

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ANDREA BRINI

ANTONIO TERRUSI

**Riduzioni omotopicamente invarianti di insiemi parzialmente ordinati**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série, tome 11, n° 3 (1984), p. 381-393*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1984\\_4\\_11\\_3\\_381\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1984_4_11_3_381_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# **Riduzioni omotopicamente invarianti di insiemi parzialmente ordinati.**

ANDREA BRINI - ANTONIO TERRUSI (\*)

## **1. - Introduzione.**

Il presente lavoro si propone di proseguire lo studio, iniziato indipendentemente in [19] e [2], delle applicazioni del « Criterio di omotopia » di D. Quillen ([11], Teorema A) alla combinatoria degli insiemi parzialmente ordinati ed, in particolare, alla teoria delle funzioni di Möbius ([15], [1]).

Il nostro risultato principale (Teorema (3.2)) è infatti derivato dal criterio di Quillen; esso si esprime in un procedimento puramente combinatorio mediante il quale modificare, semplificandone la struttura, un insieme parzialmente ordinato senza alterare il tipo di omotopia dello spazio di classificazione (cfr. [13]). Oltre che per facilitare il compito di determinare tale tipo di omotopia, questo procedimento può essere vantaggiosamente utilizzato nel calcolo delle funzioni di Möbius, grazie alla possibilità di interpretare le stesse come caratteristiche di Eulero ridotte degli spazi di classificazione (cfr. Teorema (2.3)).

Nel § 4 sviluppiamo questa tecnica nel caso speciale dei reticoli che ammettono atomi modulari. Risulta possibile associare canonicamente ad ogni reticolo di questo tipo un insieme parzialmente ordinato, che abbiamo denominato « decomposizione di Weisner », avente struttura ulteriormente semplificata. Va notato che questa costruzione, ed in particolare l'equivalenza omotopica degli spazi di classificazione, risulta essere una generalizzazione in senso topologico di un classico risultato di L. Weisner relativo alle funzioni di Möbius (cfr. ad es. [1]). È doveroso inoltre ricordare che il nostro procedimento è essenzialmente un'estensione della costruzione introdotta da D. Quillen ([12], § 2) per dimostrare il « Teorema di Solomon-Tits » per i buildings ([16]).

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Pervenuto alla Redazione il 1° Settembre 1983 ed in forma definitiva il 29 Giugno 1984.

La sezione conclusiva è dedicata a due applicazioni. In primo luogo consideriamo la « proprietà Cohen-Macaulay omotopica » ([13]) dei reticoli semimodulari. Il sussistere di tale proprietà ha numerose conseguenze di rilievo (cfr. ad es. [8], [18]); in particolare va ricordato, anche a giustificazione della terminologia adottata, che gli anelli di Reisner-Stanley ([8], [18]) di insiemi parzialmente ordinati aventi tale proprietà risultano Cohen-Macaulay (Reisner, [14]) nell'usuale senso dell'algebra commutativa. La dimostrazione da noi proposta si basa sulla nozione di decomposizione di Weisner ed ha un carattere spiccatamente costruttivo. Di fatto, grazie a questo tipo di impostazione, ci è possibile ottenere un'ulteriore applicazione alla classe dei reticoli semimodulari supersolubili ([17]); deriviamo una generalizzazione in senso topologico della identità fondamentale soddisfatta dalle funzioni di Möbius di tali reticoli, ottenuta da R. Stanley in [17].

## 2. - Alcune considerazioni preliminari.

Per semplicità di esposizione, gli insiemi parzialmente ordinati di cui tratteremo si suppongono finiti, sebbene alcuni dei concetti e dei risultati esposti nel seguito sussistano in contesti più generali.

Sia  $P$  un insieme parzialmente ordinato; denotato con  $\Delta(P)$  il complesso simpliciale delle catene di  $P$ , è possibile associare a  $P$  uno spazio topologico  $|P|$ , essendo  $|P|$  la realizzazione geometrica del complesso  $\Delta(P)$ .

D'altra parte, ogni complesso simpliciale  $K$  individua un insieme parzialmente ordinato  $\tilde{K}$ , i cui punti sono i simplessi di  $K$  e l'ordinamento è fornito dall'inclusione. Si riconosce immediatamente che  $|P|$  è omeomorfo a  $|\tilde{\Delta}(P)|$ , in quanto  $\Delta(\tilde{\Delta}(P))$  risulta isomorfo alla suddivisione baricentrica di  $\Delta(P)$ .

Sia ora  $f$  una mappa d'ordine da  $P$  a  $Q$ ; poichè  $f$  può essere riguardata come mappa simpliciale da  $\Delta(P)$  a  $\Delta(Q)$ , essa determina una mappa continua  $|f|$  da  $|P|$  a  $|Q|$ . Ricordiamo infine che la costruzione ora descritta definisce un funtore dalla categoria degli insiemi parzialmente ordinati con mappe d'ordine alla categoria dei poliedri con mappe continue (cfr. ad es. [13]).

Le argomentazioni sviluppate nel corso della presente nota sono basate essenzialmente sui seguenti risultati, dovuti a D. Quillen ([12], [13]).

(2.1) PROPOSIZIONE. *Siano  $P$  e  $Q$  insiemi parzialmente ordinati,  $f$  e  $g$  mappe d'ordine da  $P$  a  $Q$ . Se  $f(p) \geq g(p)$  per ogni  $p \in P$ , allora  $|f|$  e  $|g|$  sono omotope.*

(2.2) TEOREMA. *Siano  $P$  e  $Q$  insiemi parzialmente ordinati,  $f$  una mappa d'ordine da  $P$  a  $Q$ ; se, per ogni  $q \in Q$ , lo spazio  $|\{p \in P; f(p) < q\}|$  è contraibile, allora  $|P|$  e  $|Q|$  sono omotopicamente equivalenti.*

Una dimostrazione sorprendentemente concisa del Teorema (2.2) è stata recentemente ottenuta da J. Walker in [19].

Ricordiamo infine che la funzione di Möbius ([15]) di un insieme parzialmente ordinato  $P$  è l'unica funzione

$$\mu: P \times P \rightarrow Z$$

tale che

- i)  $\mu(x, y) = 0$  se  $x \not\leq y$ ;
- ii)  $\mu(x, x) = 1$  per ogni  $x \in P$ ;
- iii)  $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$  per ogni  $x, y \in P, x < y, x \neq y$ .

Siano  $x, y \in P, x < y$ . L'intervallo chiuso  $[x, y]$  è il sottordine  $\{z \in P; x \leq z \leq y\}$ ; l'intervallo aperto  $]x, y[$  è il sottordine  $\{z \in [x, y]; z \neq x, y\}$ . Il « Teorema di P. Hall » ([15]) può essere espresso nel modo seguente:

(2.3) **TEOREMA.** *Sia  $P$  un insieme parzialmente ordinato,  $x, y \in P, x < y, ]x, y[ \neq \emptyset$ .*

*Allora*

$$\mu(x, y) = \chi(]x, y[) - 1,$$

*ove  $\mu$  denota la funzione di Möbius di  $P$  e  $\chi(]x, y[)$  la caratteristica di Eulero del poliedro  $]x, y[$ .*

### 3. - Sottoinsiemi riducibili. Il criterio di riduzione.

Sia  $P$  un insieme parzialmente ordinato. Un sottoinsieme  $A \subset P$  si dirà saturo se, per ogni  $x, y \in A$ , risulta  $[x, y] \subset A$ .

(3.1) **LEMMA.** *Sia  $A$  un sottoinsieme saturo di  $P$ . Poniamo*

$$P_1(A) = \{x \in P \setminus A; \exists y \in A \text{ tale che } y > x\};$$

$$P_2(A) = \{x \in P \setminus A; \exists y \in A \text{ tale che } y < x\};$$

$$P_3(A) = \{x \in P \setminus A; \text{ per ogni } y \in A, x \not\leq y\}.$$

*L'insieme  $\{P_1(A), P_2(A), P_3(A)\}$  è una partizione di  $P \setminus A$ .*

Un sottoinsieme  $A \subset P$  si dirà *principale* se possiede un elemento minimo (massimo)  $x_0$ .

Diremo infine che un sottoinsieme saturo e principale  $A$  è *riducibile* se, denotato con  $x_0$  il suo minimo (massimo), sussiste la seguente condizione

- (\*) per ogni  $x \in P \setminus A$  tale che  $\{y \in A; y > x\} \neq \emptyset$   
 $(\{y \in A; y < x\} \neq \emptyset)$  l'insieme  $\{z \in P; z \geq x, x_0\}$   
 $(\{z \in P; z \leq x, x_0\})$  ha minimo  $x \vee x_0$  (massimo  $x \wedge x_0$ ).

Sia  $A$  un sottoinsieme riducibile di  $P$ ; diremo *riduzione* di  $P$  rispetto ad  $A$  l'insieme parzialmente ordinato  $R_A(P)$  ottenuto da  $P \setminus A$  aggiungendo un punto supplementare  $b$  e definendo l'ordinamento nel modo seguente:

- i)  $x > y$  in  $R_A(P)$  se  $x > y$  in  $P$  ovvero  $x \in P_2(A)$  e  $y \in P_1(A)$ ;
- ii)  $b > x$  in  $R_A(P)$  se  $x \in P_1(A)$ ;
- iii)  $b < x$  in  $R_A(P)$  se  $x \in P_2(A)$ ;
- iv)  $b \not\leq x$  in  $R_A(P)$  se  $x \in P_3(A)$ .

(3.2) **TEOREMA.** *Sia  $P$  un insieme parzialmente ordinato,  $A$  un sottoinsieme riducibile di  $P$ . Allora  $|P|$  ed  $|R_A(P)|$  sono omotopicamente equivalenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** La mappa

$$f: P \rightarrow R_A(P),$$

$$f(x) = x \quad \text{se } x \in P \setminus A,$$

$$f(x) = b \quad \text{se } x \in A$$

è una mappa d'ordine. Per il Teorema (2.2), se, per ogni  $z \in R_A(P)$ ,  $|\{x \in P; f(x) \leq z\}|$  risulta contraibile, la tesi è dimostrata. A tale fine, posto, per ogni  $x \in P \setminus A$ ,

$$I_x = \{y \in P; y \leq x\}$$

$$I'_x = \{y \in R_A(P); y \leq x\},$$

possono presentarsi i seguenti casi:

i)  $b \in I'_x$ . La fibra  $f^{-1}(I'_x) = \{p \in P; f(p) \leq x\}$  è della forma

$$f^{-1}(I'_x) = A \cup P_1(A) \cup (I_x \cap (P_2(A) \cup P_3(A))).$$

Posto  $X = I_x \cap (P_2(A) \cup P_3(A))$ , la mappa

$$\begin{aligned} g: f^{-1}(I'_x) &\rightarrow f^{-1}(I'_x) \\ g(p) &= p, & \text{se } p \in A \\ g(p) &= p \vee x_0, & \text{se } p \in P_1(A) \quad (x_0 = \min A) \\ g(p) &= x, & \text{se } p \in X \end{aligned}$$

è una mappa d'ordine. Infatti, se  $p_1, p_2 \in A$  (ovvero  $p_1, p_2 \in X$ ,  $p_1, p_2 \in P_1(A)$ ), la verifica è banale. Se  $p_1 \in P_1(A)$ ,  $p_2 \in A$  sono confrontabili, ne segue  $p_1 \leq p_2$ ; d'altra parte  $p_2 \geq x_0$ ,  $p_1$  implica  $g(p_2) \geq g(p_1)$ . Se  $p_1 \in P_1(A)$ ,  $p_2 \in X$  sono confrontabili, ne segue  $p_1 \leq p_2$ ; questo implica  $g(p_2) = x \geq p_1$  e quindi  $g(p_2) = x \geq p_1 \vee x_0 = g(p_1)$ . Se  $p_1 \in A$ ,  $p_2 \in X$  sono confrontabili, ne segue  $p_1 \leq p_2$ ; questo implica  $g(p_2) = x > p_2 > p_1 = g(p_1)$ . Osserviamo infine che la mappa d'ordine  $g$  è tale che  $g(p) \geq p, x_0$ , per ogni  $p \in f^{-1}(I'_x)$ . Dalla Proposizione (2.1) segue perciò che  $|f^{-1}(I'_x)|$  è contraibile.

ii)  $b \notin I'_x$ . In questo caso  $f^{-1}(I'_x) = I_x$ ; poichè  $I_x$  ha massimo nell'elemento  $x$ ,  $|I_x|$  è contraibile.

Come caso particolare del Teorema (3.2) riotteniamo il seguente risultato, dovuto ad A. Björner ([4]).

(3.3) **COROLLARIO.** *Sia  $P$  un insieme parzialmente ordinato. Sia  $p \in P$  tale che l'insieme  $\{x \in P; x \neq p, x > p (x < p)\}$  risulti non vuoto ed abbia minimo (massimo). Allora  $|P|$  e  $|P - \{p\}|$  sono omotopicamente equivalenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $m$  il minimo dell'insieme  $\{x \in P; x \neq p, x > p\}$ . L'insieme  $A = \{p, m\}$  è riducibile.

**ESEMPIO.** Gli insiemi parzialmente ordinati rappresentati successivamente dalle figure 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono ciascuno la riduzione del precedente rispetto all'insieme dei punti racchiusi da circoletto. Si noti che, dalla figura 6, si ottiene immediatamente che i poliedri associati sono omotopicamente equivalenti alla sfera di dimensione 1.

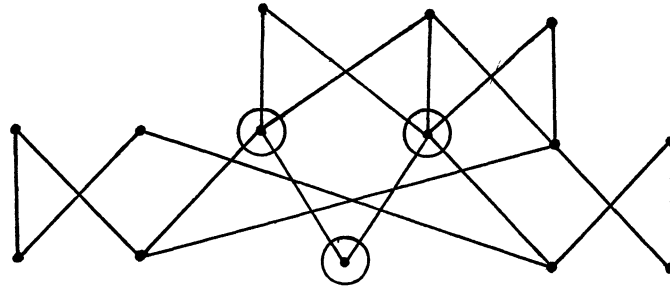


Figura 1

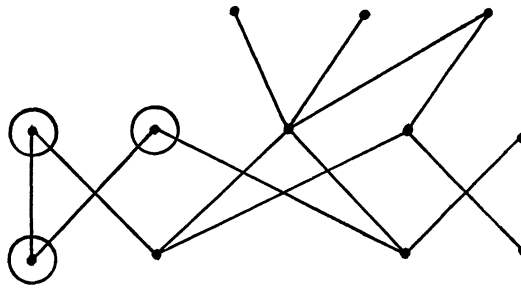


Figura 2

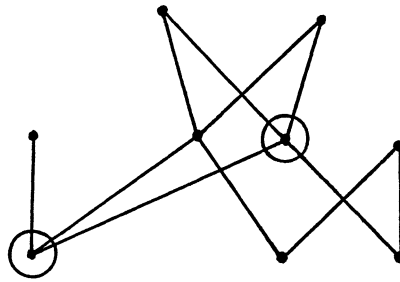


Figura 3

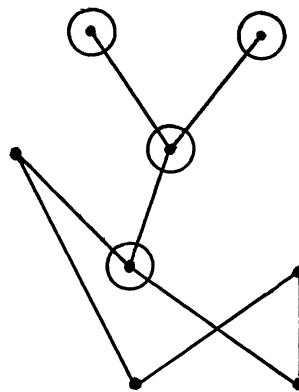


Figura 4

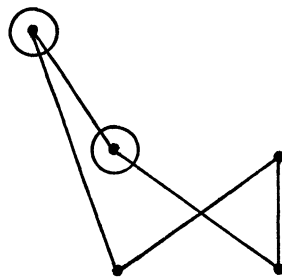


Figura 5

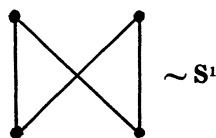


Figura 6

**4. - Atomi modulari e decomposizioni di Weisner di un reticolo.**

Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo,  $\hat{0}$  ed  $\hat{1}$  denotino il minimo ed il massimo di  $\mathcal{L}$ , rispettivamente. Nel seguito, denoteremo con  $\hat{\mathcal{L}}$  l'insieme parzialmente ordinato  $\mathcal{L} \setminus \{0, 1\}$ .

Ricordiamo che un elemento  $a \in \mathcal{L}$  si dice *atomo* se  $a > \hat{0}$  e  $\{x \in \mathcal{L}; \hat{0} < x < a\} = \emptyset$ . Un elemento  $h \in \mathcal{L}$  si dice *coatomo* se è atomo per  $\mathcal{L}'$ , duale d'ordine di  $\mathcal{L}$ . Un atomo  $a \in \mathcal{L}$  si dice *modulare* se  $\{y \in \mathcal{L}; x < y < a \vee x\} = \emptyset$ , per ogni  $x \in \mathcal{L}$ ,  $x \not\geq a$ .

Sia ora  $\mathcal{L}$  tale che  $\hat{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ ,  $a \in \mathcal{L}$  un atomo modulare. Poniamo  $H_a = \{h \in \mathcal{L}; h \text{ coatomo, } h \not\geq a\}$ ; se  $H_a = \emptyset$  diremo che  $\hat{\mathcal{L}}$  è *totalmente riducibile*. Supponiamo ora che  $\hat{\mathcal{L}}$  non sia totalmente riducibile; diremo *decomposizione di Weisner* di  $\hat{\mathcal{L}}$  relativa all'atomo modulare  $a$  l'insieme parzialmente ordinato  $W_a(\hat{\mathcal{L}})$  ottenuto aggiungendo alla somma disgiunta  $]\hat{0}, h_1] \oplus ]\hat{0}, h_2] \oplus \dots \oplus ]\hat{0}, h_n]$ ,  $\{h_2, \dots, h_n\} = H_a$  un elemento supplementare  $q$  e ponendo

$$q \not\geq x, \quad \text{se } x = h_1, \dots, h_n$$

$$q > x, \quad \text{altrimenti .}$$

(4.1) **TEOREMA.** *Sia  $\mathcal{L}$  tale che  $\hat{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ ,  $a \in \mathcal{L}$  un atomo modulare. Se  $\hat{\mathcal{L}}$  è totalmente riducibile, allora  $|\hat{\mathcal{L}}|$  è contraibile. Altrimenti,  $|\hat{\mathcal{L}}|$  e  $|W_a(\hat{\mathcal{L}})|$  sono omotopicamente equivalenti.*



**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il filtro principale  $A = \{x \in \mathfrak{L}; x \geq a\}$ ; ovviamente  $A$  è un insieme riducibile e, per il Teorema (3.2),  $|\hat{\mathfrak{L}}|$  e  $|R_A(\hat{\mathfrak{L}})|$  sono omotopicamente equivalenti.

Se  $\hat{\mathfrak{L}}$  è totalmente riducibile, allora  $R_A(\hat{\mathfrak{L}})$  ha un massimo, da cui segue il primo asserto.

Supponiamo ora che  $\hat{\mathfrak{L}}$  non sia totalmente riducibile.

Sia  $f: W_a(\hat{\mathfrak{L}}) \rightarrow R_A(\hat{\mathfrak{L}})$  l'applicazione che coincide con la proiezione identica per ogni  $x \in W_a(\hat{\mathfrak{L}})$ ,  $x \neq q$  e tale che  $f(q) = b$ . Ovviamente  $f$  è una mappa d'ordine. Inoltre, se  $y$  è massimale in  $R_A(\hat{\mathfrak{L}})$ , l'insieme  $\{x \in W_a(\hat{\mathfrak{L}}); f(x) \geq y\}$  contiene un solo punto, per cui  $|\{x \in W_a(\hat{\mathfrak{L}}), f(x) \geq y\}|$  è contraibile. Supponiamo ora  $y$  non massimale in  $R_A(\hat{\mathfrak{L}})$ . L'insieme  $f^{-1}(V_y) = \{x \in W_a(\hat{\mathfrak{L}}); f(x) \geq y\}$  è non vuoto. Inoltre  $f^{-1}(V_y) \cap ]0, h_i]$  è vuoto oppure ha minimo  $m_i$ , per per ogni  $h_i \in H_a$ . Sia

$$g: f^{-1}(V_y) \rightarrow f^{-1}(V_y)$$

la mappa d'ordine tale che

$$g(x) = m_i \quad \text{se } x \in f^{-1}(V_y) \cap ]0, h_i]$$

$$g(q) = q.$$

Ovviamente  $g(x) \leq x, q$  per ogni  $x \in f^{-1}(V_y)$  e quindi, per la Proposizione (2.1),  $|f^{-1}(V_y)|$  è contraibile. Applicando il Teorema (2.2) ai duali d'ordine di  $W_a(\hat{\mathfrak{L}})$  e  $R_A(\hat{\mathfrak{L}})$  ed il Teorema (3.2), otteniamo la tesi.

**ESEMPIO.** L'insieme parzialmente ordinato  $\hat{\mathfrak{L}}$  rappresentato in figura 1 rappresenta un reticolo geometrico  $\mathfrak{L}$  privato del massimo e del minimo.

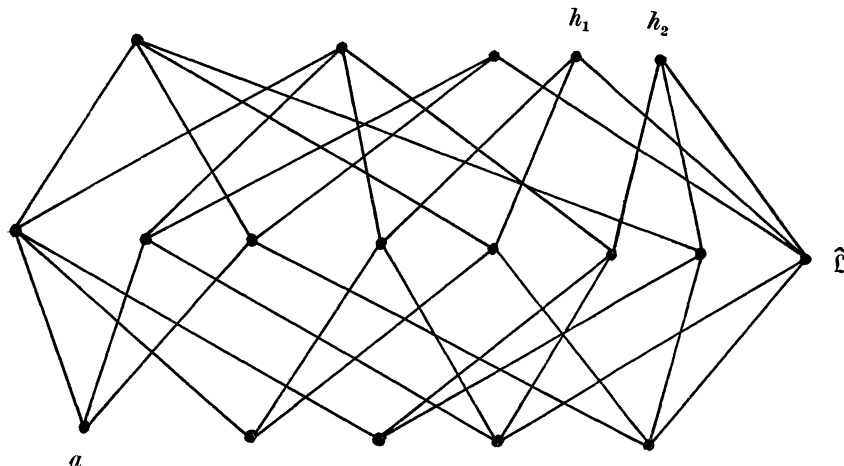


Figura 1

L'insieme parzialmente ordinato rappresentato in figura 2 è la sua decomposizione di Weisner relativamente all'elemento  $a$ . Si osservi che il teorema (4.1) permette di stabilire facilmente che  $\mu_{\mathfrak{L}}(\hat{0}, \hat{1}) = 2$ , ove  $\mu_{\mathfrak{L}}$  è la funzione di Möbius di  $\mathfrak{L}$ .

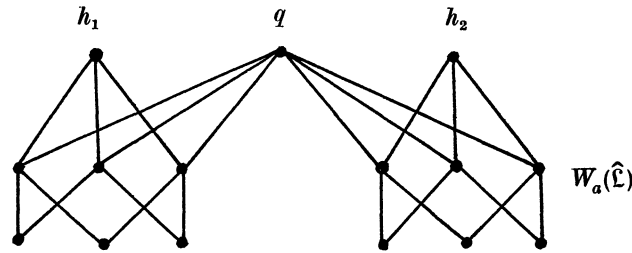


Figura 2

**5. - Applicazioni.**

1) *La proprietà Cohen-Macaulay omotopica per i reticoli semimodulari.*

Sia  $\Delta$  un complesso simpliciale di dimensione finita  $n$ . Ricordiamo che  $\Delta$  si dice *omotopicamente Cohen-Macaulay* se  $|\Delta|$  è omotopicamente equivalente ad un bouquet di  $n$ -sfere ed inoltre se, per ogni  $d$ -simpleso  $\alpha$  di  $\Delta$ ,  $|\text{link } \alpha|$  è omotopicamente equivalente ad un bouquet di  $(n - d - 1)$ -sfere ([13]). Un insieme parzialmente ordinato  $P$  si dice omotopicamente Cohen-Macaulay se il complesso simpliciale  $\Delta(P)$  è omotopicamente Cohen-Macaulay.

Il seguente Teorema può dedursi da un risultato di M. Hochster [7] in base al quale ogni complesso shellabile è omotopicamente Cohen-Macaulay e dal fatto che i complessi di catene dei reticoli semimodulari sono effettivamente shellabili [3]. Una diversa dimostrazione, basata sul Teorema omotopico del Cross-Cut ([15], [5], [9]), è stata fornita da D. Quillen in [13].

La dimostrazione da noi ottenuta si differenzia da quelle precedentemente citate per il fatto di essere essenzialmente costruttiva. Va inoltre osservato che tale dimostrazione fornisce una generalizzazione in senso topologico del classico Teorema di Weisner [15] per le funzioni di Möbius.

(5.1) **TEOREMA.** *Sia  $\mathfrak{L}$  un reticolo semimodulare di rango  $n \geq 2$ . Allora  $\mathfrak{L}$  è omotopicamente Cohen-Macaulay. Inoltre le  $(n - 2)$ -sfere del bouquet  $|\hat{\mathfrak{L}}|$  sono esattamente  $|\mu(\hat{0}, \hat{1})|$ , ove  $\mu$  è la funzione di Möbius di  $\mathfrak{L}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Vogliamo innanzitutto dimostrare che  $|\hat{\mathcal{L}}|$  è un bouquet di  $(n-2)$ -sfere. Procediamo per induzione rispetto al rango di  $\mathcal{L}$ . Se  $n=2$ , l'affermazione è banalmente verificata. Per ipotesi di induzione, supponiamo l'affermazione verificata per ogni  $n < k$ . Sia ora  $\mathcal{L}$  di rango  $k$ ,  $a \in \mathcal{L}$  un atomo. Poichè  $\mathcal{L}$  è semimodulare,  $a$  è un atomo modulare. Se  $\hat{\mathcal{L}}$  è totalmente riducibile, allora  $|\hat{\mathcal{L}}|$  è contraibile, per il Teorema (4.1). Supponiamo  $\hat{\mathcal{L}}$  non totalmente riducibile; sia  $H_a = \{h_1, \dots, h_m\}$  l'insieme dei coatomi di  $\mathcal{L}$  non maggiori di  $a$ ,  $W_a(\hat{\mathcal{L}})$  la decomposizione di Weisner relativamente ad  $a$ . Per ogni  $h_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , sia  $B_i = \{x \in W_a; x \leq h_i\} \cup \{q\}$ . Ovviamente,  $\Delta(B_i) = \text{susp } \Delta(\{x \in W_a; x < h_i\})$  ed inoltre  $|\{x \in W_a; x < h_i\}|$  è un bouquet di  $(k-3)$ -sfere, per ipotesi di induzione e ricordando che ogni intervallo di un reticolo semimodulare è semimodulare. Poichè la sospensione di un bouquet di  $n$ -sfere è un bouquet di  $(n+1)$ -sfere e  $q \in B_i$ , per ogni  $i = 1, 2, \dots, m$ , segue l'asserto. Dal Teorema (2.3) e dalla forma dell'omologia dei bouquet di sfere (cfr. ad es. [10]), segue immediatamente che il numero di tali sfere è esattamente  $|\mu(0, 1)|$ . Sia ora  $\alpha = \{x_0 < x_1 < \dots < x_d\}$  un  $d$ -simplexso di  $\Delta(\hat{\mathcal{L}})$ . Si verifica facilmente che

$$\text{link } \alpha = \Delta(\hat{\mathcal{L}}, x_0) * \Delta(\hat{\mathcal{L}}, x_1) * \dots * \Delta(\hat{\mathcal{L}}, x_d),$$

ove  $*$  denota l'usuale operazione di join tra complessi. Ricordando il join di un bouquet di  $d$ -sfere con un bouquet di  $h$ -sfere è un bouquet di  $(d+h+1)$ -sfere e l'affermazione precedente, si conclude la dimostrazione.

(5.2) **COROLLARIO (Weisner).** *Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo semimodulare,  $a$  atomo di  $\mathcal{L}$ . Se  $H_a = \emptyset$ , allora  $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = 0$ . Se  $H_a = \{h_1, \dots, h_n\}$ , allora*

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = - \sum_{i=1}^n \mu(\hat{0}, h_i).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Come già osservato, se  $H_a = \emptyset$ , allora  $|\hat{\mathcal{L}}|$  è contraibile e  $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = 0$ . Supponiamo  $H_a \neq \emptyset$  e siano  $B_i = \{x \in W_a(\mathcal{L}); x \leq h_i\}$ ,  $\mathcal{O}_i$  il numero delle sfere nel bouquet  $|B_i|$ . Allora

$$|\mu(\hat{0}, \hat{1})| = \# \text{ di sfere in } |\hat{\mathcal{L}}| = \sum_{i=1}^n \mathcal{O}_i = \sum_{i=1}^n |\mu(0, h_i)|.$$

Poichè, se  $\mu(\hat{0}, h_i) \neq 0$ , allora  $\mu(\hat{0}, \hat{1})$  e  $\mu(\hat{0}, h_i)$  hanno segno opposto, ciò prova l'asserto.

2) *Reticoli semimodulari supersolubili: il Teorema di Stanley.*

Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo semimodulare,  $r: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{N}$  la sua funzione rango. Un elemento  $x \in \mathcal{L}$  si dice *modulare* se, per ogni  $y \in \mathcal{L}$ , risulta

$$r(x) + r(y) = r(x \wedge y) + r(x \vee y).$$

Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo semimodulare di rango  $n$ ;  $\mathcal{L}$  si dice *supersolubile* se esiste una catena

$$\hat{0} = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = \hat{1}$$

tale che  $a_i$  sia elemento modulare per ogni  $i = 0, 1, \dots, n$ .

La successione  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , ove

$$\alpha_i = \# \{a \text{ atomo di } \mathcal{L}; a \leq a_i, a \not\leq a_{i-1}\},$$

$i = 1, 2, \dots, n$ , si dice *successione caratteristica* di  $\mathcal{L}$ , relativa alla catena  $\hat{0} < a_0 < a_1 < \dots < a_n = \hat{1}$ .

(5.3) **PROPOSIZIONE.** *Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo semimodulare supersolubile,  $r(\mathcal{L}) = n$ . Sia  $\hat{0} = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = \hat{1}$  una catena di elementi modulari. Sia  $x$  atomo di  $\mathcal{L}$ ,  $x \not\leq a_{n-1}$ . La catena  $x < x \vee a_1 < x \vee a_2 < \dots < x \vee a_{n-1} = \hat{1}$  è una catena di elementi modulari per l'intervallo  $[x, \hat{1}]$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $q \in [x, \hat{1}]$ . Si ha

$$(*) \quad r(q \vee x \vee a_i) = r(q \vee a_i) = r(q) + r(a_i) - r(a_i \wedge q).$$

D'altra parte, essendo  $x < q \wedge (x \vee a_i)$ ,  $x \not\leq q \wedge a_i$ , risulta, in base a (\*),

$$r(q \wedge (x \vee a_i)) = r(q \wedge a_i) + 1;$$

ne segue che

$$r(q \vee x \vee a_i) = r(q) + r(a_i \vee x) - r((a_i \vee x) \wedge q).$$

(5.4) **PROPOSIZIONE.** *Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo semimodulare supersolubile,  $r(\mathcal{L}) = n$ . Sia  $\hat{0} = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = \hat{1}$  una catena di elementi modulari,  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  la successione caratteristica relativa a tale catena. Sia  $x$  un atomo di  $\mathcal{L}$ ,  $x \not\leq a_{n-1}$ . L'intervallo  $[x, \hat{1}]$  è semimodulare supersolubile, e la successione caratteristica relativa a  $x < x \vee a_1 < x \vee a_2 < \dots < x \vee a_{n-1} = \hat{1}$  è  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $Q_x = \{q \text{ atomo di } [x, \hat{1}]; q \not\leq a_{n-2} \vee x\}$ . Essendo  $q \not\leq x \vee a_{n-2}$ , risulta  $a_{n-2} \vee q > a_{n-2} \vee x$ , da cui  $a_{n-2} \vee q = \hat{1}$  ed, essendo  $a_{n-2}$  elemento modulare,  $a_{n-2} \wedge q = \hat{0}$ . Inoltre,  $r(a_{n-1} \wedge q) = 1$ . Perciò  $a_{n-1} \wedge q < a_{n-1}$ ,

$a_{n-2} \wedge q \prec a_{n-2}$ . Notiamo infine che, se  $q_1, q_2 \in Q_x$ , ne segue  $q_1 \wedge a_{n-1} \neq q_2 \wedge a_{n-1}$ . Viceversa, sia  $a$  atomo di  $\mathcal{L}$ ,  $a < a_{n-1}$ ,  $a \prec a_{n-2}$ . L'elemento  $a \vee x$  appartiene a  $Q_x$ . Siano  $a_1, a_2$  atomi di  $\mathcal{L}$ ,  $a_1, a_2 < a_{n-1}$ ,  $a_1, a_2 \prec a_{n-2}$ . Ovviamente  $a_1 \vee a_2 \succ x$ , quindi  $a_1 \vee a_2 \vee x$  ha rango 3 e perciò  $a_1 \vee x \neq a_2 \vee x$ . Questi argomenti implicano  $\neq Q_x = \alpha_{n-1}$ . Iterando la precedente costruzione relativamente ai sottoreticoli  $[\hat{0}, x \vee a_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-2$  si ottiene la tesi.

(5.5) **TEOREMA.** *Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo semimodulare supersolubile,  $r(\mathcal{L}) = n \geq 2$ . Sia  $\hat{0} = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = \hat{1}$  una catena di elementi modulari,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  la successione caratteristica ad esso relativa. Il numero delle sfere nel  $(n-2)$ -bouquet  $|\hat{\mathcal{L}}|$  è esattamente  $\prod_{i=1}^n \alpha_i$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per induzione sul rango di  $\mathcal{L}$ . Se  $n = 2$ , l'affermazione è banalmente verificata. Supponiamo l'affermazione vera per  $n < k$ . La decomposizione di Weisner del duale di  $\hat{\mathcal{L}}$  relativamente ad  $a_{n-1}$  corrisponde, per i teoremi (4.1) e (5.1), alla sospensione dei  $(k-3)$ -bouquet  $|\hat{x}, \hat{1}|$ , con  $x$  atomo di  $\mathcal{L}$ ,  $x \prec a_{k-1}$ . Tali bouquet sono  $\alpha_k$  ed ognuno di essi contiene esattamente  $\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i$   $(k-3)$ -sfere, per ipotesi di induzione e per la Proposizione (5.4).

(5.6) **COROLLARIO (Stanley).** *Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo semimodulare supersolubile,  $r(\mathcal{L}) = n$ . Sia  $\hat{0} = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = \hat{1}$  una catena di elementi modulari,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  la successione caratteristica ad essa relativa. Allora*

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \alpha_i,$$

ove  $\mu$  è la funzione di Möbius di  $\mathcal{L}$ .

(5.7) **COROLLARIO.** *Sia  $\mathcal{L}$  reticolo semimodulare supersolubile,  $r(\mathcal{L}) = n$ . Sia  $\hat{0} = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = \hat{1}$  una catena di elementi modulari. Siano  $x, y$  atomi di  $\mathcal{L}$ ,  $x, y \prec a_{n-1}$ . Allora  $|\hat{x}, \hat{1}|$  e  $|\hat{y}, \hat{1}|$  sono omotopicamente equivalenti.*

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] M. BARNABEI - A. BRINI - G. C. ROTA, *Un'introduzione alla teoria delle funzioni di Möbius*, « Matroid Theory and its Applications » (A. Barlotti, ed.), CIME, Varenna, 1980, pp. 7-109.

- [2] A. BRINI, *Some homological properties of partially ordered sets*, Advances in Math., **43** (1982), pp. 197-201.
- [3] A. BJORNER, *Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc., **260** (1980), pp. 159-183.
- [4] A. BJORNER, *Homotopy type of posets and lattice complementation*, J. Combinatorial Theory Ser. A, **30** (1981), pp. 90-100.
- [5] J. FOLKMAN, *The homology groups of a lattice*, J. Math. Mech., **15** (1966), pp. 631-636.
- [6] G. GRATZER, *General Lattice Theory*, Birkhauser, Basel and Stuttgart, 1978.
- [7] M. HOCHSTER, *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and polytopes*, Ann. of Math., **96** (1972), pp. 318-337.
- [8] M. HOCHSTER, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics and simplicial complexes*, «Proc. 2nd Oklahoma Ring Theory Conf.» (B. McDonald and R. Morris, eds.), Dekker, New York, 1977, pp. 171-223.
- [9] H. LAKSER, *The homology of a lattice*, Discrete Math., **1** (1971), pp. 187-192.
- [10] C. MAUNDER: *Algebraic Topology*, Van Nostrand, London, 1970.
- [11] D. QUILLEN, *Higher algebraic K-theory I*, «Algebraic K-theory I» (H. Bass, ed.), Lecture Notes in Mathematics, no. 341, Springer, Berlin, 1973, pp. 85-147.
- [12] D. QUILLEN, *Finite generations of the groups  $K_i$  of rings of algebraic integers*, «Algebraic K-theory I» (H. Bass, ed.), Lecture Notes in Mathematics, no. 341, Springer, Berlin, 1973, pp. 179-199.
- [13] D. QUILLEN, *Homotopy properties of posets of nontrivial  $p$ -subgroups of a group*, Advances in Math., **28** (1978), pp. 101-128.
- [14] G. REISNER, *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Advances in Math., **21** (1976), pp. 30-49.
- [15] G. C. ROTA, *On the foundations of combinatorial theory, I: Theory of Möbius functions*, Z. Wahrsch., **2** (1964), pp. 340-368.
- [16] L. SOLOMON, *The Steinberg character of a finite group with BN-pair*, «Theory of Finite Groups» (R. Brauer and C. H. Sah, eds.), Benjamin, New York, 1969, pp. 213-221.
- [17] R. STANLEY, *Supersolvable lattices*, Algebra Universalis, **2** (1972), pp. 197-217.
- [18] R. STANLEY, *Cohen-Macaulay complexes*, «Higher Combinatorics» (M. Aigner, ed.), Reidel, Boston, 1977, pp. 51-62.
- [19] J. WALKER, *Homotopy type and Euler characteristic of partially ordered sets*, Europ. J. Comb., **2** (1981), pp. 373-384.

Dipartimento di Matematica  
 Università di Bologna  
 Piazza Porta S. Donato 5  
 40127 Bologna

Dipartimento di Matematica  
 Università di Bari  
 Facoltà di Ingegneria  
 via Re David 200  
 70125 Bari