

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

B. HELFFER

D. ROBERT

Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 9, n° 3
(1982), p. 405-431

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1982_4_9_3_405_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques.

B. HELFFER - D. ROBERT

On se propose ici d'étendre les résultats de J. CHAZARAIN [3] et de notre travail [4] à des classes plus générales d'opérateurs. Notre motivation principale est de pouvoir étudier le comportement du spectre des opérateurs de Schrödinger dans $\mathbf{R}^n$:

$$P(h) = \frac{h^2}{2} \Delta + V$$

pour des potentiels V du type

$$V(x) = |x|^{2k} + 1, \quad k \text{ entier } \geq 1,$$

et plus généralement pour des potentiels vérifiant:

(*) Il existe m' et $C > 0$ tels que:

$$V(x) \geq C(1 + |x|)^{m'}$$

(**) Il existe $\varrho_0 > 0$ tel que, pour tout multi indice α , il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha V^{((1-\varrho_0|\alpha|)_+)}(x).$$

Le cas de l'oscillateur quartique: $V(x) = |x|^4 + 1$ ne rentrait pas en effet dans les études faites auparavant ([3], [4]).

1. - Hypothèses préliminaires. Résultats.

Suivant [4], on se donne une paire de fonctions poids (φ, Φ) au sens de BEALS [2], telle que la métrique associée vérifie les hypothèses de L. HOR-

Pervenuto alla Redazione il 17 Giugno 1981.

MANDER [8]. On fait de plus les hypothèses suivantes :

(1.1) Il existe des constantes $0 < \delta \leq 1$, $C_0, C_1 > 0$, telles que :

$$C_0(1 + |x|^2 + |\xi|^2)^\delta \leq \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \leq C_1(1 + |x|^2 + |\xi|^2)$$

(1.2) $t\Phi(x, \xi) \leq \Phi(tx, t\xi)$

$$t\varphi(x, \xi) \leq \varphi(tx, t\xi)$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$, $t \in [0, 1]$.

(1.3) $\Phi(tx, t\xi)\varphi(tx, t\xi) \leq \Phi(x, \xi)\varphi(x, \xi)$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$, $t \in [0, 1]$.

(1.4) Il existe $C_2 > 0$ telle que: $\Phi \geq C_2$, $\varphi \geq C_2$.

(Hypothèse simplificatrice que nous n'avions pas faite dans [4].)

Comme dans [4], on considère un opérateur admissible d'ordre m $p(h, x, hD_x)$ dont le symbole (usuel) admet le développement :

$$(1.5) \quad p(h, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} h^j p_j(x, \xi).$$

On fait de plus les hypothèses suivantes :

(1.6) Il existe $C_3 > 0$ et $m' > 0$ tels que :

$$|p_0| \geq C_3(\Phi \cdot \varphi)^{m'}.$$

(1.7) Pour tout j et tous α, β , il existe $C_{j\alpha\beta} > 0$ telle que :

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_j| \leq C_{j\alpha\beta} |p_0| (\Phi \cdot \varphi)^{-j} \Phi^{-|\alpha|} \cdot \varphi^{-|\beta|}.$$

(1.8) Il existe un réel $\varrho \in]0, \frac{1}{2}]$ tel que :

$$(1.8)' \quad |p_0^\varrho| \leq C \cdot \Phi \cdot \varphi$$

et pour tout j, α, β , il existe $C'_{j\alpha\beta} > 0$ telle que l'on ait :

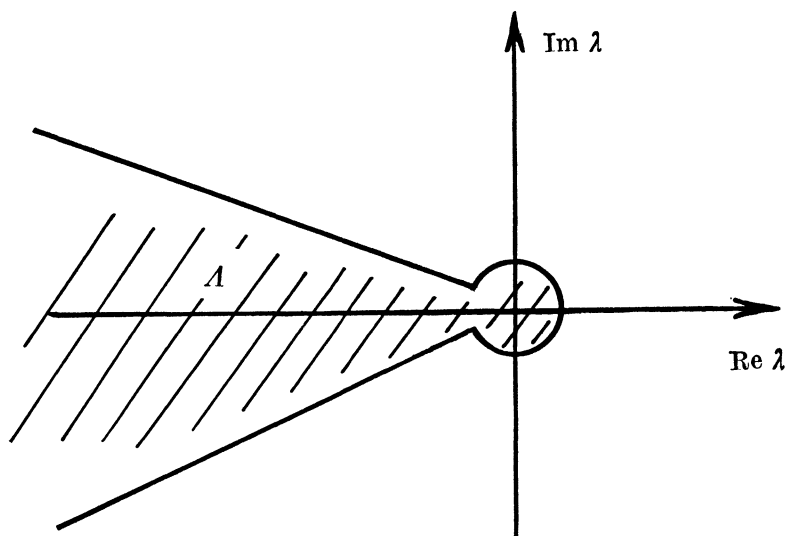
$$(1.8)'' \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_j| \leq C'_{j\alpha\beta} |p_0|^{(1 - \varrho(|\alpha| + |\beta| + j))}.$$

Enfin

$$(1.9) \quad |p_0 - \lambda| \geq C_4(|p_0| + |\lambda|)$$

pour $\lambda \in A$, $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$

où Λ est défini par:



REMARQUE 1.1. Si on pose:

$$p(h, x, hD) = \tilde{p}^w(h, x, hD)$$

où $\tilde{p}$ désigne le symbole de Weyl de $p(h, x, hD)$ (Cf. [6] et [11]), on a alors:

$$\tilde{p}(h, x, \xi) \sim p_0(x, \xi) + \sum_{j \geq 1} h^j \tilde{p}_j(x, \xi)$$

où les $\tilde{p}_j(x, \xi)$ vérifient des propriétés analogues à celles imposées aux p_j .

Cela résulte de la proposition (2.4) de [4].

On a montré dans [4] que l'opérateur:

$$Q(h) = P(h)^s \quad \text{où } s \in \mathbf{R} \quad (P(h) = p(h, x, hD_x))$$

est défini par un symbole usuel admissible:

$$(1.10) \quad q(h, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} h^j q_j(x, \xi)$$

et on a en particulier

$$(1.11) \quad q_0 = p_0$$

$$(1.12) \quad \text{Sp}(q) = s p_0^{s-1} \text{Sp}(p) \left(\text{Sp}(p) = p_1 - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_j \partial \bar{x}_j} \right).$$

On suppose désormais que:

$$(1.13) \quad s = 2\rho.$$

On a alors la proposition suivante:

PROPOSITION 1.2. *Pour tous j, α, β , il existe $C''_{j,\alpha,\beta} > 0$ telle que:*

$$(1.14) \quad |\partial_{\bar{x}}^{\alpha} \partial_x^{\beta} q_j| \leq C''_{j,\alpha,\beta} |q_0|^{(1-(|\alpha|+|\beta|)/2)_+}.$$

En particulier, pour $|\alpha| + |\beta| \geq 2$, on a:

$$(1.15) \quad \partial_{\bar{x}}^{\alpha} \partial_x^{\beta} q_0 = O(1).$$

Cette proposition sera démontrée au § 2.

On suppose dorénavant que $P(h)$ est symétrique (en particulier p_0 est réel), il est alors, pour h assez petit, essentiellement autoadjoint. $Q(h)$ est alors également symétrique pour $h \in]0, h_0]$ et il résulte de (1.11), (1.13), (1.6) et (1.1) que:

$$(1.16) \quad \text{Il existe } C_s, m'' > 0 \text{ tels que:}$$

$$q_0(x, \xi) \geq C_s \lambda^{m''}(x, \xi)$$

où

$$\lambda(x, \xi) = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme dans [3] et [4], on pose:

$$S_h(t) = \text{Trace} [\exp [-ih^{-1}tQ(h)]]$$

$$I_{\tau} = \langle S_h(t), \theta(t) \exp [-ih^{-1}\tau t] \rangle; \quad \theta \in C_0^{\infty}(R)$$

$(\lambda_j(h))_{j \geq 0}$ la suite des valeurs propres de $P(h)$

$$\mu_j(h) = \lambda_j(h)^{2\rho}.$$

Pour formuler nos résultats nous utilisons, comme dans [3], la notion d'ensemble de fréquences, due à Guillemin-Sternberg, concernant les familles de distributions dépendant d'un paramètre. Soit Ω un ouvert de R^p

et $h \rightarrow T_h$ une application de $[0, h_0]$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'ensemble de fréquence: $F[T_h] \subset T^*\Omega$ est défini par:

DÉFINITION. *Un point $(x^0, \xi^0) \in T^*\Omega$ n'appartient pas à $F[T_h]$ si et seulement si il existe $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\theta(x^0) \neq 0$, et un voisinage $\mathcal{V}$ de ξ^0 tels que:*

$$\langle \theta(x) \exp[-ih^{-1} \cdot x \cdot \xi], T_h \rangle = O(h^\infty), \quad h \rightarrow 0$$

uniformément pour $\xi \in \mathcal{V}$.

On désigne alors par $\mathcal{L}_\tau$, $\tau \in \mathbf{R}$, l'ensemble des périodes du champ hamiltonien H_{q_0} , d'énergie $-\tau$ et si I est un intervalle réel on pose:

$$\mathcal{L}_I = \bigcup_{\tau \in I} \mathcal{L}_\tau.$$

Dans ce cadre, les énoncés des théorèmes 2 à 5 de [4] sont encore valables:

THÉORÈME 1.3. *On a:*

$$F[S_h] \subseteq \mathcal{L} \quad \text{où} \quad \mathcal{L} = \overline{\bigcup_{\tau \in \mathbf{R}} \mathcal{L}_\tau \times \{\tau\}}.$$

THÉORÈME 1.4. *Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que:*

$$\text{Supp } \mathcal{O} \cap \bar{\mathcal{L}}_{[\tau_0 - \varepsilon_0, \tau_0 + \varepsilon_0]} = \{0\}$$

et que q_0 n'ait pas de valeurs critiques dans $[-\tau_0 - \varepsilon_0, -\tau_0 + \varepsilon_0]$.

Alors

$$I_\tau(h) = (2\pi h)^{1-n} \mathcal{O}(0) \int_{q_0(x, \xi) = -\tau} \frac{dS_\tau}{|\text{grad}_{x, \xi} q_0|} + O(h^{2-n}), \quad h \rightarrow 0$$

pour tout $\tau \in [\tau_0 - \varepsilon_0, \tau_0 + \varepsilon_0]$.

De plus $O(h^{2-n})$ est uniforme par rapport à τ (dS_τ étant la densité riemannienne sur $(q(x, \xi) = -\tau)$).

THÉORÈME 1.5. *On pose $N_h(\lambda) = \text{card} \{j, \lambda_j(h) \leq \lambda\}$.*

Soit $\lambda > 0$ non valeur critique de p_0 . On a alors:

$$N_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \int_{p_0(x, \xi) \leq \lambda} dx d\xi + O(h^{1-n}); \quad h \rightarrow 0.$$

Ce théorème améliore dans de nombreux cas les résultats de M. A. SUBIN [11] et L. HÖRMANDER [7]. Le théorème 5, de [4] est également valable, mais nous n'avons pas d'exemples nouveaux à présenter comme application.

EXEMPLE 1.6. *On considère*

$$P(h) = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + x^4 + 1.$$

Les hypothèses précédentes sont vérifiées pour:

$$\Phi(x, \xi) = \varphi(x, \xi) = (\xi^2 + x^4 + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad \varrho = \frac{1}{4}, \quad m' = 2.$$

EXEMPLE 1.7.

$$P(h) = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + x^4 + 2 + \cos x.$$

On prend alors:

$$\Phi(x, \xi) = (\xi^2 + x^4 + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi(x, \xi) = 1, \quad \varrho = \frac{1}{4}, \quad m' = 4.$$

EXEMPLE 1.8. *Le cas étudié par J. CHAZARAIN [3].*

$$P(h) = -h^2 \Delta + V(x)$$

où $V(x)$ se comporte comme $|x|^2$ à l'infini, correspond au choix:

$$\varrho = \frac{1}{2}, \quad \Phi = \sqrt{1 + |x|^2 + |\xi|^2}, \quad \varphi = 1, \quad m' = 2.$$

Plus généralement si $V(x)$ vérifie () et (**) on prend comme fonctions poids:*

$$\Phi(x, \xi) = (1 + |x|^2 + |\xi|^{2N})^{(2N)^{-1}}, \quad \varphi(x, \xi) = 1$$

où N est un entier > 0 tel qu'il existe $C' > 0$ vérifiant:

$$C'(1 + |x|^2)^{(2N)^{-1}} \leq V(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^n.$$

Pour réaliser (1.8)', on choisit ϱ tel quel $\varrho < \frac{1}{2}$ et $\varrho \leq \varrho_0$ et, pour réaliser (1.8)', on impose: $\varrho \leq (2mN)^{-1}$.

EXEMPLE 1.9.

$$P(h) \sim \lambda + \sum_{j \geq 0} h^j p_j$$

où les p_j sont des symboles C^∞ vérifiant la propriété de quasi-homogénéité suivante:

Il existe deux multi-indices f et $k \in (\mathbb{N}^*)^n$: $f = (f_1, \dots, f_n)$; $k = (k_1, \dots, k_n)$ et un réel $M > 0$ tel que:

$$(1.17) \quad p_j(r^{f_1}x_1, \dots, r^{f_n}x_n; r^{k_1}\xi_1, \dots, r^{k_n}\xi_n) = r^{M-j}p_j(x, \xi)$$

pour tout (x, ξ) tels que $|\xi| + |x| \geq 1$

et tout $r \geq 1$;

et on fait l'hypothèse sur λ et p_0 que:

$$(1.18) \quad \lambda + p_0(x, \xi) > 0$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

On pose:

$$M_0 = p \cdot p \cdot c \cdot m \{f_1, \dots, f_n, k_1, \dots, k_n\}, \quad f'_i = \frac{M_0}{f_i}, \quad k'_i = \frac{M_0}{k_i}.$$

On déduit de (1.17) et (1.18) que:

$$(1.19) \quad C_1(1 + |x_1|^{2f'_1} + \dots + |\xi|^{2k'_n})^{M(2M_0)^{-1}} \leq |p_0 + \lambda| \leq C_2(1 + |x_1|^{2f'_1} + \dots + |\xi|^{2k'_n})^{M/2}$$

et que

$$(1.20) \quad \partial_\alpha^x \partial_\xi^\beta p_j(r^{f_1}x_1, \dots, r^{k_n}\xi_n) = r^{M-\alpha, f-\beta, h-j} p_j(x, \xi)$$

pour $|x| + |\xi| \geq 1$ et $r \geq 1$.

On satisfait aux hypothèses précédentes, en choisissant

$$\Phi(x, \xi) = \varphi(x, \xi) = (1 + |x_1|^{2f'_1} + \dots + |\xi_n|^{2k'_n})^{1/4M_0},$$

$$\varrho = \text{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{M}\right), \quad m' = M.$$

EXEMPLE 1.10.

$$P(h) = -\frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + x^2 + y^4 + f(x, y)$$

où f est une fonction C^∞ vérifiant:

(i) $f(x, y) \geq C_0$ pour un $C_0 > 0$;

(ii) $\partial^\alpha f = O(1)$ pour tout α .

On peut choisir:

$$\Phi = (1 + x^2 + y^4 + \eta^2 + \xi^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \varphi = 1, \quad \varrho = \frac{1}{4}, \quad m' = 2.$$

REMARQUE 1.11. *Le choix de ϱ pour réaliser la condition (1.8) et avoir les conclusions des théorèmes (1.3) et (1.4) pour $Q(h) = P(h)^{2\varrho}$ n'est évidemment pas canonique. Il est clair que si ϱ convient, alors tout réel $\varrho_1 \in]0, \varrho]$ convient aussi.*

Comme dans [4], le théorème (1.5) se déduit du théorème (1.4). Posant:

$$(1.21) \quad M_h(\lambda) = \text{Card} \{j, \lambda_j^{2\varrho}(h) \leq \lambda\}$$

on établit d'abord que:

$$(1.22) \quad M_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \int_{a_0(x, \xi) \leq \lambda} dx d\xi + O(h)^{1-n}; \quad h \rightarrow 0$$

et on utilise la relation

$$(1.23) \quad N_h(\lambda) = M_h(\lambda^{2\varrho}).$$

Ce qui donne:

$$(1.24) \quad N_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \int_{a_0(x, \xi) \leq \lambda} dx d\xi + O(h^{1-n}), \quad h \rightarrow 0.$$

Il y a là une différence importante, au niveau de la méthode, par rapport à l'étude de $N_h(\lambda)$, pour h fixé et $\lambda \rightarrow \infty$.

Supposons que nous ayons réussi à établir: (cf. [5] et remarque suivante)

$$(1.25) \quad M_h(\lambda) = \gamma_0 \lambda^n + O(\lambda^{n-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

On déduit de (1.23) que:

$$(1.26) \quad N_h(\lambda) = \gamma_0 \lambda^{2\varrho n} + O(\lambda^{2\varrho n - 2\varrho}), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Dans (1.26), pour $n \geq 2$, la puissance de λ du reste dépend de ϱ (ce qui n'était pas le cas de la puissance de h dans (1.24)).

Dans ce cas, l'efficacité de la méthode viendra du choix d'un ϱ optimal.

REMARQUE 1.12. Comme dans [4], on peut déduire du théorème (1.5), une estimation du reste de $N_h(\lambda)$ à h fixé pour $\lambda \rightarrow \infty$ lorsqu'on a une propriété d'homogénéité.

Soit par exemple p_0 un polynôme vérifiant les propriétés de l'exemple (1.9), on suppose de plus que:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = \dots = f_n = d \\ k_1 &= \dots = k_n = g. \end{aligned}$$

Soit $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ la suite des valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, de $p_0(x, D_x)$ et soit $N(\lambda) = \text{card } \{j; \lambda_j \leq \lambda\}$.

On déduit du théorème (1.5), le corollaire suivant:

$$(1.27) \quad N(\lambda) = (2\pi)^{-n} \lambda^{n(\sigma+d)M^{-1}} \int_{p_0(x, \xi) \leq 1} dx d\xi + O(\lambda^{(n-1)(\sigma+d)M^{-1}}).$$

(Une démonstration directe de ce résultat sera donnée ailleurs.)

En particulier pour:

$$p_0(x, D_x) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^{2j}$$

j entier ≥ 1 , on trouve

$$(1.28) \quad N(\lambda) = \gamma_0 \lambda^{2^{-1} + (2j)^{-1}} + O(1)$$

où

$$\gamma_0 = \pi^{-1}(j+1)^{-1} B\left(\frac{1}{2j}, \frac{1}{2}\right)$$

(cf. [8]) où B désigne la fonction classique bêta.

La formule (1.28) avec cette estimation du reste semble nouvelle.

La méthode que nous utiliserons pour établir des théorèmes (1.3) et (1.4) est celle de J. CHAZARAIN [3] que nous avons utilisée dans [4] et qui consiste à étudier l'approximation semi-classique de l'équation du type Schrödinger:

$$(S_h) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) = q(\hbar, x, \hbar D_x) \Psi(t, x), \quad \Psi(0, x) = \Psi_0(x)$$

où q vérifie (1.14), (1.15), (1.16).

2. - Démonstration de la proposition 1-2.

La démonstration repose sur le lemme suivant:

LEMME 2.1. Sous l'hypothèse (1.7), le symbole $q_z(h, x, \xi)$ de $P(h)^z$ admet un développement:

$$q_z(h, x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j q_{j,z}(x, \xi)$$

et l'on a:

$$(2.1) \quad |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} q_{j,z}| \leq C_{j,\alpha,\beta} |q_{0,z}| (\Phi\varphi)^{-j} \Phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$$

avec $q_{0,z} = p_0^z$ pour $z \in \mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION. D'après la démonstration du lemme 5.2 de [9], on a sous l'hypothèse (1.7) et pour $\operatorname{Re} z < 0$:

$$(2.2) \quad q_{0,z} = p_0^z$$

$$(2.3) \quad q_{j,z} = \sum_{l=1}^{2j} C_{j,z} \gamma_{j,l} p_0^{z-l}$$

où les $C_{j,z}$ sont des fonctions de z , et les $\gamma_{j,l}$ vérifient:

$$(2.4) \quad |\partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} \gamma_{j,l}| \leq C |p_0|^l (\Phi\varphi)^{-j} \Phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}.$$

On déduit de (2.2), (2.3) et (2.4), l'inégalité (2.1) pour $\operatorname{Re} z < 0$.

On passe au cas général, en remarquant que le composé de deux opérateurs admissibles $P_1(h)$ et $P_2(h)$ dont les symboles vérifient l'hypothèse (1.7), a un symbole vérifiant (1.7), et en revenant à la définition de $P(h)^z$ pour $\operatorname{Re} z > 0$ (cf. [4]).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 1.2. Il résulte du lemme (2.1), en prenant $z = 2\varrho$, que l'on a:

$$(2.5) \quad |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} q_j| \leq C_{\alpha\beta} |q_0| (\Phi\varphi)^{-j} \Phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$$

avec $q_0 = p_0^{2\varrho}$.

Cas $j \geq 2$. Pour $j \geq 2$, (1.14) résulte de (2.5) et (1.8').

Cas $j = 0$. La formule de Leibnitz donne:

$$(2.6) \quad \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (p_0^{2\varrho}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\alpha| + |\beta| \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k = \alpha \\ \beta_1 + \dots + \beta_k = \beta}} C_{\beta_1, \dots, \beta_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k} (\partial_{\xi}^{\alpha_1} \partial_x^{\beta_1} p_0) \dots (\partial_{\xi}^{\alpha_k} \partial_x^{\beta_k} p_0) p_0^{2\varrho - k}.$$

Pour $|\alpha| + |\beta| = 1$, (1.14) résulte de (2.6) (avec $k = 1$) et de (1.8)".

Pour $|\alpha| + |\beta| \geq 2$, la démonstration est légèrement plus délicate.

On doit majorer des termes du type:

$$E = (\partial_{\xi}^{\alpha_1} \partial_x^{\beta_1} p_0) \dots (\partial_{\xi}^{\alpha_k} \partial_x^{\beta_k} p_0) p_0^{2q-k}$$

avec

$$(2.7) \quad 1 \leq k \leq |\alpha| + |\beta|, \quad \sum \alpha_i = \alpha, \quad \sum \beta_i = \beta, \quad |\alpha| + |\beta| \geq 2.$$

Quitte à réordonner les (α_i, β_i) , il existe l et l' tels que

$$0 \leq l \leq l' \leq k$$

tels que:

$$(2.8) \quad \begin{cases} |\alpha_i| + |\beta_i| = 1 & \text{pour } 1 \leq i \leq l \\ 2 < |\alpha_i| + |\beta_i| \leq \frac{1}{\varrho} & \text{pour } l+1 \leq i \leq l' \\ \frac{1}{\varrho} < |\alpha_i| + |\beta_i| & \text{pour } l' < i \leq k. \end{cases}$$

On déduit de (2.6), (1.8)', (1.6) et (1.4) que:

$$|E| \leq C |p_0|^{q(2+l-2l')-k+l'}.$$

Si $2 + l - 2l' \leq 0$, on a immédiatement

$$|E| \leq \tilde{C}$$

car $k \geq l'$.

Si $2 + l - 2l' > 0$, on utilise que $\varrho \leq \frac{1}{2}$, pour obtenir

$$|E| \leq \tilde{\tilde{C}} |p_0|^{1+l/2-k}.$$

Lorsque $k \geq 2$, la majoration $|E| \leq C$ est évidente, car $l \leq k$.

Si $k = 1$, on a nécessairement, compte-tenu de (2.7) et (2.9), $l = 0$ et par conséquent $1 + l/2 - k = 0$.

Ceci termine la démonstration du cas: $j = 0$, $|\alpha| + |\beta| \geq 2$.

Cas $j = 1$. Compte tenu de ce qui précède et de (1.12), il suffit de démontrer que:

$$(2.9) \quad |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} q_1'| \leq C_{1,\alpha,\beta}'' q_0^{(1-(|\alpha|+|\beta|+1)/2)+}$$

avec

$$q'_1 = 2_Q p_0^{2Q-1}(p'_1) \quad \text{et} \quad p'_1 = p_1 - \sum \frac{1}{2_i} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_j \partial \xi_j}.$$

D'après la formule de Leibnitz, on a :

$$(2.10) \quad \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} q'_1 = \sum_{\substack{\alpha' + \alpha'' = \alpha \\ \beta' + \beta'' = \beta}} C_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'} \partial_x^{\alpha'} \partial_{\xi}^{\beta'} (p_0^{2Q-1}) \partial_x^{\alpha''} \partial_{\xi}^{\beta''} (p'_1).$$

Le cas : $|\alpha| + |\beta| = 0$ se traite facilement en utilisant (1.7) et (1.8)'.

On suppose donc dorénavant : $|\alpha| + |\beta| \geq 1$, et on doit montrer

$$(2.11) \quad |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} q'_1| < C.$$

Comme précédemment, on doit majorer des termes de la forme :

$$E = \partial_x^{\alpha'} \partial_{\xi}^{\beta'} (p_0^{2Q-1}) \partial_x^{\alpha''} \partial_{\xi}^{\beta''} (p'_1)$$

avec $\alpha' + \alpha'' = \alpha$, $\beta' + \beta'' = \beta$, $|\alpha| + |\beta| \geq 1$.

Si $|\alpha''| + |\beta''| \geq 1$, on majore facilement E par :

$$|E| \leq |p_0|^{2Q-1} |p_0|^{((1-Q(|\alpha'| + |\beta''| + 1))_+)} \leq C.$$

Le seul cas restant est donc celui où : $|\alpha''| + |\beta''| = 0$, et donc où : $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

Avec les notations du cas : $j = 0$ ($|\alpha| + |\beta| \geq 2$), on obtient que :

$$|E| \leq C |p_0|^{Q(1+l-2l')-k+l'}$$

avec $k \geq 1$, $0 \leq l \leq l' \leq k$.

Si $1 + l - 2l' \leq 0$, la majoration est claire.

Si $1 + l - 2l' > 0$, (cas qui ne peut se produire qu'avec $l = l' = 0$), on a immédiatement : $|E| \leq C |p_0|^{\frac{1}{2}-k} \leq \tilde{C}$.

Ceci termine la démonstration de la proposition (1.2).

3. - Approximation semi-classique de l'équation de Schrödinger. L'équation caractéristique.

Soit à étudier :

$$(3.1) \quad \partial_t S(t, x, \eta) + q_0(x, \partial_x S(t, x, \eta)) = 0, \quad S(0, x, \eta) = x \cdot \eta.$$

La méthode de Hamilton-Jacobi nous amène à étudier le système:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \partial_t x(t, y, \eta) &= \partial_{\xi} q_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ \partial_t \xi(t, y, \eta) &= -\partial_x q_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ x(0, y, \eta) &= y, \quad \xi(0, y, \eta) = \eta \end{aligned}$$

(1.15) implique que la matrice:

$$A(t, y, \eta) = \begin{pmatrix} \partial_{x, \xi}^2 q_0 & \partial_{\xi, \xi}^2 q_0 \\ \partial_{x, x}^2 q_0 & \partial_{x, \xi}^2 q_0 \end{pmatrix}$$

est à coefficients bornés.

Comme dans [3] et [4] (lemme 3.4), on obtient le:

LEMME 3.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T' > 0$ tel que, pour $t \leq T'$, on ait:*

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\partial_y x(t, y, \eta) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)} \leq \varepsilon \\ \|\partial_\eta x(t, y, \eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)} \leq \varepsilon \\ \|\partial_y \xi(t, y, \eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)} \leq \varepsilon \\ \|\partial_\eta \xi(t, y, \eta) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)} \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

En particulier, il existe $T > 0$ tel que: $y \mapsto x(t, y, \eta)$ soit un C^∞ difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ pour tout t tel que $|t| < T$ et tout $\eta \in \mathbf{R}^n$.

On désigne alors par $x \rightarrow y(t, x, \eta)$ l'application inverse de $y \rightarrow x(t, y, \eta)$ qui est une fonction C^∞ de (t, x, η) . Le lemme (3.5) de [4] devient le:

LEMME 3.2. *Il existe $T > 0$ tel que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$, tout $p \in \mathbf{N}$ tel que $|\alpha| + |\beta| + p \geq 1$, on ait:*

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta x(t, y, \eta) = 0(q_0^{p/2}(y, \eta)) \\ \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \xi(t, y, \eta) = 0(q_0^{p/2}(y, \eta)). \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION. Si $p = 0$ et $|\alpha| + |\beta| = 1$, alors (3.4) découle immédiatement de (3.3).

Si $p = 1$, $|\alpha| + |\beta| = 1$, on considère l'équation aux variations:

$$(3.5) \quad Z'(t) = A(t, y, \eta) Z(t)$$

où

$$z(t) = \begin{pmatrix} \partial_\nu x(t, y, \eta) & \partial_\eta x(t, y, \eta) \\ \partial_\nu \xi(t, y, \eta) & \partial_\eta \xi(t, y, \eta) \end{pmatrix}$$

d'où il résulte que:

$$(3.6) \quad \partial_t \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta x(t, y, \eta) = O(1)$$

$$(3.7) \quad \partial_t \partial_\eta^\alpha \partial_\beta^\gamma \xi(t, y, \eta) = O(1)$$

pour $|\alpha| + |\beta| = 1$, et en dérivant (3.5) par rapport à y ou η , pour tout $|\alpha| + |\beta| \geq 1$.

Si $p = 1$, $|\alpha| + |\beta| = 0$, on utilise (3.2) et (1.14) pour obtenir qu'il existe $C > 0$ telle que:

$$|\partial_t x(t, y, \eta)| \leq C q_0^{\frac{1}{2}}(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) .$$

Utilisant la conservation de l'énergie, on obtient:

$$(3.8) \quad |\partial_t x(t, y, \eta)| \leq C q_0^{\frac{1}{2}}(y, \eta)$$

et de même

$$(3.9) \quad |\partial_t \xi(t, y, \eta)| \leq C q_0^{\frac{1}{2}}(y, \eta) .$$

Le cas: $p = 0$, $|\alpha| + |\beta| \geq 1$, se déduit de la dérivation de (3.5) par rapport à (y, η) .

Supposons maintenant la propriété démontrée pour: $p \leq p_0$, $\forall \alpha, \beta$ tel que $|p| + |\alpha| + |\beta| \geq 1$, avec $p_0 \geq 1$.

Dérivant (3.2) p_0 fois par rapport à t et (α, β) fois par rapport à (y, η) , on obtient le résultat au cran $(p_0 + 1)$.

Le lemme (3.6) de [4] devient:

LEMME 3.3. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n$ et tout p tel que $p + |\alpha| + |\beta| \geq 1$, on a:*

$$(3.10) \quad \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta y(t, x, \eta) = 0(q_0^{p/2}(y(t, x, \eta), \eta))$$

$$(3.11) \quad \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta \zeta(t, x, \eta) = 0(q_0^{p/2}(y(t, x, \eta), \eta))$$

où l'on a posé: $\zeta(t, x, \eta) = \xi(t, y(t, x, \eta), \eta)$.

DÉMONSTRATION. On part de l'identité:

$$(3.12) \quad x(t, y(t, x, \eta), \eta) = x .$$

Dérivant (3.12) par rapport à t, y ou η , on obtient:

$$(3.13) \quad \partial_t y(t, x, \eta) = -(\partial_y x)^{-1}(t, y(t, x, \eta), \eta) \cdot \partial_t x(t, y(t, x, \eta), \eta)$$

$$(3.14) \quad \partial_x y(t, x, \eta) = (\partial_y x)^{-1}(t, y(t, x, \eta), \eta)$$

$$(3.15) \quad \partial_\eta y(t, x, \eta) = -(\partial_y x)^{-1} \partial_\eta x(t, y(t, x, \eta), \eta) .$$

Ces trois équations permettent (compte tenu de (3.3) et (3.4)) d'obtenir (3.10) pour $|\alpha| + |\beta| + |p| = 1$. En les dérivant par rapport à (t, x, η) , on obtient (3.10) dans le cas général grâce à (3.4).

(3.11) se déduit de (3.10), (3.4) et de la définition de $\zeta(t, x, \eta)$.

Les lemmes précédents suggèrent qu'on doit remplacer les poids $\lambda(y, \eta)$ et $\lambda(x, \eta)$ apparaissant dans les articles précédents ([3], [4]) par $q_0^{\frac{1}{2}}(y, \eta)$ et $q_0^{\frac{1}{2}}(y(t, x, \eta), \eta)$.

On pose donc:

$$(3.16) \quad \mu(t, x, \eta) = q_0^{\frac{1}{2}}(y(t, x, \eta), \eta) .$$

La comparaison des deux poids peut se faire grâce au lemme suivant (cf. lemme 3.7 de [4]).

LEMME 3.4. *Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que:*

$$(3.17) \quad C_1 \lambda^{m''/2}(x, \eta) \leq \mu(t, x, \eta) \leq C_2 \lambda(x, \eta)$$

pour tout $(t, x, \eta) \in]-T, T[\times \mathbf{R}^{2n}$ (m'' est défini en 1.16).

DÉMONSTRATION. On a l'égalité de conservation de l'énergie:

$$(3.18) \quad q_0(y(t, x, \eta), \eta) = q_0(x, \zeta(t, x, \eta)) .$$

La minoration (3.17) se déduit immédiatement de (3.16), (3.18) et (1.16).

Pour la majoration, on montre d'abord le lemme suivant qui sera utile ultérieurement.

LEMME 3.5.

$$(3.19) \quad \begin{cases} y(t, x, \eta) = O(\lambda(x, \eta)) \\ \zeta(t, x, \eta) = O(\lambda(x, \eta)) \end{cases}$$

pour $|t| \leq T$ et $(x, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.5. On vérifie immédiatement que:

$$|y(t, x, \eta)| \leq \sup_{t \in [-T, T]} |y(t, 0)| + \lambda(x, \eta) \sup_{\substack{t \in [-T, T] \\ (x, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}}} (|\partial_x y| + |\partial_\eta y|) ,$$

(3.19) pour $y(t, x, \eta)$ s'en déduit immédiatement compte tenu de (3.10).
La démonstration pour $\zeta(t, x, \eta)$ est analogue.

Terminons la démonstration du lemme (3.4).

(1.15) implique l'existence de $C' > 0$ telle que :

$$(3.20) \quad q_0(x, \eta) \leq C' \lambda^2(x, \eta).$$

La majoration résulte immédiatement de (3.18), (3.19) et (3.20).

D'après la théorie de Hamilton-Jacobi, on sait que :

$$(3.21) \quad \partial_x S(t, x, \eta) = \zeta(t, x, \eta)$$

$$(3.22) \quad \partial_\eta S(t, x, \eta) = y(t, x, \eta).$$

Le contrôle de la phase $S(t, x, \eta)$ est l'objet du lemme suivant: (cf. les points (7), (8) et (9) du § 3.1 dans [4])

LEMME 3.6.

$$(3.23) \quad \text{Il existe } C_0'' > 0 \text{ telle que: } |\partial_t S(t, x, \eta)| \geq C_0'' \lambda^{m'}(x, \eta).$$

$$(3.24) \quad \partial_t S(t, x, \eta) = -\mu^2(t, x, \eta).$$

$$(3.25) \quad \partial_x S(t, x, \eta) = O(\lambda(x, \eta)).$$

$$(3.26) \quad \partial_\eta S(t, x, \eta) = O(\lambda(x, \eta)).$$

$$(3.27) \quad \text{Pour } p + |\alpha| + |\beta| \geq 2, \text{ on a: } \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta S(t, x, \eta) = O(\mu^p(t, x, \eta)).$$

DÉMONSTRATION. (3.24) résulte de (3.11), (3.21), (3.18) et (3.16).

Compte tenu de (3.24), (3.23) n'est autre que (3.17).

(3.25) et (3.26) résultent de (3.21), (3.22) et (3.19).

Pour $|\alpha| + |\beta| \geq 1$, (3.27) résulte immédiatement du lemme (3.3).

Considérons donc le cas où $|\alpha| + |\beta| = 0$ et $p \geq 2$. On a :

$$(3.28) \quad \partial_t S(t, x, \eta) = -q_0(y(t, x, \eta), \eta)$$

d'où

$$(3.29) \quad \partial_t^2 S = -\partial_x q_0(y(t, x, \eta), \eta) \partial_t y.$$

L'estimation résulte alors de (1.14) et (3.10).

En dérivant (3.29) par rapport à t , on obtient aisément le cas général.

4. — Approximation semi-classique de l'équation de Schrödinger: équations de transports.

On modifie les classes $A^{m,p}$ de J. Chazarain [3] (cf. déf 3.1 de [4]) en posant la définition suivante:

DÉFINITION 4.1. Soient T et h_0 des réels > 0 fixés. Pour $p, l \in \mathbf{R}$, on désigne par $A^{p,l}$ l'espace des fonctions $b(t, x, \eta, h) \in C^\infty([-T, T] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0, h_0])$ telles que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n, s \in \mathbf{N}$, il existe $C_{\alpha,\beta,s}$ telle que:

$$(4.1) \quad |\partial_t^s \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta b(t, x, \eta, h)| \leq C_{\alpha,\beta,s} h^l \mu^{p+s}(t, x, \eta)$$

pour tout $(t, x, \eta, h) \in]-T, T[\times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0, h_0[$.

De même, on introduit la classe de symboles suivante:

DÉFINITION 4.2. Pour $m, k \in \mathbf{R}$, on désigne par $S^{m,k}$ l'espace des fonctions $s \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0, h_0])$ telles que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta}$ telle que:

$$(4.2) \quad |\partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta s(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha,\beta} h^k q_0^{(m-|\alpha|-|\beta|)/2}(x, \xi).$$

Soient maintenant $s \in S^{m,k}$ $a \in A^{p,l}$ ($p \geq 0$); S étant la phrase déterminée au § 3, on pose, comme au § 3.1 de [4]:

$$(4.3) \quad b(t, x, \eta, h) = \\ = \exp[-ih^{-1}S(t, x, \eta)] s(x, hD_x, h) [\exp[ih^{-1}S(t, \cdot, \eta)] a(t, \cdot, \eta, h)](x).$$

On suit ici les calculs du § 3.1 de [4].

On a:

$$(4.4) \quad b(t, x, \eta, h) = \sum_{|\alpha| < N} b_\alpha(t, x, \eta, h) + b^{(N)}(t, x, \eta, h)$$

où

$$(4.5) \quad b_\alpha(t, x, \eta, h) = h^{|\alpha|} (\alpha!)^{-1} \partial_\xi^\alpha s(x, \partial_x S(t, x, \eta), h) C_\alpha(t, x, \eta, h)$$

$$(4.6) \quad C_\alpha(t, x, \eta, h) = D_y^\alpha [\exp[ih^{-1}\psi(t, x, \eta, h)] a(t, y, \eta, h)]|_{y=x}$$

$$(4.7) \quad \psi(t, x, y, \eta) = S(t, y, \eta) - S(t, x, \eta) + \langle x - y, \partial_x S(t, x, \eta) \rangle$$

$$(4.8) \quad b^{(N)}(t, x, \eta, h) = h^{-N} \int \int_{y, \xi}^1 \exp[ih^{-1}\langle x, y, \xi \rangle] (1 - \sigma)^{N-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{|\alpha|=N} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha s) \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} + \sigma \xi \right) \right] \exp[ih^{-1}\psi] \cdot a(t, y, \eta, h) dy d\xi d\sigma.$$

Le lemme (3.1) de [4] devient le:

LEMME 4.3. *Sous les hypothèses précédentes:*

$$\begin{aligned} b_\alpha &\in A^{(m-|\alpha|)_+ + p, k+l+|\alpha|/2} & \text{si } |\alpha| \text{ est pair,} \\ b_\alpha &\in A^{(m-|\alpha|)_+ + p, k+l+(|\alpha|+1)/2} & \text{si } |\alpha| \text{ est impair.} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle du lemme (3.1) de [4], en remplaçant le poids $\lambda(x, \eta)$ qui intervenait par $\mu(t, x, \eta)$ et en remarquant que si

$$s(x, \xi, h) \in S^{m, k} \quad \text{alors:} \quad s(x, \partial_x S(t, x, \eta), h) \in A^{m, k}.$$

Le lemme 3.2 de [4] devient le:

LEMME 4.4. *Sous les hypothèses précédentes, pour tout entier $N \geq 1$, on a*

$$b^{(N)} \in A^{(m-N)_+ + p, k+l+N/2}.$$

DÉMONSTRATION. On a:

$$b^{(N)} = \sum_{N \leq |\alpha| < M} b_\alpha + b^{(M)}.$$

Compte-tenu du lemme (4.3), il suffit d'établir la propriété pour $b^{(M)}$ avec M assez grand. La démonstration du lemme (3.2) [4] s'adapte (en remplaçant $\lambda(x, \eta)$ par $\mu(t, x, \eta)$) sous réserve de démontrer le:

LEMME 4.5 (cf. lemme 3.3 de [4]). *Si $|\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}| + \tilde{k} = 1$, on a:*

$$(4.9) \quad |\partial_x^{\tilde{\alpha}} \partial_y^{\tilde{\beta}} \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leq C_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{k}} |x - y| (\mu(t, x, \eta) + |x - y|)^{\tilde{k}}.$$

Si $|\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}| + \tilde{k} \geq 1$, on a:

$$(4.10) \quad |\partial_x^{\tilde{\alpha}} \partial_y^{\tilde{\beta}} \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leq C_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{k}} (1 + |x - y|) (\mu(t, x, \eta) + |x - y|)^{\tilde{k}}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME (4.5). Rappelons que

$$\psi(t, x, y, \eta) = S(t, y, \eta) - S(t, x, \eta) + \left\langle x - y, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x, \eta) \right\rangle.$$

On a:

$$\partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi = (\partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} S)(t, y, \eta) - (\partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} S)(t, x, \eta) + \langle x - y, \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \partial_x S(t, x, \eta) \rangle.$$

De (3.27), on déduit pour $|\tilde{\gamma}| + |\tilde{k}| \geq 1$:

$$(4.11) \quad |\partial_{\tilde{\eta}}^{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{t}}^{\tilde{k}} \psi| \leq C|x - y|(\mu(t, x, \eta))^{\tilde{k}} + \sup_{\tilde{x} \in [x, y]} (\mu(t, \tilde{x}, \eta))^{\tilde{k}}.$$

On remarque maintenant que (compte-tenu de (3.24) et (3.27))

$$(\partial_x \mu)(t, x, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{(\partial_t \partial_x S)(t, x, \eta)}{\sqrt{(-\partial_t S)(t, x, \eta)}} = O(1).$$

Par conséquent:

$$(4.12) \quad \sup_{\tilde{x} \in [x, y]} \mu(t, \tilde{x}, \eta) \leq C[\mu(t, x, \eta) + |x - y|].$$

De (4.11) et (4.12), on déduit:

$$(4.13) \quad |\partial_{\tilde{\eta}}^{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{t}}^{\tilde{k}} \psi| \leq |x - y|(\mu(t, x, \eta) + |x - y|)^{\tilde{k}}.$$

Or: $\partial_{x_i} \psi = \langle \partial^2 S / (\partial x \partial x_i), x - y \rangle$, d'où:

$$(4.14) \quad |\partial_{x_i} \partial_{\tilde{\eta}}^{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{t}}^{\tilde{k}} \psi| \leq C|x - y|\mu(t, x, \eta)^{\tilde{k}}$$

et pour $|\alpha| \geq 2$:

$$(4.15) \quad |\partial_x^{\alpha} \partial_{\tilde{\eta}}^{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{t}}^{\tilde{k}} \psi| \leq C(1 + |x - y|)\mu(t, x, \eta)^{\tilde{k}}.$$

Or $\partial_{y_i} \psi = (\partial S / \partial x_i)(t, y, \eta) - (\partial S / \partial x_i)(t, x, \eta)$.

De (4.12), on déduit:

$$(4.16) \quad |\partial_{y_i} \partial_{\tilde{\eta}}^{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{t}}^{\tilde{k}} \psi| \leq C|x - y|(\mu(t, x, \eta) + |x - y|)^{\tilde{k}}.$$

De: $\partial_{x_i} \partial_{y_j} \psi = -(\partial^2 S / (\partial x_i \partial x_j))(t, x, \eta)$, on tire:

$$(4.17) \quad |\partial_{x_i} \partial_{y_i} \partial_x^{\alpha} \partial_{\tilde{y}}^{\tilde{\beta}} \partial_{\tilde{\eta}}^{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{t}}^{\tilde{k}} \psi| \leq C(\mu(t, x, \eta))^{\tilde{k}}.$$

De $\partial_{y_j} \partial_{y_i} \psi = (\partial^2 S / (\partial x_i \partial x_j))(t, y, \eta)$, il vient:

$$(4.18) \quad |\partial_{y_i} \partial_{y_j} \partial_x^{\alpha} \partial_{\tilde{y}}^{\tilde{\beta}} \partial_{\tilde{\eta}}^{\tilde{\gamma}} \partial_{\tilde{t}}^{\tilde{k}} \psi| \leq C(\mu(t, x, \eta) + |x - y|)^{\tilde{k}}.$$

Les cas (4.13) à (4.18) permettent d'obtenir (4.9) et (4.10).

Comme dans [3] et [4], on peut maintenant construire des approximations $U_h^{(N)}(t)$ du groupe unitaire: $U_h(t) = \exp[-ih^{-1}tQ(h)]$ où:

$$Q(h) = q(h, x, hD_x).$$

On cherche $U_h^{(N)}(t)$ sous la forme:

$$(4.19) \quad U_h^{(N)}(t)f(x) = h^{-n} \int \exp[ih^{-1}(S(t, x, \eta) - y \cdot \eta)] \left[\sum_{j=0}^N h^j a_j(t, x, \eta) \right] f(y) dy d\eta$$

avec $a_j(t, x, \eta) \in A^{0,0}$, de sorte que l'on ait:

$$(4.20) \quad \exp[-ih^{-1}S(t, x, \eta)](ih\partial_t - Q(h)) \exp[ih^{-1}S(t, x, \eta)] \cdot \left(\sum_{j=0}^N h^j a_j(t, x, \eta) \right) \in A^{0, N+2-n}.$$

Compte-tenu des lemmes (4.3) et (4.4), on réalise (4.20) en déterminant les a_j par des équations de transport du type:

$$(4.21) \quad \begin{cases} \partial_t b(t, x, \eta) + \partial_\xi q(x, \partial_x S) \partial_x b(t, x, \eta) + \\ + \frac{1}{2} (\partial_{\xi\xi}^2 q_0(x, \partial_x S)) \cdot (\partial_{x,x}^2 S) b(t, x, \eta) + i q_1(x, \partial_x S) b(t, x, \eta) = f(t, x, \eta) \\ b(0, x, \eta) = b_0 \end{cases}$$

où $f \in A^{(0,0)}$, $b_0 \in \mathbf{R}$.

La proposition 3.3 de [4] devient:

PROPOSITION 4.6. *Sous les hypothèses précédentes (rappelons que $Sp(q)$ est réel), si $f \in A^{(0,0)}$, la solution b de (4.21) est dans $A^{(0,0)}$.*

Si on pose:

$$J(t, x, \eta) = \det (\partial_x y(t, x, \eta))^{-1}$$

$$G(t, s, x, \eta) = \int_0^s Sp(q) \left(x(\sigma, y(t, x, \eta), \eta), \xi(\sigma, y(t, x, \eta), \eta) \right) d\sigma.$$

La solution de (4.21) s'écrit:

$$(4.22) \quad b(t, x, \eta) = J^{-\frac{1}{2}}(t, x, \eta) \exp[-iG(t, t, x, \eta)] \cdot \left[b_0 + \int_0^t \exp[iG(t, s, x, \eta)] \left(J(s, y(t, x, \eta), \eta) \right)^{\frac{1}{2}} f(s, x(s, y(t, x, \eta), \eta)) ds \right].$$

La démonstration est, compte-tenu de ce qui a été établi précédemment, analogue à celle de la proposition 3.3 de [4]. Elle se déduit aisément des trois lemmes suivants. Le lemme (3.8) de [4] devient:

LEMME 4.7. Soit $g \in C^\infty([-T, T] \times \mathbf{R}^{2n})$ et $\tilde{g}(t, y, \eta) = g(t, x(t, y, \eta), \eta)$.

Alors $g \in A^{(0,0)}$ si et seulement si g vérifie: pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$, tout $l \in \mathbf{N}$, il existe $C_{\alpha, \beta}$, telle que, pour $t \in [-T, T]$, $(y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$:

$$(4.23) \quad |\partial_t^l \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \tilde{g}(t, y, \eta)| \leq C_{l, \alpha, \beta} q_0^{l/2}(y, \eta).$$

Le lemme résulte des lemmes (3.2) et (3.3).

LEMME 4.8. Pour tout $\sigma \in \mathbf{R}$, $J(t, x, \eta)^\sigma \in A^{(0,0)}$.

LEMME 4.9. Posons

$$R(t, y, \eta) = \exp \left[-i \int_0^t Sp(q)(x(s, y, \eta), \xi(s, y, \eta)) ds \right].$$

Alors R vérifie (4.23).

DÉMONSTRATION. R est bornée car $Sp(q)$ est réel.

On a ensuite:

$$\partial_t R(t, y, \eta) = -i Sp(q)(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \cdot R(t, y, \eta).$$

D'où d'après (1.14):

$$|\partial_t R(t, y, \eta)| \leq C q_0^{\frac{1}{2}}(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \leq C q_0^{\frac{1}{2}}(y, \eta)$$

$$\partial_{y_i} R(t, y, \eta) = -i \int_0^t \left(\left(\partial_{x_i} Sp(q) \frac{\partial x_i}{\partial y_i} + \partial_{\xi_i} Sp(q) \frac{\partial \xi_i}{\partial y_i} \right) ds \right) R(t, y, \eta).$$

On utilise cette fois-ci (1.14), la conservation de l'énergie et (3.4) pour conclure.

On majore les autres dérivées de manière analogue.

5. — Estimation de l'erreur.

Pour $f \in S(\mathbf{R}^n)$, on pose:

$$(5.1) \quad (U_h^{(N)}(t)f)(x) = h^{-n} \int \exp[ih^{-1}(S(t, x, \eta) - y\eta)] \left(\sum_{j=0}^N h^j a_j(t, x, \eta) \right) f(y) dy d\eta.$$

On a :

$$(5.2) \quad \begin{cases} (ih\partial_t - Q(h)) U_h^{(N)}(t) = R_h^{(N)}(t)f \\ U_h^{(N)}(0)f = f \end{cases}$$

où $R_h^{(N)}(t)$ est un opérateur du même type que $U_h^{(N)}(t)$.

$$(5.3) \quad (R_h^{(N)}(t)f)(x) = \iint \exp[ih^{-1}(S(t, x, \eta) - y\eta)] r_N(t, x, \eta, h) f(y) dy d\eta.$$

Or il résulte du § 4 que $a_j \in A^{(0,0)}$ et $r_N \in A^{(0, N+2-n)}$.

Comme dans [3], [4], il résulte du théorème de continuité L^2 de Asada-Fujiwara [1] que l'on a les estimations suivantes :

$$(5.4) \quad \sup_{|t| \leq T} \|U_h^{(N)}(t)\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = O(1)$$

$$(5.5) \quad \sup_{|t| \leq T} \|R_h^{(N)}(t)\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = O(h^{N+2})$$

$$(5.6) \quad \sup_{|t| \leq T} \|U_h(t) - U_h^{(N)}(t)\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = O(h^{N+1}) \quad \text{pour } h \rightarrow 0, h > 0.$$

6. - Etude asymptotique de la distribution S_h , $h \rightarrow 0$ et applications.

La plupart des démonstrations de [4] s'appliquant mot à mot, nous ne détaillons que les points nouveaux, renvoyant à [4] sans le préciser pour les autres points.

Soit :

$$(6.1) \quad S_t(t) = \text{Trace} (\exp[-ih^{-1}tQ(h)])$$

$$(6.2) \quad I_\tau(h) = \langle S_h(t), \mathcal{O}(t) \exp[-ih^{-1}t\tau] \rangle, \quad \mathcal{O} \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

On suppose que: $\text{supp } \mathcal{O} \in]-T, T[$, $T > 0$ assez petit déterminé par le § 3.

On pose :

$$(6.3) \quad J_\tau^{(N)}(h) = \text{Tr} \left(\int U_h^{(N)}(t) \mathcal{O}(t) \exp[-ih^{-1}t\tau] dt \right).$$

PROPOSITION 6.1 (cf. prop. 4.1 de [4]). *Il existe deux entiers n_0 et $n_1 \geq 1$ tels que, pour tout entier $N \geq 1$, il existe $C(N) > 0$ telle que, pour tout $f \in C_0^\infty(]-T, T[)$ et tout $h \in]0, h_0[$, on ait :*

$$(6.4) \quad \left| \text{Tr} \left[\int (U_h(t) - U_h^{(N)}(t)) f(t) dt \right] \right| \leq C(N) h^{N-n_0} \left(\sup_{\substack{0 \leq j \leq n_1 \\ t \in]-T, T[}} |f^{(j)}(t)| \right).$$

DÉMONSTRATION. On a besoin du lemme:

LEMME 6.2 (cf. corollaire 2 § 2 de [4]). Il existe $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$ il existe $C_k > 0$ vérifiant:

$$(6.5) \quad \text{Tr } (Q(h)^{-k}) \leq C_k h^{-n} \quad \text{pour tout } h \in]0, h_0].$$

De plus, si $(\mu_i(h))_{i \geq 1}$ désigne la suite croissante des valeurs propres de $Q(h)$, on a alors:

$$(6.6) \quad M_h(\lambda) = \text{card } \{j, \mu_j(h) \leq \lambda\} \leq C_k h^{-n} \cdot \lambda^k$$

pour tout $h \in]0, h_0]$ et tout $\lambda > 0$.

DÉMONSTRATION. On a: $Q(h)^{-k} = P(h)^{-2k\varrho}$. Or il résulte de [4] (prop. 2.6) que

$$P(h) \in \mathcal{L}_{ad}^{-2k\varrho m'}.$$

Donc si $p_{(-2k\varrho)}(h)$ désigne le symbole de Weyl de $P(h)^{-2k\varrho}$, alors il existe $C_k > 0$ telle que:

$$(6.7) \quad p_{(-2k\varrho)}(h, x, \xi) \leq (\phi\varphi)^{-2k\varrho m'}.$$

Or on a:

$$(6.8) \quad \text{Trace } (Q(h)^{-k}) = h^{-n} \iint p_{(-2k\varrho)}(h, x, \xi) dx d\xi$$

(6.7), (6.8) et (1.1) entraînent alors (6.5). On a également:

$$\text{Trace } (Q(h)^{-k}) = \int_0^{+\infty} \frac{dM_h(\tau)}{\tau^k}$$

et l'inégalité:

$$\frac{1}{\lambda^k} \int_0^\lambda dM_h(\tau) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dM_h(\tau)}{\tau^k}$$

d'où l'on déduit (6.6).

Suite de la démonstration de la proposition 6.1.

On pose $\Delta_h^{(N)}(t) = U_h(t) - U_h^{(N)}(t)$.

On a:

$$(6.9) \quad \Delta_h^{(N)}(t) = Q(h)^{-k} (i\hbar \partial_t)^k \Delta_h^{(N)}(t) - \sum_{j=0}^{k-1} Q(h)^{-j-1} (i\hbar \partial_t)^j E_h^{(N)}(t).$$

Il résulte de (6.5) qu'il existe un entier k_0 et un réel $C_{k_0} > 0$ tels que:

$$(6.10) \quad |\text{Trace}[Q(h)^{-k_0}]| \leq C_{k_0} h^{-n}.$$

On obtient alors, compte tenu de (5.5)

$$(6.11) \quad \left\| Q(h)^{-k_0} \int (ih\partial_t)^{k_0} A_h^{(N)}(t) f(t) dt \right\|_{\text{Tr}} \leq C h^{N+2+k_0-n} \sup_{\substack{0 \leq j \leq k_0 \\ |t| < T}} |f^{(j)}(t)|.$$

Or on a:

$$(6.12) \quad \left| \text{Tr} \left\{ Q(h)^{-j-1} \int [(ih\partial_t) R(t)] f(t) dt \right\} \right| \leq \\ \leq h^j \|Q(h)^{-k_0}\|_{\text{Tr}} \left\| \int (Q(h)^{k_0-j-1} \circ R_h^{(N)}(t)) f^{(j)}(t) dt \right\|_{\mathcal{L}(L^1, L^1)}.$$

D'après le lemme (4.3) itéré ($k_0 - j - 1$) fois, on a:

$$(6.13) \quad (Q(h)^{k_0-j-1} \circ R_h^{(N)}(t)) u(x) = \\ = \iint \exp[ih^{-1}(S(t, x, \eta) - \eta\eta)] r'_j(t, x, \eta, h) u(y) dy d\eta$$

pour tout u dans $S(\mathbf{R}^n)$ avec:

$$r'_j \in A^{2(k_0-1-j), N+2-n}.$$

Pour conclure, on a besoin du:

LEMME 6.3. Soit

$$M = h(i\partial_t S)^{-1} \partial_t,$$

on a alors:

$$(6.14) \quad {}^t M b \in A^{m-1, p+1} \quad \text{pour tout } b \in A^{m, p}.$$

Admettons un instant ce lemme et terminons la démonstration de la proposition 6.1. On fait $2(k_0 - 1 - j)$ intégrations par parties à l'aide de M et on obtient:

$$(6.15) \quad \left\| \int Q(h)^{k_0-j-1} R_h^{(N)}(t) f^{(j)}(t) dt \right\| \leq C h^{N+k+2(h-1-j)-n} \sup_{\substack{r \leq 2(k_0-1) \\ |t| \leq T}} |f^{(r)}(t)|.$$

D'où

$$(6.16) \quad \left| \text{Tr} \left[Q(h)^{-j-1} \int ((ih\partial_t)^j R_h^{(N)}(t)) f(t) dt \right] \right| \leq C h^{N+k+2(k_0-1)-n-n} \sup_{r \leq 2(k_0-1)} |f^{(r)}(t)|.$$

Compte-tenu de (6.9), la proposition se déduit de (6.11) et (6.16).

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.3. On a:

$$(6.17) \quad {}^tM(b) = -ih[(\partial_t b)(\partial_t S)^{-1} - b\partial_t^2 S(\partial_t S)^{-2}].$$

On conclut en utilisant (3.24), (3.27) et en dérivant (6.17).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3. Comme dans [4], on se restreint au cas où $\text{supp } \mathcal{O} \in]-T, T[$.

D'après la proposition (6.1), il suffit, en choisissant N assez grand, d'étudier l'intégrale:

$$(6.18) \quad J_{\tau}^{(N)}(h) = \iiint \exp[ih^{-1}\psi(t, x, \eta, \tau)] \mathcal{O}(t) a(t, x, \eta, h) dt d\eta dx$$

où l'on a posé: $\varphi(t, x, \eta, \tau) = S(t, x, \eta) - x\eta - t\tau$

$$a(t, x, \eta, h) = \sum_{j=0}^N h^j a_j(t, x, \eta).$$

D'après (3.23), on a:

$$-\partial_t S(t, x, \eta) \geq C_0'' \lambda^{m'}(x, \eta).$$

Il existe donc $C > 0$ telle que $\lambda(x, \eta) \geq C$ entraîne:

$$|\partial_t S(t, x, \eta) - \tau'| \geq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } \tau' \in [\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0].$$

Or il est clair que l'opérateur $M_{\tau} = h(i\partial_t S - \tau)^{-1} \partial_t$ a la même propriété que M dans la zone où $\lambda(x, \eta) \geq C$, i.e., ${}^tM_{\tau}$ envoie $A^{p,m}$ dans $A^{p+1,m-1}$. Par des intégrations par parties à l'aide de M_{τ} , on voit donc que la contribution de la zone: $\lambda(x, \eta) \geq C$, $|t| \leq T$ dans l'intégrale (6.18) est $O(h^{\infty})$. Le théorème de la phase non stationnaire implique alors le théorème 1.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.4. Comme précédemment, on est ramené à étudier la contribution de la zone:

$$\lambda(x, \eta) \leq C \quad \text{et} \quad |t| \leq T.$$

Comme dans Chazarain [3], le théorème de la phase stationnaire donne le résultat.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5. La preuve du théorème (1.5) est analogue à celle donnée dans [4], § 5, dans le cas elliptique.

Il suffit d'établir le théorème pour $Q(h)$. Soit alors $\Theta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ à support assez petit autour de 0 telle que $\Theta(0) = 1$, $\hat{\Theta} \geq 0$, Θ est paire et $\hat{\Theta} > 0$ sur $[-\delta_0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$. On pose $\Theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-1} \hat{\Theta}(-h^{-1}\lambda)$.

On commence pour étudier $N_h * \Theta_h$.

On a facilement: $N_h * \Theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-1} \int_{-\infty}^{\lambda} I_{-\tau}(h) d\tau$.

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\chi = 1$ sur $] -\infty, -2]$, $\chi = 0$ sur $] -1, +\infty[$.

LEMME 6.4. *Pour tout entier $N \geq 1$ il existe $\tilde{C}_N > 0$ telle que:*

$$(6.19) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tau) I_{-\tau}(h) d\tau \leq \tilde{C}_N h^N \quad \text{pour tout } h \in]0, h_0].$$

DÉMONSTRATION. On a:

$$(6.20) \quad I_{-\tau}(h) = \sum_{j \geq 1} \hat{\Theta}(h^{-1}(\mu_j(h) - \tau)).$$

D'autre part: pour tout M , il existe $C'_M > 0$ telle que:

$$(6.21) \quad |\hat{\Theta}(h^{-1}(\mu_j(h) - \tau))| \leq C'_M h^M |\mu_j(h) - \tau|^{-M}.$$

Posons $-\tau = s + 1$, $s \geq 0$. On a l'inégalité élémentaire:

$$(6.22) \quad (\mu_j(h) + s + 1)^{-1} \leq (s + 1)^{v-1} (\mu_j(h) + 1)^{-v}, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

D'après (6.5) on a alors:

$$(6.23) \quad \sum_{j \geq 1} (\mu_j(h) + 1)^{-vM} \leq C_{vM} h^{-n} \quad \text{pour } vM \geq k_0.$$

On obtient (6.19) en choisissant M et v tels que:

$$M > N + n, \quad vM \geq k_0 \quad \text{et} \quad (1 - v)M > 1.$$

En procédant comme dans [4] on obtient alors:

PROPOSITION 6.5. *Si λ n'est pas valeur critique de q_0 , on a alors:*

$$(6.24) \quad N_h * \Theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \int_{q_0(x, \xi) \leq \lambda} dx d\xi + O(h^{-n+1}) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

On termine alors la démonstration du théorème (1.5) en comparant $N_h(\lambda)$ et $N_h * \Theta_h(\lambda)$. Cela résulte du:

LEMME 6.6. *Supposons que λ_0 ne soit pas valeur critique de q_0 . Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $k \geq 1$ tels que*

$$(6.25) \quad |N_h(\lambda + \tau h) - N_h(\lambda)| \leq C_0(1 + |\tau|)^k h^{-n+1}$$

pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0]$, $h \in]0, h_0]$ et $\tau \in \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION. Elle est analogue à celle du lemme (5.2) de [4]. Pour $|\tau h| \geq \varepsilon_0$ on utilise (6.6).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. ASADA - D. FUJIWARA, *On some oscillatory integral transformation in $L^2(\mathbf{R}^n)$* , Japan J. Math., **4** (1978), pp. 299-361.
- [2] R. BEALS, *A general calculus of pseudodifferential operators*, Duke Math. J., **42** (1975), pp. 1-42.
- [3] J. CHAZARAIN, *Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique*, Comm. Partial Diff. Equat., **5**, no. 6 (1980), pp. 595-644.
- [4] B. HELFFER - D. ROBERT, *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques*, Annales de l'Institut Fourier, **31**, fasc. 3 (1981), pp. 169-223.
- [5] B. HELFFER - D. ROBERT, *Comportement asymptotique précisé du spectre d'opérateurs globalement elliptiques dans $\mathbf{R}^n$* , C.R. Acad. Sci. Paris, **292**, 9 Février 1981, p. 363.
- [6] B. HELFFER - D. ROBERT, *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), p. 47.
- [7] L. HÖRMANDER, *The Weyl calculus of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl. Math., **32** (1979), pp. 359-443.
- [8] L. HÖRMANDER, *On the asymptotic distribution of eigenvalues of pseudo-differential operators in $\mathbf{R}^n$* , Ark. för Math., **17**, no. 2 (1979), pp. 296-313.
- [9] PHAM THE LAI - D. ROBERT, *Valeurs propres d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demi-droite*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Série IV, **6**, no. 2 (1979), pp. 335-366.
- [10] D. ROBERT, *Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels*, Comm. Partial Diff. Equat., **3** (1978), pp. 755-826.
- [11] M. A. SUBIN, *Pseudo-differential operators and spectral theory*, Nauka, Moskva (1978).
- [12] A. VOROS, *An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics*, J. Functional Analysis, **29**, no. 1 (1978), pp. 104-132.

Université de Nantes
 Institut de Mathématique et d'Informatique
 2 Chemin de la Houssinière
 44072 Nantes - France