

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN-PIERRE VIGUÉ

**Sur les applications holomorphes isométriques pour
la distance de Carathéodory**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 9, n° 2
(1982), p. 255-261

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1982_4_9_2_255_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sur les applications holomorphes isométriques pour la distance de Carathéodory.

JEAN-PIERRE VIGUÉ

1. – Introduction.

On déduit facilement de H. Cartan [1], première application du théorème fondamental, p. 771, le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , et soit a un point de D . Soit f une application holomorphe de D dans D telle que $f(a) = a$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *la dérivée $f'(a)$ de f au point a est une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(a, \cdot)$;*
- (ii) *les valeurs propres de $f'(a)$ sont toutes de module 1;*
- (iii) *le déterminant jacobien de f au point a est de module 1;*
- (iv) *l'application f est un automorphisme analytique de D .*

[Il est clair que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) et que (iv) \Rightarrow (i). Dans [1], H. Cartan montre que (iii) \Rightarrow (iv).]

Supposons maintenant que D soit un domaine borné d'un espace de Banach complexe E . Nous aimerions savoir si le théorème 1.1 se généralise à cette situation. Remarquons d'abord que la condition (iii) n'a pas de sens pour un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Par contre, la condition (i) a un sens, et il est naturel de remplacer la condition (ii) par la condition (ii bis) suivante:

- (ii bis) *le spectre de $f'(a)$ est formé de nombres complexes de module 1.*

T. Franzoni et E. Vesentini ont montré ([2] exemple, p. 95) que, même si D est la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe E et a

l'origine 0 de E , (ii bis) n'entraîne pas (iv). D'autre part, on déduit facilement des résultats de Harris [3] que, si D est la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe E , et a l'origine 0 de E , (i) entraîne (iv).

Dans cet article, nous allons montrer que, si D est un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E , et si a est l'origine 0 de E , (i) n'entraîne pas (iv). Plus précisément, nous construirons un domaine cerclé borné D d'un espace de Banach complexe E , complet pour la distance intégrée de Carathéodory et une application holomorphe $f: D \rightarrow D$ telle que $f'(0)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(0, \cdot)$ et que f ne soit même pas injective. Nous donnerons aussi une condition suffisante sur un domaine cerclé borné D pour que toute application holomorphe $f: D \rightarrow D$ telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(0, \cdot)$ soit linéaire égale à $f'(0)$.

Enfin, dans un dernier paragraphe, nous étudierons la question suivante: si D est, par exemple, un domaine borné homogène de \mathbb{C}^n , on déduit du théorème 1.1 le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2. *Soit D un domaine borné homogène de \mathbb{C}^n . Soit $f: D \rightarrow D$ une application holomorphe, et supposons qu'il existe $a \in D$ tel que $f'(a)$ soit une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory. Alors f est un automorphisme analytique de D .*

On peut se demander si ce résultat reste vrai si on ne suppose pas que $D \subset \mathbb{C}^n$ est homogène. Nous verrons qu'il n'en est rien: il existe un domaine borné D de \mathbb{C}^n , et une application holomorphe $f: D \rightarrow D$ qui est même une isométrie pour la distance de Carathéodory C_D et qui n'est pas un automorphisme analytique de D .

[Le referee m'a suggéré des améliorations et a beaucoup simplifié l'exemple du paragraphe 5. Je l'en remercie vivement.]

Commençons par un bref rappel sur la métrique infinitésimale de Carathéodory.

2. - Rappel sur la métrique infinitésimale de Carathéodory.

Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E . On définit ([2] et [4]) sur le fibré tangent $T(D)$ identifié à $D \times E$ une métrique

$$T(D) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, v) \rightarrow \gamma_D(x, v) = \sup_{t \in \mathcal{K}(D, \Delta)} |f'(x) \cdot v|.$$

$\mathcal{H}(D, \Delta)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes de D dans le disque-unité $\Delta \subset \mathbf{C}$ et $f'(x)$ est la dérivée de f au point x .] On vérifie que, pour tout $x \in D$, $\gamma_D(x, \cdot)$ est une norme sur E , équivalente à la norme de E , et on dit que γ_D est la métrique infinitésimale de Carathéodory. Si $f: D \rightarrow D$ est une application holomorphe, on a, pour tout $x \in D$, pour tout $v \in E$:

$$\gamma_D(f(x), f'(x) \cdot v) \leq \gamma_D(x, v).$$

En particulier, les automorphismes analytiques de D sont des isométries.

Si $C: [0, 1] \rightarrow D$ est un chemin de classe C^1 par morceaux, on définit sa longueur $L(C)$ par la formule

$$L(C) = \int_0^1 \gamma_D(C(t), C'(t)) dt.$$

Si x et y sont deux points de D , nous noterons $C_D^i(x, y)$ la borne inférieure des longueurs des chemins de classe C^1 par morceaux d'origine x et d'extrémité y . On vérifie que C_D^i est une distance sur D , et on dit que C_D^i est la distance intégrée de Carathéodory.

Rappelons la définition suivante.

DÉFINITION 2.1. Un domaine D d'un espace de Banach complexe E est dit *cerclé* si l'origine 0 de E appartient à D , et si, pour tout $x \in D$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, λx appartient à D .

On montre facilement la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. Soit D un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E . Supposons que E est muni de la norme $\gamma_D(0, \cdot)$. Alors, la boule-unité ouverte B de E pour cette norme est l'enveloppe convexe de D .

3. - Exemple.

Soit α un nombre réel > 0 , et soit p un entier > 0 . Soit A le domaine cerclé borné de \mathbf{C}^2

$$A = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1| + |z_2| + \alpha|z_1 z_2|^p < 1\}.$$

Soit

$$C = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1| + |z_2| < 1\}.$$

Il est clair que C est l'enveloppe convexe de A . Considérons l'application holomorphe $\varphi: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ définie par

$$\varphi(z_1, z_2) = (z_1 + \alpha(z_1 z_2)^p, z_2), \quad \text{et il est clair que } \varphi(A) \subset C.$$

Considérons l'espace de Banach $E \subset \prod_{n \in \mathbf{Z}} (\mathbf{C}^2)_n$ des suites $((z_1^n, z_2^n)_{n \in \mathbf{Z}})$ telles que

$$\|(z_1^n, z_2^n)_{n \in \mathbf{Z}}\| = \sup_{n \in \mathbf{Z}} (|z_1^n| + |z_2^n|) < +\infty,$$

muni de la norme $\|\cdot\|$ que nous venons de définir.

Soit $A_n \subset (\mathbf{C}^2)_n$ une infinité de copies indexée par \mathbf{Z} de A . Soit $C_n \subset (\mathbf{C}^2)_n$ une infinité de copies indexée par \mathbf{Z} de C . Soit D l'intérieur de $\prod_{n \leq 0} A_n \times \prod_{n > 0} C_n \subset E$. Considérons l'application $f: E \rightarrow E$ définie par

$$f((z_1^n, z_2^n)_{n \in \mathbf{Z}}) = (y_1^n, y_2^n)_{n \in \mathbf{Z}},$$

avec

$$y_1^n = z_1^{n-1}, \quad y_2^n = z_2^{n-1}, \quad \text{si } n \neq 1$$

et

$$(y_1^1, y_2^1) = \varphi(z_1^0, z_2^0) \quad n = 1$$

(où φ est l'application précédemment définie).

On vérifie que

$$A = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |P_{\lambda, \mu}(z_1, z_2)| < 1, |\lambda| = 1, |\mu| = 1\},$$

où

$$P_{\lambda, \mu}(z_1, z_2) = z_1 + \lambda z_2 + \alpha \mu (z_1 z_2)^p,$$

pour tous les nombres complexes λ et μ de module 1. Ainsi, A est un polyèdre analytique généralisé.

Ceci suffit à prouver que D est complet pour la distance intégrée de Carathéodory C_D^i . C'est donc un domaine d'holomorphie pour les fonctions bornées. Il est clair que l'enveloppe convexe de D est la boule-unité ouverte B de E . L'application f envoie D dans D , et on montre le

THÉORÈME 3.1. *L'application holomorphe $f: D \rightarrow D$ que nous venons de définir est telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie linéaire surjective pour $\gamma_D(0, \cdot)$. Si $p \geq 2$, et si α est assez grand, f n'est pas injective.*

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier que $f'(0)$ est une isométrie pour $\gamma_D(0, \cdot)$. Il reste seulement à montrer que f n'est pas injective. Pour que f soit injective, il faut et il suffit que $\varphi: A \rightarrow C$ le soit. Le déterminant jacobien $J(\varphi)$ de φ vaut

$$1 + pz_1^{p-1}z_2^p,$$

et φ n'est pas injective au voisinage de tout zéro (z_1, z_2) de $J(\varphi)$. Il est facile de voir que, si $p \geq 2$, et si α est assez grand, un tel zéro (z_1, z_2) appartient à A . Le théorème est démontré.

4. — Un résultat positif.

Nous allons montrer cependant que, sous certaines hypothèses sur le domaine cerclé borné D , toute application holomorphe f de D dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie linéaire surjective pour $\gamma_D(0, \cdot)$, est la restriction à D d'une application linéaire égale à $f'(0)$. [Bien sûr, ceci n'entraîne pas que f soit un automorphisme analytique de D .] Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Soit D un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E , et soit B l'enveloppe convexe de D . Supposons que toutes les fonctions holomorphes bornées sur D (à valeurs dans un espace de Banach complexe F) se prolongent à B . Soit $f: D \rightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie surjective pour $\gamma_D(0, \cdot)$. Alors f est la restriction à D d'un automorphisme linéaire de B .*

DÉMONSTRATION. On peut prolonger f en une application holomorphe F de B dans E . D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une famille de fonctions linéaires $(\varphi_i)_{i \in I}$ telle que

$$B = \{x \in E \mid |\varphi_i(x)| < 1, \forall i \in I\}.$$

On a :

$$\|\varphi_i \circ f\|_D \leq 1.$$

Par suite, ceci entraîne que

$$\|\varphi_i \circ F\|_B \leq 1,$$

ce qui prouve que F est une application holomorphe de B dans \bar{B} . Le résultat se déduit du théorème 1 de [3].

5. – Un exemple en dimension finie.

Soit H le demi-plan de Poincaré dans \mathbf{C} , et soit $f: H \rightarrow H$ l'application définie par

$$f(z) = z + 1.$$

Soit Δ un sous-ensemble discret de H tel que $f(\Delta)$ contienne strictement Δ . [Par exemple, on peut prendre $\Delta = \{-in \mid n \in \mathbf{N}\}$. Enfin, soit $D = H - \Delta$.] Alors, D est isomorphe à un domaine borné de \mathbf{C} , et nous avons le théorème suivant.

THÉOREME 5.1. *L'application holomorphe f envoie D dans D , et est une isométrie pour la distance de Carathéodory c_D . Cependant, f n'est pas un automorphisme analytique de D .*

DÉMONSTRATION. La seule chose qu'il faut montrer est que f est une isométrie pour c_D . Comme les fonctions holomorphes bornées sur D se prolongent toutes à H , on a:

$$c_H|_D = c_D.$$

D'autre part, f est un automorphisme analytique de H et est donc une isométrie pour c_H . Par suite, f comme application de D dans D est une isométrie pour c_D .

On sait (voir [4] où [5]) que, si D est un domaine borné homogène de \mathbf{C}^n , alors D est complet pour la distance de Carathéodory c_D . Il serait intéressant de savoir si le théorème 1.2 reste vrai si, au lieu de supposer le domaine D homogène, on suppose seulement que D est un domaine borné complet pour la distance de Carathéodory c_D .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. CARTAN, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné*, Math. Z., **35** (1932), pp. 760-773.
- [2] T. FRANZONI - E. VESENTINI, *Holomorphic maps and invariant distances*, Mathematical studies no. 40, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [3] L. HARRIS, *A continuous form of Schwarz's lemma in normed linear spaces*, Pacific J. of Math., **38** (1971), pp. 635-639.

- [4] L. HARRIS, *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces* in *Advances in Holomorphy*, pp. 345-406, Mathematical studies no. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [5] L. HARRIS - J.-P. VIGUÉ, *A metric condition for equivalence of domains*, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **67** (1979), pp. 402-403.

Université de Paris VI
Département de Mathématiques
4 Place Jussieu
75230 Paris - France