ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Sur les applications holomorphes isométriques pour la distance de Carathéodory

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 9, nº 2 (1982), p. 255-261

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1982_4_9_2_255_0>

Sur les applications holomorphes isométriques pour la distance de Carathéodory.

JEAN-PIERRE VIGUÉ

1. – Introduction.

On déduit facilement de H. Cartan [1], première application du théorème fondamental, p. 771, le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, et soit a un point de D. Soit f une application holomorphe de D dans D telle que $f(a) = a$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *la dérivée $f'(a)$ de f au point a est une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(a, \cdot)$*;

(ii) *les valeurs propres de $f'(a)$ sont toutes de module* 1;

(iii) *le déterminant jacobien de f au point a est de module* 1;

(iv) *l'application f est un automorphisme analytique de D.*

[Il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) et que (iv) $\Rightarrow$ (i). Dans [1], H. Cartan montre que (iii) $\Rightarrow$ (iv).]

Supposons maintenant que D soit un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Nous aimerions savoir si le théorème 1.1 se généralise à cette situation. Remarquons d'abord que la condition (iii) n'a pas de sens pour un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Par contre, la condition (i) a un sens, et il est naturel de remplacer la condition (ii) par la condition (ii bis) suivante:

(ii bis) *le spectre de $f'(a)$ est formé de nombres complexes de module* 1.

T. Franzoni et E. Vesentini ont montré ([2] exemple, p. 95) que, même si D est la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe E et a

Pervenuto alla Redazione il 28 Settembre 1981 ed in forma definitiva il 18 Gennaio 1982.

l'origine 0 de E, (ii bis) n'entraîne pas (iv). D'autre part, on déduit facilement des résultats de Harris [3] que, si D est la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe E, et a l'origine 0 de E, (i) entraîne (iv).

Dans cet article, nous allons montrer que, si D est un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E, et si a est l'origine 0 de E, (i) n'entraîne pas (iv). Plus précisément, nous construirons un domaine cerclé borné D d'un espace de Banach complexe E, complet pour la distance intégrée de Carathéodory et une application holomorphe $f\colon D \to D$ telle que $f'(0)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(0, \cdot)$ et que f ne soit même pas injective. Nous donnerons aussi une condition suffisante sur un domaine cerclé borné D pour que toute application holomorphe $f\colon D \to D$ telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(0, \cdot)$ soit linéaire égale à $f'(0)$.

Enfin, dans un dernier paragraphe, nous étudierons la question suivante: si D est, par exemple, un domaine borné homogène de $\mathbf{C}^n$, on déduit du théorème 1.1 le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2. *Soit D un domaine borné homogène de $\mathbf{C}^n$. Soit $f\colon D \to D$ une application holomorphe, et supposons qu'il existe $a \in D$ tel que $f'(a)$ soit une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory. Alors f est un automorphisme analytique de D.*

On peut se demander si ce résultat reste vrai si on ne suppose pas que $D \subset \mathbf{C}^n$ est homogène. Nous verrons qu'il n'en est rien: il existe un domaine borné D de $\mathbf{C}^n$, et une application holomorphe $f\colon D \to D$ qui est même une isométrie pour la distance de Carathéodory C_D et qui n'est pas un automorphisme analytique de D.

[Le referee m'a suggéré des améliorations et a beaucoup simplifié l'exemple du paragraphe 5. Je l'en remercie vivement.]

Commençons par un bref rappel sur la métrique infinitésimale de Carathéodory.

2. – Rappel sur la métrique infinitésimale de Carathéodory.

Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. On définit ([2] et [4]) sur le fibré tangent $T(D)$ identifié à $D \times E$ une métrique

$$T(D) \to \mathbf{R}$$

$$(x, v) \to \gamma_D(x, v) = \sup_{f \in \mathcal{H}(D, \Delta)} |f'(x)\cdot v| .$$

[$\mathcal{H}(D, \Delta)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes de D dans le disque-unité $\Delta \subset \mathbf{C}$ et $f'(x)$ est la dérivée de f au point x.] On vérifie que, pour tout $x \in D$, $\gamma_D(x, \cdot)$ est une norme sur E, équivalente à la norme de E, et on dit que γ_D est la métrique infinitésimale de Carathéodory. Si $f\colon D \to D$ est une application holomorphe, on a, pour tout $x \in D$, pour tout $v \in E$:

$$\gamma_D\big(f(x), f'(x)\cdot v\big) \leqslant \gamma_D(x, v) .$$

En particulier, les automorphismes analytiques de D sont des isométries.

Si $\mathcal{C}\colon [0,1] \to D$ est un chemin de classe C^1 par morceaux, on définit sa longueur $L(\mathcal{C})$ par la formule

$$L(\mathcal{C}) = \int_0^1 \gamma_D\big(\mathcal{C}(t), \mathcal{C}'(t)\big)\, dt .$$

Si x et y sont deux points de D, nous noterons $C_D^i(x, y)$ la borne inférieure des longueurs des chemins de classe C^1 par morceaux d'origine x et d'extrémité y. On vérifie que C_D^i est une distance sur D, et on dit que C_D^i est la distance intégrée de Carathéodory.

Rappelons la définition suivante.

DÉFINITION 2.1. Un domaine D d'un espace de Banach complexe E est dit cerclé si l'origine 0 de E appartient à D, et si, pour tout $x \in D$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, λx appartient à D.

On montre facilement la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. *Soit D un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E. Supposons que E est muni de la norme $\gamma_D(0, \cdot)$. Alors, la boule-unité ouverte B de E pour cette norme est l'enveloppe convexe de D.*

3. – Exemple.

Soit α un nombre réel > 0, et soit p un entier > 0. Soit A le domaine cerclé borné de $\mathbf{C}^2$

$$A = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 |\; |z_1| + |z_2| + \alpha |z_1 z_2|^p < 1\} .$$

Soit

$$C = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 |\; |z_1| + |z_2| < 1\} .$$

Il est clair que C est l'enveloppe convexe de A. Considérons l'application holomorphe $\varphi\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ définie par

$$\varphi(z_1, z_2) = \big(z_1 + \alpha(z_1 z_2)^p, z_2\big)\,, \quad \text{et il est clair que } \varphi(A) \subset C\,.$$

Considérons l'espace de Banach $E \subset \prod_{n\in\mathbf{Z}} (\mathbf{C}^2)_n$ des suites $\big((z_1^n, z_2^n)_{n\in\mathbf{Z}}\big)$ telles que

$$\|(z_1^n, z_2^n)_{n\in\mathbf{Z}}\| = \sup_{n\in\mathbf{Z}} \big(|z_1^n| + |z_2^n|\big) < +\infty,$$

muni de la norme $\|\cdot\|$ que nous venons de définir.

Soit $A_n \subset (\mathbf{C}^2)_n$ une infinité de copies indexée par $\mathbf{Z}$ de A. Soit $C_n \subset (\mathbf{C}^2)_n$ une infinité de copies indexée par $\mathbf{Z}$ de C. Soit D l'intérieur de $\prod_{n\leqslant 0} A_n \times \times \prod_{n>0} C_n \subset E$. Considérons l'application $f\colon E \to E$ définie par

$$f\big((z_1^n, z_2^n)_{n\in\mathbf{Z}}\big) = (y_1^n, y_2^n)_{n\in\mathbf{Z}}\,,$$

avec

$$y_1^n = z_1^{n-1}\,, \quad y_2^n = z_2^{n-1}\,, \quad \text{si } n \neq 1$$

et

$$(y_1^1, y_2^1) = \varphi(z_1^0, z_2^0) \qquad n = 1$$

(où φ est l'application précédemment définie).

On vérifie que

$$A = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 |\; |P_{\lambda,\mu}(z_1, z_2)| < 1,\ |\lambda| = 1,\ |\mu| = 1\}\,,$$

où

$$P_{\lambda,\mu}(z_1, z_2) = z_1 + \lambda z_2 + \alpha\mu(z_1 z_2)^p\,,$$

pour tous les nombres complexes λ et μ de module 1. Ainsi, A est un polyèdre analytique généralisé.

Ceci suffit à prouver que D est complet pour la distance intégrée de Carathéodory C_D^i. C'est donc un domaine d'holomorphie pour les fonctions bornées. Il est clair que l'enveloppe convexe de D est la boule-unité ouverte B de E. L'application f envoie D dans D, et on montre le

THÉORÈME 3.1. *L'application holomorphe $f\colon D \to D$ que nous venons de définir est telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie linéaire surjective pour $\gamma_D(0, \cdot)$. Si $p \geqslant 2$, et si α est assez grand, f n'est pas injective.*

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier que $f'(0)$ est une isométrie pour $\gamma_D(0, \cdot)$. Il reste seulement à montrer que f n'est pas injective. Pour que f soit injective, il faut et il suffit que $\varphi: A \to C$ le soit. Le déterminant jacobien $J(\varphi)$ de φ vaut

$$1 + p z_1^{p-1} z_2^p ,$$

et φ n'est pas injective au voisinage de tout zéro (z_1, z_2) de $J(\varphi)$. Il est facile de voir que, si $p \geqslant 2$, et si α est assez grand, un tel zéro (z_1, z_2) appartient à A. Le théorème est démontré.

4. – Un résultat positif.

Nous allons montrer cependant que, sous certaines hypothèses sur le domaine cerclé borné D, toute application holomorphe f de D dans luimême telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie linéaire surjective pour $\gamma_D(0, \cdot)$, est la restriction à D d'une application linéaire égale à $f'(0)$. [Bien sûr, ceci n'entraîne pas que f soit un automorphisme analytique de D.] Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Soit D un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E, et soit B l'enveloppe convexe de D. Supposons que toutes les fonctions holomorphes bornées sur D (à valeurs dans un espace de Banach complexe F) se prolongent à B. Soit $f: D \to D$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie surjective pour $\gamma_D(0, \cdot)$. Alors f est la restriction à D d'un automorphisme linéaire de B.*

DÉMONSTRATION. On peut prolonger f en une application holomorphe F de B dans E. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une famille de fonctions linéaires $(\varphi_i)_{i \in I}$ telle que

$$B = \{x \in E \mid |\varphi_i(x)| < 1, \ \forall i \in I\} .$$

On a:

$$\|\varphi_i \circ f\|_D \leqslant 1 .$$

Par suite, ceci entraîne que

$$\|\varphi_i \circ F\|_B \leqslant 1 ,$$

ce qui prouve que F est une application holomorphe de B dans $\bar{B}$. Le résultat se déduit du théorème 1 de [3].

5. – Un exemple en dimension finie.

Soit H le demi-plan de Poincaré dans $\mathbb{C}$, et soit $f\colon H \to H$ l'application définie par

$$f(z) = z + 1 .$$

Soit Δ un sous-ensemble discret de H tel que $f(\Delta)$ contienne strictement Δ. [Par exemple, on peut prendre $\Delta = \{-in |\ n \in \mathbb{N}\}$. Enfin, soit $D = H - \Delta$.] Alors, D est isomorphe à un domaine borné de $\mathbb{C}$, et nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. *L'application holomorphe f envoie D dans D, et est une isométrie pour la distance de Carathéodory c_D. Cependant, f n'est pas un automorphisme analytique de D.*

DÉMONSTRATION. La seule chose qu'il faut montrer est que f est une isométrie pour c_D. Comme les fonctions holomorphes bornées sur D se prolongent toutes à H, on a:

$$c_H|_D = c_D .$$

D'autre part, f est un automorphisme analytique de H et est donc une isométrie pour c_H. Par suite, f comme application de D dans D est une isométrie pour c_D.

On sait (voir [4] où [5]) que, si D est un domaine borné homogène de $\mathbb{C}^n$, alors D est complet pour la distance de Carathéodory c_D. Il serait intéressant de savoir si le théorème 1.2 reste vrai si, au lieu de supposer le domaine D homogène, on suppose seulement que D est un domaine borné complet pour la distance de Carathéodory c_D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné*, Math. Z., **35** (1932), pp. 760-773.

[2] T. FRANZONI - E. VESENTINI, *Holomorphic maps and invariant distances*, Mathematical studies no. 40, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[3] L. HARRIS, *A continuous form of Schwarz's lemma in normed linear spaces*, Pacific J. of Math., **38** (1971), pp. 635-639.

[4] L. Harris, *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces* in *Advances in Holomorphy*, pp. 345-406, Mathematical studies no. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979.
[5] L. Harris - J.-P. Vigué, *A metric condition for equivalence of domains*, Atti Accad. Naz. Lincei, **67** (1979), pp. 402-403.

Université de Paris VI
Département de Mathématiques
4 Place Jussieu
75230 Paris - France