_0) = \gamma_2(x_0, \xi_0) = 0$, tous les termes de la forme $H_{\mathfrak{p}} s$ obtenus en développant $H_{q_i} q_j$ apparaissent avec des coefficients nuls en (x_0, ξ_0) à l'exception des termes $H_{\mathfrak{p}} p$, $H_{\mathfrak{p}} \varphi$ et $H_{\varphi} \varphi$

qui sont eux-mêmes nuls en (x_0, ξ_0) ; nous avons donc montré que

$$H_{a_1} \varphi(x_0, \xi_0) = H_{a_2} \varphi(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow H_{a_1} q_2(x_0, \xi_0) = 0.$$

(ii) *La condition*

$$d_\xi(\alpha p + \beta \varphi + \gamma H_p \varphi)(x_0, \xi_0) = 0$$

entraîne que $\alpha(x_0, \xi_0) = \gamma(x_0, \xi_0) = 0$ puisque $d_\xi \varphi = 0$ et que $d_\xi p(x_0, \xi_0)$ et $d_\xi H_p \varphi(x_0, \xi_0)$ sont linéairement indépendants d'après la propriété (5.1) du lemme 5.1; pour un tel élément de $\mathcal{H}_p^2(S)$ on a donc

$$(d(\alpha p + \beta \varphi + \gamma H_p \varphi) \wedge d\varphi)(x_0, \xi_0) = \beta(x_0, \xi_0)(d\varphi \wedge d\varphi)(x_0) = 0,$$

tous les autres produits extérieurs apparaissant avec des coefficients nuls en (x_0, ξ_0) . Les hypothèses du théorème 2.9 sont donc vérifiées, et le corollaire 2.12 en résulte.

5. – Lemmes techniques.

5.1. Conséquences des hypothèses générales sur p et S .

Nous donnons ici les démonstrations de deux lemmes que nous avons utilisés au cours des démonstrations précédentes, et qui figurent déjà sous une forme voisine dans Lerner & Robbiano [9].

LEMME 5.1. *Supposons qu'on a fait le choix d'un système de coordonnées, pour lequel on note $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$, et qu'on s'est donné k fonctions C^∞ à valeurs réelles $\psi_1, \dots, \psi_k$ telles que $(d\varphi \wedge d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_k)(x_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage compact q de x_0 tel que, avec $Q = \{(x, \xi) \in \text{Car}_p^0 : x \in q \text{ et } |\xi|^2 = 1\}$, on ait pour tout $(x_1, \xi_1) \in Q \cap \text{Car}_p^2(S)$:*

(5.1) $d_\xi p, d_\xi(|\xi|^2 - 1)$ et $d_\xi(H_p \varphi)$ sont linéairement indépendants en (x_1, ξ_1) ;

(5.2) $dp, d(|\xi|^2 - 1), d\varphi, d(H_p \varphi), d\psi_1, \dots, d\psi_k$ sont linéairement indépendants en (x_1, ξ_1) .

DÉMONSTRATION. (i) Si q est assez petit, $H_p^2 p(x_1) \neq 0$ pour tout $x_1 \in q$ d'après (1.2). Si nous supposons que

$$X = \alpha d_\xi p(x_1, \xi_1) + \beta d_\xi(|\xi|^2 - 1)(x_1, \xi_1) + \gamma d_\xi(H_p \varphi)(x_1, \xi_1) = 0,$$

nous obtenons successivement que

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = (2\alpha p(x_1, \xi_1) + 2\beta|\xi_1|^2 + \gamma H_p \varphi(x_1, \xi_1))/2 = X \cdot \xi_1/2 = 0, \\ \gamma = (\alpha H_p \varphi(x_1, \xi_1) + \gamma H_p^2 p(x_1))/H_p^2 p(x_1) = X \cdot d\varphi(x_1)/H_p^2 p(x_1) = 0, \\ \text{et} \\ \alpha = \alpha |d_\xi p(x_1, \xi_1)|^2 / |d_\xi p(x_1, \xi_1)|^2 = X \cdot d_\xi p(x_1, \xi_1) / |d_\xi p(x_1, \xi_1)|^2 = 0 \end{array} \right.$$

car $d_\xi p(x_1, \xi_1) \neq 0$ puisque p est de type principal; ceci donne la propriété (5.1).

(ii) De nouveau si q est assez petit, $(d\varphi \wedge d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_k)(x_1) \neq 0$ pour tout $x_1 \in q$; la propriété (5.2) résulte donc de la propriété (5.1) puisque $d_\xi \varphi = d_\xi \psi_1 = \dots = d_\xi \psi_k = 0$.

LEMME 5.2. Supposons qu'on a fait le choix d'un système de coordonnées, pour lequel on note $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$, et qu'il existe une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ et un point de $\text{Car}_p^2(S, x_0)$ où $H_p \psi \neq 0$. Alors il existe un voisinage compact q de x_0 et une constante $C > 0$ tels qu'avec $Q = \{(x, \xi) \in \text{Car}_p^0: x \in q \text{ et } |\xi|^2 = 1\}$ on ait

$$\forall (x, \xi) \in Q, \quad \exists (y, \eta) \in Q \cap \text{Car}_p^2(S):$$

$$\psi(y) = \psi(x) \quad \text{et} \quad |H_p^2 \varphi(y, \eta) - H_p^2 \varphi(x, \xi)| \leq C(|\varphi(x)| + |H_p \varphi(x, \xi)|).$$

DÉMONSTRATION. L'existence du point (x_0, ξ_0) où $H_p \varphi = 0$ et $H_p \psi \neq 0$ prouve que $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$: nous pouvons donc utiliser les résultats du lemme 5.1, et nous demanderons en outre que le voisinage q soit tel que $\forall x \in q, \exists y \in q \cap S$ tel que $\psi(y) = \psi(x)$.

D'après la propriété (5.1), nous avons $p = |\xi|^2 - 1 = H_p \varphi = 0$, et $d_\xi p, d_\xi(|\xi|^2 - 1), d_\xi(H_p \varphi)$ linéairement indépendants en $(x_0, \xi_0/|\xi_0|)$; nous pouvons donc utiliser le théorème des fonctions implicites pour en déduire que $\forall y \in q \cap S, Q \cap \text{Car}_p^2(S, y) \neq \emptyset$, et donc

$$(5.3) \quad \forall (x, \xi) \in Q, \quad \exists (y, \eta) \in Q \cap \text{Car}_p^2(S): \psi(y) = \psi(x);$$

il ne reste plus qu'à prouver l'estimation de $|H_p^2 \varphi(y, \eta) - H_p^2 \varphi(x, \xi)|$.

La propriété (5.2) montre que les fonctions $\varphi, H_p \varphi$ et ψ peuvent être prises comme coordonnées sur la variété Q près de n'importe quel point de $Q \cap \text{Car}_p^2(S)$; chaque point de $Q \cap \text{Car}_p^2(S)$ possède donc un voisinage dans lequel l'estimation a lieu comme on le voit en écrivant une formule de Taylor. Par compacité, $Q \cap \text{Car}_p^2(S)$ possède lui-même un voisinage

ouvert U vérifiant avec une constante uniforme C_1 :

$$\forall (x, \xi) \in Q \cap U, \quad \exists (y, \eta) \in Q \cap \text{Car}_p^2(S):$$

$$\psi(y) = \psi(x) \quad \text{et} \quad |H_p^2 \varphi(y, \eta) - H_p^2 \varphi(x, \xi)| \leq C_1(|\varphi(x)| + |H_p \varphi(x, \xi)|).$$

Enfin, comme $\inf_{Q \setminus U} (|\varphi| + |H_p \varphi|) = c > 0$ par définition de U , on a aussi (cf. (5.3)):

$$\forall (x, \xi) \in Q \setminus U, \quad \exists (y, \eta) \in Q \cap \text{Car}_p^2(S):$$

$$\psi(y) = \psi(x) \quad \text{et} \quad |H_p^2 \varphi(y, \eta) - H_p^2 \varphi(x, \xi)| \leq (2 \sup_Q |H_p^2 \varphi|/c)(|\varphi(x)| + |H_p \varphi(x, \xi)|),$$

d'où le lemme.

5.2. Choix de la fonction φ .

Dans la démonstration de la proposition 2.6, nous aurons besoin d'une version précisée du lemme 28.4.2 de Hörmander [8]; nous en donnons ici la démonstration.

LEMME 5.3. *Prenons les mêmes hypothèses qu'au lemme 5.2 et supposons en outre que $H_p^2 \varphi \leq 0$ sur $\text{Car}_p^2(S, x)$ pour tout x voisin de x_0 tel que $\psi(x) > \psi(x_0)$. Alors il existe un voisinage ω de x_0 et un nombre $A > 0$ tels qu'avec $\varphi_1(x) = (1 - A|x - x_0|^2) \varphi(x)$ on ait*

$$(5.4) \quad \forall (x, \xi) \in T^* \omega, \quad \begin{cases} p(x, \xi) = H_p \varphi_1(x, \xi) = 0, \\ \varphi_1(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \psi(x) \geq \psi(x_0) \end{cases} \Rightarrow H_p^2 \varphi_1(x, \xi) \leq 0.$$

DÉMONSTRATION. Supposons pour simplifier que $x_0 = 0$; nous pouvons utiliser le résultat du lemme 5.2 qui fournit un voisinage compact q de x_0 et une constante $C > 0$ tels que, compte tenu de l'hypothèse supplémentaire que nous avons ici,

$$(5.5) \quad \forall (x, \xi) \in Q, \quad \psi(x) \geq \psi(x_0) \Rightarrow H_p^2 \varphi(x, \xi) \leq C(|\varphi(x)| + |H_p \varphi(x, \xi)|).$$

Par ailleurs on calcule que

$$\begin{cases} H_p \varphi_1 = \varphi H_p(1 - A|x|^2) + (1 - A|x|^2) H_p \varphi, \\ H_p^2 \varphi_1 = \varphi H_p^2(1 - A|x|^2) + 2H_p \varphi H_p(1 - A|x|^2) + (1 - A|x|^2) H_p^2 \varphi, \\ H_p(1 - A|x|^2) = -2Ax \cdot p_\xi, \\ \text{et} \\ H_p^2(1 - A|x|^2) = -2A|p_\xi|^2 - 2Ax \cdot H_p^2 x. \end{cases}$$

Plaçons-nous en un point de Q où $H_p \varphi_1 = 0$, $\varphi_1 \geq 0$ et $\psi \geq \psi(x_0)$; $H_p \varphi_1 = 0$ entraîne que

$$H_p \varphi = -\frac{\varphi}{1-A|x|^2} H_p(1-A|x|^2) = \frac{2A\varphi(x \cdot p_\xi)}{1-A|x|^2},$$

d'où

$$H_p^2 \varphi_1 = \varphi [-2A|p_\xi|^2 - 2Ax \cdot H_p^2 x] + 2 \frac{2A\varphi x \cdot p_\xi}{1-A|x|^2} (-2Ax \cdot p_\xi) + (1-A|x|^2) H_p^2 \varphi;$$

le dernier terme se majorant grâce à (5.5), on obtient

$$H_p^2 \varphi_1 \leq 2A\varphi \left[-|p_\xi|^2 - x \cdot H_p^2 x - \frac{4A(x \cdot p_\xi)^2}{1-A|x|^2} \right] + C(1-A|x|^2)\varphi + 2CA\varphi|x \cdot p_\xi|,$$

puis enfin, à condition de prendre $|x|^2 < 1/2A$,

$$H_p^2 \varphi_1 \leq 2A\varphi \left[-|p_\xi|^2 + \frac{C}{2A} + C_A|x| \right].$$

Comme p est de type principal, $\inf |p_\xi|^2 = c > 0$; on obtient donc (4.4) en prenant $A > C/c$, puis $\omega \subset q$ tel que $|x| < c/2C_A$ et $|x| < (2A)^{-\frac{1}{2}}$ dans ω .

5.3. Démonstration de la proposition 2.6.

Comme dans la démonstration du corollaire 2.4, nous pouvons supposer que $\psi(x_0) = 0$ quitte à remplacer $\psi(x)$ par $\psi(x) - \psi(x_0)$.

Soit $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^2(\mathcal{S}, x_0)$. Si $H_p \psi(x_0, \xi_0) = 0$, il n'y a rien à démontrer; nous pouvons donc supposer que

$$(5.6) \quad H_p \psi(x_0, \xi_0) > 0$$

quitte à changer p en $-p$. Ceci nous permet alors d'utiliser le lemme 5.3: nous supposons que (5.4) est vérifiée avec φ à la place de φ_1 . De même, comme $H_p^2 \varphi(x_0, \xi_0) \neq 0$ entraîne que $H_p^2 \varphi(x_0, \xi_0) < 0$ auquel cas le résultat est évident, nous pouvons supposer (cf. (1.2)) que

$$(5.7) \quad H_p \varphi(x_0, \xi_0) = H_p^2 \varphi(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^2 p(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

La démonstration s'effectuera en trois étapes.

(i) *Choix de coordonnées microlocales*: soit

$$q_0(x, \xi) = \varphi(x) + H_p \varphi(x, \xi) + \frac{H_\varphi H_p \psi(x_0, \xi_0)}{H_p \psi(x_0, \xi_0)} p(x, \xi);$$

alors en utilisant (5.7):

$$(5.8) \quad H_{q_0} p(x_0, \xi_0) = H_{q_0} \psi(x_0, \xi_0) = 0 ,$$

et

$$(5.9) \quad H_{q_0} \varphi(x_0, \xi_0) = - H_{q_0} H_p \varphi(x_0, \xi_0) = - H_p^2 \varphi(x_0, \xi_0) \neq 0 .$$

D'après (5.8), on peut trouver une fonction $q(x, \xi)$ définie au voisinage de (x_0, ξ_0) telle que

$$(5.10) \quad H_p q(x, \xi) = 0 \quad \text{et} \quad dq(x_0, \xi_0) = dq_0(x_0, \xi_0) ;$$

nous posons alors

$$\omega(s, t) = \exp [sH_p + tH_q] (x_0, \xi_0) ;$$

la relation (5.10) entraîne que pour s et t voisins de 0, $\omega(s, t) \in \text{Car}_p^0$ et que les relations (5.8) et (5.9) sont encore vraies avec q à la place de q_0 . Comme $\partial_i(\varphi[\omega(s, t)]) = H_{q_i} \varphi(x_0, \xi_0)$ et $\partial_i(H_p \varphi[\omega(s, t)]) = H_{q_i} H_p \varphi(x_0, \xi_0)$ en $s = t = 0$, il existe, d'après (5.9) et le théorème des fonctions implicites, deux fonctions $\tau(s)$ et $\theta(s)$ telles que $\tau(0) = \theta(0) = 0$ et

$$(5.11) \quad \begin{cases} \varphi[\omega(s, t)] = 0 \Leftrightarrow t = \tau(s) , \\ H_p \varphi[\omega(s, t)] = 0 \Leftrightarrow t = \theta(s) . \end{cases}$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans un voisinage $|s| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$ où les fonctions τ et θ sont bien définies et tel que $(H_q \varphi[\omega(s, t)]) (H_q H_p \varphi[\omega(s, t)]) \neq 0$. Remarquons enfin qu'à cause de (5.9),

$$(5.12) \quad (\varphi[\omega(s, t)]) (H_p \varphi[\omega(s, t)]) > 0 \Rightarrow (\tau(s) - t) (\theta(s) - t) < 0 .$$

(ii) *La fonction φ est négative le long de la courbe $t = \theta(s)$.*

LEMME 5.4. *Sous les hypothèses de la proposition 2.6 et avec les notations précédentes, $\varphi[\omega(s, \theta(s))] < 0$ pour $s \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. Posons

$$f(s) = \varphi[\omega(s, \theta(s))] \quad \text{et} \quad g(s) = \psi[\omega(s, \theta(s))] ;$$

par dérivation nous obtenons:

$$\begin{cases} f'(s) = H_p \varphi[\omega(s, \theta(s))] + \theta'(s) H_q \varphi[\omega(s, \theta(s))] = \theta'(s) H_q \varphi[\omega(s, \theta(s))] , \\ \text{et} \\ g'(0) = H_p \psi(x_0, \xi_0) + \theta'(0) H_q \psi(x_0, \xi_0) = H_p \psi(x_0, \xi_0) > 0 \end{cases}$$

d'après (5.11), (5.8) et (5.6). Cela nous donne déjà

$$(5.13) \quad \psi[\omega(s, \theta(s))] \geq 0 \quad \text{pour } s \geq 0.$$

Pour avoir une expression de $\theta'(s)$, dérivons l'identité $H_p \varphi[\omega(s, \theta(s))] = 0$:

$$0 = H_p^2 \varphi[\omega(s, \theta(s))] + \theta'(s) H_q H_p \varphi[\omega(s, \theta(s))],$$

d'où

$$f'(s) = - (H_q \varphi[\omega(s, \theta(s))] / H_q H_p \varphi[\omega(s, \theta(s))]) H_p^2 \varphi[\omega(s, \theta(s))].$$

Dans l'expression précédente, la grande parenthèse renferme une fonction strictement négative à cause de (5.9), et d'après (5.13) et (5.4), nous avons donc écrit $f'(s)$ comme une fonction qui est négative là où $f(s)$ et s sont positives; le lemme 5.4 résulte donc du lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

LEMME. *Soit f une fonction C^1 à valeurs réelles telle que $f(0) = 0$ et $f'(s) \leq 0$ si $f(s) \geq 0$ et $s \geq 0$. Alors $f(s) \leq 0$ pour $s \geq 0$.*

(iii) *Fin de la démonstration:* Posons $f(s) = \varphi(\exp[sH_p](x_0, \xi_0))$; alors:

$$(5.14) \quad f(s) = \varphi[\omega(s, 0)] \quad \text{et} \quad f'(s) = H_p \varphi[\omega(s, 0)].$$

Pour conclure, nous distinguons les deux cas suivants:

a) *S'il existe $s_0 > 0$ tel que $\theta(s_0) = 0$, alors pour tout $s \in [0, s_0]$, $f(s) \leq 0$. En effet, si $s_1 \in [0, s_0]$ est tel que $\theta(s_1) = 0$, cela découle du lemme 5.4; sinon, posons $s_2 = \sup \{s < s_1 : \theta(s) = 0\}$ et $s_3 = \inf \{s > s_1 : \theta(s) = 0\}$; on a $0 \leq s_2 < s_1 < s_3 \leq s_0$, et sur $]s_2, s_3[$, $\theta(s) \neq 0$ donc d'après (5.11) et (5.14), f est monotone; comme on tire du lemme 5.4 que $f(s_2) \leq 0$ et $f(s_3) \leq 0$, il en résulte que $f(s_1) \leq 0$.*

b) *Si $\forall s \in]0, \varepsilon[$, $\theta(s) \neq 0$, f est encore strictement monotone d'après (5.11) et (5.14), et comme $f(0) = 0$, on a $f(s) f'(s) > 0$ pour $0 < s < \varepsilon$; en utilisant (5.14) et (5.12) nous en déduisons que $\tau(s)\theta(s) < 0$, avec (5.11) que $f(s)\varphi[\omega(s, \theta(s))] > 0$, puis enfin que $f(s) < 0$ grâce au lemme 5.4, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.6.*

5.4. Démonstration de la proposition 2.5.

D'après la proposition 2.6, la proposition 2.5 résulte du

LEMME 5.5. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, $\text{Car}_p^\infty(S, x_0) = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Nous supposons comme précédemment que $\psi(x_0) = 0$.

Soit $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^\infty(S, x_0)$; d'après l'hypothèse (ii) du théorème 2.1, $H_p \psi(x_0, \xi_0) = \lambda \neq 0$. Comme dans la démonstration du corollaire 2.4 (partie (ii)) nous choisissons sur Car_p^0 près de (x_0, ξ_0) des coordonnées locales $(t, y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n-4} \times \mathbf{R}^2$ telles que

$$(5.15) \quad \begin{cases} H_p t = 1, \quad \psi \sim \lambda t, \quad H_p y_j = 0 & \text{pour } j = 1, \dots, 2n-4, \\ z_1 = \varphi, \quad z_2 = H_p \varphi & \text{et } \text{Car}_p^2(S) = \{(t, y, z) \in \text{Car}_p^0 : z = 0\}. \end{cases}$$

Ces propriétés entraînent que $\omega(s) = \exp[sH_p](x_0, \xi_0) = (s; 0, \dots, 0; \varphi[\omega(s)], H_p \varphi[\omega(s)])$; comme $(x_0, \xi_0) \in \text{Car}_p^\infty(S, x_0)$, on a

$$\varphi[\omega(s)] = O(|s|^\infty), \quad H_p \varphi[\omega(s)] = O(|s|^\infty) \quad \text{et} \quad H_p^2 \varphi[\omega(s)] = O(|s|^\infty);$$

par développement de Taylor

$$H_p^2 \varphi[\omega(s)] = H_p^2 \varphi(s, 0, 0) + \varphi[\omega(s)]g(s) + H_p \varphi[\omega(s)]h(s),$$

d'où

$$H_p^2 \varphi(s, 0, 0) = O(|s|^\infty).$$

Si donc nous posons pour $\varepsilon > 0$, $\omega_\varepsilon = (\lambda\varepsilon, 0, 0)$, ω_ε tend vers (x_0, ξ_0) quand ε tend vers 0, et d'après (5.15),

$$\omega_\varepsilon \in \text{Car}_p^2(S), \quad \psi(\omega_\varepsilon) > \frac{\lambda^2 \varepsilon}{2} > 0, \quad \text{mais} \quad H_p^2 \varphi(\omega_\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty) = O(\psi(\omega_\varepsilon)^\infty),$$

ce qui contredit l'hypothèse (i) du théorème 2.1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC, *Non unicité du problème de Cauchy*, Ann. of Math., **117**, (1983), pp. 77-108.
- [2] S. ALINHAC, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **34** (2) (1984), pp. 89-109.
- [3] S. ALINHAC, *Uniqueness and nonuniqueness in the Cauchy problem*, Contemp. Mathematics, **27** (1984), pp. 1-22.
- [4] S. ALINHAC - M. S. BAOUENDI, *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal*, Sémin. Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé n. XXII (Ecole Polytechnique, Paris).

- [5] H. BAHOURI, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*, Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1982, et Comm. in PDE'S, **8** (1983), pp. 1521-1547.
- [6] A. P. CALDERÓN, *Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations*, Proc. Sympos. Fluid Dynamics and Appl. Math. (Univ. of Maryland, 1961), Gordon & Breach, New York (1962), pp. 147-195.
- [7] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin, 1963.
- [8] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. IV, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [9] N. LERNER - L. ROBBIANO, *Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, Sémin. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-84, exposé n. IX (Ecole Polytechnique, Paris), J. d'Analyse Math., **44** (1984-85), pp. 32-66.
- [10] L. NIRENBERG, *Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation*, preprint.
- [11] X. SAINT RAYMOND, *L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques*, Comm. in PDE's, **7** (1982), pp. 559-579.
- [12] X. SAINT RAYMOND, *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, L'Enseign. Math., **32** (1986), pp. 1-55.
- [13] E. C. ZACHMANOGLU, *Nonuniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Arch. Rational Mech. Anal., **27** (1968), pp. 373-384.
- [14] E. C. ZACHMANOGLU, *Uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **136** (1969), pp. 517-526.
- [15] C. ZUILY, *Uniqueness and nonuniqueness in the Cauchy problem*, Progr. Math., vol. 33, Birkhäuser, Boston, 1983.

Département de Mathématiques (bât. 425)
Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex, France