

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FRANÇOISE DEMENGEL

## **Déplacements à déformations bornées et champs de contrainte mesures**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série*, tome 12, n° 2 (1985), p. 243-318

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1985\\_4\\_12\\_2\\_243\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1985_4_12_2_243_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Déplacements à déformations bornées et champs de contrainte mesures.

FRANCOISE DEMENGEL

## Introduction.

Cet article constitue la première partie d'un travail qui a pour origine un problème mécanique, celui des matériaux à blocage. Ces matériaux sont des milieux élastiques pour lesquels le tenseur des déformations est astreint à demeurer dans un convexe borné, et qui répondent aux équations d'équilibre et conditions aux limites classiques. La mise sous forme variationnelle des problèmes en déplacement et en contrainte, réalisée dans Duvaut-Lions [7], Prager [22], Demengel-Suquet [2], nous permet de voir que le problème en déplacement admet une solution unique dans l'espace que l'on notera  $U^\infty(\Omega)$ . Il s'agit des  $u$  de  $L^\infty(\Omega)$  à déformation dans  $L^\infty(\Omega)$ .

Le problème en contrainte est beaucoup plus délicat et présente trois types de difficultés, qui s'apparentent aux difficultés rencontrées en plasticité (cf. Suquet [19], Temam-Strang [17], Temam [20]):

1) l'infimum du problème peut être égal à  $-\infty$  (c'est-à-dire que l'ensemble des déplacements admissibles est vide);

2) quand il est fini, les suites minimisantes sont dans le meilleur des cas bornées dans un espace non réflexif et il n'est pas possible d'en extraire des sous-suites convergentes pour des topologies convenables:

3) il se peut que la condition aux limites  $\sigma \cdot n = F$  ne soit pas satisfaite.

Notre travail consiste dans ce qui suit à développer les outils nécessaires à l'étude du problème en contrainte, dont nous étudierons dans un travail ultérieur [3] le point de vue de l'existence.

Pervenuto alla Redazione il 21 Marzo 1984 ed in forma definitiva l'11 Febbraio 1985.

CONTENU DE LA SECTION 1. Nous étudions précisément l'espace  $U^\infty(\Omega)$ , espace naturel pour les déplacements. Il s'agit de l'espace des  $u$  dans  $L^\infty(\Omega)^N$ , à déformation dans  $L^\infty(\Omega)$ . Outre la topologie de la norme, nous y introduisons une topologie dite faible, pour laquelle les bornés sont relativement compacts. Nous donnons des théorèmes de densité des fonctions régulières pour cette topologie. Dans le but d'obtenir des précisions sur la trace des fonctions de  $U^\infty(\Omega)$  nous étudions le comportement des fonctions de  $U^\infty(\Omega)$  le long des courbes de  $\bar{\Omega}$ ; nous pouvons ainsi caractériser la trace tangentielle sur le bord — moyennant des hypothèses de régularité concernant  $\partial\Omega$  — et donner des conditions nécessaires portant sur la trace normale (dont nous ne savons pas si elles sont suffisantes).

CONTENU DE LA SECTION 2. Nous y étudions l'espace des fonctions d'énergie finie: c'est l'espace adapté au problème en contrainte, dans lequel nous obtiendrons une solution: il s'agit de l'espace

$$Z(\Omega, E) = \{\sigma \in M^1(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega)\},$$

(c'est-à-dire l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 dont les composantes sont des mesures bornées sur  $\Omega$ , dont la divergence au sens des distributions est de carré intégrable sur  $\Omega$ ). Nous donnons des propriétés topologiques et nous y montrons la densité des fonctions régulières pour une topologie assez fine, qui s'apparente à celle de la convergence étroite des mesures. Ce théorème constitue un outil indispensable à l'étape qui précède l'existence d'une solution dans [3].

CONTENU DE LA SECTION 3. Il complète à la fois l'étude de  $Z$  et se rattache à la première section par l'existence d'une « trace »  $\sigma \cdot n$  dans le dual de  $\gamma_0(U^\infty(\Omega))$  ( $\gamma_0$  désigne l'application trace). Cette trace  $\sigma \cdot n$  coïncide avec  $\sigma_{ij}n_j$  au sens habituel lorsque  $\Gamma$  est assez régulier.

Par un procédé symétrique de celui employé dans Kohn-Temam [13], Demengel [5], on donne un sens au produit  $\varepsilon(u) : \sigma$  en tant que mesure bornée, ce « produit » n'ayant en général pas de sens si  $\varepsilon(u)$  n'est pas  $d|\sigma|$  mesurable.

On établit ensuite une formule de Green sur  $U^\infty(\Omega) \times Z(\Omega, E)$ , et nous étudions la continuité de l'application bilinéaire  $\langle \sigma, u \rangle \rightarrow \int_{\Omega} \sigma \cdot nu$  relativement aux topologies définies dans les Sections 1 et 2 respectivement. Dans la sous-section 3.2, nous remarquons que  $\sigma \cdot n$  peut présenter des discontinuités sur une surface intérieure à  $\Omega$ . On montre cependant que la discontinuité  $[\sigma \cdot n \cdot n]$  de  $\sigma \cdot n \cdot n$  le long de  $\Gamma$  est une mesure bornée, absolument continue par rapport à  $\sigma$  sur  $\Gamma$ , et qu'en général  $\sigma \cdot n \cdot n, \sigma \cdot n \cdot t$  et  $[\sigma \cdot n \cdot t]$

n'en sont pas. On caractérise dans la Section 3.2 les éléments de  $Z(\Omega, E)$  lorsque la dimension est 2, on montre qu'alors  $[\sigma \cdot n \cdot n]$  est dans  $L^1(\Gamma)$  et on donne un théorème de prolongement des éléments de  $\Sigma(\Omega, E)$ . Ces remarques permettent d'entrevoir une des difficultés qu'il faudra surmonter dans [3]: nous aurons peu de chances de pouvoir conserver la condition au bord  $\sigma \cdot n = F$  pour le théorème d'existence et il nous faudra relaxer cette condition.

Ce travail fait partie d'une Thèse de Doctorat ès Sciences, en cours de préparation au Laboratoire d'Analyse Numérique d'Orsay <sup>(1)</sup>.

### Notations.

Dans ce qui suit  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma$  lipschitzienne. On suppose que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  où  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  sont des parties ouvertes connexes disjointes de  $\Gamma$ . On désigne par  $E$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur  $\mathbb{R}^N$ . On rappelle que  $\mathcal{D}(\Omega)$  (respectivement  $L^p(\Omega)$ ) est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur  $\Omega$  (respectivement de puissance  $p$ -ième intégrable),  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (respectivement  $M^1(\Omega)$ ) est l'espace des distributions sur  $\Omega$  (respectivement des mesures bornées sur  $\Omega$ ). Lorsque  $u$  est dans  $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^N)$  on note et on appelle déformation de  $u$  la distribution de composantes

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}.$$

Les espaces de Sobolev  $H^1(\Omega)$  et  $W^{1,q}(\Omega)$  sont définis respectivement par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\},$$

et pour  $1 \leq q \leq +\infty$

$$W^{1,q}(\Omega) = \{u \in L^q(\Omega), \nabla u \in L^q(\Omega)\}.$$

Les espaces suivants, qui s'apparentent aux espaces de Sobolev:

$$U^q(\Omega) = \{u \in L^q(\Omega), \varepsilon(u) \in L^q(\Omega, E)\}$$

ont une importance particulière dans le travail actuel; aussi rappelons-nous brièvement des résultats les concernant.

<sup>(1)</sup> Notons que les espaces étudiés dans cet article sont utiles à l'étude faite dans [24].

Il est prouvé dans [25] que pour  $1 < q < \infty$ ,  $U^q(\Omega)$  n'est autre que  $W^{1,q}(\Omega)$  ou, ce qui revient au même, que l'inégalité de Korn est valable dans  $W^{1,q}(\Omega)$   $1 < q < \infty$ , à savoir: *il existe une constante  $c(\Omega, q, N)$  qui dépend de  $\Omega$ , de  $q$  et de la dimension  $N$  de l'espace, telle que pour tout  $u$  dans  $W^{1,q}(\Omega)$ .*

$$(1.1) \quad |u|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c(\Omega, q, N) \{ |u|_q + |\varepsilon(u)|_q \}^{(2)}.$$

Une démonstration plus simple existe dans le cas  $q = 2$  (cf. Duvaut-Lions [7]). En revanche il est prouvé, à l'aide d'une remarque de OrNSTEIN [15] que cette inégalité est fausse lorsque  $q = 1$  (cf. Temam [20]). L'étude faite dans le paragraphe 1 qui suit concerne tout particulièrement l'espace  $U^\infty(\Omega)$ . On remarque, entre autres, que l'inégalité de Korn n'y est pas valable non plus.

Nous envisageons ensuite l'étude des traces sur la frontière des fonctions de cet espace; les propriétés obtenues serviront par la suite à l'étude du problème de blocage.

## 1. - Etude de l'espace $U^\infty$ .

Nous rappelons la définition de  $U^\infty = U^\infty(\Omega)$

$$U^\infty(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \varepsilon(u) \in L^\infty(\Omega, E)\}^{(3)}.$$

Il est aisé de voir et nous ne le démontrons pas, que  $U^\infty(\Omega)$  muni de la norme

$$(1.2) \quad \|u\| = |u|_\infty + |\varepsilon(u)|_\infty$$

est un espace de Banach.

### 1.1. Premières propriétés de l'espace $U^\infty$ .

Une conséquence de l'inégalité de Korn (cf. [25] et aussi [10]) pour  $q > 1$  est que

$$(1.3) \quad U^\infty \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega), \quad \forall q > 1, q < \infty.$$

<sup>(2)</sup>  $|u|_q$  désigne la norme naturelle sur  $L^q(\Omega)$ .

<sup>(3)</sup> En fait l'utilisation du lemme de Deny-Lions puis les théorèmes d'injection de Sobolev permet de voir que  $U^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^N), \varepsilon(u) \in L^\infty(\Omega, E)\}$  des que le bord  $\partial\Omega$  a la propriété de cone; cf. Adams [1].

En particulier, en utilisant les théorèmes d'injection de Sobolev pour  $q > N$ , nous obtenons

$$(1.4) \quad U^\infty \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\Omega), \quad \forall \lambda, 0 \leq \lambda < 1$$

et aussi

$$(1.5) \quad U^\infty \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \quad (4).$$

En revanche, il est utile de remarquer que l'inégalité de Korn est fausse dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$ .

En effet un résultat de Hazelton-Mirkil et De Leeuw [12] établit l'existence dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  d'une suite de fonction  $\varphi^m$  telles que

$$(1.6) \quad |\varphi_{,12}^m|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} > m \sum_{(i,j) \neq (1,2)} |\varphi_{,ij}^m|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Soit alors  $v^m$  de composantes

$$(v^m)_i = \varphi_{,i}^m \quad \text{pour } i \neq 1, 2$$

$$(v^m)_1 = -\varphi^m, 1$$

$$(v^m)_2 = \varphi^m, 2.$$

Nous avons

$$|\nabla v^m|_\infty \geq |(\varphi^m)_{,12}| \geq m \sum_{(i,j) \neq (1,2)} |\varphi_{,ij}^m| = m \sum_{i,j} |\varepsilon_{ij}(v^m)|_\infty.$$

Ceci contredit l'inégalité de Korn dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ .

Lorsque  $\Omega$  est un ouvert autre que  $\mathbb{R}^N$ , on peut déduire de (1.6) l'inégalité analogue dans  $\Omega$ . En effet, quitte à faire une translation, on peut supposer que  $0 \in \Omega$ . Soit alors  $r$  tel que  $B(0, r) \subset \Omega$ . En outre soit  $\lambda_m \in \mathbb{R}$  tel que

$$B(0, \lambda_m) \supset \text{Supp}^t \varphi_m;$$

On définit sur  $B(0, r)$ :

$$u_m(x) = \varphi_m\left(\frac{\lambda_m x}{r}\right).$$

(4) Le symbole  $\hookrightarrow$  représentant comme d'ordinaire une inclusion avec injection continue.

$u_m$  est dans  $\mathcal{D}(B(0, r))$  et nous avons

$$\partial_{ij} u_m = \left( \frac{\lambda_m}{r} \right)^2 \partial_{ij} \varphi_m(\lambda_m x), \quad \forall ij.$$

En multipliant (1.6) par  $(\lambda_m/r)$  nous obtenons donc

$$(1.7) \quad |\partial_{12} u_m|_{L^\infty(\Omega)} \geq m \sum_{(i,j) \neq (1,2)} |\partial_{ij} u_m|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En raisonnant comme on l'a déjà fait pour  $\mathbb{R}^N$ , on constate que l'inégalité de Korn dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$  est impossible.  $\square$

Outre la topologie de la norme, il est intéressant de munir  $U^\infty(\Omega)$  de deux autres topologies, moins fines mais beaucoup plus utiles à notre propos. Nous définirons d'une part la topologie faible sur  $U^\infty$  comme étant la topologie définie par la famille non dénombrable de distances  $(p_\varphi)$ ,  $\varphi \in L^1(\Omega)$ :

$$(1.8) \quad p_\varphi(u_1, u_2) = |u_1 - u_2|_\infty + |\langle \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2), \varphi \rangle|.$$

D'autre part une topologie intermédiaire entre la topologie définie par (1.8) et la topologie de la norme. Il s'agit de la topologie d'espace métrique associée à la distance

$$(1.9) \quad \delta(u_1, u_2) = |u_1 - u_2|_\infty + ||\varepsilon(u_1)|_\infty - |\varepsilon(u_2)|_\infty|.$$

Nous énonçons pour commencer un résultat simple de densité des fonctions régulières pour la topologie définie par  $\delta$ , lorsque  $u$  est nulle sur le bord.

**PROPOSITION 1.1.** *Soit  $u \in U^\infty(\Omega)$ ,  $u = 0$  sur  $\Gamma$ . Alors il existe une suite  $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ , telle que  $\delta(u_n, u) \rightarrow 0$  (notée  $U_0^\infty(\Omega)$ ).*

**COROLLAIRE 1.1.** *L'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $U^\infty(\Omega)$  pour la topologie définie par  $p\varphi$ , encore notée  $U_0^\infty(\Omega)$ , coïncide avec son adhérence pour  $\delta$ .*

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.1.** Si  $u$  est nulle sur le bord, la prolongée de  $u$  par 0 hors de  $\Omega$ , notée  $\tilde{u}$  est dans  $U^\infty(\mathbb{R}^N)$ . En effet si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, E)$ :

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(\tilde{u}), \varphi \rangle &= - \langle \tilde{u} \operatorname{div} \varphi \rangle \\ &= - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varphi + \int_{\Gamma} (\varphi \cdot n) u \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green sur  $H^1(\Omega)$  (par exemple). Nous obtenons

$$|\langle \varepsilon(\tilde{u}), \varphi \rangle| \leq |\varepsilon(u)|_\infty |\varphi|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

et  $\varepsilon_{ij}(\tilde{u})$  s'identifie à une forme linéaire continue sur  $L^1(\mathbb{R}^N)$ , donc à un élément de  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Maintenant soit  $\delta > 0$  et soit  $\varrho$  une fonction positive de  $\mathcal{D}(B(0, 2))$ ,  $\varrho = 1$  sur  $B(0, 1)$ ,  $\int \varrho = 1$  et pour  $\eta > 0$ ,  $\varrho_\eta = (1/\eta^N)\varrho(\cdot/\eta)$ . Puisque  $\tilde{u}$  est continue à support compact dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $\varrho_\eta * u$  converge uniformément vers  $\tilde{u}$  sur  $\mathbb{R}^N$ , et on peut donc choisir  $\eta_0$  tel que pour  $\eta < \eta_0$ ,

$$|\varrho_\eta * \tilde{u} - \tilde{u}|_{L(\mathbb{R}^N)} < \delta.$$

Cette inégalité entraîne la convergence uniforme de  $\varrho_\eta * u$  vers  $u$  sur  $\Omega$ , lorsque  $\eta \rightarrow 0$ . Il y a donc aussi convergence au sens des distributions de  $\varepsilon(\varrho_\eta * u)$  vers  $\varepsilon(u)$  sur  $\Omega$ . Puisque  $\varepsilon(\varrho_\eta * u)$  est bornée indépendamment de  $\eta$  <sup>(5)</sup>, la convergence a lieu dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \*. En particulier par semi-continuité inférieure:

$$|\varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf |\varrho_\eta * \varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega)}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} |\varrho_\eta * \varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega)} &\leq |\varrho_\eta * \varepsilon(u)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq |\varepsilon(u)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &= |\varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

et ces deux inégalités entraînent la convergence de  $|\varrho_\eta * \varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega)}$  vers  $|\varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega)}$ .

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. On note  $\overline{\mathcal{D}(\Omega)^{p\varphi}}$  (respectivement  $\overline{\mathcal{D}(\Omega)^\delta}$ ) l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour les  $p_\varphi$  (respectivement pour  $\delta$ ). Puisque  $\delta$  est plus fine que  $(p_\varphi)_\varphi$  on a

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)^\delta} \subset \overline{\mathcal{D}(\Omega)^{p\varphi}}.$$

Inversement soit  $u \in \overline{\mathcal{D}(\Omega)^{p\varphi}}$ . Puisque  $u$  est limite dans  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  des fonctions à support compact dans  $\Omega$ ,  $u$  est nulle sur le bord. Mais alors la Proposition 1.1 entraîne que  $u$  est dans  $\overline{\mathcal{D}(\Omega)^\delta}$ .

<sup>(5)</sup> On utilise ici la propriété  $\int \varrho = 1$ :

$$|\varepsilon(\varrho_\eta * \tilde{u})|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = |\varrho_\eta * \varepsilon(\tilde{u})|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq |\varepsilon(\tilde{u})|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$



La proposition suivante est plus fine que la Proposition 1.1 et sera très utile pour la suite, en particulier lorsqu'on aura établi l'existence de traces.

**PROPOSITION 1.2.** *Soit  $u$  dans  $U_\infty(\Omega)$ . Il existe une suite  $u_n$  dans  $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap U^\infty(\Omega)$  telle que*

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \quad \text{dans } C(\bar{\Omega}) \\ \varepsilon(u_n) &\rightarrow \varepsilon(u) \, ds L^q(\Omega), \quad \forall q < \infty \\ |\varepsilon(u_n)|_\infty &\rightarrow |\varepsilon(u)|_\infty. \\ u_n - u &\in U_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** i) Soit  $\delta > 0$ . Nous allons montrer l'existence de  $u_\delta$  dans  $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$  tel que

$$\begin{aligned} |u_\delta - u|_\infty &< \delta \\ |\varepsilon(u_\delta)|_\infty - |\varepsilon(u)|_\infty &< \delta \\ u_\delta - u &= \lim v_\delta^N \quad \text{dans } C(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

avec  $v_\delta^N$  dans  $U^\infty(\Omega)$ , à support compact.

On déduira des inégalités précédentes que  $u_\delta$  est dans  $U^\infty$  (donc dans  $C(\bar{\Omega})$ ) et que  $u_\delta - u$  est nulle sur  $\Gamma$ .

Pour  $\delta > 0$  donné soit  $r > 0$  tel que l'ouvert

$$(1.13) \quad \Omega_0 = \left\{ x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{r} \right\}$$

vérifie

$$(1.14) \quad |\varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega_0)} \geq |\varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega)} - \delta$$

et soient  $\Omega_j$  les ouverts:

$$\Omega_j = \left\{ x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j+r} \right\}.$$

Nous avons  $\bigcup_0^\infty \Omega_j = \Omega$ ,  $\Omega_j \subset \bar{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$ . Nous définissons:

$$A_1 = \Omega_2, \quad \text{et} \quad A_j = \Omega_{j+1} - \overline{\Omega_{j-1}}, \quad j \geq 3 \quad (\text{les } A_j \text{ recouvrent } \Omega),$$

et soit  $\phi_j$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de  $\Omega$  par les  $A_j$ . Soit  $\varrho$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\varrho(0) = 1$ ,  $\int \varrho = 1$  et  $\varrho_{\varepsilon_j}(\cdot) = (1/\varepsilon^N) \varrho(\cdot/\varepsilon_j)$

où les  $\varepsilon_j$  sont décroissants et astreints à vérifier

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad & \Omega_0 + B(0, \varepsilon_1) \subset A_1 \\
 & A_2 + B(0, \varepsilon_2) \subset C\Omega_0 \cap A_3 \\
 & A_j + B(0, \varepsilon_j) \subset A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1}, \quad j \geq 3.
 \end{aligned}$$

Puisque  $\phi_j u$  est continue sur  $\bar{\Omega}$ ,  $\varrho_{\varepsilon_j} * \phi_j u$  converge uniformément vers  $\phi_j u$  sur  $\bar{\Omega}$ . Il en est de même pour  $\nabla \phi_j u$  et  $\phi_j$ . On peut donc choisir  $\varepsilon_j$  assez petit pour que :

$$(1.18) \quad |\varrho_{\varepsilon_j} * (\phi_j u) - (\phi_j u)|_{\infty} \leq \delta 2^{-j}$$

$$(1.19) \quad |\varrho_{\varepsilon_j} * (\nabla \phi_j u) - (\nabla \phi_j u)|_{\infty} \leq \delta 2^{-j}$$

$$(1.20) \quad |\varrho_{\varepsilon_j} * \phi_j - \phi_j|_{\infty} \leq \delta 2^{-j}.$$

Et d'autre part on peut choisir  $\varepsilon_1$  assez petit pour que

$$(1.21) \quad |\varrho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 \varepsilon(u))|_{L^{\infty}(\Omega_0)} - |\phi_1 \varepsilon(u)|_{L^{\infty}(\Omega_0)} \leq \delta$$

Nous définissons alors

$$u_{\delta} = \sum_0^{\infty} \varrho_{\varepsilon_j} * (\phi_j u)$$

$u_{\delta}$  est dans  $C^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$  et :

$$|u_{\delta} - u|_{\infty} \leq \sum_1^{\infty} |\varrho_{\varepsilon_j} * \phi_j u - \phi_j u|_{\infty} \leq \delta \quad (\text{par (1.18)}).$$

Ensuite

$$\varepsilon(u_{\delta}) = \sum_0^{\infty} \varrho_{\varepsilon_j} * (\nabla \phi_j u + \varepsilon(u) \phi_j)$$

De sorte que, en utilisant  $\sum \nabla \phi_j = 0$

$$\varepsilon(u_{\delta}) = \left( \sum_0^{\infty} \varrho_{\varepsilon_j} * (\nabla \phi_j u) - \nabla \phi_j u \right) + \sum_0^{\infty} \varrho_{\varepsilon_j} * \phi_j \varepsilon(u).$$

Alors pour tout  $x$  dans  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon(u_\delta)|(x) &\leq \sum_1^\infty |\varrho_{\varepsilon_j} * (\nabla \phi_j u) - \nabla \phi_j u|_\infty + \sum |\varrho_{\varepsilon_j} * (\phi_j \varepsilon(u))|(x) \\
 &\leq \sum \delta 2^{-j} + \sum |\varepsilon(u)|_\infty |\varrho_{\varepsilon_j} * \phi_j|(x) \\
 &\leq 2\delta + \sum_1^\infty |\varepsilon(u)|_\infty \left[ \frac{\delta 2^{-j}}{|\varepsilon(u)|_\infty} + |\phi_j|(x) \right] \\
 &\leq 3\delta + |\varepsilon(u)|_\infty \quad (\text{en utilisant (1.20)}) .
 \end{aligned}$$

Ensuite soit  $x$  dans  $\Omega_0$ ; pour  $j \geq 2$ ,  $\text{Sup}^t \phi_j + B(0, \varepsilon_j) \subset A_j + B(0, \varepsilon_j) \subset \mathcal{C}(\Omega_0)$ , de sorte que

$$u_\delta(x) = \varrho_{\varepsilon_1} * \phi_1 u(x) ,$$

et

$$\varepsilon(u_\delta)(x) = (\varrho_{\varepsilon_1} * \phi_1 \varepsilon(u))(x) .$$

Alors d'après (1.20) et (1.14)

$$\begin{aligned}
 (1.24) \quad |\varepsilon(u_\delta)|_{L^\infty(\Omega_0)} &= |\varrho_{\varepsilon_1} * \phi_1 \varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega_0)} \\
 &\geq |\phi_1 \varepsilon(u)|_{L^\infty(\Omega_0)} \\
 &\geq |\varepsilon(u)|_\infty - 2\delta .
 \end{aligned}$$

iii) Vérifions que  $u_\delta - u \in U_0^\infty(\Omega)$ . Pour  $\delta > 0$  fixé soit  $v_\delta$  définie par

$$v_\delta = u_\delta - u = \sum_0^\infty \varrho_{\varepsilon_j} * (\phi_j u) - \phi_j u$$

et

$$v_\delta^N = \sum_0^N (\varrho_{\varepsilon_j} * (\phi_j u) - \phi_j u) .$$

On a

$$\begin{aligned}
 (1.26) \quad |v_\delta^N - v_\delta|_\infty &\leq \sum_{N+1}^\infty |\varrho_{\varepsilon_j} * \phi_j u - \phi_j u|_\infty \\
 &\leq \sum_{N+1}^\infty \delta 2^{-j} = \delta 2^{-N} .
 \end{aligned}$$

Nous montrons que  $|\varepsilon(v^N)|_\infty$  est borné indépendamment de  $N$  soit  $x$  dans  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
 (1.27) \quad |\varepsilon(v_\delta^N)(x)| &\leq \sum_0^N |\varrho_{\varepsilon_j} * (\nabla \phi_j u) - \nabla \phi_j u|_\infty + \sum_0^N |\varrho_{\varepsilon_j} * \phi_j \varepsilon(u)|(x) + |\phi_j \varepsilon(u)|(x) \\
 &\leq \delta + \left( \sum_0^N |\varepsilon(u)|_\infty |\varrho_{\varepsilon_j} * \phi_j(x)| \right) + |\varepsilon(u)|(x) \\
 &\leq \delta + |\varepsilon(u)|_\infty \sum_0^N \left( |\phi_j(x)| + \frac{\delta 2^{-j}}{|\varepsilon(u)|_\infty} \right) + |\varepsilon(u)|_\infty \\
 &\leq 2\delta + 2|\varepsilon(u)|_\infty.
 \end{aligned}$$

L'inégalité (1.27), jointe à la convergence uniforme (1.26) entraîne la convergence faible de  $\varepsilon(v_\delta^N)$  vers  $\varepsilon(v)$ . La suite  $v_\delta^N$  est un exemple explicite de suite à support compact dans  $\Omega$ , qui converge vers  $v$  pour la topologie  $p_\varphi$ :

REMARQUE 1.1. La proposition 1.2 peut se généraliser comme suit: on suppose  $S$  un opérateur différentiel à coefficients constants qui envoie  $C_0^\infty(\Omega)^m$  dans  $C_0^\infty(\Omega)^i$ . On définit l'espace:  $X = \{u \in C(\bar{\Omega})^m, Su \in L^\infty(\Omega)^i\}$ , et on suppose que  $X$  possède la propriété

$$\forall u \in X, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \quad S(\varphi u) - \varphi(Su) \in C(\bar{\Omega})^i.$$

On introduit sur  $X$  la distance  $d_S$ :

$$d_S(u_1, u_2) = |u_1 - u_2|_\infty + \left| |S(u_1)|_\infty - |S(u_2)|_\infty \right|$$

et la Proposition 1.2 se généralise ainsi: Si  $u \in X$ , il existe  $u_n \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $\delta(u_n, u) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $u_n = u$  sur le bord.

La démonstration de la Proposition 1.2 s'adapte aisément.

## 1.2. Comportement des fonctions de $U^\infty(\Omega)$ le long des courbes de $\bar{\Omega}$ .

Compte tenu des analogies entre le cas  $p = 1$  et  $p = \infty$  remarquées dans la Section 1.1, on est naturellement amené à se demander si comme dans le cas  $p = 1$  pour lequel on montre (Temam-Strang [17], Suquet [19]).

$$\gamma_0(LD(\Omega)) = \gamma_0(W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)) = L^1(\Gamma)^N,$$

Il y a aussi coïncidence des espaces de trace  $\gamma_0(W^{1,\infty})$  et  $\gamma_0(U^\infty)$ . La réponse est négative.

## PROPOSITION 1.3.

$$(1.28) \quad \gamma_0(W^{1,\infty}(\Omega)) \neq \gamma_0(U^\infty(\Omega)) \quad (*) .$$

DÉMONSTRATION. Nous en donnons un contre-exemple dans le cas  $N=2$ ,  $\Omega = ]0, 1[^2$ ,  $\Gamma = ]0, 1[ \times \{0\}$ . Rappelons que  $\gamma_0(W^{1,\infty}(\Omega)) = W^{1,\infty}(\Gamma)$ . Supposons par l'absurde que  $\gamma_0(U^\infty(\Omega)) = W^{1,\infty}(\Gamma)$ . Alors l'application trace qui envoie  $W^{1,\infty}(\Omega)$  dans  $\gamma_0(U^\infty(\Omega))$  est surjective. Par une conséquence du théorème de l'image ouverte pour des espaces de Banach (cf. Proposition 1.3 de Demengel [4] par exemple), il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $u \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ , il existe  $U \in U^\infty(\Omega)$  vérifiant:

$$(1.29) \quad |U(x, 0)|_{W^{1,\infty}([0,1])} \leq c(|u|_\infty + |\varepsilon(u)|_\infty) .$$

Nous allons en déduire l'existence d'une constante  $c' > 0$  telle que pour tout  $u$  dans  $U^\infty(\Omega)$  et pour tout  $t$ :

$$(1.30) \quad |U(x, t)|_{W^{1,\infty}([0,1] \times t)} \leq c(|u|_\infty + |\varepsilon(u)|_\infty) .$$

Ensuite en utilisant la fonction

$$V(x, y) = U(y, x) ,$$

qui est dans  $U^\infty([0, 1]^2)$ , on obtiendra aussi

$$(1.31) \quad |U(t, x)|_{W^{1,\infty}(\{t\} \times [0,1])} \leq c(|u|_\infty + |\varepsilon(u)|_\infty) .$$

Or la conjonction de (1.30) et (1.31) signifie que  $u$  est lipschitzien le long de toutes les droites, donc que  $u$  est lipschitzien ou encore que  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . On obtient une absurdité compte tenu de la remarque faite au début de la Section 1. Il nous reste à montrer (1.30) lorsque (1.29) est vérifiée. Soit  $U_1$  définie par

$$U_1(x, t) = U(1 - x, 1 - t)$$

alors  $U_1 \in U^\infty(\Omega)$  et, en appliquant (1.29) à  $U_1$ :

$$|U(x, 1)|_{W^{1,\infty}([0,1])} \leq c(|u|_\infty + |\varepsilon(u)|_\infty) .$$

(\*) Il s'agit d'une non coïncidence algébrique ou topologique (ou les deux à la fois).

Soit alors  $\tilde{U}$  la prolongée de  $u$  sur  $]0, 1[ \times \mathbb{R}$  définie comme suit:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U(x, 0) & \text{si } t < 0 \\ &= U(x, t) & 0 < t < 1 \\ &= U(x, 1) & t > 1. \end{aligned}$$

La fonction  $U$  ainsi prolongée appartient à  $U^\infty([0, 1[ \times \mathbb{R})$ . Maintenant soit  $V_\alpha$  défini pour tout  $\alpha$  par:

$$V_\alpha(x, t) = U(x, t + \alpha)$$

$V$  est dans  $U^\infty([0, 1[^2)$  et d'après (1.29) nous avons

$$|U(x, \alpha)| \leq c\{|u|_\infty + |\varepsilon(u)|_\infty\},$$

ce qui démontre (1.30).  $\square$

Dans ce qui précède nous avons pu remarquer que puisque l'espace  $U^\infty(\Omega)$  s'injecte dans les espaces de Sobolev  $W^{1,q}(\Omega)$ ,  $\forall q < \infty$ , et aussi dans  $C(\bar{\Omega})$ , la trace sur la frontière de  $u \in U^\infty(\Omega)$ —lorsque  $\partial\Omega$  est  $C^1$ —est bien définie et appartient à  $W^{1-1/q,q}(\Gamma)$  pour tout  $q < \infty$ . Elle est aussi dans  $C(\Gamma)$ . Nous verrons dans ce qui suit que ces propriétés ne caractérisent pas à elles seules la trace d'un élément de  $U^\infty(\Omega)$ . Plus précisément nous donnerons une caractérisation de la trace de  $U^\infty(\Omega)$ . Avant d'aboutir à ces propositions, nous donnons quelques propriétés concernant le comportement de  $u$  sur les lignes intérieures à  $\Omega$ . Remarquons que l'espace  $\gamma_0(U^\infty(\Omega))$  est muni d'une norme naturelle avec

$$(1.31) \quad |u|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))} = \inf_{\substack{v \in U^\infty(\Omega) \\ v|_\Gamma = u}} \|v\|_{U^\infty(\Omega)} \quad (?)$$

et qu'ainsi normé, c'est un espace de Banach.

La Proposition 1.4 qui suit concerne la structure des traces tangentielles d'un élément de  $U^\infty(\Omega)$ . Le résultat est que le long d'une courbe  $\Sigma$  incluse dans  $\bar{\Omega}$ , la composante tangentielle de  $u$  est lipschitz pour la distance géodésique sur  $\Sigma$  notée  $d_\Sigma$ . Lorsque le bord de  $\Omega$  est un hyperplan  $X_N = 0$ , ceci revient à dire que la composante tangentielle ou encore  $u - (u \cdot e_N)e_N$  est dans  $U^\infty(X_N = 0)$ .

(?) La propriété de compacité faible des bornés de  $U^\infty(\Omega)$  permet de voir que l'infimum est atteint dans (1.31).

PROPOSITION 1.4. *On suppose  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $\Sigma$  une courbe  $C^2$ , orientée de  $\Omega$ ,  $\mathbf{t}$  sa tangente unitaire orientée,  $s$  son abscisse curviligne,  $R$  son rayon de courbure. Alors, quels que soient  $x$  et  $x'$  sur  $\Sigma$ :*

$$(1.32) \quad |\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}(x) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}(x')| \leq N \left[ |\varepsilon(u)|_\infty + \left( \frac{1}{R} \right) |u|_\infty \right] d_\Sigma(x, x').$$

Si  $\Omega$  est  $C^2$  le résultat est encore valable lorsque  $\Sigma \subset \bar{\Omega}$ .

REMARQUE 2. Lorsque  $\varphi$  désigne un paramétrage quelconque de la courbe  $\Sigma$ , on a, en fait:

$$(1.33) \quad |\mathbf{u}(\varphi(\lambda)) \cdot \varphi'(\lambda) - \mathbf{u}(\varphi(\lambda')) \cdot \varphi'(\lambda')| \\ \leq c(N) (|\varphi'|_\infty^2 |\varepsilon(u)|_\infty + |\varphi''|_\infty |u|_\infty) |\lambda' - \lambda|.$$

La Proposition 1.5 qui suit est plus précise que la Proposition 1.4 dans la mesure où elle nous renseignera sur le comportement des traces normales. Dans le cas de la dimension 2 et du bord droit  $x_2 = 0$ , l'inégalité (1.34) ci-dessous se traduit par la condition

$$|u(x_1 + h, 0) + u(x_1 - h, 0) - 2u(x_1, 0)| \leq c|h|$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $x_1$  et de  $h$ . Certaines propriétés de telles fonctions sont traitées dans Zygmund [21], et Stein [16].

PROPOSITION 1.5. *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert à bord  $C^2$ ,  $\Sigma$  une courbe orientée  $C^2$  de  $\Omega$ . Il existe une constante  $c_1$  ne dépendant que de  $\Omega$ , de  $N$  et  $R$ , telle que, si 3 points  $x, x', x''$  de  $\Sigma$  vérifient  $d_\Sigma(x, x'') = 2d_\Sigma(x, x') = 2d_\Sigma(x', x'')$ , et si  $u$  est un élément de  $U^\infty(\Omega)$ , on a*

$$(1.34) \quad |u(x) + u(x'') - 2u(x')|_\infty \leq c_1 \left( \Omega, N, \left| \frac{1}{R} \right| \right)_\infty d_\Sigma(x, x')^{(8)}.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.4. i) Nous pouvons supposer que  $\Sigma$  est tout entière dans  $\Omega$ . Sinon à cause de l'hypothèse  $\partial\Omega$  de type  $C^2$ , on peut exhiber une courbe  $\Sigma_h$  « parallèle » à  $\Sigma$ ,  $\Sigma_h$  incluse dans  $\Omega$ , qui tend vers  $\Sigma$ . La continuité de  $u$  donne alors le résultat.

(<sup>8</sup>) En fait la démonstration du Théorème entraîne l'existence de  $c$  telle que pour toute paramétrisation  $\varphi$  de  $\Sigma$ , et  $(\lambda_1, \lambda_2)$  deux paramètres admissibles:

$$(1.34) \text{ bis. } \left| u(\varphi(\lambda_1)) + u(\varphi(\lambda_2)) - 2u\left(\varphi\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)\right) \right| \leq c(\Omega, N, |\varphi'|_\infty, |\varphi''|_\infty) |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

ii) Soit donc  $\Sigma$  une courbe  $C^2$  orientée de  $\Omega$ ,  $\varphi$  un paramétrage normal de  $\Sigma$ . On peut supposer que  $x = \varphi(0)$ . Soit alors  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $x' = \varphi(\lambda)$ . Nous considérons l'application  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\psi &= [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N \\ \mu &\rightarrow \sum u_i(\varphi(\lambda\mu)) \varphi'_i(\lambda\mu) \\ \psi'(\mu) &= \left[ \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\varphi(\lambda\mu)) [\varphi'_i \varphi'_j](\lambda\mu) + \sum u_i(\varphi(\lambda\mu)) \varphi''_i(\lambda\mu) \right] \\ &= \left[ \sum_{ij} \varepsilon_{ij}(u) \varphi'_i \varphi'_j + \sum_i u_i \varphi''_i \right] \lambda \\ |\psi'(\mu)|_\infty &\leq |\lambda| \left[ |\varepsilon(u)|_\infty \sum_{i,j} |\varphi'_i \varphi'_j|_\infty + |u|_\infty \sum_i |\varphi''_i|_\infty \right] \\ &\leq |\lambda| \left[ |\varepsilon(u)|_\infty \left[ \sum_i |\varphi'_i|^2 \right] N + |u|_\infty \sum_i |\varphi''_i|_\infty \right] \\ &\leq |\lambda| N [|\varepsilon(u)|_\infty |\varphi'|_\infty^2 + |u|_\infty |\varphi''|_\infty]\end{aligned}$$

d'où, si le paramétrage est normale, l'inégalité (1.32) annoncée en utilisant les accroissements finis pour  $\psi$ :

$$|\psi(1) - \psi(0)| \leq \lambda N \left[ |\varepsilon(u)|_\infty + |u|_\infty \left| \frac{1}{R} \right|_\infty \right]$$

ce qui est exactement (1.32).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.5. i) Les hypothèses sur  $\Omega$  et  $\Sigma \subset \bar{\Omega}$  entraînent la propriété suivante, dite propriété de cône uniforme pour  $\partial\Omega$ :

Il existe un recouvrement de  $\Sigma$  par un nombre fini de boules ouvertes  $B_{i,1} \leq i \leq m$  telles que:

$\forall i$ , il existe  $C_i$  cône ouvert borné de sommet 0 tel que:

$$\forall x \in \Sigma \cap B_i, \quad x + C_i \subset \Omega.$$

Il existe alors  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $\Sigma \varphi_i = 1$  sur  $\Sigma$ , et  $\varphi_i$  est régulière à support compact dans  $\Omega_i \cup (\Sigma \cap B_i)$ , où

$$\Omega_i = \{x + C_i, x \in \Sigma \cap B_i\}.$$

Il est utile alors d'introduire  $\tilde{\Omega}_i$

$$\tilde{\Omega}_i = \{x + \lambda C_i, \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in \Sigma \cap B_i\},$$



et de confondre  $\varphi_i u$  pour  $u$  dans  $U^\infty(\Omega)$  avec sa prolongée par 0 hors de  $\bar{\Omega}_i \setminus \bar{\Omega}_i$ , cette fonction prolongée appartenant alors à  $U^\infty(\bar{\Omega}_i)$ . Supposons qu'il ait été établi, pour tout  $i$ , l'inégalité

$$(1.35) \quad |(\varphi_i u)(x) + (\varphi_i u)(x'') - 2\varphi_i u(x')| \leq c_2 |\varphi_i u|_{U^\infty(\Omega)} \bar{d}_\Sigma(x, x')$$

pour  $x, x'$  et  $x''$  vérifiant les hypothèses de la Proposition 1.5. Alors, en sommant sur  $i$  ces inégalités, on obtient:

$$|u(x) + u(x'') - 2u(x')| \leq c_3 \left( \sum_i |\varphi_i|_\infty + |\varphi'_i| + |\varphi''_i| \right) |u|_{U^\infty(\Omega)} \bar{d}_\Sigma(x, x').$$

La constante  $c_3$  ne dépendant que de la courbe  $\Sigma$  et de  $\Omega$ , il en résultera (1.34). Tout revient donc à prouver (1.35).

Soit  $\alpha = \inf \bar{d}(\text{Sup}^t \varphi_i, \partial B_i) > 0$  ( $\alpha$  ne dépend donc que de la partition de l'unité). Si  $\bar{d}_\Sigma(x, x') > \alpha/2$ , on a

$$|u(x) + u(x'') - 2u(x')| \leq 4|u|_\infty \leq \frac{4}{\alpha} |u|_\infty \leq 2c_1 \frac{\alpha}{2} |u|_\infty \leq 2c_1 |u|_\infty \bar{d}_\Sigma(x, x')$$

avec  $c_1 > 4/\alpha$ .

Si  $\bar{d}_\Sigma(x, x') \leq \alpha/2$ , supposons d'abord qu'aucun des points  $x, x', x''$  n'appartienne au support de  $\varphi_i u$ . Alors l'inégalité (1.35) est triviale puisque le membre de gauche de (1.35) est nul. Si l'un des points  $x, x', x''$ , est dans  $\text{Sup } \varphi_i$  chacun des deux autres en est à une distance moindre que  $\alpha$ , donc appartient à  $\Omega_i$ . Nous sommes donc ramenés à montrer la propriété lorsque  $u$  est à support compact dans  $\Omega \cup \Sigma$ , où  $\Omega$  est tel qu'il existe un cône  $C$  ouvert et positivement homogène de sommet 0, et  $\bigcup_{x \in \Omega} (x + C) \subset \Omega$ .

iii) Soit  $e_i$  un vecteur unitaire dans  $C$ ,  $u_i = u \cdot e_i$ . Puisque  $C$  est ouvert il contient un système libre de  $\mathbb{R}^N$ . Il suffit donc de montrer pour un tel vecteur unitaire  $e_i$  l'inégalité

$$|u_i(x) + u_i(x'') - 2u_i(x')| \leq c |u|_{U^\infty(\Omega)} \int |ds|.$$

Soit  $\varphi$  une paramétrisation normale de  $\Sigma$  et  $h$  un réel tel que

$$x' = \varphi(0), \quad x = \varphi(-h), \quad x'' = \varphi(h).$$

Nous définissons les chemins dépendant du paramètre réel  $\mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+ &= \{\varphi(\mu h) + (1 - \mu)h e_i, \quad \mu \in [0, 1]\} \\ \mathcal{D}^- &= \{\varphi(-\mu h) + (1 - \mu)h e_i, \quad \mu \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

L'hypothèse  $x + C \subset \Omega$  pour  $x$  dans  $\Sigma$  prouve que  $\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{D}^-$  sont tout entiers dans  $\Omega$ .

Les deux chemins séparément sont bien  $C^2$ . Le long de  $\mathcal{D}^+$ , la tangente est parallèle à  $h[t(\varphi(\mu h)) - e_i]$ , le long de  $\mathcal{D}^-$  la tangente est parallèle à  $h[t(\varphi(-\mu h)) + e_i]$ . On applique alors la Proposition 1.4 aux deux extrémités de  $\mathcal{D}^+$  (resp<sup>t</sup> aux deux extrémités de  $\mathcal{D}^-$ ) et à la fonction  $u \in U^\infty(\Omega)$ , c'est-à-dire (1.33), la paramétrisation n'étant plus normale :

$$\begin{aligned} |h| |u(\varphi(h)) \cdot (t(\varphi(h)) - e_i) - u(\varphi(0) + he_i) \cdot (t(\varphi(0)) - e_i)| \\ \leq N[|h| |\varphi' - e_i|_\infty^2 |\varepsilon(u)|_\infty + h^2 |\varphi''|_\infty |u|_\infty] |h| \\ \leq N[(|\varphi'|_\infty^2 + 1) |\varepsilon(u)|_\infty + |h| |\varphi''|_\infty |u|_\infty] h^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} |u(x'') \cdot [t(x'') - e_i] - u(x' + he_i) \cdot (t(x') - e_i)| &\leq K|h| \\ |u(x) \cdot [t(x) + e_i] - u(x' + he_i) \cdot (t(x') + e_i)| &\leq K|h| \end{aligned}$$

Par ailleurs on a par (1.32) :

$$\begin{aligned} |u(x'') \cdot t(x'') - u(x') t(x')| &\leq c_1 |u|_{U^\infty(\Omega)} |h| \\ 2|u(\varphi(0) + he_i) \cdot e_i - u(\varphi(0)) \cdot e_i| &\leq 2|h| |u|_{U^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

En additionnant les 4 inégalités, on obtient :

$$|u_i(x'') + u_i(x) - 2u_i(x')| < c|h| |u|_{U^\infty(\Omega)}$$

avec

$$c = \text{Sup} \left( 2, C_1, N \text{Max} \left( 2 + \text{long } \Sigma \left( \frac{1}{R} \right)_\infty \right) \right).$$

Puisque  $h = d_\Sigma(x, x')$ , l'inégalité (1.34) en résulte.

On dit que  $\mathcal{O}$  est un ouvert  $C^2$  élémentaire s'il existe un ouvert  $\mathcal{O}'$  de  $\mathbb{R}^{N-1}$ , un système de coordonnées  $x_1, \dots, x_N$  associé à une base orthogonale  $e_1, \dots, e_N$  et une fonction  $a: \mathcal{O}' \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $a > 0$ ,  $a \in C^2$  et  $|\nabla a| \leq \frac{1}{2}$  sur

$$(1.36) \quad \mathcal{O} = \{(x', x_N), x' \in \mathcal{O}', x_N < a(x')\}.$$

Il sera commode de considérer  $a$  comme la restriction d'une fonction  $C^2$  définie sur  $\mathbb{R}^{N-1}$  vérifiant  $|\nabla a| < \frac{1}{2}$  et de définir l'ouvert

$$(1.37) \quad \tilde{\mathcal{O}} = \{(x', x_N), x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N < a(x')\}.$$

En outre on pourra remarquer qu'il existe un cône ouvert  $C$  de sommet 0, positivement homogène, tel que

$$(1.38) \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad x + C \subset \tilde{\Omega}.$$

On définit aussi

$$(1.39) \quad \Gamma = \{(x', a(x')), x' \in \mathcal{O}'\}$$

$$(1.40) \quad \Gamma = \{(x', a(x')), x' \in \mathbb{R}^{N-1}\}.$$

Lorsque  $\Omega$  est un ouvert à bord  $C^2$ , il est possible de trouver  $\Omega_0$  relativement compact dans  $\Omega$  et des ouverts en nombre fini  $\mathcal{O}_i$  qui recouvrent  $\Gamma$  et tels que  $\mathcal{O}_i$  vérifie (1.34), et  $\mathcal{O}_i \cap \Gamma$  vérifie (1.39).

Nous énonçons ici un théorème et un lemme techniques, concernant certaines propriétés des ouverts  $C^2$ , (ou des ouverts élémentaires). Le Théorème 1 est énoncé dans différents ouvrages (cf. [11] par exemple), mais nous lui donnons ici une forme plus précise et plus utile à notre propos. Une démonstration indépendante de [11] est donnée en appendice, de même que la preuve de la Proposition 1.6.

**THÉORÈME 1.** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de classe  $C^2$ . Alors*

i) *Il existe un voisinage  $V$  de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^N$  et une application  $\Pi$  de classe  $C^2$  définie sur  $V$ , à valeurs dans  $\Gamma$ , qui vaut l'identité sur  $\Gamma$ , telle que  $\forall x \in V$ ,  $x - \Pi(x)$  est colinéaire à la normale en  $\Pi(x)$  à  $\Gamma$  et aussi  $|x - \Pi(x)| = d(x, \Gamma)$  (distance de  $x$  à  $\Gamma$ ).*

ii) *Un et un seul des segments  $[x, \Pi(x)[$  ou  $] \Pi(x), x + 2(\Pi(x) - x)]$  est dans  $\Omega$ , (l'autre étant alors tout entier dans  $\mathbb{R}^N - \tilde{\Omega}$ ).*

iii)  *$\Pi$  est une fonction  $C^k$  si  $\partial\Omega$  est  $C^{k+1}$ .*

**PROPOSITION 1.6.** *Soit  $\Omega$  un ouvert à bord  $C^2$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $\Gamma$  et une constante  $0 < \alpha < 1$  qui vérifie: pour tout  $x$  dans  $V$ ,  $S(\Pi(x), |x - \Pi(x)|)$  la sphère de centre  $\Pi(x)$  et de rayon  $|x - \Pi(x)|$  et  $C(x)$  le cône:*

$$C(x) = \left\{ \frac{z - x}{|z - x|}, z \in S(\Pi(x), |x - \Pi(x)|) \cap \Gamma \right\}.$$

*Alors  $C(x) + \mathbb{R}n(x)$  engendre  $\mathbb{R}^N$  et  $\forall u \in C(x), \text{tg}(u, n(x)) \geq \alpha > 0$ .*

Dans ce qui suit, on désigne par  $\Gamma$  une variété d'équation  $x_N = a(x')$  et par  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  situé dans la région  $\{(x', x_N), x' \in \mathcal{O}', x_N < a(x')\}$  dont une partie du bord est  $\Gamma$ .  $b$  étant une application d'un ouvert  $\mathcal{O}''$  de  $\mathbb{R}^{N-2}$  dans  $\mathbb{R}$ , on définit la variété de dimension  $N - 2$ ,  $\tilde{\Gamma} = \{(x'', b(x''))$ ,

$x'' \in \mathcal{O}''\}$  que l'on suppose être incluse dans  $\mathcal{O}'$ . Alors  $\Gamma^*$  définie par  $\Gamma^* = \{(x'', b(x'')) = x', x_N = a(x'), x'' \in \mathcal{O}''\}$  est une variété tracée sur  $\Gamma$ . On peut supposer, quitte à restreindre les ouverts  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  que dans ces ouverts les propriétés de la projection  $\Pi_{\mathcal{F}}$  et de la projection  $\Pi_{\hat{\mathcal{F}}}$  énoncées dans le Théorème 1.1 précédent sont réalisées. On peut alors supposer que  $\Gamma^*$  est bord commun de 2 régions connexes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$  dont les projections sur  $x_N = 0$  sont 2 régions  $\hat{\Gamma}_0$  et  $\hat{\Gamma}_1$  définies respectivement par

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_0 &= \{(x'', x_{N-1}) \in \mathcal{O}', x_{N-1} < b(x''), x'' \in \mathcal{O}''\} \\ \hat{\Gamma}_1 &= \{(x'', x_{N-1}) \in \mathcal{O}', x_{N-1} > b(x''), x'' \in \mathcal{O}''\}.\end{aligned}$$

**PROPOSITION 1.7.** *On suppose que  $\mathcal{O}, \Gamma, \Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  vérifient les conditions ci-dessus et soit  $u$  une fonction de  $U^\infty(\Omega)$ , à support compact dans  $\Omega \cup \Gamma$ . Il existe une constante  $c_2 > 0$  ne dépendant que de  $N, \mathcal{O}, \Gamma, \Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ , telle que pour tout  $u$  dans  $U^\infty(\mathcal{O})$ , vérifiant  $u = 0$  sur  $\Gamma_0$ , on ait :*

$$(1.41) \quad |u(x)| \leq c_2 d(x, \Gamma^*) |u|_{U^\infty(\mathcal{O})}.$$

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.7.** Si  $x \in \Gamma_0$  ou  $x \in \Gamma^*$ ,  $u(x) = 0$ ; donc (1.41) est vérifié. Pour  $x$  dans  $\Gamma_1$ , soit  $p(x')$  la projection de  $x'$  sur  $\hat{\Gamma}^*$ , et soit

$$e_i = \frac{-p(x') + x'}{|p(x') - x'|}.$$

Alors le point  $p(x') - |x' - p(x')|e_i$  est dans  $\hat{\Gamma}_0$  comme l'indique le Théorème 1.1. On applique la Proposition 1.5 pour la courbe de paramétrage  $\varphi: \varphi(\lambda) = p(x') + \lambda e_i + a(p(x') + \lambda e_i)e_N$  et pour les points  $\varphi(-|x' - p(x')|)$ ,  $\varphi(0)$  et  $\varphi(|x' - p(x')|)$ . En remarquant que  $\varphi(-|x' - p(x')|)$  et  $\varphi(0)$  sont dans  $\hat{\Gamma}_0$ , et que  $u$  s'annule sur  $\hat{\Gamma}_0$  par continuité, nous obtenons :

$$|u(x', a(x'))| \leq c_1 |u|_{U^\infty(\Omega)} |x' - p(x')|$$

où  $c_1$  ne dépend que de  $|\nabla a|_\infty$  et  $|\nabla \nabla a|_\infty$ , et il reste à comparer  $|x' - p(x')|$  à  $d(x, \Gamma^*)$  ou encore  $d(x', \hat{\Gamma}^*)$  à  $d(x, \Gamma^*)$ . Nous avons les inégalités

$$(1.42) \quad d(x', y') \leq d(x, y) \leq (1 + |\nabla a|_\infty) d(x', y').$$

En effet si :

$$x = (x', a(x')) \quad \text{et} \quad y = (y', a(y'))$$

NOUS AVONS

$$|x - y| = \sqrt{|x' - y'|^2 + (a(x') - a(y'))^2} \leq (1 + |\nabla a|_\infty) |x' - y'|$$

et

$$|x - y| = \sqrt{|x' - y'|^2 + |a(x') - a(y')|^2} \geq |x' - y'|.$$

On en déduit

$$d(x', \tilde{I}^*) = \inf_{y' \in \Gamma^*} d(x', y') \leq \inf_{y \in \Gamma} d(x, y) \leq cd(x', \Gamma^*). \quad \square$$

Avant d'énoncer le Théorème 1.2 qui sera fondamental pour la suite, nous définissons les sous-espaces suivants de  $U^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} X &= \{u \in U^\infty(\Omega), \text{ il existe une constante } c > 0, \forall x \in \bar{\Omega}, \\ &\quad |u(x)| \leq cd(x, \Gamma^*)\} \\ (1.43) \quad X_1 &= \{u \in U^\infty(\Omega), \chi_1 u \in \gamma_0(U^\infty(\Omega))\} \quad (^\circ) \\ X_0 &= \{u \in U^\infty(\Omega), \chi_0 u \in \gamma_0(U^\infty(\Omega))\}. \end{aligned}$$

Les espaces  $X, X_0, X_1$  sont de Banach lorsqu'on les munit des normes respectives

$$(1.44) \quad \|u\|_X = \|u\|_{U^\infty(\Omega)} + \sup_{x \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x)|}{d(x, \Gamma^*)}$$

$$(1.45) \quad \|u\|_{X_1} = \|u\|_{U^\infty(\Omega)} + \|\chi_1 u\|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))}$$

$$(1.46) \quad \|u\|_{X_0} = \|u\|_{U^\infty(\Omega)} + \|\chi_0 u\|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))}.$$

En effet il est évident que  $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_{X_1}$ , et  $\|\cdot\|_{X_0}$  sont des normes respectivement sur  $X$  et  $X_1$ . Soit maintenant  $u_m$  une suite de Cauchy pour  $X$ ; alors elle est de Cauchy dans  $U^\infty(\Omega)$  donc convergente vers  $u \in U^\infty(\Omega)$ . Mais alors pour tout  $x$  de  $\bar{\Omega}$ :

$$|u(x)| = \lim |u_m(x)| \leq |u_m| d(x, \Gamma^*) \leq kd(x, \Gamma^*)$$

(car  $u_m$  étant de Cauchy dans  $X$ , elle est bornée dans  $X$ ), ce qui montre que  $u \in X$ . Il est aisé de vérifier que  $u_m$  converge alors vers  $u$  pour la norme  $\|\cdot\|_X$ . Soit maintenant  $u_m$  une suite de Cauchy pour  $X_1$ ; alors  $u_m$  est de

(<sup>o</sup>)  $\chi_1$  et  $\chi_0$  désignent respectivement les fonctions caractéristiques de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_0$ .

Cauchy dans  $U^\infty(\Omega)$ , donc convergente vers  $u$  dans  $U^\infty(\Omega)$ .  $\chi_1 u_m$  est de Cauchy dans  $\gamma_0(U^\infty(\Omega))$  donc convergente vers  $v \in \gamma_0(U^\infty(\Omega))$ . Puisque  $u_m$  converge vers  $u$  uniformément sur  $\bar{\Omega}$ , et  $\chi_1 u_m$  converge vers  $v$  uniformément sur  $\Gamma$ , on a

$$u = v \quad \text{sur } \Gamma_1$$

et aussi

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

D'autre part sur  $\Gamma^*$

$u/\Gamma^* = \lim u_m/\Gamma^* = 0$  (d'après la Remarque 1.3 ci-dessous); ceci entraîne que  $v = \chi_1 u$  et donc  $u \in X_1$ . On peut vérifier ensuite que  $u_m$  converge vers  $u$  pour la norme  $|\cdot|_{X_1}$ .

REMARQUE 1.3. Il est utile de remarquer que si  $\chi_1 u \in \gamma_0(U^\infty(\Omega))$  (ou  $\chi_0 u \in \gamma_0(U^\infty(\Omega))$ ), alors  $u$  s'annule sur  $\Gamma^*$ . En effet soit  $v$  dans  $U^\infty(\Omega)$ , tel que  $v = u$  sur  $\Gamma_1$  et  $v = 0$  sur  $\Gamma_0$ .  $v$  et  $u$  sont continues sur  $\Gamma$  et coïncident sur  $\Gamma_1$  donc  $u = v = 0$  sur  $\Gamma^*$ .

THÉORÈME 1.2. Soient  $X, X_1, X_0$  définis par (1.43). Alors

$$X = X_1 = X_0,$$

*l'égalité étant à la fois algébrique et topologique.*

DÉMONSTRATION. Pour établir la coïncidence topologique des espaces  $X, X_1$  et  $X_0$ , nous montrons dans i) que  $X_0 = X_1$ ; dans ii) que  $X \subset X_1$ ; dans iii) que  $X_1 \subset X$ .

i) Supposons que  $u \in X_1$  et soit  $v$  tel que  $v = \chi_1 u$  sur  $\Gamma$  et  $|v|_{U^\infty(\Omega)} \leqslant |u|_{X_1}$ . Soit  $w = (u - v)$  alors  $w = \chi_0 u$  sur  $\Gamma$  et

$$|w|_{U^\infty(\Omega)} \leqslant |u|_{U^\infty(\Omega)} + |v|_{U^\infty(\Omega)} \leqslant 2|u|_{X_1}.$$

Finalement  $u \in X_0$  et  $|u|_{X_0} \leqslant |u|_{U^\infty(\Omega)} + |w|_{U^\infty(\Omega)} \leqslant 3|u|_{X_1}$ .

ii) Les hypothèses sur  $\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1$  permettent de voir qu'il existe des ouverts  $\mathcal{O}_i$ ,  $0 \leqslant i \leqslant m$  tels que:  $\Omega_0$  est relativement compact dans  $\Omega$ ,

Pour  $1 \leqslant i \leqslant m$  les  $\mathcal{O}_i$  recouvrent  $\Gamma$  et  $\mathcal{O}_i \cap \Omega$ ,  $\mathcal{O}_i \cap \Gamma$  et vérifient (1.36) (1.39).

Pour  $1 \leqslant i \leqslant p$  les  $\mathcal{O}_i$  recouvrent  $\Gamma^*$  et  $\mathcal{O}_i \cap \Omega$ ,  $\Gamma_0 \cap \mathcal{O}_i$ ,  $\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_i$ ,  $\Gamma^* \cap \mathcal{O}_i$  vérifient les hypothèses de la Proposition 1.7.

Pour  $p+1 \leqslant j \leqslant m$ ,  $\mathcal{O}_j \cap \Gamma^* = \emptyset$ .

Soit maintenant  $\varphi_i$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement précédent. Soit  $h_i$  définie dans  $\mathcal{O}_i \cap \Omega$ ,  $i \in [1, p]$  par

$$\begin{aligned} h_i(x) &= 0 & \text{si } \Pi(x) \in \Gamma_0 & \text{et } d(\Pi(x), \Gamma^*) \geq d(x, \Gamma) \\ h_i(x) &= 1 & \text{si } \Pi(x) \in \Gamma_1 & \text{et } d(\Pi(x), \Gamma^*) \geq d(x, \Gamma) \\ h_i(x) &= 1 + \frac{\varepsilon d(\Pi(x), \Gamma^*) - d(x, \Gamma)}{2d(x, \Gamma)} & \text{si } d(\Pi(x), \Gamma^*) \leq d(x, \Gamma) \\ & & (\text{avec } \varepsilon = +1 \text{ si } \Pi(x) \in \Gamma_1 \\ & & = -1 \text{ sinon}). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $h_i$  est continue et bornée sur  $\mathcal{O}_i \cap \Omega$ , et que  $h \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathcal{O}_i \cap \Omega)$ , avec :

$$|\nabla h_i(x)| \leq \frac{c}{d(x, \Gamma)} \quad \text{sur } d(\Pi(x), \Gamma^*) \leq d(x, \Gamma),$$

où  $c$  est une constante ne dépendant que de la norme infinie des dérivées premières des fonctions  $d(\Pi(x), \Gamma^*)$  et  $d(x, \Gamma)$ . Pour  $u$  dans  $X$  on définit la fonction :

$$v = \sum_{i \in J'} \varphi_i u + \sum_{i \in [1, p]} \varphi_i h_i u$$

où  $J' = \{i \notin [1, p], \mathcal{O}_i \cap \Gamma_0 = \emptyset\}$ . Alors  $v$  vérifie

$$v/\Gamma_1 = u/\Gamma_1, \quad v/\Gamma_0 = 0/\Gamma_0.$$

Il reste à voir que  $v \in U^\infty(\Omega)$  :

$$\varepsilon(h_i u) = \varepsilon(u) h_i + \nabla h_i \otimes u.$$

Or

$$\nabla h_i \otimes u = 0 \quad \text{hors de } d(\Pi(x), \Gamma^*) \leq d(x, \Gamma)$$

et

$$|\nabla h_i \otimes u| \leq \frac{c}{d(x, \Gamma)} d(x, \Gamma^*) |u|_X.$$

Finalement

$$v \in U^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad |v|_{U^\infty(\Omega)} \leq c' |u|_X.$$

iii) On suppose les  $\mathcal{O}_i$  comme dans i) et on définit

$$\alpha = \inf_{i \notin [1, p]} d(\mathcal{O}_i, \Gamma^*) > 0.$$

Alors si  $x$  vérifie  $d(x, \Gamma^*) < \alpha$ ,  $x$  appartient à  $\bigcup_{i \in [1, p]} \mathcal{O}_i$ . On peut alors imposer que  $\sum_{i \in [1, p]} \varphi_i = 1$  sur le voisinage  $A$  de  $\Gamma^*$  défini par  $A = \left\{ x \in \bigcup_{1 \leq i \leq p} \mathcal{O}_i, d(x, \Gamma^*) \leq \alpha/2 \right\}$ . Supposons d'abord que  $d(x, \Gamma^*) > \alpha/2$  et soit  $u$  dans  $X_1$ . On a

$$|u(x)| \leq |u|_\infty \leq |u|_{X_1} \leq \frac{2}{\alpha} |u|_{X_1} d(x, \Gamma^*).$$

Soit maintenant  $x$  tel que  $d(x, \Gamma^*) \leq \alpha/2$ . Alors  $x$  appartient à  $\bigcup_{i \in [1, p]} \mathcal{O}_i$ . Supposons un instant que nous ayons montré l'existence d'une constante  $c > 0$  ne dépendant que des  $\mathcal{O}_i$ , des  $\varphi_i$  et de  $N$ , telle que

$$(1.47) \quad |\varphi_i u|(x) \leq c d(x, \Gamma^*) |u|_{X_1}$$

Alors par sommation sur  $i \in [1, p]$ :

$$(1.48) \quad |u(x)| \leq c' d(x, \Gamma^*) |u|_{X_1}.$$

Finalement en prenant  $k = \text{Sup}(c', 2/\alpha)$  nous obtenons

$$(1.49) \quad |u(x)| \leq k |u|_{X_1} d(x, \Gamma^*)$$

d'où de manière évidente

$$(1.50) \quad |u|_X \leq k |u|_{X_1}$$

sous réserve de démontrer (1.47), ou encore de démontrer l'inégalité (1.48) lorsque  $u$  est dans  $U^\infty(\Omega)$  à support compact dans  $\mathcal{O}_i \cap (\Omega \cup \Gamma)$ .

Soit donc  $e_i$  un vecteur unitaire orthogonal à  $e_N$ . D'après la Proposition 1.6 il existe  $\alpha_i$  dans  $C(\psi)$ , tel que

$$e_i = \alpha_i + \mu e_N$$

done

$$\alpha_i = e_i - \mu e_N$$



avec

$$|\operatorname{tg}(\alpha_i, e_N)| = \left| \frac{1}{\mu} \right| > \alpha.$$

Supposons que nous ayons montré que

$$(1.51) \quad \left| \left( u \cdot \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \right) \right| (x) \leq C |u|_{X_1} d(x, \Gamma^*)$$

$$(1.52) \quad |u_N(x)| \leq C |u|_{X_1} d(x, \Gamma^*).$$

Nous aurons alors

$$u \cdot e_i = u \cdot \alpha_i - \mu u \cdot e_N$$

donc

$$\begin{aligned} |u \cdot e_i(x)| &\leq C \sqrt{1 + \mu^2} |u|_{X_1} d(x, \Gamma) + C |\mu| |u|_{X_1} d(x, \Gamma^*) \\ &\leq 2C \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} |u|_{X_1} d(x, \Gamma^*), \end{aligned}$$

ce qui démontrera (1.47). Nous établissons maintenant (1.51) et (1.52): Puisque  $\alpha_i \in C(x)$ , soit  $t_i \in \Gamma \cap S(\Pi(x), |x - \Pi(x)|)$  tel que  $t_i - x$  est parallèle à  $\alpha_i$ , donné par la Proposition 1.6. On écrit en utilisant la Proposition 1.4:

$$\begin{aligned} |u \cdot \alpha_i(x) - u \cdot \alpha_i(t_i)| &\leq N |u|_{U^\infty} |x - t_i| \\ |u_N(x) - u_N(\Pi(x))| &\leq N |u|_{U^\infty} |x - \Pi(x)|. \end{aligned}$$

Si  $t_i \in \Gamma_1$ , on utilise  $v$  dans  $U^\infty$  tel que  $v = \chi_1 u$  sur  $\Gamma$ , et  $|v|_{U^\infty} = |\chi_1 u|_{\gamma_\alpha(U^\infty)} \leq |u|_{X_1}$ . En appliquant la Proposition 1.7 à  $v$ , on obtient alors

$$(1.53) \quad \begin{aligned} |v(t_i)| &\leq C_2 |u|_{X_1} d(t_i, \Gamma_0) \\ &\leq C_2 |u|_{X_1} d(t_i, \Gamma^*). \end{aligned}$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned} d(t_i, \Gamma^*) &\leq d(t_i, \Pi(x)) + d(\Pi(x), \Gamma^*) \\ &= d(x, \Pi(x)) + d(\Pi(x), \Gamma^*) \\ &\leq d(x, \Pi(x)) + d(\Pi(x), x) + d(x, \Gamma^*) \\ &\leq 3d(x, \Gamma^*) \\ &\quad (\text{car } \Gamma^* \subset \Gamma \text{ et } d(x, \Pi(x)) = d(x, \Gamma)). \end{aligned}$$

Si  $t_i \in \Gamma_0$ , on utilise  $v$  dans  $U^\infty$  tel que  $v = \chi_0 u$  sur  $\Gamma$ ,  $|v|_{U^\infty} = |\chi_0 u|_{\gamma_0(U^\infty)} \leq |u|_{X_0}$ . En raisonnant comme on l'a fait précédemment, avec  $\Gamma_0$  au lieu de  $\Gamma_1$ , on obtient aussi l'inégalité (1.53) pour  $t_i$  dans  $\Gamma_0$ .

Nous en déduisons dans chacun des cas :

$$\begin{aligned} |(u \cdot \alpha_i)(x)| &\leq (N)|u|_{U^\infty(\Omega)}|x - t_i| + |(u \cdot \alpha_i)(t_i)| \\ &\leq 2(N)|u|_{X_1}d(x, \Gamma^*) + |(v \cdot \alpha_i)(t_i)| \\ &\leq 2(N)d(x, \Gamma^*)|u|_{X_1} + 3C_2|u|_{X_1}d(x, \Gamma^*) \\ &= (2N + 3C_2)|u|_{X_1}d(x, \Gamma^*) . \end{aligned}$$

Démontrons l'inégalité (1.52); si  $\Pi(x) \in \Gamma_1$ , soit  $v$  tel que  $v = \chi_1 u$  sur  $\Gamma$ ,  $|v|_{U^\infty} = |\chi_1 u|_{\gamma_0(U^\infty)} \leq |u|_{X_1}$ . Alors

$$\begin{aligned} |v(\Pi(x))| &\leq C_2 d(\Pi(x), \Gamma^*)|v|_{U^\infty} \\ &\leq C_2(d(\Pi(x), x) + d(x, \Gamma^*))|u|_{X_1} \\ &\leq 2C_2 d(x, \Gamma^*)|u|_{X_1} . \end{aligned}$$

On obtient la même inégalité pour  $\Pi(x)$  dans  $\Gamma_0$ , en utilisant  $v$  tel que  $v = \chi_0 u$  sur  $\Gamma_0$  et  $|v|_{U^\infty} \leq |u|_{X_0}$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} |u_N(x)| &\leq |u_N(\Pi(x))| + N|u|_{U^\infty}|x - \Pi(x)| \\ &\leq |v_N(\Pi(x))| + N|u|_{U^\infty}d(x, \Gamma^*) \\ &\leq (2C_2 + N)d(x, \Gamma^*)|u|_{X_1} , \end{aligned}$$

ce qui est exactement (1.52).

**REMARQUE 1.4.** On pourrait se demander sous quelles conditions la relation (1.41) est satisfaite. Une condition nécessaire est, bien sûr, que  $u$  s'annule sur  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1$ . Ceci n'est pas suffisant, du moins en dimension 2. En effet, supposons donc  $N = 2$ , et  $\Omega = ]-1, 1[^2$ ,  $\Gamma_0 = ]-1, 0[ \times \{0\}$ ,  $\Gamma_1 = ]0, 1[ \times \{0\}$ ,  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = (0, 0)$ . Supposons  $u \in U^\infty(\Omega)$ , et  $v$  défini par  $v(x) = u(x_1) - u(0)$ . Alors on aurait l'inégalité

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq C|v|_{U^\infty(\Omega)}|x| \\ &\leq C|u|_{U^\infty(\Omega)}|x| . \end{aligned}$$

Or on peut faire de même en remplaçant 0 par  $z \in \Omega$ . On obtient donc

$$|u(x) - u(z)| \leq C|u|_{U^\infty(\Omega)}d(x, z) ,$$

ce qui signifierait que  $u$  est lipschitzien. Or on a vu dans l'introduction qu'il existait des fonctions de  $U^\infty(\Omega)$  qui n'étaient pas lipschitziennes.

### 1.3. Caractérisation de la trace.

Nous allons maintenant montrer que les Propositions 1.4 et 1.5 permettent en fait de caractériser entièrement les traces normales et tangentielles. Pour alléger l'énoncé du Théorème fondamental de cette section, nous introduisons les notations suivantes:

$$(1.54) \quad Y_t(\Gamma) = \{u \in C(\Gamma), u \cdot n = 0|_{\Gamma}, (\partial/\partial S)(u \cdot t) \in L^\infty(\Gamma), \text{ quelle que soit la courbe } C^2 \text{ de tangente } t, \text{ d'abscisse curviligne } S, \text{ tracée sur } \Gamma\};$$

$$= \{u \in C(\Gamma), u \text{ vérifie (1.33) pour toute courbe } \Sigma \text{ de paramétrage } \varphi C^2, \text{ tracée sur } \Gamma\}.$$

$$(1.55) \quad Y_v(\Gamma) = \{u \in C(\Gamma), u \text{ vérifie (1.34)bis pour toute courbe } \Sigma \text{ de paramétrage } \varphi C^2, \text{ tracée sur } \Gamma\};$$

et nous pouvons maintenant énoncer le

**THÉORÈME 1.2.** *Lorsque  $\Omega$  est à bord  $C^2$ , l'application trace  $\gamma_0: U^\infty(\Omega) \rightarrow Y_t(\Gamma) \times Y_v(\Gamma)$  possède un inverse linéaire et continu (on le notera  $\gamma_0^{-1}$ ).*

**COROLLAIRE.** Dans  $Y_t(\Gamma) \times Y_v(\Gamma)$  les bornés sont faibles \* compact et relativement compact dans  $W_{(1-1/p),p}(\Gamma)$ ,  $\forall p$  et dans  $C^{0,\lambda}(\Gamma)$ ,  $\forall \lambda < 1$ .

Le Théorème 1.2 va résulter des deux propositions suivantes:

**PROPOSITION 1.8.** *Lorsque  $\Omega$  est à bord  $C^2$ , l'application trace  $\gamma_t: U^\infty(\Omega) \rightarrow Y_t(\Gamma) \times \{0\}$  possède un inverse linéaire continu.*

**PROPOSITION 1.9.** *Lorsque  $\Omega$  est à bord  $C^2$ , l'application  $\gamma_v: U^\infty(\Omega) \rightarrow 0 \times Y_v(\Gamma)$  possède un inverse continu.*

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.8.** i) Les hypothèses faites sur  $\Omega$  et  $\Gamma$  permettent de voir qu'il existe un recouvrement de  $\Gamma$  par un nombre fini de boules  $B_i$  dans  $\mathbb{R}^N$ , telles que

$$(1.56) \quad B_i \cap \Gamma = \{(x^i, a(x^i)), x^i \in \mathcal{O}_i\}.$$

$$(1.57) \quad B_i \cap \Omega = \{(x^i, x_N^i), x^i \in \mathcal{O}_i, x_N^i < a^i(x^i)\}$$

où  $\mathcal{O}_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{N-1}$ ,  $x_1^i, \dots, x_N^i$  est un système de coordonnées dépendant de  $B_i$ ,  $a^i$  une fonction  $C^2$  sur  $\mathcal{O}_i$ .

Soit  $(\varphi_j)$  une partition de l'unité subordonnée aux  $B_j$ . Si  $u \in Y_*(\Gamma)$ ,  $u\varphi_i \in Y_*(\Gamma \cap B_j) \cap \mathcal{C}_c(\Gamma \cap B_j)$ , de sorte qu'il suffit de démontrer le résultat lorsque  $\Omega$  et  $\Gamma$  s'écrivent respectivement

$$(1.58) \quad \Omega = \{(x', x_N), x_N < a(x'), x' \in ]0, 1[^{N-1}\}$$

$$(1.59) \quad \Gamma = \{(x', a(x')), x' \in ]0, 1[^{N-1}\}$$

et  $u$  est à support compact dans  $\Omega \cup \Gamma$ .

ii) Soit donc  $u$  à support compact dans  $\Omega \cup \Gamma$ ,  $\Omega$  et  $\Gamma$  étant définis par (1.58) et (1.59). Nous montrons maintenant que  $v$  définie comme ci-dessus appartient à  $Y_*(]0, 1[^{N-1} \times \{0\})$ .

Pour  $i \in [1, N-1]$  et  $\forall x' \in ]0, 1[^{N-1}$ ,

$$v_i(x') = (u_i + a_{,i}u_N)(x', a(x')) .$$

$$v_N(x') = -u_N(x', a(x')) .$$

Il est facile de voir que lorsque  $\Gamma = ]0, 1[^{N-1}$ ,  $Y_*(\Gamma) = U_\infty(\Gamma)$ , de sorte qu'il suffit de vérifier que  $v - v_N e_N \in U^\infty(\Gamma)$  et que  $v_N$  vérifie la propriété de Zygmund.

Nous calculons pour commencer  $\varepsilon_{ij}(v)$  pour  $i$  et  $j \in [1, N]$ :

Si  $i, j < N$ , on a

$$v_{i,j} = u_{i,j} + u_{i,N}a_{,j} + a_{i,j}u_N + a_{,i}u_{N,j} + a_{,i}u_{N,N}a_{,j}$$

$$\varepsilon_{ij}(v)(x') = \varepsilon_{ij}(u) + \varepsilon_{iN}(u)a_{,j} + a_{,i}\varepsilon_{jN}(u) + a_{,i,j}u_N + a_{,i}a_{,j}u_{N,N} .$$

On définit pour  $i \in [1, N]$  la fonction vectorielle

$$E_i(x') = e_i + a_{,i}(x')e_N .$$

Soient  $\Delta_i, \Delta_j$  et  $\Delta_{i+j}$  les chemins

$$\Delta_i: \lambda \rightarrow x' + \lambda e_i + a(x' + \lambda e_i)e_N$$

$$\Delta_j: \lambda \rightarrow x' + \lambda e_j + a(x' + \lambda e_j)e_N$$

$$\Delta_{i+j}: \lambda \rightarrow x' + \lambda(e_i + e_j) + a(x' + \lambda(e_i + e_j))e_N ,$$

qui admettent pour vecteurs tangents respectivement  $E_i(x' + \lambda e_i), E_j(x' + \lambda e_j)$  et  $(E_i + E_j)(x' + \lambda(e_i + e_j))$ . Écrivons que  $u$  est lipschitz le long de

ces courbes

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda} [u \cdot E_i](x' + \lambda e_i, a(x' + \lambda e_i)) = [u_{i,i} + a_{i,i} u_{i,N} + a_{i,i} u_{N,i} + a_{i,i} u_N \\ &\quad + a_{i,i}^2 u_{N,N}](x' + \lambda e_i, a(x' + \lambda e_i)) \\ &= \varepsilon_{ii}(u) + 2a_{i,i} \varepsilon_{iN}(u) + a_{i,i} u_N + a_{i,i}^2 \varepsilon_{NN}(u) \end{aligned}$$

$$b_j = \frac{\partial}{\partial \lambda} [u \cdot E_j](x' + \lambda e_j, a(x' + \lambda e_j)) = \varepsilon_{jj}(u) + 2a_{j,j} \varepsilon_{jN}(u) + a_{j,j} u_N + a_{j,j}^2 \varepsilon_{NN}(u)$$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} [u \cdot (E_i + E_j)](x' + \lambda(e_i + e_j), a(x' + \lambda(e_i + e_j))) + u_{i,i} + u_{i,j} + \\ &\quad + u_{i,N}(a_{i,i} + a_{i,j}) + u_{j,j} + u_{j,i} + u_{j,N}(a_{i,i} + a_{i,j}) + (a_{i,i} + a_{i,j})(u_{N,i} + u_{N,j} + \\ &\quad + (a_{i,i} + a_{i,j}) u_{N,N}) + (a_{i,i} + a_{j,j} + 2a_{i,j}) u \\ &= \varepsilon_{jj}(u) + \varepsilon_{ii}(u) + 2\varepsilon_{ij}(u) + 2(\varepsilon_{iN}(u) + \varepsilon_{jN}(u))(a_{i,i} + a_{i,j}) \\ &\quad + (a_{i,i} + a_{i,j})^2 u_{N,N} + (a_{i,i} + a_{j,j} + 2a_{i,j}) u_N . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{ij} - b_i - b_{j|\lambda=0} &= [2\varepsilon_{ij}(u) + 2(\varepsilon_{iN}(u) a_{i,j} + \varepsilon_{jN}(u) a_{i,i}) \\ &\quad + 2a_{i,i} a_{i,j} u_{N,N} + 2a_{i,j} u_N](x', a(x')) \\ &= 2\varepsilon_{ij}(v)(x') , \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $\varepsilon_{ij}(v) \in L^\infty$ ,  $\forall i, j < N$ .

Vérifions que  $v_N$  vérifie (1.34bis) pour toute courbe tracée sur  $]0, 1[^N \times \{0\}$ ; la propriété  $u \cdot n = 0$  entraîne que  $u_N = \sum a_{i,i} u_i$  et par conséquent

$$\begin{aligned} u_N &= \sum a_{i,i}(u_i + a_{i,i} u_N) - \sum a_{i,i}^2 u_N \\ u_N &= \frac{\sum a_{i,i} v_i}{1 + \sum a_{i,i}^2} . \end{aligned}$$

Mais puisque  $v - v_N e_N \in U^\infty(\Gamma)$ ,  $\forall i$ ,  $v_i$  vérifie l'inégalité

$$\left| v_i(X) + v_i(X') - 2v_i\left(\frac{X + X'}{2}\right) \right| \leq K|X - X'|$$

pour tous les vecteurs  $X$  et  $X'$  (cf. Proposition 1.5 pour l'ouvert  $\Omega = ]0, 1[^{N-1}$ ). On utilise alors le Théorème 1.3 ci-dessous, valable pour un bord droit: ce théorème nécessite une démonstration très longue, qui est due en dimension 2 à Luc Tartar [26], et est reportée en appendice.

**THÉOREME 1.3.** *On suppose que  $\mathbf{u} \in C_c([0, 1]^{N-1})^N$  <sup>(10)</sup> vérifie  $\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_N) \mathbf{e}_N \in U^\infty([0, 1]^{N-1})$  et  $u_N = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_N$  vérifie la propriété de Zygmund, c'est-à-dire:  $\exists c > 0$ , telle que  $\forall X, X' \in ]0, 1]^{N-1}$*

$$(1.60) \quad \left| u_N(X) + u_N(X') - 2u_N\left(\frac{X + X'}{2}\right) \right| \leq c|X - X'| \quad (11).$$

Alors il existe  $V \in U^\infty([0, 1]^N)$  à support compact dans  $]0, 1]^N \cup ]0, 1]^{N-1} \times 0$ , tel que  $V$  est à support compact et  $V|_{]0, 1]^{N-1} \times 0} = \mathbf{u}$ . En outre la construction de  $V$  à partir de  $\mathbf{u}$  est linéaire et continue.

Soit donc  $V \in U^\infty([0, 1]^N)$ , à support compact dans  $]0, 1]^{N-1} \times 0 \cup ]0, 1]^N$ , tel que  $V(X', 0) = \mathbf{v}(x')$ . Nous définissons alors  $U$  dans  $\Omega$  par:

Pour  $i < N$

$$\begin{aligned} U_i(x', x_N) &= + [V_i(x', a(x') - x_N) + a_{,i} V_N(X', a(X') - X_N)] \\ U_N(x', x_N) &= - [V_N(x', a(x') - x_N)]. \end{aligned}$$

Calculons  $\varepsilon(U)$ ; pour  $i, j < N$

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= + [V_{i,j} + a_{,j} V_{i,N} + a_{,i} V_{N,j} + a_{,i} a_{,j} V_{N,N} + a_{,ij} V_N] \\ \varepsilon_{ij}(U) &= + [\varepsilon_{ij}(V) + a_{,j} \varepsilon_{iN}(V) + a_{,i} \varepsilon_{jN}(V) + a_{,ij} V_N + a_{,i} a_{,j} \varepsilon_{NN}(V)] \\ U_{i,N} &= - [V_{i,N} + a_{,i} V_{N,N}] \\ U_{N,i} &= - [V_{N,i} - a_{,i} V_{N,N}] \\ \varepsilon_{iN}(U) &= - [\varepsilon_{iN}(V) - a_{,i} \varepsilon_{NN}(V)] \\ U_{N,N} &= + V_{N,N} \end{aligned}$$

de sorte que  $\varepsilon(U) \in L^\infty(\Omega)$ . Calculons  $(U \cdot \mathbf{n})/I$ ;

$$\begin{aligned} U \cdot \mathbf{n} &= (- \sum U_i a_{,i} + U_N)(\sqrt{1 + |\nabla a|^2})^{-1} \\ &= (1 + |\nabla a|^2)^{-\frac{1}{2}} [- \sum V_i a_{,i} - (1 + |\nabla a|^2) V_N(x', 0)] \\ &= (1 + |\nabla a|^2)^{-\frac{1}{2}} [- \sum (u_i a_{,i} + a_{,i}^2 u_N) + (1 + |\nabla a|^2) u_N](x', a(x')) \\ &= (1 + |\nabla a|^2)^{-\frac{1}{2}} [- u_N + (1 + |\nabla a|^2 - |\nabla a|^2) u_N](x', a(x')) \\ &= 0. \end{aligned}$$

<sup>(10)</sup> En fait l'hypothèse  $\mathbf{u} \in L^1_{\text{loc}}([0, 1]^{N-1})^N$  suffit comme on peut le voir dans la démonstration du Théorème 1.3.

<sup>(11)</sup> Ce n'est pas autre chose que (1.34)bis pour les droites tracées sur  $]0, 1]^{N-1}$ .

Et, pour  $i \in [1, N - 1]$ :

$$\begin{aligned} U_i(x', a(x')) &= [V_i(x', a(x')) + a_{,i} V_N(x', a(x'))] \\ &= [(u_i + a_{,i} u_N)(x', a(x')) - a_{,i} u_N(x', a(x'))] \\ &= u_i(x', a(x')) . \end{aligned}$$

On a donc terminé la démonstration, en observant que la construction de  $U$  à partir de  $u$  est linéaire et continue.  $\square$

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.9.** i) On se ramène comme dans la proposition précédente à montrer le résultat pour  $u \in U^\infty(\Omega)$  à support compact dans  $\Omega \cup \Gamma$ ,  $\Omega$  et  $\Gamma$  définis par (1.58) et (1.59).

ii) Soit donc  $u$  comme ci-dessus; on définit dans  $]0, 1[^{N-1}$  la fonction  $\varphi$  par

$$\varphi(x') = -u(x', a(x'))(1 + |\nabla a|^2)^{-\frac{1}{2}};$$

il est facile de voir que  $\varphi$  vérifie la propriété de Zygmund (1.60) sur toutes les droites. Par conséquent, le Théorème (1.3) affirme l'existence de  $\psi \in U^\infty([0, 1]^N)$  à support compact dans  $(]0, 1[^{N-1} \times \mathbf{0}) \cup ]0, 1[^N$

$$\Psi(X', 0) = \varphi(x') e_N .$$

Soit alors  $U$  définie sur  $\Omega$  par:

$$\begin{aligned} U_i(x', x_N) &= (\psi_i + a_{,i} \psi_N)(x', a(x') - x_N) \\ U_N(x', x_N) &= -\psi_N(x', a(x') - x_N) . \end{aligned}$$

Calculons  $\varepsilon(U)$ . Nous avons, pour  $i, j \in [1, N - 1]$

$$U_{i,j} = \psi_{i,j} + a_{,ij} \psi_{i,N} + a_{,i} \psi_{N,j} + a_{,i} a_{,ij} \psi_{N,N} + a_{,ij} \psi_N ,$$

de sorte que

$$\varepsilon_{ij}(U) = \varepsilon_{ij}(\psi) + a_{,ij} \varepsilon_{iN}(\psi) + a_{,i} \varepsilon_{jN}(\psi) + a_{,i} a_{,j} \varepsilon_{NN}(\psi) + a_{,ij} \psi_N .$$

Pour  $i < N$ .

$$U_{i,N} = -\psi_{i,N} - a_{,i} \psi_{N,N}$$

$$U_{N,i} = -\psi_{N,i}$$

de sorte que

$$\varepsilon_{iN}(U) = -\varepsilon_{iN}(\psi) - \frac{1}{2} a_{,i} \psi_{N,N}$$

Enfin

$$\varepsilon_{NN}(U) = +\psi_{N,N}$$

et nous avons finalement  $U \in U^\infty(\Omega)$ . Calculons  $U/\Gamma$ :

Nous avons pour  $i < N$ ,

$$\begin{aligned} U_i(x', a(x')) &= a_{,i} \varphi(x') \\ &= -a_{,i} u(x', a(x')) (1 + |\nabla a|^2)^{-\frac{1}{2}} \\ U_N(x', a(x')) &= -\psi_N(x', 0) \\ &= +u(x', a(x')) (1 + |\nabla a|^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On trouve bien

$$U/\Gamma = u \cdot \langle n \rangle.$$

La construction de  $V$  à partir de  $u$  étant linéaire continue, on a le résultat.  $\square$

**DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE.** Soit  $u_m$  une suite bornée de  $Y_t(\Gamma) \times Y_r(\Gamma)$ . D'après le Théorème 1.2 il existe  $U_m$  bornée dans  $U^\infty(\Omega)$ , telle que  $U_m/\Gamma = u_m$ . Par la faible \* compacité des bornés de  $U^\infty(\Omega)$  on peut extraire de  $U_m$  une sous-suite qui converge faible \* dans tous les  $W^{1,p}$  (et dans  $U^\infty$  faible \*). Montrons qu'il y a en fait convergence forte. On a en effet

$$|\varepsilon(U_m)(X)|^p \leq C;$$

d'autre part  $|\varepsilon(U_m)|^p(X) \rightarrow |\varepsilon(v)|^p(X)$  presque partout; d'où finalement par le Théorème de convergence dominée

$$\int |\varepsilon(U_m)|^p \rightarrow \int |\varepsilon(v)|^p,$$

ce qui entraîne la convergence forte dans  $W^{1,p}$ . En particulier  $U_m \rightarrow v$  dans  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ ,  $\forall \lambda \in ]0, 1[$  d'après les Théorèmes d'injection de Sobolev; et donc  $u_m/\Gamma \rightarrow u/\Gamma$  dans  $W^{1-(1/p),p}(\Gamma) \cap C^{0,\lambda}(\Gamma)$ ,  $\forall \lambda \in ]0, 1[$ .  $\square$

## 2. - Etude de l'espace $Z(\Omega)$ .

Nous introduisons dans cette Section l'espace  $Z(\Omega, E)$  qui est l'espace naturel pour les contraintes dans le problème des matériaux à blocage.  $\Pi$



s'agit de:

$$(2.1) \quad Z(\Omega, E) = \{\sigma \in M^1(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)\}.$$

Nous donnons tout de suite l'exemple d'un élément de  $Z$  qui n'est pas dans  $L^1(\Omega, E)$ : on suppose que  $N = 2$  et  $\Omega = ]-1, +1[^2$ .

$$\sigma_{11} = \delta(x, 0), \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0,$$

où  $\delta$  désigne la mesure de dirac répartie sur  $]-1, +1[ \times \{0\}$ . Alors  $\sigma \in M^1(\Omega, E)$  et  $\operatorname{div} \sigma = 0$ .

L'espace  $Z$  est bien sûr un espace de Banach pour la norme naturelle

$$(2.2) \quad |\sigma|_Z = |\sigma|_T + |\operatorname{div} \sigma|_2 \quad (1^2).$$

Remarquons que  $Z(\Omega, E)$  n'étant pas de type local <sup>(13)</sup>, il n'est pas toujours facile à manipuler. Nous avons donc jugé utile d'introduire l'espace  $Z$ , qui est de type local, et contient  $Z$ . Il s'agit de:

$$(2.3) \quad \tilde{Z}(\Omega, E) = \{\sigma \in M^1(\Omega, E), \operatorname{div} \sigma \in M^1(\Omega, \mathbb{R}^N)\}.$$

Sur  $Z$  la topologie de la norme sera très peu employée. Nous introduisons ici deux autres topologies qui seront plus utiles à nos objectifs. Il s'agit d'une part, de la topologie faible, que l'on peut définir par la famille de distances  $s_\varphi$ , indexée par  $\varphi \in C_0(\Omega)$ :

$$(2.4) \quad s_\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \langle \sigma_1 - \sigma_2, \varphi \rangle + |\operatorname{div} \sigma_1 - \operatorname{div} \sigma_2|_2.$$

D'autre part, d'une topologie plus fine, intermédiaire entre la topologie définie par  $s_\varphi$  et la topologie de la norme. Pour la définir nous nous donnons une fonction  $f$  définie sur  $E$ , qui a une croissance au plus linéaire à l'infini et possède une fonction asymptote notée  $f_\infty$ , ce qui signifie que

$$(2.5) \quad \text{Il existe des constantes } a \text{ et } b > 0 \text{ telles que } \forall x \in E \quad f(x) \leq a|x| + b$$

$$(2.6) \quad \forall \xi \in E, \quad f_\infty(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t\xi)}{t} \quad \text{existe.}$$

<sup>(12)</sup>  $|\sigma|_T$  désigne la variation totale de la mesure bornée  $|\sigma|$ .

<sup>(13)</sup>  $X$  est dit de type local lorsque la propriété suivante est vérifiée:  $\forall u \in X, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \varphi u \in X$ .

L'étude faite par Demengel-Temam dans [6] permet alors de définir  $f(\mu)$  comme une mesure bornée sur  $\Omega$  lorsque  $\mu$  en est une. Soit alors  $d$  la famille de distances indexée par  $\varphi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ,  $\varphi \geq 0$ :

$$(2.7) \quad d_\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = |\langle |\sigma_1| - |\sigma_2|, \varphi \rangle| + |\operatorname{div} \sigma_1 - \operatorname{div} \sigma_2|_2 + ||f(\sigma_1)|_T - |f(\sigma_2)|_T|.$$

Remarquons qu'il est utile pour la suite d'introduire l'analogue de la distance  $d_\varphi$  sur l'espace  $\tilde{Z}$ . Nous notons donc  $\tilde{d}_\varphi$  la distance définie par

$$(2.8) \quad \tilde{d}_\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = |\langle |\sigma_1| - |\sigma_2|, \varphi \rangle| + ||\operatorname{div} \sigma_1|_T - |\operatorname{div} \sigma_2|_T| + ||f(\sigma_1)|_T - |f(\sigma_2)|_T|.$$

Le Théorème 2.1 qui suit est un résultat important de densité des fonctions de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, E)$  dans  $Z(\Omega, E)$  pour la topologie définie par  $d_\varphi$ , lorsque  $f$  vérifie, outre (2.5) et (2.6):

$$(2.9) \quad f \text{ est convexe et } f^* \text{ est bornée sur son domaine.}$$

**THÉORÈME 2.1.** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné ayant un bord  $C^1$  et que  $f$  vérifie (2.5), (2.6) et (2.9). Alors  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, E)$  est dense dans  $Z(\Omega, E)$  pour la topologie définie par les  $d_\varphi$  (resp.  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, E)$  est dense dans  $\tilde{Z}(\Omega, E)$  pour la topologie définie par les  $\tilde{d}_\varphi$ ).*

La démonstration de ce Théorème est assez longue et nécessite plusieurs étapes. Nous avons jugé utile de commencer par quelques lemmes techniques; la présentation en est ainsi allégée.

**LEMME 2.1.** *Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé qui vérifie:  $\exists x_0 \in \Omega$ , tel que si  $\Omega_\lambda$  est l'ouvert défini par*

$$\Omega_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N, x_0 + \lambda(x - x_0) \in \Omega\}$$

*alors pour  $\lambda > 1$ :*

$$(2.10) \quad \Omega_\lambda \subset \subset \Omega \subset \subset \Omega_{1/\lambda} \quad (14).$$

(14) La propriété (2.10) entraîne que  $\Omega$  est étoilé par rapport à  $x_0$ . La réciproque est fausse ainsi que le montre l'exemple suivant:

$$\Omega = \{x < 0 \cup (x \geq 0, y < 0)\}$$

$\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  étoilé/-1 (par exemple) et  $\bar{\Omega}_\lambda$  contient la droite  $y = 0$  qui n'est pas dans  $\Omega$ .

Soit  $\sigma \in \mathcal{D}'(\Omega, x)$  et  $\sigma_{1/\lambda}$  définie sur  $\Omega_{1/\lambda}$  par :

$$(2.11) \quad \langle \sigma_{1/\lambda}, \varphi \rangle = \lambda^N \langle \sigma, \varphi_\lambda \rangle_\Omega \quad (15)$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{1/\lambda})$  et  $\varphi_\lambda(x) = \varphi(x_0 + \lambda(x - x_0))$ .

i) Lorsque  $\sigma \in L^p(\Omega, X)$ ,  $\sigma_{1/\lambda} \in L^p(\Omega_{1/\lambda}, X)$  et  $\sigma_{1/\lambda} \rightarrow \sigma$  dans  $L^p(\Omega, X)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , et  $|\sigma_{1/\lambda}|_\infty \rightarrow |\sigma|_\infty$ .

ii) Lorsque  $\sigma \in M^1(\Omega, X)$ ,  $\sigma_\lambda \in M^1(\Omega_{1/\lambda}, X)$  et  $|\sigma_\lambda| \rightarrow |\sigma|$  étroitement <sup>(16)</sup> sur  $\Omega$ , quand  $\lambda \rightarrow 1$ .

En outre lorsque  $f$  est une fonction (non nécessairement convexe) qui vérifie (2.5) et (2.6), alors  $f(\sigma_\lambda)$  converge étroitement vers  $f(\sigma)$  sur  $\Omega$ .

i) Nous remarquons tout d'abord que si  $\sigma$  est une fonction,

$$(2.12) \quad \sigma_{1/\lambda}(x) = \sigma\left(x_0 + \frac{1}{\lambda}(x - x_0)\right), \quad \text{pour } x \text{ dans } \Omega_{1/\lambda}.$$

En effet soit  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}_{1/\lambda}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{1/\lambda}, \varphi \rangle &= \lambda^N \int_{\Omega} \sigma(x) \varphi(x_0 + \lambda(x - x_0)) \, dx \\ &= \lambda^N \int_{\Omega} \sigma\left(x_0 + \frac{1}{\lambda}(y - x_0)\right) \varphi(y) \, dy \end{aligned}$$

où l'on a posé  $y = x_0 + \lambda(x - x_0)$ . Dans ces conditions  $x \in \Omega \Leftrightarrow y \in \Omega_{1/\lambda}$  et nous obtenons, après changement de variable :

$$\langle \sigma_{1/\lambda}, \varphi \rangle = \int_{\Omega_{1/\lambda}} \sigma\left(x_0 + \frac{1}{\lambda}(y - x_0)\right) \varphi(y) \, dy,$$

ce qui entraîne l'égalité (2.12). Montrons que  $\sigma_{1/\lambda}$  converge vers  $\sigma$  dans  $L^p$ : pour ce faire, on établit lorsque  $p > 1$  la convergence de  $|\sigma_{1/\lambda}|_p$  vers  $|\sigma|_p$ . Cette propriété, jointe à la convergence au sens des mesures montrée dans i),

<sup>(15)</sup> Cette formule a un sens car si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{1/\lambda}, x)$  et si  $x \in \Omega$ ,  $x_0 + 1/\lambda(\lambda(x - x_0)) \in \Omega$  et donc  $x_0 + \lambda(x - x_0) \in \Omega_{1/\lambda}$  donc  $\varphi_\lambda \in \mathcal{D}(\Omega, x)$ .

<sup>(16)</sup> On rappelle que si  $\mu_n$  est une suite de mesures bornées sur  $\Omega$ ,  $\mu_n$  converge étroitement vers  $\mu$  sur  $\Omega$  si pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ,  $\langle \mu_n, \varphi \rangle$  converge vers  $\langle \mu, \varphi \rangle$ .

entraîne la convergence dans  $L^p$  lorsque  $p > 1$

$$\int_{\Omega} |\sigma_{1/\lambda}|^p = \int_{\Omega} \left| \sigma \left( x_0 + \frac{1}{\lambda} (y - x_0) \right) \right|^p dy = \frac{1}{\lambda^N} \int_{\Omega_\lambda} |\sigma(x)|^p dx \rightarrow \int_{\Omega} |\sigma|^p.$$

Lorsque  $p = 1$ , on remarque que  $\sigma_{1/\lambda}$  converge presque partout vers  $\sigma$  et que  $\sigma_{1/\lambda}$  est dominée par une fonction intégrable. Le Théorème de convergence dominée donne alors le résultat.

Si  $p = \infty$ , il y a convergence au sens:

$$\sigma_{1/\lambda} \rightarrow \sigma \quad \text{dans} \quad L^\infty \text{ faible } *$$

$$|\sigma_{1/\lambda}|_\infty \rightarrow |\sigma|_\infty.$$

ii) La convergence vague est aisée à vérifier, et nous en déduisons:

$$\int_{\Omega} |\sigma| \leq \varliminf \int_{\Omega} |\sigma_{1/\lambda}|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\sigma_{1/\lambda}| &= \sup_{\substack{|\varphi| \leq 1 \\ \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)}} \langle \sigma_{1/\lambda}, \varphi \rangle \\ &= \lambda^N \sup_{\substack{|\varphi| \leq 1 \\ \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)}} \int_{\Omega} \sigma(x) \varphi(x_0 + \lambda(x - x_0)) dx \\ &\leq \lambda^N \int_{\Omega} |\sigma|. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité

$$\varlimsup_{\lambda \rightarrow 1} \int_{\Omega} |\sigma_{1/\lambda}| \leq \int_{\Omega} |\sigma|$$

et finalement

$$\int_{\Omega} |\sigma| = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_{\Omega} |\sigma_{1/\lambda}|.$$

Or il est connu que la convergence des variations totales, jointe à la convergence vague, entraîne la convergence étroite des modules. Pour montrer la convergence étroite de  $f(\sigma_\lambda)$  vers  $f(\sigma)$ , supposons un instant que nous ayons montré que:

$$(2.13) \quad f(\sigma_\lambda) = (f(\sigma))_\lambda.$$

Alors la première partie de ii) nous donne le résultat. Montrons donc (2.13): la remarque suivante sera utile à cette fin: si  $\mu$  est une mesure sur  $\Omega$  qui est absolument continue par rapport à  $\nu \ll 0$ , soit  $\mu = h\nu$  où  $h$  est une fonction  $\nu$  mesurable, alors il est aisé de vérifier que:

$$(2.14) \quad (\mu)_{1/\lambda} = h_{1/\lambda} \nu_{1/\lambda}$$

avec  $h_{1/\lambda}(x) = h((1/\lambda)x)$  pour  $x$  dans  $\Omega_{1/\lambda}$  ( $h_{1/\lambda}$  est bien sûr  $\nu_{1/\lambda}$  mesurable). Maintenant si  $\sigma = g \, dx + \mu^s$  est la décomposition de Lebesgue de  $\sigma$ ,  $g$  étant  $dx$ -intégrable et  $\mu^s = h^s |\mu^s|$  étant une mesure singulière,

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{1/\lambda} &= g_{1/\lambda}(dx)_{1/\lambda} + (h^s)_{1/\lambda} |\mu^s|_{1/\lambda} \\ &= g_{1/\lambda} dx / \Omega_{1/\lambda} + (h^s)_{1/\lambda} |\mu^s|_{1/\lambda} \end{aligned}$$

est donc (par unicité) la décomposition de Lebesgue de  $\sigma_{1/\lambda}$  sur  $\Omega_{1/\lambda}$ . Maintenant nous rappelons que lorsque  $f$  vérifie (2.5) et (2.6),  $f(\sigma)$  est donnée par la formule:

$$(2.16) \quad f(\sigma) = f \circ g \, dx + f_\infty(h^s) |\mu^s|.$$

En utilisant (2.14), nous obtenons:

$$\begin{aligned} (f(\sigma))_{1/\lambda} &= (f \circ g)_{1/\lambda}(dx)_{1/\lambda} + (f_\infty(h^s))_{1/\lambda} |\mu^s|_{1/\lambda} \\ &= f \circ (g_{1/\lambda}) \, dx / \Omega_{1/\lambda} + f_\infty((h^s)_{1/\lambda}) |\mu^s|_{1/\lambda} \\ &= f(g_{1/\lambda} dx / \Omega_{1/\lambda} + (h^s)_{1/\lambda} |\mu^s|_{1/\lambda}) \\ &= f(\sigma_{1/\lambda}) \quad \text{en utilisant (2.15).} \end{aligned}$$

**LEMME 2.2.** *On suppose que  $\Omega$  vérifie encore (2.8). Alors si  $\sigma \in Z(\Omega, E)$  (resp.  $\sigma \in \tilde{Z}(\Omega, E)$ ), il existe  $\sigma_m \in C^\infty(\bar{\Omega}, E)$  tel que*

$$|\sigma_m| \rightarrow |\sigma| \quad \text{étroitement}$$

$$|\operatorname{div} \sigma| \rightarrow |\operatorname{div} \sigma| \quad \text{étroitement,}$$

$$(\text{resp. } \operatorname{div} \sigma_m \rightarrow \operatorname{div} \sigma \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)).$$

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\sigma \in M^1(\Omega, E)$ , tel que  $\operatorname{div} \sigma \in M^1$  (resp.  $\operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ) et soit  $\delta > 0$ ; le Lemme 2.1 assure l'existence de  $\alpha > 0$  tel

que pour  $|\lambda - 1| < \alpha$  on ait

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} |\sigma_{1/\lambda}| - \int_{\Omega} |\sigma| \right| < \delta \\ & \left| \int_{\Omega} |\operatorname{div} \sigma_{1/\lambda}| - \int_{\Omega} |\operatorname{div} \sigma| \right| < \delta \\ & \left( \text{resp. } \left( \int_{\Omega} |\operatorname{div} \sigma_{1/\lambda} - \operatorname{div} \sigma|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \delta \right) \\ & \left| \int_{\Omega} f(\sigma_{1/\lambda}) - f(\sigma) \right| < \delta. \end{aligned}$$

Soit alors  $\varepsilon_\lambda < d(\partial\Omega, \partial\Omega_{1/\lambda})$  et  $\varrho$  une fonction de  $\mathcal{D}(B(0, 1))$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\int \varrho = 1$  et  $\varrho_{\varepsilon_\lambda}$  définie par

$$\varrho_{\varepsilon_\lambda}(x) = \frac{1}{\varepsilon_\lambda^N} \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon_\lambda}\right).$$

La fonction

$$\sigma_{\varepsilon_\lambda} = \varrho_{\varepsilon_\lambda} * \sigma_{1/\lambda}$$

est bien sûr dans  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, E)$  et on peut choisir  $\varepsilon_\lambda$  assez petit pour que

$$\begin{aligned} & \left| \int |\sigma_{\varepsilon_\lambda}| - \int |\sigma_{1/\lambda}| \right| < \delta \\ & \left| \int |\operatorname{div} \sigma_{\varepsilon_\lambda}| - \int |\operatorname{div} \sigma_{1/\lambda}| \right| < \delta \\ & \text{resp. } \left( \int_{\Omega} |\operatorname{div} \sigma_{\varepsilon_\lambda} - \operatorname{div} \sigma|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \delta. \end{aligned}$$

Alors la fonction  $\sigma_{\varepsilon_\lambda}$  est dans  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, E)$  et vérifie

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} |\sigma_{\varepsilon_\lambda}| - \int_{\Omega} |\sigma| \right| < 2\delta \\ & \left| \int_{\Omega} |\operatorname{div} \sigma_{\varepsilon_\lambda}| - \int_{\Omega} |\operatorname{div} \sigma| \right| < 2\delta \\ & \text{resp. } \left( \int_{\Omega} |\operatorname{div} \sigma_{\varepsilon_\lambda} - \operatorname{div} \sigma|^2 < 2\delta \right). \end{aligned}$$

**LEMME 2.3.** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert dont le bord  $\partial\Omega$  est  $C^1$  et que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$ , avec  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  deux ouverts connexes disjoints de  $\Gamma$  et soit  $q$  un réel  $> N$ ,  $q'$  son conjugué.*

i) Si  $\text{mes } \Gamma_0 > 0$ . Soient  $f_m$  et  $f$  des mesures bornées sur  $\Omega$ ,  $F_m$  et  $F$  des éléments de  $W^{-1/q, q'}(\Gamma_1)$  qui vérifient:

$$\begin{aligned} f_m &\rightarrow f && \text{étroitement} \\ F_m &\rightarrow F && \text{dans } W^{-1/q, q'}(\Gamma_1). \end{aligned}$$

Alors il existe  $\sigma_m$  et  $\sigma$  dans  $L^{q'}$ , solutions respectives de

$$\begin{aligned} \text{div } \sigma_m + f_m &= 0 \\ \sigma_m \cdot n &= F_m \\ \text{div } \sigma + f &= 0 \\ \sigma \cdot n &= F|_{\Gamma_1} \end{aligned}$$

telles que

$$\sigma_m \rightarrow \sigma \text{ dans } L^{q'} \text{ fort}$$

ii) Si  $\text{mes } \Gamma_0 = 0$ . Le résultat précédent est valable en remplaçant  $M^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \times W^{-1/q, q'}(\Gamma)$  par le sous-espace

$$\left\{ (f, F) \in M^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \times W^{-1/q, q'}(\Gamma) \quad \text{tel que} \right. \\ \left. \int f r + \int F r = 0, \forall r \in \mathcal{R} \right\}.$$

DÉMONSTRATION. i) On suppose que  $\text{mes } \Gamma_0 > 0$ , et nous définissons le problème variationnel suivant, dépendant des données  $f$  et  $F$

$$P(f, F), \quad \inf_{\substack{u \in W^{1,q} \\ u=0|_{\Gamma_0}}} \left\{ \frac{1}{q} \int |\varepsilon(u)|^q - \int f u - \int_{\Gamma_1} F u \right\}.$$

Ce problème admet pour dual

$$P^*(f, F), \quad \sup_{\substack{\sigma \in L^{q'}(\Omega, E) \\ \text{div } \sigma + f = 0 \\ \sigma \cdot n = F|_{\Gamma_1}}} \left\{ -\frac{1}{q'} \int |\sigma|^{q'} \right\}.$$

Le critère classique d'Ekeland-Temam [8] donne aisément l'égalité  $\inf P(f, F) = \sup P^*(f, F)$ . En outre l'utilisation de l'inégalité de Korn dans  $W^{1,q}$  permet d'affirmer la coercivité de la fonctionnelle qu'on minimise dans  $P(f, F)$ . Nous obtenons ainsi l'existence (et même l'unicité compte tenu de la stricte convexité des fonctionnelles envisagées) d'un couple de solutions  $(\bar{u}, \bar{\sigma})$  aux problèmes  $P(f, F)$  et  $P^*(f, F)$ .  $\bar{u}$  et  $\bar{\sigma}$  sont alors liés par

la relation

$$(2.11) \quad \bar{\sigma} = |\varepsilon(\bar{u})|^{q-2} \varepsilon(\bar{u})$$

et en particulier

$$\begin{aligned} \int |\bar{\sigma}|^{q'} &= \int |\varepsilon(\bar{u})|^q = \int \bar{\sigma} \varepsilon(\bar{u}) = \int_{\Omega} f \bar{u} + \int_{\Gamma_1} F \bar{u} \\ &\leqslant c(|f|_T + |F|_{W^{-1/q, q'}(\Gamma_1)}) \|u\|_{W^{1, q}(\Omega)} \leqslant C'(|f|_{M^1} + |F|_{W^{-1/q, q'}(\Gamma_1)}) |\varepsilon(\bar{u})|_q. \end{aligned}$$

Compte tenu de  $u = 0|_{\Gamma_1}$  et de l'inégalité de Korn sur  $W^{1, q}(\Omega)$ , on en déduit que

$$(2.17) \quad |\varepsilon(\bar{u})|_q^{q-1} \leqslant C'(|f|_{M^1} + |F|_{W^{-1/q, q'}(\Gamma_1)})$$

et donc aussi

$$(2.18) \quad |\bar{\sigma}|_{q'} \leqslant C''(|f|_{M^1} + |F|_{W^{-1/q, q'}(\Gamma_1)}).$$

Supposons un instant que  $f_m \rightarrow f$  dans  $M^1$  étroitement et  $F_m \rightarrow F$  dans  $W^{-1/q, q'}(\Gamma_1)$ ,  $|f_m|_T + |F_m|_{W^{-1/q, q'}(\Gamma_1)}$  étant bornée, le couple  $(\bar{\sigma}_m, \bar{u}_m)$  solution de  $P^*(f_m, F_m)$  et  $P(f_m, F_m)$  est borné dans  $L^{q'} \times W^{1, q}$ . On en déduit à l'extraction d'une sous-suite près que

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_m &\rightarrow \sigma \quad \text{dans } L^{q'} \text{ faible étoile} \\ \bar{u}_m &\rightarrow u \quad \text{dans } W^{1, q} \text{ faible étoile.} \end{aligned}$$

Puisque l'injection de  $W^{1, q}$  dans  $C(\bar{\Omega})$  est compacte, nous pouvons aussi imposer à  $u_m$  de converger uniformément vers  $u$  sur  $\bar{\Omega}$ . En outre la convergence de  $\bar{\sigma}_m$  vers  $\sigma$  dans  $L^{q'}$  entraîne que  $\operatorname{div} \sigma_m$  converge vers  $\operatorname{div} \sigma$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . En particulier

$$\operatorname{div} \sigma_m + f = 0$$

et on a en fait la convergence étroite de  $\operatorname{div} \sigma_m$  vers  $\operatorname{div} \sigma$ . Maintenant la formule de Green pour  $v$  dans  $W^{1, q}(\Omega)$ ,  $v = 0$  sur  $\Gamma_0$ :

$$\int \varepsilon(v) \sigma_m + \int \operatorname{div} \sigma_m v = \int \sigma_m \cdot n v$$

donne par passage à la limite

$$\int \sigma \cdot n v = \int F v,$$

d'où

$$\sigma \cdot n = F \quad \text{sur } \Gamma_1.$$



D'autre part puisque  $u_m$  converge vers  $u$  uniformément et  $f_m$  converge vers  $f$  étroitement,  $\int f_m u_m$  converge vers  $\int f u$ . De même la convergence de  $F_m$  vers  $F$  dans  $W^{-1/q', q'}(I_1)$ , jointe à la convergence faible étoile de  $u_m$  vers  $u$  dans  $W^{1, q}$  entraîne celle de  $\int F_m u_m$  vers  $\int F u$ .

Nous obtenons alors, par semi-continuité inférieure:

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\varepsilon(\bar{u})|^q - \int_{\Omega} f \bar{u} - \int_{I_1} F \bar{u} &\leq \varliminf \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\varepsilon(u_m)|^q - \int_{\Omega} f_m u_m - \int_{I_1} F_m u_m \\
 &\leq \varliminf - \frac{1}{q'} \int_{\Omega} |\sigma_m|^{q'} \\
 &\leq \varliminf - \frac{1}{q'} \int_{\Omega} |\sigma_m|^{q'} \\
 &\leq - \frac{1}{q'} \int_{\Omega} |\bar{\sigma}|^{q'}.
 \end{aligned}$$

Maintenant la formule de Green donne

$$\int_{\Omega} f \bar{u} + \int_{I_1} F \bar{u} = \int_{\Omega} \varepsilon(\bar{u}) : \bar{\sigma}.$$

En utilisant alors l'inégalité

$$(2.20) \quad \frac{1}{q} |\varepsilon(\bar{u})|^q - \varepsilon(\bar{u}) : \sigma + \frac{1}{q'} |\bar{\sigma}|^{q'} \geq 0,$$

nous obtenons des égalités au lieu d'inégalités dans (2.19) et (2.20). Cela entraîne que  $\bar{u}$  et  $\bar{\sigma}$  sont les solutions respectives de  $P(f, F)$  et  $P^*(f, F)$ . Nous avons aussi obtenu dans ce qui précède la convergence de  $|\sigma_m|_q$  vers  $|\bar{\sigma}|_q$  et celle de  $|\varepsilon(u_m)|_r$  vers  $|\varepsilon(\bar{u})|_q$ . Ces propriétés jointes à la convergence faible  $*$  de  $\sigma_m$  vers  $\bar{\sigma}$  et de  $\varepsilon(u_m)$  vers  $\varepsilon(\bar{u})$  permettent d'affirmer la convergence forte de  $\sigma_m$  vers  $\bar{\sigma}$  et de  $\varepsilon(u_m)$  vers  $\varepsilon(\bar{u})$ . Enfin le raisonnement fait ne dépendant pas de la sous-suite choisie pour  $\sigma_m$  et pour  $u_m$ , c'est en fait toute la suite  $\sigma_m$  (resp.  $u_m$ ) qui converge vers  $\bar{\sigma}$  (resp.  $\bar{u}$ ).

ii) Lorsque mes  $\Gamma_0 = 0$ . On fait la même démarche que dans i), en remplaçant le problème  $P(f, F)$  par

$$P(f, F) \quad \inf_{u \in W^{1, q}(\mathcal{R})} \left\{ \frac{1}{q} \int |\varepsilon(u)|^q - \int f u - \int F u \right\}$$

dont le dual est

$$P^*(f, F) = \sup_{\substack{\sigma \in L^{q'}(\Omega, E) \\ \operatorname{div} \sigma + f = 0 \\ \sigma \cdot n = F}} \left\{ -\frac{1}{q'} \int |\sigma|^{q'} \right\}.$$

Ici la solution  $\bar{u}$  de  $P(f, F)$  est unique à un élément de  $\mathcal{R}$  près et  $\bar{\sigma} = |\sigma(\bar{u})|^{q-2}(\varepsilon(\bar{u}))$  est la solution de  $P^*(f, F)$ . En raisonnant comme dans i) on obtient la convergence de  $u_n$  vers  $\bar{u}$  dans  $W^{1,q}/\mathcal{R}$  et celle de  $\sigma_m$  vers  $\bar{\sigma}$  dans  $L^{q'}$ .

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration proprement dite du Théorème.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1.  $\delta > 0$  et  $\varphi \in C(\bar{\Omega})$  étant donnés, soit  $\Omega_0$  l'ouvert relativement compact de:

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) < r\}$$

où  $r$  est choisi assez petit pour que

$$(2.21) \quad \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) < \delta$$

$$(2.22) \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_0} |\sigma| < \delta$$

$$(2.23) \quad \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\operatorname{div} \sigma| < \delta$$

$$(2.24) \quad \int_{\partial\Omega_0} |\sigma| = 0.$$

Soit encore des ouverts  $\Omega_0'' \supset \Omega_0' \supset \Omega_0$  et un recouvrement de  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_0'$  par des ouverts  $\mathcal{O}_i$  en nombre fini, vérifiant (2.8) (ceci est possible car  $\partial\Omega$  a une frontière lipschitz). Soit aussi  $\varphi_i$ ,  $0 \leq i \leq m$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de  $\Omega$  par  $\Omega_0''$  et les  $\mathcal{O}_i$ ,  $\varphi_i$  à support dans  $\mathcal{O}_i$ ,  $i \leq i \leq m$ ,  $\varphi_0$  à support dans  $\Omega_0''$ ,  $\varphi_0 = 1$  sur  $\Omega_0$ . Nous pouvons écrire pour  $\sigma$  dans  $Z(\Omega, E)$ :

$$(2.25) \quad \sigma = \varphi_0 \sigma + \sum_{1 \leq i \leq m} \varphi_i \sigma,$$

et nous définissons  $\sigma_i = \varphi_i \sigma$  pour  $1 \leq i \leq m$ , qui appartient à  $\tilde{Z}(\mathcal{O}_i \cap \Omega, E)$ . Le Lemme 2.2 assure alors l'existence de  $\sigma_\delta^i$  dans  $C^\infty(\bar{\Omega}, E)$  tels que

$$(2.26) \quad \left| \int_\Omega |\sigma_\delta^i| - |\sigma^i| \right| \leq \delta/m \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m.$$

$$(2.27) \quad |\langle \operatorname{div} \sigma_\delta^i, \varphi \rangle - \langle \operatorname{div} \sigma^i, \varphi \rangle| \leq \delta/m$$

(on peut supposer que  $\sigma_\delta^i$  s'annule sur  $\bar{\Omega}_0$ ). D'autre part, on peut aussi choisir  $\eta > 0$  assez petit pour que

$$(2.28) \quad \Omega_0 + B(0, \eta) \subset \Omega'_0,$$

et

$$(2.29) \quad \left| \int_A |\varrho_\eta * \varphi_0 \sigma| - \int_A |\varphi_0 \sigma| \right| < \delta$$

$$(2.30) \quad \left| \int_A f(\varrho_\eta * \varphi_0 \sigma) - \int_A f(\varphi_0 \sigma) \right| < \delta, \quad \text{pour } A = \Omega_0, A = \Omega \setminus \Omega_0$$

$$(2.31) \quad \left| \int_\Omega \operatorname{div} (\varrho_\eta * \varphi_0 \sigma) \cdot \varphi - \int_\Omega \operatorname{div} (\varphi_0 \sigma) \cdot \varphi \right| < \delta.$$

En effet il est classique que  $|\varrho_\eta * \varphi_0 \sigma|$  converge étroitement vers  $|\varphi_0 \sigma|$  sur  $\mathbb{R}^N$ ; puisque  $\varphi_0 \sigma$  n'a pas de masse sur  $\partial A = \partial \Omega_0$  on a aussi

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_A |\varrho_\eta * \varphi_0 \sigma| = \int_A |\varphi_0 \sigma|$$

ce qui permet d'écrire (2.29). Pour justifier (2.30) on rappelle le lemme suivant, établi dans Demengel-Temam [6].

**LEMME 2.4.** *Supposons que  $f$  est convexe et satisfait (2.5), (2.6). Soit  $\mu \in M^1(\mathbb{R}^N)$  et  $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $0 \leq \varrho \leq 1$ ,  $\varrho(x) = 0$  pour  $|x| \geq 1$  et  $\int \varrho(x) dx = 1$ , alors*

$$f(\varrho_\varepsilon * \mu) \rightarrow f(\mu) \quad \text{étroitement sur } \Omega.$$

Nous définissons alors

$$(2.32) \quad \sigma^\delta = \varrho_\eta * \varphi_0 \sigma + \sum_{1 \leq i \leq m} \sigma_\delta^i$$

$\sigma^\delta$  appartient à  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, E)$ , et:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} \left| \int_\Omega |\sigma^\delta| - \int_\Omega |\sigma| \right| &= \left| \int_{\Omega_0} |\sigma^\delta| - \int_{\Omega_0} |\sigma| \right| + \left| \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma^\delta| - \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma| \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega_0} |\varrho_\eta * \varphi_0 \sigma| - \int_{\Omega_0} |\varphi_0 \sigma| \right| + \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma^\delta| + \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma|. \end{aligned}$$

Nous majorons

$$\begin{aligned}
 (2.34) \quad \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma^\delta| &\leq \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\varrho_\eta * \varphi_0 \sigma| + \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma^\delta_i| \\
 &\leq \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\varphi_0 \sigma| + \delta + \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega} |\sigma^\delta_i| \\
 &\leq \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\varphi_0 \sigma| + \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega} |\varphi_i \sigma| + 2\delta \\
 &\leq \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\varphi_0 \sigma| + \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\varphi_i \sigma| + 2\delta \\
 &\leq \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma| + 2\delta \\
 &\leq 3\delta.
 \end{aligned}$$

La conjonction de (2.29), (2.22) et (2.34) donne en remplaçant dans (2.33)

$$(2.35) \quad \left| \int_{\Omega} |\sigma^\delta| - \int_{\Omega} |\sigma| \right| \leq 5\delta.$$

Ensuite

$$(2.36) \quad \left| \int_{\Omega} f(\sigma^\delta) - \int_{\Omega} f(\sigma) \right| \leq \left| \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} f(\sigma^\delta) - f(\sigma) \right| + \left| \int_{\partial \bar{\Omega}_0} f(\sigma^\delta) - f(\sigma) \right|.$$

Car, puisque  $f(\sigma)$  est absolument continue par rapport à  $\sigma$ ,  $\int_{\partial \bar{\Omega}_0} f(\sigma) = 0$ . Ensuite en utilisant (2.5) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (2.37) \quad \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} f(\sigma^\delta) &\leq a \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma^\delta| + b \text{mes}(\Omega \setminus \bar{\Omega}_0) \\
 &\leq (3a + b)\delta \quad (\text{en utilisant (2.21) et (2.34)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.38) \quad \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} f(\sigma) &\leq a \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} |\sigma| + b \text{mes}(\Omega \setminus \bar{\Omega}_0) \\
 &\leq (a + b)\delta \quad (\text{par (2.21) et (2.22)}).
 \end{aligned}$$

En rassemblant (2.37), (2.38) et (2.30), nous avons

$$(2.39) \quad \left| \int_{\Omega} f(\sigma^\delta) - \int_{\Omega} f(\sigma) \right| \leq (4a + b + 1)\delta.$$

Enfin, la conjonction de (2.31) et (2.27) donne

$$|\langle \operatorname{div} \sigma_\delta, \varphi \rangle - \langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle| < 2\delta ,$$

ce qui termine la démonstration de la première étape.

ii) Soit  $\sigma \in Z(\Omega, E)$  et  $\sigma_m$  une suite comme dans la première étape, c'est-à-dire telle que

$$|\sigma_m| \rightarrow |\sigma| \quad \text{étroitement}$$

$$\operatorname{div} \sigma_m \rightarrow \operatorname{div} \sigma \quad \text{étroitement}$$

$$f(\sigma_m) \rightarrow f(\sigma) \quad \text{étroitement .}$$

Nous allons montrer l'existence d'une suite  $\sigma'_m \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, E)$  telle que

$$|\sigma'_m| \rightarrow |\sigma| \quad \text{étroitement}$$

$$\operatorname{div} \sigma'_m \rightarrow \operatorname{div} \sigma \quad \text{dans } L^2$$

$$f(\sigma'_m) \rightarrow f(\sigma) \quad \text{dans } L^2 .$$

En outre, si  $\Gamma_1$  est un ouvert connexe de  $\Gamma$ , on peut imposer que

$$(\sigma'_m - \sigma_m) \cdot n|_{\Gamma_1} = r_m , \quad r_m \in \mathcal{R}, \quad r_m \rightarrow 0$$

$$(\text{et même } r_m = 0 \text{ si } \operatorname{mes} \Gamma_1 \neq \operatorname{mes} \Gamma) .$$

En effet si on suppose  $\operatorname{mes} \Gamma_1 \neq \operatorname{mes} \Gamma$ , nous sommes dans la situation du Lemme 2.3.

i) Puisque  $\operatorname{div} \sigma_m$  converge vers  $\operatorname{div} \sigma$  étroitement,  $\theta_m - \operatorname{div} \sigma_m$  converge étroitement vers 0. Le Lemme 2.3 appliqué à  $q = N + 1$ ,  $f_m = -\operatorname{div} \sigma_m$ ,  $f = -\operatorname{div} \sigma$ ,  $F_m = 0$ ,  $F = 0$ , entraîne l'existence d'une suite  $w_m$  dans  $L^{(N+1)/N}$ , telle que

$$\operatorname{div} w_m = \theta_m - \operatorname{div} \sigma_m$$

$$w_m \cdot n = 0|_{\Gamma_1}$$

et

$$|w_m|_{(N+1)/N} \rightarrow 0 .$$

Si on suppose que  $\Gamma_1 = \Gamma$ , soit  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq N(N-1)/2}$  une base orthonormée de

$\mathcal{R}$  et  $\alpha_m$  la suite de déplacements rigides définie par

$$\alpha_m = \sum_{1 \leq i \leq N(N-1)/2} \left[ \int |\theta_m - \operatorname{div} \sigma_m| e_i \right] e_i.$$

La convergence étroite de  $\theta_m - \operatorname{div} \sigma_m$  vers 0 entraîne celle de  $\alpha_m$  vers 0. Le Lemme 3 ii) assure alors l'existence de  $w_m \in L^{N+1/N}$  telle que

$$\operatorname{div} w_m = \theta_m - \operatorname{div} \sigma_m$$

$$w_m \cdot n = \alpha_m$$

et

$$|w_m|_{N+1/N} \rightarrow 0.$$

Dans chacun des cas envisagés, la suite

$$\sigma'_m = w_m + \sigma_m$$

vérifie

$$\sigma'_m \in C^\infty(\bar{\Omega}, E)$$

$$|\sigma'_m|_T \rightarrow |\sigma| \quad \text{étroitement (car } |w_m|_1 \leq c|w_m|_{N+1/N})$$

$$\operatorname{div}(w_m + \sigma_m) = \theta_m \quad \text{converge vers } \operatorname{div} \sigma \text{ dans } L^2(\Omega, E),$$

$$(\sigma'_m - \sigma_m) \cdot n = w_m \cdot n \quad \text{qui est nul dans le premier cas et} \\ \text{tend vers 0 dans le deuxième cas.}$$

Pour terminer, on peut remarquer que la convexité de  $f$  et l'hypothèse de croissance linéaire à l'infini entraînent que  $f$  est lipschitzienne; nous avons alors

$$|f(\sigma_m + w_m) - f(\sigma_m)|_1 \leq c|w_m|_1 \leq c|w_m|_{N+1/N}$$

de sorte que la convergence étroite de  $f(w_m + \sigma_m)$  vers  $f(\sigma)$  résulte de celle de  $f(\sigma_m)$  vers  $f(\sigma)$ .

REMARQUE 2.1. Nous pourrions prendre dans ii)  $\theta_m = \operatorname{div} \sigma$ . C'est de cette façon que nous utiliserons le Théorème dans la partie 2 concernant l'existence d'une solution au problème de blocage.

### 3. – Dualité entre $U_\infty$ et $Z$ .

#### 3.1. Formule de Green sur $U_\infty \times Z$ .

Le but de cette Section est de donner un sens au produit  $\langle \sigma \cdot n, u \rangle$  lorsque  $u$  est dans  $\gamma_0(U_\infty)$ , le crochet désignant la dualité introduite au § 1. entre  $\gamma_0(U_\infty)$  et son dual pour la topologie d'espace normé. L'établissement d'une formule de Green sur  $U_\infty \times Z$  montrera que lorsque  $\sigma$  est assez régulier,  $\sigma \cdot n$  a sa signification classique, c'est-à-dire  $(\sigma_{ij} n_j)(x)$ .

Il est possible de définir  $\sigma \cdot n$  en temps qu'élément du dual de  $C^1(\partial\Omega)$ . En effet si  $v \in C^1(\partial\Omega)$ , soit  $V$  dans  $C^1(\bar{\Omega})$ , tel que  $V = v|_r$  et  $|V|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq |v|_{C^1(\partial\Omega)}$ . On définit

$$(3.1) \quad \langle \sigma \cdot n, v \rangle = \int_{\Omega} \varepsilon(V) d\sigma + \langle \operatorname{div} \sigma, V \rangle.$$

Il est facile de voir que  $\langle \sigma \cdot n, v \rangle$  ainsi défini ne dépend que de  $v$  et non de  $V$  choisi tel que  $V = v|_r$ . En outre  $|\langle \sigma \cdot n, v \rangle| \leq |\sigma|_Z |V|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq |\sigma|_Z |v|_{C^1(\partial\Omega)}$  ce qui prouve que  $v \rightarrow \langle \sigma \cdot n, v \rangle$  est bien linéaire continue.

Nous montrons dans la Proposition 3.1 suivante qu'il est possible de définir  $\sigma \cdot n$  dans le dual de  $\gamma_0(U^\infty(\Omega))$ :

**PROPOSITION 3.1.** *Il existe une application linéaire continue*

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow \gamma_0(U^\infty)' \\ \sigma &\rightarrow \sigma \cdot n \end{aligned}$$

*telle que la formule de Green suivante soit vraie:*

$$(3.2) \quad \forall u \in C(\bar{\Omega}), \quad \text{tel que} \quad \varepsilon(u) \in C_b(\Omega)$$

$$\langle \sigma \cdot n, u \rangle = \int_{\Omega} \varepsilon(u) d\sigma + \int_{\Omega} u \operatorname{div} \sigma.$$

**DÉMONSTRATION.** Pour  $\sigma \in Z(\Omega, E)$ , on définit l'application linéaire continue sur  $U^\infty(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ .

$$u \rightarrow L_\sigma(u) = \int_{\Omega} \varepsilon(u) d\sigma + \int_{\Omega} u \operatorname{div} \sigma.$$

Montrons que  $L_\sigma(u)$  ne dépend que de la valeur de  $u$  sur le bord. Supposons que  $u = 0$  sur le bord. Soit alors une suite  $u_m$  comme dans la Proposi-

tion 1.1 de la Section I,  $u_m \in C_m^\infty(\Omega)$ . Il est facile de voir que la suite  $u_m$  construite vérifie, puisque  $\varepsilon(u)$  est continue dans  $\Omega$ :

$$u_m \rightarrow u \quad \text{uniformément sur } \bar{\Omega}$$

$$\varepsilon(u_m) \rightarrow \varepsilon(u) \quad \text{simplement dans } \Omega, \text{ et uniformément sur tout compact de } \Omega.$$

Puisque  $|\varepsilon(u_m)|$  est uniformément majorée le Théorème de convergence dominée pour la mesure  $\sigma$  permet de dire que

$$\langle \sigma : \varepsilon(u_m) \rangle \rightarrow \langle \sigma : \varepsilon(u) \rangle.$$

Par définition de la distribution  $\operatorname{div} \sigma$  et en utilisant  $u_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ , nous avons  $L_\sigma(u_m) = 0$  de sorte que

$$L_\sigma(u) = \langle \sigma : \varepsilon(u) \rangle + \int u \operatorname{div} \sigma = \lim \langle \sigma : \varepsilon(u_m) \rangle + \int u_m \operatorname{div} \sigma = \lim L_\sigma(u_m) = 0,$$

et l'application  $L_\sigma$  est bien définie. Sa linéarité est triviale. Vérifions qu'elle est continue: soit  $u \in \gamma_0(U^\infty(\Omega))$  et  $\delta > 0$ ; par définition de  $|u|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))}$  et en utilisant la Proposition 1.2, il existe  $U_\delta \in U^\infty(\Omega) \cap C^1(\Omega)$  tel que

$$|U_\delta|_{U^\infty(\Omega)} \leq (1 + \delta) |u|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))}.$$

Alors

$$|L_\sigma(u)| = \left| \int (\sigma : \varepsilon(U_\delta)) + \int \operatorname{div} \sigma U_\delta \right| \leq |\sigma|_Z |U_\delta|_{U^\infty(\Omega)} \leq (1 + \delta) |\sigma|_Z |u|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))}$$

et  $\delta$  étant arbitraire nous avons

$$|L_\sigma(u)| \leq |\sigma|_Z |u|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))}.$$

L'inégalité précédente assure donc l'existence d'un élément  $\sigma \cdot n$  dans le dual de  $\gamma_0(U^\infty)$  tel que

$$(3.3) \quad |\sigma \cdot n|_{\gamma_0(U)'} \leq |\sigma|_Z$$

et ceci termine la démonstration de la Proposition 3.1.

Nous pouvons accéder à ce résultat par une méthode moins directe mais qui présente l'avantage de n'utiliser que  $U_\infty(\Omega)$ . On commence par définir une mesure bornée notée  $(\varepsilon(u) : \sigma)$ , lorsque  $u$  est dans  $U^\infty(\Omega)$  et  $\sigma$  dans  $Z$ . Cette mesure sera fort utile pour le théorème d'existence concernant les matériaux à blocage.



**THÉOREME 3.1.** *Soit  $v$  dans  $U^\infty(\Omega)$  et  $\sigma$  dans  $Z$ . Pour  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  on définit une distribution par :*

$$(3.4) \quad \langle (\varepsilon(v) : \sigma), \varphi \rangle = - \langle \operatorname{div} \sigma, v\varphi \rangle - \langle \sigma, v \nabla \varphi \rangle.$$

Alors

i)  $(\varepsilon(v) : \sigma)$  est une mesure bornée, absolument continue par rapport à  $|\sigma|$ , qui coïncide avec la mesure  $\varepsilon(v) \cdot \sigma$  lorsque  $\varepsilon(v) \in C_b(\Omega)$ . Plus précisément, l'inégalité suivante a lieu

$$(3.5) \quad |\varepsilon(v) : \sigma| \leq |\varepsilon(v)|_\infty |\sigma|.$$

ii) Lorsque  $\sigma_n$  converge faiblement vers  $\sigma$  dans  $Z$  et  $v_n$  converge faiblement dans  $U^\infty(\Omega)$  vers  $v$ ,  $\varepsilon(v_n) : \sigma_n$  converge vaguement vers  $\varepsilon(v) : \sigma$ . Si de plus  $|\sigma_n|$  converge vers  $|\sigma|$  étroitement,  $\varepsilon(v_n) : \sigma_n$  converge vers  $\varepsilon(v) : \sigma$  étroitement.

iii) Soit  $\sigma = G dx + \mu_s$  la décomposition de Lebesgue de  $\sigma$ ,  $\mu_s$  étant singulière et  $G$  intégrable pour  $dx$ , et soit  $\mu_s : \varepsilon(u) = \sigma : \varepsilon(u) - G : \varepsilon(u)$ . Alors  $\mu_s : \varepsilon(u)$  est une mesure bornée singulière, absolument continue relativement à  $|\mu_s|$ .

**DÉMONSTRATION.** Le membre de droite de (3.4) définit bien une distribution puisque  $U_\infty \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ . Pour montrer qu'elle est une mesure, il nous suffit de vérifier l'inégalité

$$(3.6) \quad |\langle \varepsilon(v) : \sigma, \varphi \rangle| \leq |\varepsilon(v)|_\infty \langle |\sigma|, |\varphi| \rangle$$

pour tout  $\varphi$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$ .

Soit donc  $\varphi$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$  et  $\varepsilon < d$  ( $\operatorname{Sup}^t \varphi, \partial\Omega$ ),  $\varrho$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , paire, égale à 1 dans un voisinage de 0, d'intégrale égale à 1, et  $\varrho_\varepsilon = (1/\varepsilon^N) \varrho(\cdot/\varepsilon)$ . La fonction  $v_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * v$  est dans  $\mathcal{D}(\operatorname{Sup}^t \varphi)$  et vérifie

$$(3.7) \quad v_\varepsilon \rightarrow v \quad \text{dans } C(\operatorname{Sup}^t \varphi)$$

$$(3.8) \quad \varepsilon(v_\varepsilon) \rightarrow \varepsilon(v) \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible étoile}$$

et

$$(3.9) \quad \begin{aligned} |\varepsilon(v_\varepsilon)|_{L^\infty(\operatorname{Sup}^t \varphi)} &\leq |\varrho_\varepsilon * \widetilde{\varepsilon(v)}|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq |\widetilde{\varepsilon(v)}|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq |\varepsilon(v)|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

où  $\widetilde{\varepsilon(v)}$  désigne la prolongée de  $\varepsilon(v)$  par 0 hors de  $\Omega$ . Compte tenu de (3.7)

l'expression

$$(3.10) \quad \langle \operatorname{div} \sigma, v_\varepsilon \varphi \rangle + \langle \sigma, v_\varepsilon \nabla \varphi \rangle$$

converge alors vers  $\langle \operatorname{div} \sigma, v \varphi \rangle + \langle \sigma, v \nabla \varphi \rangle = - \langle \varepsilon(v) : \sigma, \varphi \rangle$ . Mais (3.10) n'est autre que  $-\int \varepsilon(v_\varepsilon) \varphi \, d\sigma$  de sorte qu'en utilisant (3.9):

$$\begin{aligned} |\langle \sigma, \varepsilon(v_\varepsilon) \varphi \rangle| &\leq |\varepsilon(v_\varepsilon)|_{L^\infty(\operatorname{supp} \varphi)} \langle |\sigma|, |\varphi| \rangle \\ &\leq |\varepsilon(v)|_\infty \langle |\sigma|, |\varphi| \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque  $\varepsilon(v) \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ ,  $\varepsilon(v\varphi) \in \mathcal{C}_0(\Omega)$  et  $\langle \sigma, \varepsilon(v\varphi) \rangle = \langle \sigma, \varepsilon(v)\varphi \rangle + \langle \sigma, \nabla \varphi v \rangle$ ,  
 $= \langle \sigma : \varepsilon(v), \varphi \rangle + \langle \sigma, \nabla \varphi v \rangle$ . Mais en utilisant par exemple la formule de Green (3.1) avec  $V = v\varphi$  qui est dans  $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ , on obtient

$$\langle \sigma, \varepsilon(v\varphi) \rangle = - \langle \operatorname{div} \sigma, v\varphi \rangle$$

de sorte que

$$\langle \sigma : \varepsilon(v), \varphi \rangle = - \langle \operatorname{div} \sigma, v\varphi \rangle - \langle \sigma, \nabla \varphi v \rangle$$

et ceci termine la démonstration de i).

ii) Supposons que  $v_n$  converge faiblement vers  $v$  et que  $\sigma_n$  converge faiblement vers  $\sigma$  dans  $\tilde{\mathcal{Z}}$ . Nous allons montrer d'une part que  $\varepsilon(v_n) : \sigma_n$  converge au sens des distributions vers  $\varepsilon(v) : \sigma$  et d'autre part est de variation totale uniformément bornée. Cela suffira à affirmer la convergence vague. Soit  $K$  un réel  $> 0$  tel que  $|\varepsilon(v_n)|_\infty + |\sigma_n|_T + |\operatorname{div} \sigma_n|_T \leq K$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Soit aussi  $\eta > 0$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$  et  $N$  assez grand pour que si  $n > N$ ,

$$\begin{aligned} |v_n - v|_\infty &< \frac{\eta}{K(|\nabla \varphi|_\infty + |\varphi|_\infty + 1)} \\ \left| \int_\Omega (\sigma_n - \sigma) v \nabla \varphi \right| &< \eta \\ \left| \int_\Omega (\operatorname{div} \sigma_n - \operatorname{div} \sigma) v \varphi \right| &< \eta. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} |\langle \varepsilon(v_n) : \sigma_n, \varphi \rangle - \langle \varepsilon(v) : \sigma, \varphi \rangle| &= \left| - \int_\Omega (v_n - v) \operatorname{div} \sigma_n \varphi - \int_\Omega v (\operatorname{div} \sigma_n - \operatorname{div} \sigma) \varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_\Omega (v_n - v) \sigma_n \nabla \varphi - \int_\Omega v (\sigma_n - \sigma) \nabla \varphi \right| \leq 3\eta. \end{aligned}$$

Ensuite en utilisant (3.9):

$$|\varepsilon(v_n) : \sigma_n|_T \leq |\varepsilon(v_n)|_\infty |\sigma_n|_T \leq K^2.$$

Supposons maintenant que  $|\sigma_n| \rightarrow |\sigma|$  étroitement. D'après ce qui précède  $\varepsilon(v_n): \sigma_n$  converge vers  $\varepsilon(v): \sigma$  vaguement. La convergence étroite résultera encore de (3.9) et du lemme suivant, montré dans Demengel-Temam [6]:

**LEMME 3.1.** *Soit  $\mu_n$  une suite de mesures bornées sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , qui converge vaguement vers une mesure bornée  $\mu$ . Alors i)  $\Rightarrow$  ii):*

i)  $\forall \varepsilon > 0, \exists K$  compact, tq,  $|\mu_n|(\Omega \setminus K) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ ;

ii)  $\mu_n$  converge vers  $\mu$  étroitement.

En outre, si  $\mu_n$  et  $\mu$  sont de signe constant ii)  $\Rightarrow$  i).

En effet puisque  $|\sigma_n| \rightarrow |\sigma|$  étroitement, le lemme 1) ii)  $\rightarrow$  i) assure pour  $\eta > 0$  donné l'existence d'un compact  $K_1$  de  $\Omega$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sigma_n|(\Omega \setminus K_1) < \frac{\eta}{K},$$

(où  $K$  a été choisi plus grand que  $|\varepsilon(v_n)|_\infty, \forall n \in \mathbb{N}$ ). De l'inégalité (3.9) il résulte que

$$\begin{aligned} |\varepsilon(v_n): \sigma_n|(\Omega \setminus K_1) &\leq |\varepsilon(v_n)|_\infty |\sigma_n|(\Omega \setminus K_1) \\ &\leq \frac{K\eta}{K} \end{aligned}$$

et la partie i)  $\Rightarrow$  ii) du Lemme 3.1 montre que  $\varepsilon(v_n): \sigma_n$  converge étroitement vers  $\varepsilon(v): \sigma$ .

iii) On définit  $\mu_s: \varepsilon(u)$  comme la différence

$$(\sigma: \varepsilon(u)) - (\varepsilon(u): G) \, dx.$$

Soit  $\varphi$  dans  $C_0(\Omega)$  et comme dans i) une suite  $u_n$  telle que

$$\begin{aligned} u_n &\in C^\infty(\text{Sup}^t \varphi) \\ u_n &\rightarrow u \quad \text{dans } C(\text{Sup}^t \varphi) \\ \varepsilon(u_n) &\rightarrow \varepsilon(u) \quad \text{dans } L^\infty(\text{Sup}^t \varphi) \text{ faible étoile.} \end{aligned}$$

En suivant la démonstration de i), on voit que

$$\langle (\sigma: \varepsilon(u_n)), \varphi \rangle \rightarrow \langle (\sigma: \varepsilon(u)), \varphi \rangle$$

et

$$\int (\varepsilon(u_n):G)\varphi \, dx \rightarrow \int (\varepsilon(u):G)\varphi \, dx .$$

Or

$$\langle (\sigma:\varepsilon(u_n)) - (\varepsilon(u_n):G), \varphi \rangle = \langle \mu_s:\varepsilon(u_n)\varphi \rangle$$

au sens classique. En particulier

$$|\mu^s:\varepsilon(u_n)| \leq |\mu^s| |\varepsilon(u_n)|_\infty .$$

On obtient donc par passage à la limite

$$\begin{aligned} |\mu_s:\varepsilon(u)| &\leq |\mu_s| \overline{\lim} |\varepsilon(u_n)|_\infty \\ &\leq |\mu_s| |\varepsilon(u)|_\infty . \quad \square \end{aligned}$$

La Proposition 3.2 suivante assure le lien avec la Proposition 3.1. Il s'agit d'établir une formule de Green sur  $U^\infty$ :

PROPOSITION 3.2. i) On suppose que  $u \in U^\infty$ ,  $\sigma \in Z$  et  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ . Alors

$$(3.11) \quad \langle (\varepsilon(u):\sigma), \varphi \rangle + \langle \operatorname{div} \sigma, u\varphi \rangle = \langle \sigma \cdot n, u\varphi \rangle - \langle \sigma, u \nabla \varphi \rangle$$

où  $\langle \sigma \cdot n, u\varphi \rangle$  est pris au sens de la Proposition 3.1.

En particulier on a la formule de Green:

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} (\varepsilon(u):\sigma) + \langle \operatorname{div} \sigma, u \rangle = \langle \sigma \cdot n, u \rangle .$$

DÉMONSTRATION. Soit  $u_m$  donnée par la Proposition 1.2 de la Section 1,  $u_m \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\varepsilon(u_m) \in C_b(\Omega, E)$ ,  $|\varepsilon(u_m)|_\infty \rightarrow |\varepsilon(u)|_\infty$ , et  $u_m = u|_T$ . Alors le Théorème 1) ii) assure la convergence de  $\langle \varepsilon(u_m):\sigma, \varphi \rangle$  vers  $\langle \varepsilon(u):\sigma, \varphi \rangle$  pour  $\varphi$  dans  $C(\bar{\Omega})$ . Or la mesure  $\varepsilon(u_m):\sigma$  n'est autre que la mesure définie par  $\varphi \in C_0(\bar{\Omega})$  par  $\langle (\varepsilon(u_m):\sigma), \varphi \rangle = \langle \sigma, \varepsilon(u_m)\varphi \rangle$ . Puisque  $(u_m\varphi) \in C(\bar{\Omega})$  et  $\varepsilon(u_m\varphi) \in C_b(\bar{\Omega})$ , la Formule de Green (3.1) donne alors:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \cdot n, u\varphi \rangle &= \int_{\Omega} \sigma:\varepsilon(u_m\varphi) + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u_m\varphi \\ &= \langle \sigma:\varepsilon(u_m)\varphi \rangle + \int_{\Omega} \sigma:u_m \nabla \varphi + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u_m\varphi . \end{aligned}$$

Or comme on l'a déjà fait remarquer, le membre de droite converge vers  $\langle (\sigma:\varepsilon(u)), \varphi \rangle + \langle \sigma u \nabla \varphi \rangle + \langle \operatorname{div} \sigma, u\varphi \rangle$  et (3.11) est donc établi.

REMARQUE 3.1. Nous proposons ici une démonstration de l'existence de  $\sigma \cdot n$  dans le dual de  $\gamma_0(U^\infty)$  sans faire appel à l'espace  $C^1(\Omega) \cap U^\infty(\Omega)$ , mais en utilisant en revanche le Théorème 3.1.

Pour  $\sigma$  dans  $Z$ , nous montrons l'existence de  $\sigma \cdot n \in \gamma_0(U^\infty(\Omega))'$  tel que la formule de Green suivante a lieu pour tout  $u$  de  $U^\infty(\Omega)$ :

$$(3.13) \quad \langle \sigma \cdot n, \gamma_0 u \rangle = \int_{\Omega} (\varepsilon(u) : \sigma) + \langle \operatorname{div} \sigma, u \rangle.$$

PREUVE. Pour  $u$  dans  $\gamma_0(U^\infty)$ , soit  $U \in U^\infty(\Omega)$  tel que  $\gamma_0 U = u$ . Alors l'expression

$$L_\sigma(u) = \int_{\Omega} (\varepsilon(u) : \sigma) + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma, u$$

ne dépend pas de  $U$  mais seulement de  $\gamma_0 U = u$ . En effet supposons  $\gamma_0 U = 0$ ; alors d'après la Proposition (1.1) il existe  $u_m$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$u_m \rightarrow u \quad \text{dans } C(\bar{\Omega})$$

$$\varepsilon(u_m) \rightarrow \varepsilon(u) \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile.}$$

Mais puisque  $u_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ :

$$\langle \operatorname{div} \sigma, u_m \rangle = - \langle \sigma, \varepsilon(u_m) \rangle$$

de sorte que  $L_\sigma(u_m) = 0$ . Ensuite la convergence faible de  $u_m$  vers  $u$  dans  $U$  entraîne celle de  $\langle \operatorname{div} \sigma, u_m \rangle$  vers  $\langle \operatorname{div} \sigma, u \rangle$  ainsi que celle de  $\int (\varepsilon(u_m) : \sigma)$  vers  $\int (\varepsilon(u) : \sigma)$  (d'après le Théorème (3.1) ii). Par passage à la limite on obtient donc  $L_\sigma(u) = 0$ . En utilisant encore l'invariance de  $L_\sigma(u)$  par rapport au représentant  $U$  tel que  $\gamma_0 U = u$ , on prouve que  $L_\sigma$  est linéaire. Pour vérifier la continuité de  $L_\sigma$  soit alors, pour  $\delta > 0$ ,  $U_\delta$  dans  $U_\infty(\Omega)$  tel que  $U|_T = u$  et  $|U_\delta|_{U^\infty(\Omega)} = |u|_{\gamma_0(U_\infty)}$ . Alors

$$\begin{aligned} L_\sigma(u) &= \int_{\Omega} \varepsilon(U_\delta) : \sigma + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma U_\delta \\ &\leq |\varepsilon(U_\delta)|_\infty |\sigma|_T + |\operatorname{div} \sigma|_T |U_\delta|_\infty \\ &\leq |U_\delta|_{U^\infty(\Omega)} |\sigma|_Z \\ &\leq |u|_{\gamma_0(U^\infty)} |\sigma|_Z. \end{aligned}$$

On note alors  $\sigma \cdot n$  l'élément de  $\gamma_0(U_\infty)'$  tel que

$$L_\sigma(u) = \langle \sigma \cdot n, u \rangle.$$

Il est trivial que la formule de Green (3.13) est vérifiée.

Nous montrons maintenant un résultat de continuité de la trace  $\sigma \cdot n$  pour la topologie définie dans la Section 2.

PROPOSITION 3.3. *On suppose que*

$$(3.14) \quad \begin{array}{ll} |\sigma_m| \rightarrow |\sigma| & \text{étroitement sur } \Omega \\ \operatorname{div} \sigma_m \rightarrow \operatorname{div} \sigma & \text{étroitement sur } \Omega \end{array}$$

et que

$$(3.15) \quad \begin{array}{ll} u_m \in U^\infty(\Omega) \\ u_m \rightarrow u & \text{dans } U^\infty(\Omega) \text{ faiblement.} \end{array}$$

Alors

$$i) \quad \int \sigma_m \cdot n u_m \rightarrow \int \sigma \cdot n u.$$

$$ii) \quad \text{Si (3.14) est réalisé on a } |\sigma_m \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty)'} \rightarrow |\sigma \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty)'}$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.3. i) Il suffit d'utiliser le Théorème 1) i) lorsque  $|\sigma_n| \rightarrow |\sigma|$  étroitement et la formule de Green (3.12). En effet la convergence étroite de  $|\sigma_m|$  vers  $|\sigma|$  entraîne celle de  $\varepsilon(u_m) : \sigma_m$  vers  $\varepsilon(v) : \sigma$  et par conséquent la convergence de  $\int \varepsilon(u_m) : \sigma_m$  vers  $\int \varepsilon(u) : \sigma$ . Ensuite la convergence forte dans  $C(\bar{\Omega})$  de  $v_m$  vers  $v$  et celle de  $\operatorname{div} \sigma_m$  vers  $\operatorname{div} \sigma$  dans  $C(\bar{\Omega})'$  entraîne celle de  $\int \operatorname{div} \sigma_m v_m$  vers  $\int \operatorname{div} \sigma v$ . La formule de Green (3.12) donne alors le Résultat.

Pour montrer ii) nous remarquons tout d'abord que

$$|\sigma \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))'} \leq \liminf |\sigma_m \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))'}.$$

Pour établir l'inégalité inverse soit  $\delta > 0$  et  $u_m$  dans  $\gamma_0(U^\infty(\Omega))$ ,  $|u_m|_{\gamma_0(U^\infty)} = 1$ , tel que

$$\int \sigma_m \cdot n u_m \geq |\sigma_m \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty)'} - \delta.$$

Il existe alors  $U_m$  dans  $U^\infty(\Omega)$ , tel que  $U_m = u_m|_U$  et  $|U_m|_{U^\infty(\Omega)} = |u_m|_{\gamma_0(U^\infty(\Omega))}$ . De  $U_m$  on peut alors extraire une sous-suite telle que

$$U_m \rightarrow U \quad \text{dans } U^\infty(\Omega) \text{ faiblement}$$

et en utilisant (3.14):

$$\int \sigma_m \cdot n u_m \rightarrow \int \sigma \cdot n u \quad \text{où } u = \gamma_0 U.$$

D'où

$$\begin{aligned} \overline{\lim} |\sigma_m \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty)} &\leq \int \sigma \cdot n u + \delta \\ &\leq |\sigma \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty)} |U|_{(U^\infty(\Omega))} + \delta \\ &\leq |\sigma \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty)} \underline{\lim} |U_m|_{(U^\infty(\Omega))} + \delta \\ &\leq |\sigma \cdot n|_{\gamma_0(U^\infty)} + \delta \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration, puisque  $\delta$  est arbitraire.

### 3.2. Remarques sur les traces $\sigma \cdot n$ .

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , avec  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma$ ,  $\overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-} = \Gamma$ ,  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  étant deux ouverts connexes non vides de  $\Omega$  et  $\Gamma$  une sous-variété de dimension  $N - 2$  et de classe  $C^2$ . Alors si  $\sigma \in Z(\Omega, E)$ ,  $\sigma|_{\Gamma} \cdot n = 0$  <sup>(17)</sup> et  $[\sigma \cdot n \cdot n]$  est une mesure bornée sur  $\Gamma$  absolument continue par rapport à  $\sigma$ ; plus précisément:*

$$(3.15) \quad |[\sigma \cdot n \cdot n]| \leq |\sigma| |\varepsilon(n)|$$

(en particulier si le bord est droit, il n'y a pas de discontinuité de  $\sigma \cdot n \cdot n$ ). En outre lorsque  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$  on a

$$(3.16) \quad \int_{\Gamma} \sigma_i : \varepsilon(u) = \int_{\Gamma} (\sigma : \varepsilon(u)) = - \int_{\Gamma} [\sigma \cdot n] u$$

où  $\sigma_i = \sigma|_{\Gamma} - \sigma|_{\Gamma} : n \otimes n$ , et cette formule est encore valable lorsque  $u \in U^\infty(\Omega)$  et  $(\sigma : \varepsilon(u))$  est la mesure donnée dans le Théorème 3.1.

**DÉMONSTRATION.** Nous démontrons, pour commencer, que

$$\int_{\Gamma} |\sigma \cdot n| = 0.$$

Supposons donc par l'absurde qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma, \mathbb{R}^N)$  telle que

$$\langle \sigma, \varphi \otimes n \rangle_{\Gamma} > 0.$$

<sup>(17)</sup>  $\sigma|_{\Gamma}$  désigne la restriction de la mesure  $\sigma$  sur la sous-variété  $\Gamma$ .

Soit  $g$  une fonction de  $\mathcal{D}]-1, 1[$  telle que  $g'(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$  et soit  $u_m$  définie dans  $\Omega$  par

$$u_m(x) = \boldsymbol{\varphi}(\Pi(x))g(\varepsilon m d(x, \Gamma))$$

où  $d(x, \Gamma)$  et  $\Pi$  désignent respectivement la distance au bord et la projection sur  $\Gamma$  au sens du Théorème 1.1, et  $\varepsilon = +1$  si  $x$  est dans  $\Omega^+$ ,  $\varepsilon = -1$  sinon. On écrit la Formule de Green dans  $\Omega$ ; pour  $m$  assez grand,  $u_m$  est à support compact dans  $\Omega$ , par conséquent:

$$(3.17) \quad \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u_m) + \int \operatorname{div} \sigma u_m = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_m) &= \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}(\Pi(x)))g(\varepsilon m d(x, \Gamma)) + \boldsymbol{\varphi}(\Pi(x)) \otimes \nabla g(\varepsilon m d(x, \Gamma)) \\ &= g(\varepsilon m d(x, \Gamma))\varepsilon(\boldsymbol{\varphi}(\Pi(x))) + \varepsilon m \boldsymbol{\varphi} \otimes g'(\varepsilon m d(x, \Gamma))\mathbf{n}(\Pi(x)) \\ &\quad (\text{en utilisant } \nabla d(x) = \mathbf{n}(\Pi(x))). \end{aligned}$$

L'égalité (3.17) donne:

$$\varepsilon m \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\Pi(x)) \cdot g'(\varepsilon m d(x, \Gamma)) \sigma \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi})(\Pi(x))g(\varepsilon m d(x, \Gamma)) + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u_m = 0.$$

$u_m$  et  $\varepsilon(\boldsymbol{\varphi}(\Pi(x)))g(\varepsilon m d(x, \Gamma))$  sont bornés dans  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , d'où:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi})g(\varepsilon m d(x, \Gamma)) &= 0 \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u_m &= 0. \end{aligned}$$

Il reste à évaluer

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\Pi(x))g'(\varepsilon m d(x, \Gamma))\sigma \cdot \mathbf{n}; \\ &\int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\Pi(x))g'(\varepsilon m d(x, \Gamma)) \otimes \mathbf{n} : \sigma = \int_{\Omega^+ \cap \{x, d(x, \Gamma) < 1/m\}} \boldsymbol{\varphi}(\Pi(x))g'(\varepsilon m d(x, \Gamma)) \otimes \mathbf{n} : \sigma + \\ &\quad + \int_{\Omega^- \cap \{x, d(x, \Gamma) < 1/m\}} \boldsymbol{\varphi}(\Pi(x))g'(\varepsilon m d(x, \Gamma)) \otimes \mathbf{n} : \sigma + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}(x) \otimes \mathbf{n} : \sigma. \end{aligned}$$

(On a utilisé  $\Pi(x) = x$  sur  $\Gamma$  et  $g'(0) = 1$ ). Ensuite puisque  $\sigma$  est une



mesure bornée sur  $\Omega^+$  (respectivement sur  $\Omega^-$ ),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+ \cap \{x, d(x, \Gamma) < 1/m\}} |\sigma| = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega^- \cap \{x, d(x, \Gamma) < 1/m\}} |\sigma| = 0.$$

Puisque  $\varphi(\Pi(x))g'(\varepsilon m d(x, \Gamma))$  est bornée, on obtient finalement

$$0 = \lim_{\Omega} \int \varphi(\Pi(x)) \cdot g'(\varepsilon m d(x, \Gamma)) \sigma \cdot n = \int_{\Gamma} \varphi(x) \cdot \sigma \cdot n,$$

ce qui constitue une contradiction avec l'hypothèse.

Nous montrons maintenant la « Formule de Green » (3.16). On écrit, en utilisant l'additivité de la mesure  $\sigma$  par rapport aux boréliens, puis la formule de Green sur  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u) &= \int_{\Omega^+} \sigma : \varepsilon(u) + \int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon(u) \int_{\Omega^-} \sigma : \varepsilon(u) \\ &= - \int_{\Omega^+} \operatorname{div} \sigma u + \int_{\Gamma} (\sigma \cdot n)^+ u - \int_{\Omega^-} \operatorname{div} \sigma u \\ &= - \int_{\Gamma} (\sigma \cdot n)^- u + \int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon(u). \end{aligned}$$

Ensuite puisque  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u \\ &= - \int_{\Omega^+} \operatorname{div} \sigma u - \int_{\Omega^-} \operatorname{div} \sigma u \end{aligned}$$

de sorte qu'on obtient

$$\int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon(u) = \int_{\Gamma} ((\sigma \cdot n)^- - (\sigma \cdot n)^+) u = - \int_{\Gamma} [\sigma \cdot n] u.$$

Démontrons maintenant (3.15). Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$  et  $u$  définie dans  $\Omega$  par

$$u(x) = \psi(x) \varphi(\Pi(x)) \mathbf{n}(\Pi(x))$$

avec  $\psi$  une fonction de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , égale à un sur un voisinage de  $\Gamma$ .

$$\varepsilon(u) = \nabla(\psi(x) \varphi(\Pi(x))) \otimes \mathbf{n}(\Pi(x)) + \psi(x) \varphi(\Pi(x)) \varepsilon(\mathbf{n}(\Pi(x))).$$

En utilisant la formule (3.16), et le fait que  $\sigma \cdot n$  n'a pas de masse sur  $\Gamma$  on obtient:

$$\int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon(n(\Pi(x))) \psi(x) \varphi(\Pi(x)) + \int_{\Gamma} \sigma : n(\Pi(x)) \otimes \nabla(\psi \varphi) = - \int_{\Gamma} [\sigma \cdot n] u .$$

Calculons  $\varepsilon(n(\Pi(x)))$ ; pour ce faire, on utilise la formule

$$x - \Pi(x) = d(x, \Gamma) \mathbf{n}(\Pi(x))$$

qui donne, par dérivation:

$$\delta_{ij} - \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_j} = d(x, \Gamma) \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i(\Pi(x))) + \frac{\partial d}{\partial x_j} n_i .$$

Or  $\nabla d(x) = \mathbf{n}(\Pi(x))$ , d'où lorsque  $x \in \Gamma$

$$\delta_{ij} - \Pi_{i,j}(x) = (n_i n_j)(x)$$

et enfin

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{n}(\Pi(x))) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial n_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Pi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial n_j}{\partial x_i} \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_k} \right] = \frac{1}{2} [n_{i,k}(\delta_{jk} - n_j n_k) + n_{j,i}(\delta_{ik} - n_i n_k)] \\ &= \varepsilon_{ij}(n) - \frac{1}{2} [n_{i,k} n_k n_j] , \end{aligned}$$

de sorte qu'en utilisant  $\sigma_{ij} n_j = 0$ ,

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{n}(\Pi(x))) = [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(n)](\Pi(x)) ,$$

on obtient la formule

$$\int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon(n(x)) \varphi(x) = - \int_{\Gamma} [\sigma \cdot n \cdot n] \varphi .$$

Or puisque  $\sigma$  est une mesure bornée sur  $\Gamma$ , on a

$$\left| \int_{\Gamma} [\sigma \cdot n \cdot n] \varphi \right| \leq |\varepsilon(n)|_{\infty} |\varphi|_{\infty} \int_{\Gamma} |\sigma| .$$

Ceci entraîne l'inégalité (3.15) et le fait que  $[\sigma \cdot n \cdot n]$  est bien une mesure bornée sur  $\Gamma$ .

Soit maintenant  $u \in U^\infty(\Omega)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma : \varepsilon(u)) \varphi &= \int_{\Omega^+} (\sigma : \varepsilon(u)) \varphi + \int_{\Gamma} (\sigma : \varepsilon(u)) (\varphi + \int_{\Omega^-} \sigma : \varepsilon(u) \varphi \\ &= - \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} u \operatorname{div} \varphi - \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \sigma u \nabla \varphi + \int_{\Gamma} [\sigma \cdot n] u \varphi + \int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon(u) \varphi \end{aligned}$$

(en utilisant la formule de Green (3.11) et avec la définition de  $\sigma : \varepsilon(u)$  sur  $\Omega$ ).

$$\int_{\Omega} (\sigma : \varepsilon(u)) \varphi = - \int_{\Omega^+ \cap \Omega^-} u \operatorname{div} \sigma \varphi - \int_{\Omega^+ \cap \Omega^-} \sigma u \nabla \varphi - \int_{\Gamma} \sigma u \nabla \varphi ,$$

de sorte que nous obtenons finalement l'égalité

$$\int_{\Gamma} \sigma \cdot n u \varphi = - \int_{\Gamma} \sigma : \varepsilon(u) \varphi - \int_{\Gamma} \sigma \nabla \varphi . \quad \square$$

**REMARQUE 3.2.** Lorsque  $u \in U^\infty(\Omega)$  et  $\sigma \in Z(\Omega, E)$ , on peut définir la distribution  $[\sigma \cdot n] \cdot u_t$  comme suit, soit  $v \in U^\infty(\Omega)$  tel que

$$v_t = u_t , \quad v \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

et

$$|v|_{U^\infty(\Omega)} \leqslant |u_t|_{\gamma_t(U^\infty(\Omega))} .$$

Alors on définit

$$[\sigma \cdot n] \cdot u_t = [\sigma \cdot n] \cdot v$$

au sens défini par les Propositions 3.1 et 3.2. Alors on peut vérifier que

$$[\sigma \cdot n] \cdot u = [\sigma \cdot n] \cdot u_t + [\sigma \cdot n] \cdot u_n n$$

où  $[\sigma \cdot n] \cdot u_n n$  désigne la mesure produit  $[\sigma \cdot n \cdot n] u_n$  au sens classique. Cette formule montre en particulier que la définition de  $[\sigma \cdot n] u_t$  ne dépend pas du représentant choisi  $v$ .

**REMARQUE 3.3.** L'information du Théorème est assez précise. En effet on va voir dans ce qui suit que ni  $\sigma \cdot n \cdot n$ , ni  $\sigma \cdot n \cdot t$ , ni  $[\sigma \cdot n \cdot t]$  ne sont des mesures bornées en général. Par le lemme (3.2) démontré plus loin, soit en effet  $g \in \gamma_0(W^{2,1}(\cdot - 1, \cdot + 1[\cdot]))$ ,  $g \notin HB(\cdot - 1, \cdot + 1[\cdot])$ <sup>(18)</sup>, et  $h \in L^1(\cdot - 1, \cdot + 1[\cdot])$ ,

<sup>(18)</sup> On rappelle la définition de  $HB(\Omega) : HB(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \nabla \nabla u \in M^1(\Omega)\}$ . Cet espace est étudié dans Demengel [4].

$h \notin BV([-1, +1])$ . D'après le Théorème 1 de l'appendice de [4], il existe  $\alpha \in W^{2,1}([-1, +1]^2)$  tel que

$$\alpha|_{]-1, +1[ \times \{0\}} = g$$

$$\alpha_{,2}^+|_{]-1, +1[ \times \{0\}} = h$$

$$\alpha_{-}^{,2}|_{]-1, +1[ \times \{0\}} = 0$$

et soit  $\sigma$  défini par

$$\sigma_{N-1, N+1}(x_1 \dots x_N) = \alpha_{,22}(x_{N-1}, X_N)$$

$$\sigma_{N, N-1}(x_1 \dots x_N) = \alpha_{,12}(x_{N-1}, X_N)$$

$$\sigma_{N, N}(x_1 \dots x_N) = \alpha_{,11}(x_{N-1}, X_N)$$

$$\sigma_{ij} = 0, \quad \forall ij \neq \{(N, N-1), (N-1, N-1), (N, N)\}.$$

On a bien  $\operatorname{div} \sigma = 0$  et

$$[\sigma_{N-1, N}]|_{x_N=0}, \quad \sigma_{N-1, N}|_{x_N=0} = -(\alpha_{,2})_1|_{x_N=0} = h_{,1} \notin M^1 \quad (x_N = 0)$$

$$\sigma_{N, N}|_{x_N=0} = (\alpha_{,11})|_{x_N=0} = g_{,11}|_{x_N=0} \notin M^1 \quad (x_N = 0).$$

**LEMME 3.2.** *Il n'existe pas de  $p > 1$  tel que*

$$\gamma_0(W^{2,1}) \hookrightarrow W^{1,p}.$$

*En particulier  $\gamma_0(W^{2,1}) \not\subset HB(I)$ .*

**DÉMONSTRATION.** On suppose que  $\Omega = ]0, +1[^2$ , et  $\Gamma = ]0, +1[ \times \{0\}$ . Soit  $0 < \varepsilon < 1$  et  $\varphi$  défini par

$$0 < x < \varepsilon \quad 0 < t < \varepsilon - x \quad \varphi(x, t) = \frac{1}{\varepsilon} ((t+2)(x-\varepsilon))$$

$$t > \varepsilon - x \quad \varphi(x, t) = \frac{(\varepsilon - x)^2}{t\varepsilon}$$

$$x > \varepsilon \quad \varphi(x, t) = 0.$$

Il est facile de voir que  $\varphi$  est  $C^1$ , et que  $\varphi \in W^{2,1}([0, 1]^2)$ . En outre il existe une constante  $c$  telle que

$$|\varphi|_{W^{2,1}} \leq c(\varepsilon + \varepsilon \operatorname{Log} \varepsilon + \operatorname{Log} 2).$$

D'autre part le calcul de

$$|\varphi|_{W^{1,p}(x=0)}$$

donne

$$|\varphi|_{W^{1,p}(x=0)} \geq c'(\varepsilon^{(1/p)-1} + \varepsilon).$$

Si on avait pour  $p > 1: \gamma_0(W^{2,1}) \subset W^{1,p}$ , on obtiendrait

$$\varepsilon^{(1/p)-1} + \varepsilon \leq c(\varepsilon + \varepsilon \operatorname{Log} \varepsilon + \operatorname{Log} \varepsilon),$$

ce qui entraînerait en particulier

$$\varepsilon^{p/(p-1)} \operatorname{Log} \varepsilon \geq \frac{1}{c'} \quad \text{qui est absurde quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

### 3.3. Cas particulier de la dimension 2.

On suppose toujours que  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  sont deux ouverts connexes disjoints, de bord  $C^2$ , nue  $\Gamma = \overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-}$ ,  $\Gamma = \partial\Omega^+$  et  $\Gamma = \partial\Omega^-$ , et  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma$ .  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  désignent comme d'ordinaire la normale et la tangente unitaire à  $\Gamma$ . Nous définissons les espaces de trace tangentielles et normales suivants:

$$Z_{nn} = \{\sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma}, \sigma \in \Sigma(\Omega, E)\}$$

$$Z_{tt} = \{\sigma \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}|_{\Gamma}, \sigma \in \Sigma(\Omega, E)\}$$

$$Z_{nt} = \{\sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}|_{\Gamma}, \sigma \in \Sigma(\Omega, E)\}.$$

PROPOSITION 3.4. i) Si  $\sigma \in Z(\Omega, E)$ , il existe un couple  $(\sigma_1, \alpha) \in L^2(\Omega, E) \times HB(\Omega)$ , tel que

$$(3.18) \quad \sigma = \sigma_1 + (\operatorname{cof} \nabla \nabla \alpha)^t \quad (19).$$

ii) La masse de  $\sigma$  sur  $\Gamma$  s'écrit  $[\partial\alpha/\partial n]t \otimes t$ ,

$$(3.19) \quad \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \alpha}{\partial n} [\sigma_{nn}] = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right]$$

$$(3.20) \quad \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \alpha}{\partial s} [\sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}] = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right).$$

(19)  $(\operatorname{cof} M)^t$  désigne la matrice transposée de la matrice des cofacteurs de  $M$ .

En particulier si le bord  $\Gamma$  est droit on a  $[Z_{nn}] = \{0\}$ , et si  $R$  <sup>(20)</sup> est borné le long de  $\Sigma$ ,  $[Z_{nn}] = L^1(\Gamma)$ .

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.4. Soit  $\sigma_1 \in L^2(\Omega, E)$ , tel que  $\operatorname{div} \sigma = \operatorname{div} \sigma_1$  et  $\sigma_1 \cdot n = 0|_{\Gamma}$ . On est ramené à chercher le noyau de l'opérateur divergence:  $\Sigma(\Omega, E) \cap \operatorname{Ker} \operatorname{div}$ . Soit donc une distribution  $\sigma$  telle que

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0.$$

Ces deux équations entraînent l'existence de distributions  $\varphi_1, \varphi_2$  sur  $\Omega$ , telle que

$$\sigma_{11} = -\varphi_{1,1}, \quad \sigma_{12} = \varphi_{1,1}$$

$$\sigma_{12} = -\varphi_{2,2}, \quad \sigma_{22} = \varphi_{2,1}.$$

Soit  $\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ . Alors  $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$ , donc il existe une distribution  $\alpha$  telle que  $\varphi_1 = -\alpha_{,2}$ ,  $\varphi_2 = \alpha_{,1}$ . Nous avons finalement

$$\sigma_{11} = \alpha_{,22}$$

$$\sigma_{12} = \alpha_{,12}$$

$$\sigma_{22} = \alpha_{,11}$$

donc  $\sigma = (\operatorname{cof}(\nabla \nabla \alpha))^T$  <sup>(21)</sup> et puisque  $\sigma \in M^1[\Omega, E]$ ,  $\alpha$  est dans  $HB(\Omega)$ .

ii) D'après le Théorème 2.1 de Demengel [4], la masse de  $\nabla \nabla \alpha$  sur  $\Gamma$  est

$$\nabla \nabla \alpha|_{\Gamma} = \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right] n \otimes n$$

et donc

$$\sigma|_{\Gamma} = (\operatorname{cof}(\nabla \nabla \alpha))|_{\Gamma} = \frac{\partial \alpha}{\partial n} t \otimes t.$$

<sup>(20)</sup>  $R$  désigne le rayon de courbure de  $\Gamma$ .

<sup>(21)</sup>  $(\operatorname{cof} M)^T$  désigne la matrice transposée de la matrice des cofacteurs de la matrice  $M$ .

Calculons maintenant  $\sigma \cdot n \cdot n$ . On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial S^2} \nabla(\nabla \alpha \cdot t) \cdot t &= \nabla \nabla \alpha : t \otimes t + (\nabla \alpha \cdot \nabla t) \cdot t = \sigma \cdot n \cdot n + (\nabla \alpha \cdot \nabla t) \cdot t \\ (\nabla \alpha \cdot \nabla t) \cdot t &= \alpha_{,i} t_{i,j} t_j = \frac{\alpha_{,i} n_i}{R} = \frac{1}{R} \frac{\partial \alpha}{\partial n}. \end{aligned}$$

Ensuite puisque  $\alpha \in HB$ ,  $\alpha^+ = \alpha^-$  le long de  $\Gamma$  et donc  $[\partial^2 \alpha / \partial S^2] = 0$ . On en déduit bien

$$[\sigma \cdot n \cdot n] = -\frac{1}{R} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right].$$

Calculons  $\sigma \cdot n \cdot t$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) &= \nabla(\nabla \alpha \cdot n) \cdot t = \nabla \nabla \alpha : n \otimes t + (\nabla \alpha \cdot \nabla n) \cdot t \\ (\nabla \alpha \cdot \nabla n) \cdot t &= \alpha_{,i} n_{i,j} t_j = \alpha_{,i} \frac{\partial n_i}{\partial S} = -\frac{1}{R} (\alpha_{,i} t_i). \end{aligned}$$

D'où

$$\sigma \cdot n \cdot t = \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \alpha}{\partial S} \right]$$

et puisque

$$\left[ \frac{\partial \alpha}{\partial S} \right] = 0, \quad [\sigma \cdot n \cdot t] = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right).$$

Supposons maintenant que  $R$  est borné sur  $\Gamma$ , et que  $g \in L^1(\Gamma)$ . Soit alors  $h = Rg$  (qui appartient donc à  $L^1(\Gamma)$ ); en utilisant la Proposition 1 de l'appendice de [4], il existe  $\alpha \in HB(\Omega)$ , tel que

$$\left[ \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right] = h$$

et soit  $\sigma = (\text{cof } \nabla \nabla \alpha)$ . Alors  $\sigma \in M^1(\Omega, E)$ ,  $\text{div } \sigma = 0$ , et

$$[\sigma \cdot n \cdot n] = \frac{h}{R} = g.$$

La Proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes de prolongement des éléments de  $Z(\Omega^+, E)$ . On suppose que  $F$  est la trace d'un élément de  $Z(\Omega, E)$ , soit encore qu'il existe  $\sigma_1 \in Z(\Omega^-, E)$  tel que

$\operatorname{div} \sigma_1 = 0$  (pour simplifier) et

$$\sigma_1 \cdot n = F.$$

On a alors la

**PROPOSITION 3.5.** *On se donne  $G$  un élément de  $M^1(\Gamma, E)$  et on définit la mesure prolongée de  $\sigma \in Z(\Omega^+, E)$ :*

$$\tilde{\sigma} = \sigma|_{\Omega^+} + G|_{\Omega} + \sigma_1|_{\Omega^-}.$$

i) Si le bord  $\Gamma$  est droit,  $\sigma$  appartient à  $Z(\Omega, E)$  si et seulement si;

$$(3.21) \quad G \cdot n = 0, \quad G \in L^1(\Gamma)$$

$$(3.22) \quad F \cdot n = \sigma \cdot n \cdot n$$

$$(3.23) \quad F \cdot t = \sigma \cdot n \cdot t + \frac{\partial G}{\partial s}.$$

ii) Si  $\sigma$  est tel que  $1/R \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\sigma \in Z(\Omega, E)$  si et seulement si

$$(3.24) \quad F \cdot n - \sigma \cdot n \cdot n = G \frac{1}{R}$$

$$(3.25) \quad F \cdot t - \sigma \cdot n \cdot t = -\frac{\partial G}{\partial s}.$$

**DÉMONSTRATION.** i) Si  $\tilde{\sigma}$  est une prolongée de  $\sigma$ , les propriétés (3.21)-(3.25) sont conséquences de la Proposition (3.4) et du Théorème (3.2). Inversement supposons que  $G$  et  $F$  vérifient les équations (3.21)-(3.25). On peut soit en utilisant la définition de  $\operatorname{div} \tilde{\sigma}$  au sens des distributions montrer que  $\operatorname{div} \tilde{\sigma} = \operatorname{div} \sigma|_{\Omega^+} + \operatorname{div} \sigma|_{\Omega^-}$ , soit considérer  $\alpha$  (resp<sup>t</sup>  $\beta$ ) qui appartient à  $HB(\Omega^+)$  (resp<sup>t</sup>  $HB(\Omega^-)$ ), tel que

$$\sigma = (\operatorname{cof}(\nabla \nabla \alpha))^t$$

$$\sigma_1 = (\operatorname{cof}(\nabla \nabla \beta))^t.$$

Alors:

$$(F - \sigma \cdot n) \cdot n = \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} = 0$$

de sorte que  $\beta = \alpha + P|_{\Gamma'}$  (où  $P$  est un polynôme de degré un sur  $\Gamma'$ ) et



donc

$$\sigma = (\operatorname{cof}(\nabla\nabla\alpha))^t = \operatorname{cof}(\nabla\nabla(\alpha + P))^t.$$

Alors soit  $\tilde{\alpha}$  la prolongée de  $\alpha$ :

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \alpha + P & \text{dans } \Omega^+ \\ \beta & \text{dans } \Omega^- . \end{cases}$$

La Proposition donne

$$\tilde{\alpha} \in HB \quad \text{et} \quad \nabla\nabla\tilde{\alpha} = \nabla\nabla\alpha + \nabla\nabla\beta + \left[ \frac{\partial\beta}{\partial n} - \frac{\partial\alpha}{\partial n} \right] n \otimes n|_I.$$

Soit  $\tilde{\sigma} = (\operatorname{cof} \nabla\nabla\tilde{\alpha})^t$ . Alors  $\tilde{\sigma} \in Z(\Omega, E)$  (et même  $\operatorname{div} \tilde{\sigma} = 0$ ) donc  $\tilde{\sigma}$  prolonge  $\sigma$ .

**REMARQUE 3.** Le Théorème 3.2 se prolonge de la façon suivante aux éléments de  $\tilde{Z}(\Omega, E)$  si  $\sigma \in \tilde{Z}(\Omega, E)$ ,  $\sigma|_{I \cdot n} = 0$  et  $[\sigma \cdot n \cdot n]$  est une mesure bornée sur  $I$ , absolument continue par rapport à  $\sigma$ . En effet, si  $\operatorname{div} \sigma = f \in M^1$ , et si  $q < N/(N-1)$ , il existe  $\sigma_1$  dans  $L^q$  tel que

$$\operatorname{div} \sigma_1 = f = \operatorname{div} \sigma$$

(cf. la démonstration du Lemme (2.3)).

Alors  $\sigma - \sigma_1$  appartient à  $Z(\Omega, E)$  et on obtient, compte tenu du Théorème 3.2:

$$(\sigma - \sigma_1)|_{I \cdot n} = \sigma|_{I \cdot n} = 0$$

et

$$[(\sigma - \sigma_1) \cdot n \cdot n] = [\sigma \cdot n \cdot n] = -\sigma \cdot \varepsilon(n).$$

De cela on déduit aussi que

$$\operatorname{div} \sigma|_{I \cdot n} = 0.$$

En effet, en écrivant pour  $u$  dans  $(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u + \int_{\Omega} \sigma \varepsilon(u) = 0.$$

En appliquant la formule de Green sur  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  et en utilisant l'additivité

par rapport aux boréliens, on a

$$\int_R \operatorname{div} \sigma u + \int_R [\sigma \cdot n] u + \int_R \sigma \varepsilon(u) = 0.$$

Soit alors  $u$  comme dans la démonstration de (3.15):

$$u(x) = \varphi(\Pi(x)) \mathbf{n}(\Pi(x)) \psi(x).$$

On obtient, par un calcul déjà fait:

$$\int_R \operatorname{div} \sigma \cdot \varphi \mathbf{n} + \int_R [\sigma \cdot n] \varphi + \int_R \sigma : \varepsilon(n) \varphi = 0$$

d'où, compte tenu de ce qui précède:

$$\langle \operatorname{div} \sigma \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle = 0$$

et donc

$$\operatorname{div} \sigma \cdot \mathbf{n} = 0.$$

### Annexe: Démonstration du Théorème 1.3.

Le Théorème 1.3 va être conséquence des deux propositions ci-dessous:

PROPOSITION 1. Soit  $\mathbf{v} \in U^\infty([0, 1]^{N-1})$ , à support compact. Il existe

$$V \in U^\infty([0, 1]^N), \quad V \cdot e_N = 0, \quad V_i / ]0, 1]^{N-1} \times \{0\} = v_i / ]0, 1]^{N-1} \times \{0\},$$

$$i \in [1, N-1].$$

En outre la correspondance entre  $V$  et  $v$  est linéaire et continue.

On définit

$$Z_c([0, 1]^{N-1} \times \{0\})$$

$$= \left\{ u \in C_c([0, 1]^{N-1}), \exists k, \left| u(x) + u(x') - 2u\left(\frac{x+x'}{2}\right) \right| \leq k|x-x'| \right\}.$$

PROPOSITION 2. Soit  $\varphi \in Z_c([0, 1]^{N-1} \times \{0\})$ ; il existe  $\psi \in U^\infty([0, 1]^N)$ ,  $\psi / ]0, 1]^{N-1} \times \{0\} = \varphi e_N$ . En outre la correspondance entre  $\psi$  et  $\varphi$  est linéaire et continue.

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.** Soit  $\mathbf{v}$ ,  $v_N = 0$ ,  $\mathbf{v} \in U^\infty([0, 1]^{N-1} \times \{0\})$  à support compact, et soit  $V$  défini sur  $]0, 1[^N$  par  $V(x', x_N) = v(x', 0)$ . Il est facile de voir que  $V \in U^\infty([0, 1]^N)$  et  $|V|^\infty + |\varepsilon(V)|_\infty = |\varepsilon(\mathbf{v})|_\infty + |v|_\infty$ .

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.** Cette démonstration est longue et assez technique. Pour en rendre la lecture plus aisée nous avons introduit quelques résultats partiels sous forme de propositions et corollaires, leurs démonstrations étant renvoyées en fin d'annexe.

L'expression de  $\psi$  en fonction de  $\varphi$ , donnée dans ce qui va suivre, est une généralisation de l'expression proposée par Luc Tartar [26] en dimension 2.

Avant de donner cette expression proprement dite en dimension quelconque, donnons quelques définitions. On suppose  $e_1 \dots e_N$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^N$ , telle que  $I'$  s'écrive  $x_N = 0$ , et  $\varphi$  est une fonction à support compact dans  $\mathbb{R}^{N-1}$  qui vérifie Zygmund.

Soit  $x_N > 0$ . Pour  $i \in [1, N-1]$ , on définit les mesures  $\mu_i, \overline{\mu_i}, \delta_i, \overline{\delta_i}$ , comme suit, pour  $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^{N-1})$ .

$$(1.1) \quad \langle \mu_i, \varphi \rangle = \int_0^{x_N} \varphi(t\mathbf{e}_i) dt$$

$$(1.2) \quad \langle \overline{\mu_i}, \varphi \rangle = \int_{-x_N}^0 \varphi(t\mathbf{e}_i) dt$$

$$(1.3) \quad \langle \delta_i, \varphi \rangle = \varphi(x_N \mathbf{e}_i)$$

$$(1.4) \quad \langle \delta_i, \varphi \rangle = \varphi(-x_N \mathbf{e}_i)$$

$$(1.5) \quad \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{0})$$

$$\eta = \bigstar_{1 \leq i \leq N-1} (\mu_i \star \overline{\mu_i}).$$

**PROPOSITION 3.**

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_i} = -\delta_i + \delta_0, \quad \frac{\partial \overline{\mu_i}}{\partial x_i} = -\delta_0 + \overline{\delta_i}$$

$$\mu_i \star \overline{\delta_i} = \overline{\mu_i}, \quad \overline{\mu_i} \star \delta_i = \mu_i$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_N} = \delta_i, \quad \frac{\partial \overline{\mu_i}}{\partial x_N} = \overline{\delta_i}.$$

COROLLAIRE.

$$\begin{aligned}\eta_{,i} &= \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * (\bar{\mu}_i - \mu_i) & 1 \leq i \leq N-1 \\ \eta_{,ij} &= \left( \underset{k \neq i, j}{*} (\mu_k * \bar{\mu}_k) \right) * (\mu_j - \bar{\mu}_j) * (\mu_i - \bar{\mu}_i) & i \neq j \leq N-1 \\ \eta_{,ii} &= \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * (\delta_i + \bar{\delta}_i - 2\delta_0) .\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.

$$\begin{aligned}\eta_{,N} &= \sum_i \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * (\mu_i + \bar{\mu}_i) \\ \eta_{,NN} &= \sum_i \sum_{j \neq i} \left( \underset{k \neq i, j}{*} (\mu_k * \bar{\mu}_k) \right) * (\mu_j + \bar{\mu}_j) * (\mu_i + \bar{\mu}_i) + \sum_i \left( \underset{i \neq j}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * (\bar{\delta}_i + \delta_i)\end{aligned}$$

LEMME 1.

$$\begin{aligned}\langle \mu_j * \bar{\mu}_j, \varphi \rangle &= \int_{-x_N}^{+x_N} \varphi(te_i)(x_N - |t|) dt \\ |\mu_j * \bar{\mu}_j|_{M^1(\mathbb{R}^N)} &= x_N^2 .\end{aligned}$$

LEMME 2. Si  $\varphi \in Z_c(\mathbb{R}^{N-1})$  et  $g \in M^1(\mathbb{R}^{N-1})$

$$(g * \varphi) \in Z(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad |g * \varphi|_Z \leq |g|_{M^1} |\varphi|_Z .$$

PROPOSITION 5. Si  $\varphi \in Z_c$ ,  $P$  un entier dans  $[1, N-1]$

$$\left| \underset{1 \leq j \leq P}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * \varphi - x_N^{2P} \varphi \right|_{\infty} \leq c(P) |x_N|^{2P+1} |\varphi|_Z .$$

D'autre part, pour tout  $i \in [1, N-1]$

$$\begin{aligned}|(\mu_i + \bar{\mu}_i) * 2x_N \varphi|_{\infty} &\leq |\varphi|_Z |x_N|^2 \\ |(\delta_i + \bar{\delta}_i) * \varphi - 2\varphi|_{\infty} &\leq |\varphi|_Z |x_N| .\end{aligned}$$

Les lemmes et propositions précédents seront démontrés ultérieurement. On définit maintenant les fonctions  $H$  et  $\psi$  comme suit:

$$H(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{x_N^{2N-3}} (\eta * \varphi)(x_1 \dots x_{N-1})$$

et

$$(4N-5)\psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad 1 \leq i \leq N-1$$

$$(4N-5)\psi_N = \frac{\partial H}{\partial x_N}.$$

On va montrer que  $\psi$  ainsi définie appartient à  $U^\infty(\mathbb{R}^N)$  et que  $\psi_i(x_1, \dots, \dots, x_{N-1}, 0)$ ,  $\forall i \in [1, N-1]$ ,  $\psi_N(x_1, \dots, x_{N-1}, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_{N-1})$ , dès que  $\varphi$  appartient à  $Z$ . On a immédiatement

$$\psi_{i,N} + \psi_{N,i} = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

$$(4N-5)\psi_{i,j} = -\frac{1}{x_N^{2N-3}} (\eta_{i,j} * \varphi).$$

Car  $x_i$  et  $x_j$  étant des variables de la convolution, il suffit de dériver l'un des facteurs. On étudie alors, compte tenu du Corollaire 1, l'expression  $(\mu_i - \bar{\mu}_i) * (\mu_j - \bar{\mu}_j) * \varphi$  pour  $i \neq j$ .

$$\begin{aligned} (\mu_i - \bar{\mu}_i) * \varphi(x', x_N) &= \int_0^{x_N} \varphi(x' - te_i) dt - \int_{x_N}^0 \varphi(x' - te_i) dt \\ &= x_N \int_0^1 (\varphi(x' - \mu x_N e_i) - \varphi(x' + \mu x_N e_i)) d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\mu_j - \bar{\mu}_j) * (\mu_i - \bar{\mu}_i) * \varphi(x', x_N) \\ &= x_N^2 \int_0^1 \int_0^1 [\varphi(x' - x_N(\mu e_i + te_j)) - \varphi(x' + x_N(\mu e_i - te_j)) \\ &\quad - \varphi(x' + x_N(te_j - \mu e_i)) + \varphi(x' + x_N(\mu e_i + te_j))] d\mu dt \\ &= x_N^2 \int_0^1 \int_0^1 [\varphi(x' - x_N(\mu e_i + te_j)) + \varphi(x' + x_N(\mu e_i + te_j)) - 2\varphi(x') \\ &\quad + 2\varphi(x') - \varphi(x' + x_N(\mu e_i - te_j)) - \varphi(x' + x_N(te_j - \mu e_i))] d\mu dt. \end{aligned}$$

De sorte que

$$|(\mu_i - \bar{\mu}_i) * (\mu_j - \bar{\mu}_j) * \varphi|_\infty \leq |x_N|^3 |\varphi|_Z.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k \neq i, j} (\mu_k * \bar{\mu}_k) * (\mu_i - \bar{\mu}_i) * (\mu_j - \bar{\mu}_j) * \varphi \right|_{\infty} \\
 & \leq \left| \sum_{k \neq i, j} (\mu_k * \bar{\mu}_k) \right|_{M^1(\Omega)} |(\mu_i - \bar{\mu}_i) * (\mu_j - \bar{\mu}_j) * \varphi|_{\infty} \leq 2|x_N|^3 |x_N|^{2(N-3)} |\varphi|_Z \\
 & = 2|x_N|^{2N-3} |\varphi|_Z \\
 & |H_{,ij}| \leq \frac{1}{|x_N|^{2N-3}} 2|x_N|^{2N-3} |\varphi|_Z
 \end{aligned}$$

et donc  $\psi_{i,j} \in L^{\infty}$  pour  $i \neq j$ .

Calculons

$$\begin{aligned}
 (4N-5)\psi_{i,i} &= -H_{,ii} \\
 &= \frac{-1}{x_N^{2N-3}} \eta_{,ii} * \varphi.
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 |\eta_{,ii} * \varphi|_{\infty} &\leq \left| \sum_{j \neq i} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right|_{M^1} |(\delta_i + \bar{\delta}_i) * \varphi - 2\varphi|_{\infty} \\
 &\leq |x_N|^{2(N-2)} |x_N| |\varphi|_Z, \quad \text{d'après la Proposition 3,}
 \end{aligned}$$

d'où

$$(4N-5)|\psi_{i,i}| \leq \frac{|x_N|^{2N-3}}{|x_N|^{2N-3}} |\varphi|_Z = |\varphi|_Z.$$

Il reste à calculer  $\psi_{N,N}$ .

$$\begin{aligned}
 (4N-5)\psi_N &= \frac{-2N+3}{x_N^{2N-2}} \eta * \varphi + \frac{1}{x_N^{2N-3}} \eta_{,N} + \varphi \\
 (4N-5)\psi_{N,N} &= 2 \left( \frac{3-2N}{x_N^{2N-2}} \right) \eta_{,N} * \varphi + \frac{1}{x_N^{2N-3}} \eta_{,NN} * \varphi + \frac{(3-2N)(2-2N)}{x_N^{2N-1}} \eta * \varphi \\
 \eta_{,N} * \varphi &= \sum_i \left[ \sum_{j \neq i} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * (\mu_i + \bar{\mu}_i - 2x_N \delta_0) * \varphi \right. \\
 & \quad \left. + 2x_N \left[ \sum_{i,j \neq i} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * \varphi - x_N^{2(N-2)} \varphi \right] \right] + 2x_N^{2N-3} \varphi \sum_{1 \leq i \leq N-1} (1) \\
 \eta_{,NN} * \varphi &= \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i,j} (\mu_k * \bar{\mu}_k) * (\mu_j + \bar{\mu}_j) * (\mu_i + \bar{\mu}_i - 2x_N \delta_0) * \varphi \\
 & \quad + 2x_N \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i,j} (\mu_k * \bar{\mu}_k) * (\mu_j + \bar{\mu}_j - 2x_N \delta_0) * \varphi \\
 & \quad + 4x_N^2 \sum_i \sum_{j \neq i} \left[ \left( \sum_{k \neq i,j} (\mu_k * \bar{\mu}_k) \right) * \varphi - x_N^{2(N-3)} \right] + 4x_N^{2N-4} \varphi \sum_i \left( \sum_{j \neq i} 1 \right) \\
 & \quad + \sum_i \sum_{j \neq i} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * (\delta_i + \bar{\delta}_i - 2\delta_0) * \varphi + 2 \sum_i \left[ \sum_{j \neq i} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * \varphi - x_N^{2(N-2)} \varphi \right] \\
 & \quad + 2x_N^{2(N-2)} \varphi \sum_i 1.
 \end{aligned}$$

On obtient donc, en utilisant la Proposition 5 :

$$\begin{aligned}
|\eta_{,N} * \varphi - 2(N-1)x_N^{2N-3}\varphi|^\infty &\leq \text{cte } (N-1)|x_N|^{2(N-2)}|x_N|^2|\varphi|_Z \\
&\quad + \text{cte } 2(N-1)|x_N| \times |x_N|^{2N-3}|\varphi|_Z \\
&\leq c(N)|x_N|^{2N-2}|\varphi|_Z \\
|\eta_{,NN} * \varphi - [4x_N^{2N-3}(N-1)(N-2) + 2(N-1)x_N^{2N-4}]\varphi|^\infty \\
&\leq \text{cte } (N-1)(N-2)[|x_N|^{2(N-3)}2|x_N||x_N|^2|\varphi|_Z \\
&\quad + 2|x_N||x_N|^{2(N-3)}|x_N|^2|\varphi|_Z \\
&\quad + 4|x_N|^2|x_N|^{2(N-3)+1}|\varphi|_Z] \\
&\quad + \text{cte } (N-1)[|x_N|^{2(N-2)}|x_N||\varphi|_Z \\
&\quad + 2|x_N|^{2(N-2)+1}|\varphi|_Z]
\end{aligned}$$

de sorte que

$$|\eta_{,NN} * \varphi - 2(N-1)(2N-3)x_N^{2N-4}\varphi|^\infty \leq c(N)|x_N|^{2N-3}|\varphi|_Z.$$

Toujours d'après la Proposition 5, on a

$$|\eta * \varphi - x_N^{2(N-1)}\varphi|^\infty \leq c(N)|x_N|^{2N-1}|\varphi|_Z.$$

$$\begin{aligned}
(4N-5)\psi_{N,N} &= \frac{2(3-2N)}{x_N^{2N-2}} (\eta_{,N} * \varphi - 2(N-1)x_N^{2N-3}\varphi) + \\
&\quad + \frac{1}{x_N^{2N-3}} (\eta_{,NN} * \varphi - 2(N-1)(2N-3)x_N^{2N-4}\varphi) \\
&\quad + \frac{(3-2N)(2-2N)}{x_N^{2N-1}} (\eta * \varphi - x_N^{2(N-1)}\varphi) + x_N^{-1}\varphi[+2 \times 2(3-2N)(N-1) \\
&\quad + 2(N-1)(2N-3) + 2(1-N)(3-2N)] \Rightarrow |\psi_{N,N}| \leq c(N)|\varphi|_Z.
\end{aligned}$$

Vérifions que  $\psi_N(x_1, \dots, 0) = \varphi$ .

$$\begin{aligned}
(4N-5)\psi_N &= \frac{(-2N+3)}{x_N^{2N-2}} [\eta * \varphi - x_N^{2N-2}\varphi] + \frac{1}{x_N^{2N-3}} [\eta_{,N} * \varphi - 2x_N^{2N-3}(N-1)\varphi] \\
&\quad + [2(N-1) - (-2N+3)]\varphi(x_1 \dots x_{N-1}) \\
(4N-5)|\psi_N - \varphi|^\infty &\leq c(N)|x_N|,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Montrons que pour tout  $i \in ]1, N-1]$ ,  $\varphi_i(x_1, x_{N-1}, 0) = 0$ . Pour ce faire, on commence par remarquer que  $\forall \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ ,

$$|\langle \mu_i - \delta_0 x_N \varphi \rangle| \leq x_N \omega_{x_N}(\varphi)$$

où  $\omega_{x_N}(\varphi)$  désigne le module de continuité d'ordre  $x_N$  de  $\varphi$ , c'est-à-dire

$\sup_{x, t, |t| \leq x_N} |\varphi(X+t) - \varphi(X)|$ . En effet

$$|\langle \mu_i - \delta_0 X_N, \varphi \rangle| = \left| \int_0^{x_N} [\varphi(te_i) - \varphi(0)] dt \right| \leq |x_N| \omega_{x_N}(\varphi).$$

De la même façon  $|\langle \overline{\mu}_i - \delta_0 X_N, \varphi \rangle| \leq |X_N| \omega_{x_N}(\varphi)$ . On a aussi, en utilisant l'invariance par translation du module de continuité:

$$\begin{aligned} |(\mu_i - \delta_0 X_N) * \varphi|_\infty &\leq |x_N| \omega_{x_N}(\varphi) \\ |(\overline{\mu}_i - \delta_0 X_N) * \varphi|_\infty &\leq |x_N| \omega_{x_N}(\varphi), \end{aligned}$$

et aussi

$$|\langle \mu_i - \overline{\mu}_i \rangle * \varphi|_\infty \leq |x_N| \omega_{x_N}(\varphi)$$

de sorte que

$$\left| * (\mu_j * \overline{\mu}_j) * (\mu_i - \overline{\mu}_i) * \varphi \right|_\infty \leq \left| * (\mu_j * \overline{\mu}_j) \right|_1 |(\mu_i - \overline{\mu}_i) * \varphi|_\infty \leq |x_N|^{2(N-2)} |x_N| \omega_{x_N}(\varphi),$$

et on obtient en utilisant la continuité de  $\varphi$ :

$$\lim_{x_N \rightarrow 0} \left| \left[ \frac{1}{x_N^{2N-3}} \left[ * (\mu_j * \overline{\mu}_j) \right] * (\mu_i - \overline{\mu}_i) * \varphi \right] \right| \leq \lim_{x_N \rightarrow 0} \frac{|X_N|^{2N-3}}{|x_N|^{2N-3}} \omega_{x_N}(\varphi) = 0.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.

$$\left\langle \frac{\partial \mu_i}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \mu_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_0^{x_N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(te_i) dt = \varphi(0) - \varphi(x_N e_i) = \langle \delta_0 - \delta_i, \varphi \rangle.$$

Le calcul est analogue pour  $\partial \overline{\mu}_i / \partial x_i$ .

$$\begin{aligned} \langle \mu_i * \overline{\delta}_i, \varphi \rangle &= \int \mu_i(\mathbf{t}) \overline{\delta}_i(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y} + \mathbf{t}) d\mathbf{y} d\mathbf{t} = \int \mu_i(\mathbf{t}) \varphi(-x_N \mathbf{e}_i + \mathbf{t}) d\mathbf{t} \\ &= \int_0^{x_N} \varphi((-x_N + t)e_i) dt = \int_{-x_N}^0 \varphi(te_i) dt = \langle \overline{\mu}_i, \varphi \rangle. \end{aligned}$$



Calcul analogue pour  $\overline{\mu}_i * \delta_i$

$$\left\langle \frac{\partial \mu_i}{\partial x_N}, \varphi \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_N} \int_0^{x_N} \varphi(t \mathbf{e}_i) dt = \varphi(x_N \mathbf{e}_i) = \langle \delta_i, \varphi \rangle.$$

**DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE.** Pour dériver un produit de convolution  $/X_i$ , il suffit de dériver l'un des facteurs, par exemple  $\mu_i * \overline{\mu}_i$ , ou encore  $\mu_i$ ; on obtient

$$\begin{aligned} \eta_{,i} &= *_{j \neq i} (\mu_j * \overline{\mu}_j) * \frac{\partial \mu_i}{\partial x_i} * \overline{\mu}_i = *_{j \neq i} (\mu_j * \overline{\mu}_j) * ((\delta_0 - \delta_i) * \overline{\mu}_i) \\ &= *_{j \neq i} (\mu_j * \overline{\mu}_j) * (\overline{\mu}_i - \mu_i); \end{aligned}$$

de même pour dériver  $\eta_{,i}$  par rapport à  $X_j$ , il suffit de dériver le terme  $\mu_j * \overline{\mu}_j$  on obtient:

$$\begin{aligned} \eta_{,ij} &= *_{k \neq i,j} (\mu_k * \overline{\mu}_k) * \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_j * \overline{\mu}_j) * (\overline{\mu}_i - \mu_i) = *_{k \neq i,j} (\mu_k * \overline{\mu}_k) * (\overline{\mu}_j - \mu_j) * (\overline{\mu}_i - \mu_i) \\ \eta_{,ii} &= \left( *_{j \neq i} (\mu_j * \overline{\mu}_j) \right) * \left( \frac{\partial \overline{\mu}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mu_i}{\partial x_i} \right) = \left( *_{j \neq i} (\mu_j * \overline{\mu}_j) \right) * (\overline{\delta}_i + \delta_i - 2\delta_0). \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.** On a le résultat

$$\frac{\partial}{\partial x_N} \left( *_{j \neq i} (\mu_j * \overline{\mu}_j) \right) = \sum_i *_{j \neq i} (\mu_j * \overline{\mu}_j) * \frac{\partial}{\partial x_N} (\mu_i * \overline{\mu}_i);$$

c'est-à-dire qu'on dérive comme un produit: en effet soit  $\psi_{x_N}$  une fonction régulière, dérivable  $/X_N$ .

$$\begin{aligned} \mu_i * \psi_{x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}) &= \int_0^{+x_N} \psi_{x_N}(x' + t \mathbf{e}_i) dt \\ \frac{\partial}{\partial x_N} [\mu_i * \psi_{x_N}] &= \psi_{x_N}(x' + x_N \mathbf{e}_i) + \int_0^{x_N} \frac{\partial \psi_{x_N}}{\partial x_N}(x' + t \mathbf{e}_i) dt \\ &= \frac{\partial \mu_i}{\partial x_N} * \psi_{x_N} + \mu_i * \frac{\partial \psi_{x_N}}{\partial x_N}. \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial X_N} \left( \underset{1 \leq j \leq N-1}{*} \mu_j * \bar{\mu}_j \right) &= \frac{\partial}{\partial X_N} \left( (\mu_i * \bar{\mu}_i) * \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial X_N} (\mu_i * \bar{\mu}_i) * \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) + (\mu_i * \bar{\mu}_i) * \frac{\partial}{\partial x_N} \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial X_N} (\mu_i * \bar{\mu}_i) * \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) + (\mu_i * \bar{\mu}_i) * \sum_{j \neq i} \underset{k \neq i, j}{*} (\mu_k * \bar{\mu}_k) * \frac{\partial}{\partial X_N} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \\
 &= \sum_i \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * \frac{\partial}{\partial x_N} (\mu_i * \bar{\mu}_i) .
 \end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\frac{\partial}{\partial X_N} (\mu_i * \bar{\mu}_i) = \left( \frac{\partial}{\partial X_N} \mu_i \right) * \bar{\mu}_i + \mu_i * \frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial x_N} .$$

D'où, compte tenu de la Proposition 3:

$$\begin{aligned}
 \eta_{,N} &= \sum_i \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * [(\delta_i * \bar{\mu}_i) + \mu_i * \bar{\delta}_i] = \sum_i \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * [\mu_i + \bar{\mu}_i] \\
 \eta_{,NN} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_N} \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * (\mu_i + \bar{\mu}_i) + \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * \frac{\partial}{\partial x_N} (\mu_i + \bar{\mu}_i) \\
 &= \sum_i \left[ \sum_{j \neq i} \left( \underset{k \neq i, j}{*} (\mu_k * \bar{\mu}_k) \right) * \frac{\partial}{\partial x_N} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * (\mu_i + \bar{\mu}_i) + \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * (\delta_i + \bar{\delta}_i) \right] \\
 &= \sum_i \left[ \sum_{j \neq i} \left( \underset{k \neq i, j}{*} (\mu_k * \bar{\mu}_k) \right) * (\mu_j + \bar{\mu}_j) * (\mu_i + \bar{\mu}_i) + \left( \underset{j \neq i}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right) * (\delta_i + \bar{\delta}_i) \right] .
 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.

$$\langle \mu_j * \bar{\mu}_j, \varphi \rangle = \int_{-x_N}^0 \int_0^{x_N} \varphi((u+t)e_i) du dt .$$

On fait le changement de variables:

$$u+t=\lambda, \quad t=\mu, \quad \langle \mu_j * \bar{\mu}_j, \varphi \rangle = \int_{-x_N}^0 \int_0^{+\mu+x_N} \varphi(\lambda e_i) d\lambda d\mu .$$

On intègre sur le losange:

$$-x_N \leq \mu \leq 0, \quad \mu \leq \lambda \leq \mu + x_N$$

qui se définit encore par

$$\begin{cases} -x_N \leq \lambda \leq 0 \\ -x_N \leq \mu \leq \lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leq \lambda \leq x_N \\ \lambda - x_N \leq \mu \leq 0 \end{cases}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \langle \mu_j * \bar{\mu}_j, \varphi \rangle &= \int_{-x_N}^0 \varphi(\lambda \mathbf{e}_i) \int_{-x_N}^{\lambda} 1 \, d\mu \, d\lambda + \int_0^{x_N} \varphi(\lambda \mathbf{e}_i) \int_{\lambda - x_N}^0 1 \, d\mu \, d\lambda \\ &= \int_{-x_N}^0 (\lambda + x_N) \varphi(\lambda \mathbf{e}_i) \, d\lambda + \int_0^{x_N} (x_N - \lambda) \varphi(\lambda \mathbf{e}_i) \, d\lambda \\ &= \int_{-x_N}^{x_N} (x_N - |\lambda|) \varphi(\lambda \mathbf{e}_i) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Remarquons qu'on obtient par récurrence que

$$\langle \eta, \varphi \rangle = \int_{-x_N}^{+x_N} \dots \int_{-x_N}^{+x_N} \prod_{1 \leq j \leq N-1} (x_N - |\lambda_j|) \varphi(\sum \lambda_k \mathbf{e}_k) \, d\lambda$$

et

$$\int |\mu_j * \bar{\mu}_j| = \langle \mu_j * \bar{\mu}_j, 1 \rangle = \int_{-x_N}^{x_N} (x_N - |\lambda|) \, d\lambda = 2x_N^2 \int_0^1 (1 - \lambda) \, d\lambda = x_N^2;$$

par récurrence:

$$\left| \underset{1 \leq j \leq N-1}{*} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right|_1 = x_N^{2P}.$$

Le Lemme 2 est évident en utilisant la linéarité du produit de convolution.

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.** On la démontre par récurrence sur le nombre  $P$ . Si  $P = 1$ , on utilise le Lemme 1, et on fait un changement de variables dans l'intégrale:

$$\begin{aligned} (\mu_i * \mu_i * \varphi)(x_1, \dots, x_N) &= \int_{-x_N}^{x_N} \varphi(x' - t \mathbf{e}_i) (x_N - |t|) \, dt \\ &= x_N^2 \int_0^1 \varphi(x' - \mu x_N \mathbf{e}_i) (1 - \mu) \, d\mu + \int_{-1}^0 \varphi(x' - \mu x_N \mathbf{e}_i) (1 + \mu) \, d\mu \\ &= x_N^2 \int_0^1 [\varphi(x' + \mu x_N \mathbf{e}_i) + \varphi(x' - \mu x_N \mathbf{e}_i)] (1 - \mu) \, d\mu \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |(\mu_i * \bar{\mu}_i - \delta_0 x_N^2) * \varphi| &= \left| x_N^2 \int_0^1 (\varphi(x' + \mu x_N \mathbf{e}_i) + \varphi(x' - \mu x_N \mathbf{e}_i) \right. \\ &\quad \left. - 2\varphi(x'))(1 - \mu) d\mu \right| \leq |x_N|^2 \int_0^1 |x_N| \mu(1 - \mu) d\mu \cdot |\varphi|_Z = |x_N|^3 \frac{1}{6} |\varphi|. \end{aligned}$$

On suppose montré que

$$\left| \bigstar_{1 \leq j \leq P} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * \varphi - x_N^{2P} \varphi \right|_\infty \leq c(P) |x_N|^{2P+1} |\varphi|_Z.$$

On obtient

$$\begin{aligned} &\left| \bigstar_{1 \leq j \leq P+1} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * \varphi - x_N^{2P+2} \varphi \right|_\infty \\ &= \left| \bigstar_{1 \leq j \leq P+1} (\mu_j * \bar{\mu}_j) + \varphi - \bigstar_{1 \leq j \leq P} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * (x_N^2 \varphi) + x_N^2 \left[ \bigstar_{1 \leq j \leq P} (\mu_j * \bar{\mu}_j) * \varphi - x_N^{2P} \varphi \right] \right|_\infty \\ &\leq \left| \bigstar_{1 \leq j \leq P} (\mu_j * \bar{\mu}_j) \right|_1 \left| (\mu_{P+1} * \bar{\mu}_{P+1}) * \varphi - x_N^2 \varphi \right|_\infty + |x_N|^2 c(P) |x_N|^{2P+1} |\varphi| \\ &\leq c(1) |x_N|^{2P} |x_N|^3 |\varphi|_Z + c(P) |x_N|^2 |x_N|^{2P+1} |\varphi|_Z = c(P+1) |x_N|^{2P+3} |\varphi|_Z. \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. S. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] F. DEMENGEL - P. SUQUET, *On locking materials*, à paraître.
- [3] F. DEMENGEL, *Relaxation et existence pour le problème des matériaux à blocage*, à paraître.
- [4] F. DEMENGEL, *Fonctions à hessien borné*, Annales de l'Institut Fourier, Tome 34, Fas. 2 (1984), pp. 151-190.
- [5] F. DEMENGEL, *Problèmes variationnels en plasticité parfaite des plaques*, Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 6, 1983.
- [6] F. DEMENGEL - R. TEMAM, *Fonctions convexes de mesures*, Indiana J. Math., Décembre 1983.
- [7] DUVAU LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod,
- [8] EKELAND - R. TEMAM, *Convex analysis and variational problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [9] GAGLIARDO, *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative alcune classi di funzioni in n variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 27 (1957), pp. 284-305.
- [10] GEYMONAT-SUQUET, *Communication privée*.
- [11] GILBARG - TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

- [12] HAZELTON MIRKIL - DE LEEUW, *A priori estimates for differential operators in  $L^\infty$  norm*, Illinois J. Math., **8** (1964), pp. 112-124.
- [13] R. KOHN - R. TEMAM, *Dual spaces of stresses and strains with applications to Hencky plasticity*, Appl. Math. Optim., **10** (1983), pp. 1-35.
- [14] R. KOHN - R. TEMAM, *Principes variationnels duaux et théorèmes de l'énergie dans le modèle de plasticité de Hencky*, C.R. Ac. Sc. Paris, Série I, **294** (1982), pp. 205-208.
- [15] ORNSTEIN, *A non inequality for differential operators in the  $L^1$  norm*, Arch. Rational Mech. Anal., **11** (1962), pp. 40-49.
- [16] STEIN, *Singular Integral and Differentiability properties of functions*, Princeton, New-Jersey, 1970.
- [17] G. STRANG - R. TEMAM, *Functions of bounded deformation*, Arch. Rational Mech. Anal., **75** (1980), pp. 7-21.
- [18] STRAUSS, *Sur les équations de la plasticité: existence et régularité des solutions*, J. Mécanique, **20** (1981), pp. 3-39.
- [19] P. SUQUET, *Sur les équations de la plasticité. Existence et régularité de solutions*, J. Mécanique, **20** (1981), pp. 3-39.
- [20] R. TEMAM, *Problèmes Mathématiques en plasticité*, Dunod, 1983.
- [21] ZYGMUND, *Trigonometric Series*, (2nd ed.), 2 Vols., Cambridge, ENG., 1959.
- [22] W. PRAGER, *On Ideal locking material*, Trans. of the Soc. of Rheology, **1** (1957), pp. 169-175.
- [23] F. DEMENGEL, *Théorèmes de trace et de densité pour des espaces fonctionnels de la mécanique non linéaire*, prépublication, Mathématique, Université Paris-Sud, Orsay, 1984.
- [24] O.-M. LAGACHE, *Treillis de volume minimal dans une région donnée*, J. Mécanique, **20** (1981), pp. 415-448.
- [25] K. T. SMITH, *Formulas to represent functions by their derivatives*, Math. Ann., **188** (1970), pp. 53-57.
- [26] L. TARTAR, Communication privée.

Laboratoire d'Analyse Numérique  
 Bâtiment 425  
 Université Paris-Sud  
 91405 Orsay, France