

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

PHAM THE LAI

D. ROBERT

**Valeurs propres d'une classe d'équations différentielles
singulières sur une demi-droite**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 6, n° 2
(1979), p. 335-366

[<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1979_4_6_2_335_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1979_4_6_2_335_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Valeurs propres d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demi-droite.

PHAM THE LAI (*) - D. ROBERT (*)

Introduction.

Dans l'étude d'opérateurs différentiels elliptiques sur un domaine borné Ω de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, dégénérant sur la frontière de Ω , on associe, à tout point $s \in \Gamma$, une équation différentielle singulière sur la demi-droite: $\{t \cdot \mathbf{n}_s + s; t > 0\}$ où \mathbf{n}_s est la normale intérieure en s à Γ . Cette équation différentielle est obtenue par figeage des coefficients en s et par transformation de Fourier partielle par rapport au $(n-1)$ variables tangentielles en s à Γ . Le rôle joué dans l'étude de la régularité par cette équation différentielle est mis en évidence dans Bolley-Camus-Heffer [2] et Grushin-Savsan [5]. D'autre part Pham The Lai [8] a montré comment cette équation différentielle intervient dans la théorie spectrale des opérateurs elliptiques dégénérés.

Dans Bolley-Camus-Pham The Lai [3], où l'on étudie la théorie spectrale d'une classe de problèmes elliptiques dégénérés, avec un type de dégénérescence non nécessairement normal à Γ , intervient une classe d'opérateurs différentiels singuliers qui sur $[0, +\infty[$ s'écrivent

$$(1) \quad L(t, D_t) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} a_{jl} \cdot D^l [t^{2(\sigma + \delta m) + (j+l)(1-\delta)} D^j]$$

où $D = i^{-1}(d/dt)$, σ réel < 0 , δ réel > 0 tels que $\sigma + \delta m > 0$ et $\sigma + m \geq 0$; a_{ji} est réel et $a_{ji} = a_{ij}$ pour $0 \leq j, l \leq m$.

Sous une hypothèse de coercivité naturelle (c) (voir § 1), on considère une réalisation A dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ de $L(t, D_t)$. L'opérateur A a alors une suite $(\lambda_j)_{j \geq 0}$ de valeurs propres réelles, chacune étant répétée suivant sa multiplicité. De plus, on a: $\lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda_j = +\infty$. Nous nous proposons dans ce travail d'étudier la croissance de la suite $(\lambda_j)_{j \geq 0}$.

(*) Université de Nantes, Institut de Mathématiques et d'Informatique.
Pervenuto alla Redazione il 23 Febbraio 1978.

Lorsque $\delta = 1$ et $\sigma \in \mathbb{Z}$, cette étude a été faite par A. Mohamed [7] où il a été établi que $\lim_{j \rightarrow +\infty} [j^{-2(\sigma+\delta m)} \cdot \lambda_j] = l$ où l est un nombre > 0 qui s'exprime en fonction du symbole de L .

Dans [3] Bolley-Camus-Pham The Lai ont montré que:

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} [j^{-2(\sigma+\delta m)/\delta} \cdot \lambda_j] > 0 \quad \text{lorque} \quad \frac{\delta}{2(\sigma + \delta m)} < 1.$$

Le résultat principal de cet article est que, sous les hypothèses (1) et (c) on a:

$$(2) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} (j^{-2(\sigma+\delta m)/\delta} \cdot \lambda_j) > 0.$$

Nous établissons (2) par une méthode indirecte: on considère un entier p assez grand de sorte que pour $\lambda \geq \lambda_0$, $G_\lambda^{(p)} = (A^p + \lambda)^{-1}$ soit un opérateur nucléaire de $L^2(\mathbb{R}_+)$. On étudie alors le comportement en λ du noyau de $G_\lambda^{(p)}$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$. On en déduit un équivalent en λ pour $\text{Trace } (A^p + \lambda)^{-1}$, $\lambda \rightarrow +\infty$ et le théorème taubérien de Hardy-Littlewood donne [2].

Le paragraphe I est consacré à des préliminaires: noyau d'opérateur associé à un problème variationnel et espaces de Sobolev à poids sur \mathbb{R}_+ .

Dans le paragraphe II nous précisons les hypothèses et les résultats obtenus puis nous donnons quelques exemples.

Dans le paragraphe III nous étudions le noyau de $G_\lambda(t, t)$ sur $[1, +\infty[$. Cette étude est le point crucial de notre travail. Nous utilisons ici deux types de méthode. Pour $\delta \geq 1$ on procède par figeage des coefficients de l'opérateur et par estimation de commutateurs. Pour $0 < \delta < 1$ on construit une paramétrix à droite pour l'opérateur $L + \lambda$. La deuxième méthode s'adapte pour traiter le cas $\delta \geq 1$.

Enfin, dans le paragraphe IV, on achève l'étude de $\text{Tr } (A^p + \lambda)^{-1}$.

I. — Préliminaires.

Rappelons d'abord quelques résultats généraux qui nous seront utiles. $L^2(\Omega)$ étant l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur Ω ouvert de \mathbb{R}^n , soit V un espace de Hilbert dense dans $L^2(\Omega)$. On suppose:

- (i) l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est continue;
- (ii) l'injection de V dans $C(\Omega)$ (muni de la convergence uniforme sur tout compact) est compacte;

(iii) il existe $\chi \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\chi > 0$ sur Ω et des constantes γ , $c_1 > 0$ telles que: $|u(x)| \leq c_1 \chi^{-1}(x) \|u\|_V^\gamma \cdot \|u\|_{L^1}^{1-\gamma}$ pour tout $u \in V$ et $x \in \Omega$.

Soit V' l'anti-dual de V par rapport au produit scalaire de $L^2(\Omega)$. On notera par $\|T\|_{V',V}$ la norme dans $\mathcal{L}(V', V)$, espace des opérateurs linéaires continues de V' dans V . On introduit de même les normes $\|T\|_{V',L^1}$, $\|T\|_{L^1,V}$ et $\|T\|_{L^1,L^1}$.

THÉORÈME (I.1) (Bolley-Camus-Pham The Lai [3]). *Soit $T \in \mathcal{L}(V', V)$. Alors T est un opérateur intégral de noyau $K(x, y)$ continu sur $\Omega \times \Omega$ et*

$$(1.0) \quad |K(x, y)| \leq c_1^2 (\chi(x) \cdot \chi(y))^{-1} \|T\|_{V',V}^{\gamma_1} \|T\|_{L^1,V}^{\gamma(1-\gamma)} \|T\|_{L^1,V}^{\gamma(1-\gamma)} \|T\|_{L^1,L^1}^{(1-\gamma)^2}$$

pour tout $x, y \in \Omega$.

Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire, continue sur $V \times V$ et V -coercive c'est-à-dire qu'il existe $c_2 > 0$ et $\lambda_0 \geq 0$ telles que

$$(1.1) \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq c_2 \|u\|_V^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^1}^2 \quad \text{pour tout } u \in V.$$

Soit $A \in \mathcal{L}(V, V')$ l'opérateur associé à a par le théorème de Lax-Milgram. D'après (1.2), $A + \lambda$ est un isomorphisme de V sur V' pour $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0$. Posons alors $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$. On a alors:

PROPOSITION (I.2). *Sous les hypothèses (i), (ii), (iii) et (1.2), pour $\lambda \geq \lambda_0$, G_λ est un opérateur intégral de noyau $G_\lambda(x, y)$ continu sur $\Omega \times \Omega$ et vérifiant:*

$$|G_\lambda(x, y)| \leq c_1^2 c_2^{-\gamma} (\chi(x) \cdot \chi(y))^{-1} \lambda^{-1+\gamma}$$

pour tout $\lambda \geq \lambda_0$.

Puisque nous nous proposons d'étudier les valeurs propres de problèmes associés aux formes:

$$a(u, v) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \int_0^{+\infty} a_{jl}(t) \cdot t^{2(\sigma+\delta m) + (j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l v} dt$$

il est naturel de considérer les espaces:

$$W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+), t^{\sigma+\delta m + j(1-\delta)} D^j u \in L^2(\mathbf{R}_+), 0 \leq j \leq m\}$$

où $m \in \mathbf{N}$, σ réel < 0 , δ réel > 0 tels que $\sigma + m \geq 0$ et $\sigma + \delta m > 0$.

$W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)$ est un espace de Hilbert pour la norme canonique.

Nous donnons maintenant les propriétés de ces espaces:

PROPOSITION (I.3) (Bolley-Camus-Pham The Lai [3]).

$$W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+) : t^{\sigma+m} \cdot D^m u \in L^2(\mathbf{R}_+) \text{ et } t^{\sigma+\delta m} u \in L^2(\mathbf{R}_+)\}.$$

PROPOSITION (I.4) (Bolley-Camus-Pham The Lai [3]).

- (i) *On a une injection continue: $W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+) \hookrightarrow H^{-\sigma}(\mathbf{R}_+)$*
- (ii) *On a une injection compacte: $W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+) \hookrightarrow L^2(\mathbf{R}_+)$.*

PROPOSITION (I.5):

- (i) *On a une injection compacte: $W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+) \hookrightarrow \mathcal{C}([0, +\infty[)$*
- (ii) *Il existe une constante $c > 0$ telle que:*

$$(1.2) \quad |u(t)| \leq c t^{-(\sigma+m)/m} \cdot \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)}^{1/2m} \cdot \|u\|_{L^4(\mathbf{R}_+)}^{1-1/2m}$$

$$(1.3) \quad |u(t)| \leq c t^{-(\sigma+\delta m) + (\delta-1)/2} \cdot \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)}$$

pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)$.

DÉMONSTRATION:

- (i) résulte de l'inclusion: $W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+) \subset H_{\text{loc}}^m([0, +\infty[)$ et de $m > \frac{1}{2}$ par le théorème de Sobolev usuel.
- (ii) Par le théorème de Sobolev, il existe $c > 0$ telle que:

$$(1.4) \quad |W(t)|^2 \leq c \left[\int_{\tau}^{+\infty} |D^m W|^2 dt + \int_{\tau}^{+\infty} |W|^2 dt \right]$$

pour tout réel $\tau > 0$, $t \geq \tau$ et $W \in H^m([\tau, +\infty[)$.

Soit alors $u \in W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)$ et $\lambda > 0$. Posons $W(x) = u(\lambda \cdot x)$; (1.4) donne:

$$|u(t)|^2 \leq c \left[\int_{\lambda^{-1}t}^{\infty} |D^m W|^2 dx + \int_{\lambda^{-1}t}^{\infty} |W|^2 dx \right],$$

$t > 0$, d'où

$$|u(t)|^2 \leq \frac{C}{\lambda} \left[\lambda^{2m} \int_t^{\infty} |D^m u|^2 dx + \int_t^{\infty} |u|^2 dx \right]$$

et comme $x \geq t$ on en déduit:

$$(1.5) \quad |u(t)|^2 \leq \frac{c}{\lambda} \left[\lambda^{2m} t^{-2(\sigma+m)} \int_0^\infty x^{2(\sigma+m)} |D^m u|^2 dx + \int_0^\infty |u|^2 dx \right]$$

pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)$, $t > 0$, $\lambda > 0$.

(1.5) avec $\lambda = t^{(\sigma+m)/m}$ donne:

$$|u(t)|^2 \leq c \cdot t^{-(\sigma+m)/m} \left[\int_0^\infty x^{2(\sigma+m)} |D^m u|^2 dx + \int_0^\infty |u|^2 dx \right].$$

Appliquons cette inégalité à $v(x) = u(r \cdot x)$, $r > 0$:

$$|u(r \cdot t)|^2 \leq \frac{c}{r} t^{-(\sigma+m)/m} \left[r^{-2\sigma} \int_0^\infty x^{2(\sigma+m)} |D^m u|^2 dx + \int_0^\infty |u|^2 dx \right].$$

Posons $r^\sigma = \varrho$, il vient:

$$|u(t)|^2 \leq c \cdot t^{-(\sigma+m)/m} \varrho^{-1+1/2m} [\|u\|_{W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)}^2 + \varrho \|u\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2].$$

On obtient alors (1.2) avec

$$\varrho = \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^m}^2 / \|u\|_{L^2}^2.$$

$\lambda = t^{1-\delta}$ dans (1.5) donne immédiatement (1.3).

Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+) \times W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)$ et $W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)$ -coercive. Notons par $W_{\sigma,\delta}^{-m}(\mathbf{R}_+)$ l'antidual de $W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+)$ par rapport au produit scalaire de $L^2(\mathbf{R}_+)$. Soit $A \in \mathcal{L}(W_{\sigma,\delta}^m(\mathbf{R}_+), W_{\sigma,\delta}^{-m}(\mathbf{R}_+))$ l'opérateur engendré par a . Posons $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geq \lambda_0 > 0$.

THÉORÈME (I.6).

(i) On a les majorations:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \|G_\lambda\|_{W_{\sigma,\delta}^{-m}, W_{\sigma,\delta}^m} &\leq c \\ \|G_\lambda\|_{W_{\sigma,\delta}^{-m}, L^2} &\leq c \cdot \lambda^{-1/2} \\ \|G_\lambda\|_{L^2, W_{\sigma,\delta}^m} &\leq c \cdot \lambda^{-1/2} \\ \|G_\lambda\|_{L^2, L^2} &\leq c \cdot \lambda^{-1} \end{aligned}$$

pour $\lambda \geq \lambda_0$.

(ii) G_λ a un noyau continu, $G_\lambda(t, \tau)$, sur $]0, +\infty[\times]0, \infty[$ et il existe une constante $c > 0$ indépendante de λ , t et τ telle que:

$$(1.7) \quad |G_\lambda(t, \tau)| \leq c(t \cdot \tau)^{-(\sigma+m)/2m} \cdot \lambda^{-1+(1/2m)}$$

$$(1.8) \quad |G_\lambda(t, \tau)| \leq c(t \cdot \tau)^{-(\sigma+\delta m)+(1/2)(\delta-1)}$$

pour $t, \tau > 0$ et $\lambda \geq \lambda_0$.

DÉMONSTRATION. (1.6) résulte de la coercivité de a .

On obtient (1.7) et (1.8) à partir de (1.6), de la proposition (I.5) et de (1.0).

II. - Hypothèses. Résultats. Exemples.

Soit la forme intégrro-differentielle:

$$a(u, v) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \int_0^{+\infty} a_{jl}(t) t^{2(\sigma+m)+(j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l v} dt$$

On suppose:

(H₁) $a_{jl} \in L^\infty(\mathbf{R}_+)$, à valeurs réelles

(H₂) $a_{jl} = a_{lj}$ pour $0 \leq j, l \leq m$

(H₃) $\lim_{t \rightarrow +\infty} a_{jl}(t) = a_{jl}(\infty)$ existe pour $0 \leq j, l \leq m$

(H₄) a est $W_{\sigma, \delta}^m(\mathbf{R}_+)$ -coercive: il existe $c, \lambda_0 > 0$ telles que

$$a(u, v) + \lambda_0 \|u\|_{L^1}^2 \geq c \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^m}^2 \quad \text{pour tout } u \in W_{\sigma, \delta}^m(\mathbf{R}_+).$$

Soit $A \in \mathcal{L}(W_{\sigma, \delta}^m(\mathbf{R}_+), W_{\sigma, \delta}^{-m}(\mathbf{R}_+))$ l'opérateur engendré par a . Comme précédemment, on pose: $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geq \lambda_0$.

Posons:

$$\omega_\infty(\xi) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} a_{jl}(\infty) \cdot \xi^{j+l} \quad \text{pour } \xi \in \mathbf{R}.$$

Nous nous proposons dans ce travail d'établir les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME (II.1). (1) Il existe $E > 0$ telle que:

$$\omega_\infty(\xi) \geq E \cdot (1 + \xi^2)^m \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}.$$

(2) G_λ a un noyau continu sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

(3) Si $\alpha = \delta/2(\sigma + \delta m) < 1$, G_λ est un opérateur nucléaire de $L^2(\mathbf{R}_+)$ dans lui-même et l'on a :

$$(2.1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} G_\lambda(t, t) dt = \frac{1}{2\pi\delta} \cdot \frac{\pi_\alpha}{\sin \pi\alpha} \int_{\mathbf{R}} \omega_\infty(\xi)^{-\alpha} d\xi.$$

THÉOREME (II.2). (1) Le spectre de A est discret, constitué d'une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ de valeurs propres, chacune étant répétée suivant sa multiplicité qui est finie, et telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty$.

(2) Posons : $N(\lambda) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} 1$. On a alors :

$$(2.2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\alpha} \cdot N(\lambda) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{\mathbf{R}} \omega_\infty(\xi)^{-\alpha} d\xi.$$

REMARQUE. (2.2) est une conséquence directe de (2.1) pour $\delta/2(\sigma + \delta m) < 1$ par le théorème de Hardy-Littlewood. Pour le cas général nous étudierons le noyau de $(A^p + \lambda)^{-1}$, p entier assez grand, après avoir réduit le problème au cas où les a_j sont constants à l'infini.

Établissons maintenant le point (1) de (II.1) :

PROPOSITION (II.3). Sous les hypothèses (H_1) à (H_4) , il existe $E > 0$ telle que

$$(2.3) \quad \omega_\infty(\xi) \geq E(1 + \xi^2)^m \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$, $\varphi > 0$ et $\text{supp } \varphi \subseteq]1, +\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} t^{2(\sigma + \delta m)} \cdot \varphi(t)^2 dt = 1$.

Posons :

$$u_{\varepsilon, \xi}(t) = \varepsilon^{\sigma + \delta m + (1/2)} \cdot \varphi(\varepsilon t) \cdot \exp[i\xi \delta^{-1} t^\delta], \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

La coercivité de a et la proposition (I.3) donnent :

$$(2.4) \quad a(u_{\varepsilon, \xi}, u_{\varepsilon, \xi}) + \lambda_0 \|u_{\varepsilon, \xi}\|_{L^1}^2 \geq c(\|t^{\sigma+m} D^m u_{\varepsilon, \xi}\|_{L^1}^2 + \|t^{\sigma+\delta m} \cdot u_{\varepsilon, \xi}\|_{L^1}^2).$$

On a clairement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_{\varepsilon, \xi}\|_{L^1}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|t^{\sigma+\delta m} \cdot u_{\varepsilon, \xi}\|_{L^1}^2 = 1.$$

On a d'autre part:

$$(2.5) \quad D^m u_{\varepsilon, \xi}(t) = \varepsilon^{\sigma + \delta m + (1/2)} \cdot \varphi(\varepsilon t) (\xi t^{\delta-1})^m \cdot \exp [i \xi \delta^{-1} t^\delta] + \\ + \varepsilon^{\sigma + \delta m + (1/2)} \sum_{0 \leq k \leq m-1} \varepsilon^{m-k} \cdot D^{m-k} \varphi(\varepsilon t) \cdot \left(\sum_{h=0}^k c_{h,k}(\xi) t^{(k-h)(\delta-1)-h} \right) \exp [i \xi \delta^{-1} t^\delta].$$

Posons:

$$R_{\varepsilon, \xi} = \varphi(\varepsilon t) (\xi t^{\delta-1})^m \quad \text{et} \quad R_{\varepsilon, \xi}^{(m)} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq m-1 \\ 0 \leq h \leq k}} \varepsilon^{m-k} D^{m-k} \varphi(\varepsilon t) c_{h,k}(\xi) t^{(k-h)(\delta-1)-h}.$$

On a facilement:

$$\|t^{\sigma+m} R_{\varepsilon, \xi}\|_{L^1}^2 = \xi^{2m} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|t^{\sigma+m} R_{\varepsilon, \xi}^{(m)}\|_{L^1} = 0$$

d'où:

$$(2.6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|t^{\sigma+m} D^m u_{\varepsilon, \xi}\|_{L^1}^2 = \xi^{2m}.$$

On aura établi la proposition si l'on prouve:

$$(2.7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u_{\varepsilon, \xi}, u_{\varepsilon, \xi}) = \omega_\infty(\xi).$$

Or d'après (2.5) on a:

$$a(u_{\varepsilon, \xi}, u_{\varepsilon, \xi}) = \varepsilon^{2(\sigma + \delta m) + 1} \cdot \int_0^\infty \left(\sum_{0 \leq j, l \leq m} a_{jl}(t) \cdot \xi^{j+l} \cdot t^{2(\sigma + \delta m)} |\varphi(\varepsilon t)|^2 dt \right) + \\ + \varepsilon^{2(\sigma + \delta m) + 1} \int_0^\infty \sum_{0 \leq j, l \leq m} a_{jl}(t) t^{2(\sigma + \delta m) + (j+l)(1-\delta)} \cdot \\ \cdot [R_{\varepsilon, \xi}^{(j)}(t) \cdot \overline{R_{\varepsilon, \xi}^{(l)}(t)} + \varphi(\varepsilon t) ((\varepsilon t^{\delta-1})^l R_{\varepsilon, \xi}^{(j)}(t) + (\xi t^{\delta-1})^l R_{\varepsilon, \xi}^{(j)}(t))] dt$$

Par le théorème de Lebesgue on a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varepsilon^{2(\sigma + \delta m) + 1} \int_0^\infty \sum_{0 \leq j, l \leq m} a_{jl}(t) \cdot \xi^{j+l} \cdot t^{2(\sigma + \delta m)} |\varphi(\varepsilon t)|^2 dt \right] = \omega_\infty(\xi).$$

On a: $\text{Supp } R_{\varepsilon, \xi}^{(j)} \subset [1/\varepsilon, A/\varepsilon]$, A constante > 1 et il existe γ_j fonction de ξ , indépendante de t et ε telle que:

$$|R_{\varepsilon, \xi}^{(j)}(t)| \leq \gamma_j(\xi) \cdot \varepsilon \cdot t^{(j-1)(\delta-1)} \quad \text{pour } t \in [1/\varepsilon, A/\varepsilon].$$

D'où:

$$\varepsilon^{2(\sigma+\delta m)+1} \left| \int_0^\infty a_{ji}(t) t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} R_{\varepsilon,\xi}^{(j)} \cdot \overline{R_{\varepsilon,\xi}^{(l)}} dt \right| \leq c \cdot \gamma_i(\xi) \gamma_l(\xi) \varepsilon^\delta \int_1^A \tau^{2(\sigma+\delta m)+2(1-\delta)} d\tau.$$

On a de même:

$$\varepsilon^{2(\sigma+\delta m)+1} \cdot \left| \int_0^\infty a_{ji}(t) t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} \cdot \varphi(\xi t) \cdot (\xi t^{\delta-1}) R_{\varepsilon,\xi}^{(j)} dt \right| \leq c(\xi) \cdot \varepsilon^\delta,$$

comme $\delta > 0$, les majorations précédentes impliquant (2.7).

EXEMPLES (II.4). (1) $L(t, D_i) = D_i^2 + t^k$, k réel > 0 .

C'est un opérateur du type Schrödinger sur $[0, +\infty[$. Dans ce cas il a été démontré par Lévitane [6] que:

$$(L) \quad N(\lambda) \sim (2\pi)^{-1} \int_0^\infty dt \int_{\xi^2 + t^k \leq \lambda} d\xi.$$

Montrons que cette formule coïncide avec (2.2) dans ce cas particulier.

On a ici:

$$m = 1, \quad \sigma = -1, \quad \delta = \frac{k}{2} + 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\delta}{2(\sigma + \delta m)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}.$$

(2.2) s'écrit alors:

$$N(\lambda) \sim \pi^{-1} (k+2)^{-1} \left(\int (1 + \xi^2)^{-(1/k) - (1/2)} d\xi \right) \lambda^{1/2 + 1/k}.$$

Utilisant la fonction bêta classique il vient:

$$(2.2)' \quad N(\lambda) \sim \pi^{-1} (k+2)^{-1} B\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2}\right) \lambda^{1/2 + 1/k}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, par quasi-homogénéité, on a:

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{\xi^2 + t^k \leq \lambda} d\xi = \lambda^{1/2 + 1/k} \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\eta^2 + \tau^k \leq 1} d\eta = 2 \cdot \lambda^{1/2 + 1/k} \int_0^1 (1 - \tau^k)^{1/2} d\tau.$$

Or:

$$\int_0^1 (1 - \tau^k)^{1/2} d\tau = \frac{1}{k} \int_0^1 u^{(1/k)-1} (1-u)^{1/2} du = \frac{1}{k} B\left(\frac{1}{k}, \frac{3}{2}\right).$$

Or la fonction béta vérifie :

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q) \quad p, q > 0,$$

d'où :

$$B\left(\frac{1}{k}, \frac{3}{2}\right) = k(k+2)^{-1} \cdot B\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2}\right),$$

ce qui prouve que (L) et (2.2)' coïncident et que :

$$N(\lambda) \sim (k \cdot \pi)^{-1} \cdot B\left(\frac{1}{k}, \frac{3}{2}\right) \cdot \lambda^{1/2+1/2}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Pour $k = 2$ on trouve : $\lambda_j = 4j + 1$ (opérateur d'Hermite sur $[0, +\infty[$).

$$(2) \text{ Soit } L(t, D_t) = a_1 D_t(t D_t) + a_0 t, \quad a_1, a_0 > 0.$$

Un calcul explicite prouve que $\lambda_j = 2(\sqrt{a_0 a_1}) \cdot j + \sqrt{a_0 a_1}$.

La j -ième fonction propre est donnée par :

$$\varphi_j(t) = \exp[-(\sqrt{a_0/a_1})t] \cdot L_j\left(2\sqrt{\frac{a_0}{a_1}} \cdot t\right),$$

où L_j est le j -ième polynôme de Laguerre.

(3) Plus généralement, considérons le opérateurs :

$$L(t, D_t) = D_t(t^h D_t) + t^k \quad \text{pour } 0 \leq h < 2 \text{ et } k > 0,$$

on a alors :

$$m = 1, \quad \sigma = \frac{h}{2} - 1, \quad \delta = 1 - \frac{h-k}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} - \frac{h}{2k}.$$

Un calcul analogue à celui fait dans (1) montre que :

$$N(\lambda) \sim (\pi k)^{-1} \cdot B\left(\frac{1}{k} - \frac{h}{2k}, \frac{3}{2}\right) \cdot \lambda^{1/2+1/k-h/2k}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

III. - Etude du modèle.

LEMME (III.1). Avec les notations du paragraphe II, pour tout réel $T > 0$, on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_0^T G_\lambda(t, t) dt = 0.$$

DÉMONSTRATION. D'après (1.7) on a :

$$\lambda^{1-\alpha} \cdot \int_0^T G_\lambda(t, t) dt \leq c \cdot \lambda^{(1/2m)-\alpha} \int_0^T t^{-(\sigma+m)/m} dt ,$$

or :

$$\frac{1}{2m} - \alpha = \frac{1}{2m} - \frac{\delta}{2(\sigma + \delta m)} = \frac{\sigma}{2m(\sigma + \delta m)} ,$$

où $\sigma < 0$, d'où le lemme.

Le lemme (III.1) montre qu'il suffit de faire l'étude de G_λ sur $[T, +\infty[$, $T > 0$. Désignons par $W_{\sigma, \delta}^m([T, +\infty[)$ l'espace des $u \in W_{\sigma, \delta}^m(\mathbf{R}_+)$ tel que $\text{Supp } u \subset [T, +\infty[$ muni de la structure hilbertienne évidente.

LEMME (III.2). Avec les notations de II, il existe $T_0 > 0$ tel que pour $T \geq T_0$, la forme

$$a_T(u, v) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} a_{jl}(\infty) \int_T^\infty t^{2(\lambda\sigma + \delta m) + (j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l v} dt$$

soit coercive sur $W_{\sigma, \delta}^m([T, +\infty[)$.

DÉMONSTRATION. Evidente à partir de la coercivité de a et de la définition de $a_{jl}(\infty)$.

Nous allons étudier comme modèle la forme intégral-différentielle :

$$\alpha(u, v) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \alpha_{jl} \int_1^{+\infty} t^{2(\sigma + \delta m) + (j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l v} dt .$$

On suppose: α_{jl} réels, $\alpha_{jl} = \alpha_{lj}$ pour tout $0 \leq j, l \leq m$ et α $W_{\sigma, \delta}^m([1, \infty[)$ -coercive: il existe $c, \lambda_0 > 0$ telles que

$$(3.1) \quad \alpha(u, v) + \lambda_0 \|u\|_{L^2}^2 \geq c \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^m}^2 \quad \text{pour tout } u \in W_{\sigma, \delta}^m([1, \infty[) .$$

Posons :

$$\omega(\xi) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \alpha_{jl} \cdot \xi^{j+l} ,$$

(2.3) entraîne qu'il existe $E > 0$ telle que :

$$(3.2) \quad \omega(\xi) \geq E(1 + \xi^2)^m \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R} .$$

Soit \mathcal{A} l'opérateur engendré par $(\alpha, W_{\sigma, \delta}^m([1, \infty[), L^2([1, \infty[))$. Posons $\mathcal{G}_\lambda = (\mathcal{A} + \lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geq \lambda_0$. Il résulte du paragraphe I que \mathcal{G}_λ est un opérateur à noyau continu sur $[1, +\infty[\times [1, +\infty[$. De plus il existe $c > 0$ telle que :

$$(3.3) \quad |\mathcal{G}_\lambda(t, \tau)| \leq c(t \cdot \tau)^{-(\sigma+m)/m} \cdot \lambda^{-1+(1/2m)}$$

$$(3.4) \quad |\mathcal{G}_\lambda(t, \tau)| \leq c(t \cdot \tau)^{-(\sigma+\delta m)+(1/2)(\delta-1)},$$

pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, $t, \tau \in [1, +\infty[$.

Le but de ce paragraphe est de prouver le :

THÉORÈME (III.3). *Supposons de plus: $\alpha = \delta/2(\sigma + \delta m) < 1$. Alors $t \rightarrow \mathcal{G}_\lambda(t, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et l'on a :*

$$(3.5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_1^\infty \mathcal{G}_\lambda(t, t) dt = (\pi\alpha) \cdot (2\pi\delta)^{-1} \cdot (\sin \pi\alpha)^{-1} \int_{\mathbf{R}} \omega(\xi)^{-\alpha} d\xi.$$

La démonstration du théorème (III.3) est assez longue. Comme il est indiqué dans l'introduction, nous donnons deux types de démonstration suivant que $\delta \geq 1$ ou que $0 < \delta < 1$.

(III.A): $\delta \geq 1$. Dans tout ce sous-paragraphe nous faisons l'hypothèse supplémentaire $\delta \geq 1$.

Soit $t_0 \geq 2$ fixé et posons $\tau = t_0^{1-\delta}$.

La forme α figée en t_0 s'écrit :

$$\alpha_{t_0}(u, v) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \alpha_{jl} \int_{-\infty}^{+\infty} t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l v} dt$$

pour $u, v \in H^m(\mathbf{R})$.

Par (3.2), α_{t_0} est $H^m(\mathbf{R})$ -coercive.

Posons :

$$\beta_\tau(u, v) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \alpha_{jl} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau \cdot D)^j u \cdot \overline{(\tau \cdot D)^l v} dt, \quad 0 < \tau \leq 1$$

pour $u, v \in H^m(\mathbf{R})$.

On a :

$$\alpha_{t_0}(u, v) = t_0^{2(\sigma+m)} \cdot \beta_{t_0^{1-\delta}}(u, v).$$

Pour m réel désignons par $H_{(\tau)}^m(\mathbf{R})$ l'espace de Sobolev usuel $H^m(\mathbf{R})$ muni de la norme: $\|u\|_{m, \tau}^2 = \int_{\mathbf{R}} (|\tau \cdot \xi|^2 + 1)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ où $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \exp[ix \cdot \xi] u(x) dx$.

(3.2) entraîne:

$$(3.6) \quad \beta_\tau(u, u) \geq E \cdot \|u\|_{m, \tau}^2 \quad \text{pour tout } u \in H_{(\tau)}^m(\mathbb{R}).$$

Pour $m > \frac{1}{2}$ on a une injection continue: $H_{(\tau)}^m(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$. De plus il existe $c > 0$ telle que:

$$(3.7) \quad |u(x)| \leq c \cdot \tau^{-1/2} \cdot \|u\|_{m, \tau}^{1/2m} \|u\|_0^{1-(1/2m)}$$

pour tout $u \in H^m(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$.

Il résulte du théorème (I.1) et de (3.7) que l'on a:

PROPOSITION (III.4). *Supposons $m > \frac{1}{2}$.*

Soit $T \in \mathcal{L}(H_{(\tau)}^{-m}(\mathbb{R}), H_{(\tau)}^m(\mathbb{R}))$. Alors T admet un noyau $T(x, y)$, continu et borné sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus on a:

$$(3.8) \quad |T(x, y)| \leq \frac{c}{\tau} \|T\|_{H_{(\tau)}^{-m}, H_{(\tau)}^m}^{(1/2m)^2} \cdot \|T\|_{H_{(\tau)}^{-m}, L^2}^{(1/2m)(1-(1/2m))} \cdot \|T\|_{L^2, H_{(\tau)}^m}^{(1/2m)(1-(1/2m))} \cdot \|T\|_{L^1, L^1}^{(1-(1/2m))^2}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ où c est indépendante de T , τ , x et y .

Soit $\mathcal{B}_\tau \in \mathcal{L}(H_{(\tau)}^{-m}, H_{(\tau)}^m)$ l'opérateur engendré par β_τ .

Posons $\mathcal{R}_{\lambda, (\tau)} = (\mathcal{B}_\tau + \lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geq 0$. Il est clair que $\mathcal{R}_{\lambda, (\tau)}$ a un noyau:

$$\mathcal{R}_{\lambda, (\tau)}(x, y) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp[i(x-y) \cdot \xi]}{\sum_{0 \leq j, l \leq m} \alpha_{jl}(\tau \cdot \xi)^{j+l} + \lambda} d\xi.$$

On a les inégalités:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{R}_{\lambda, (\tau)}\|_{H_{(\tau)}^{-m}, H_{(\tau)}^m} &\leq E^{-1} \\ \|\mathcal{R}_{\lambda, (\tau)}\|_{H_{(\tau)}^{-m}, L^2} &\leq E^{-1/2} (E + \lambda)^{-1/2} \\ \|\mathcal{R}_{\lambda, (\tau)}\|_{L^2, H_{(\tau)}^m} &\leq E^{-1/2} (E + \lambda)^{-1/2} \\ \|\mathcal{R}_{\lambda, (\tau)}\|_{L^1, L^1} &\leq (E + \lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Soit alors \mathcal{A}_{t_0} l'opérateur engendré par α_{t_0} . On a:

$$\mathcal{G}_{\lambda, t_0} = (\mathcal{A}_{t_0} + \lambda)^{-1} = t_0^{-2(\sigma + \delta m)} \cdot \mathcal{R}_{\lambda \cdot t_0^{-2(\sigma + \delta m)}, t_0^{1-\delta}}.$$

Par suite $\mathcal{G}_{\lambda, t_0}$ a un noyau explicite:

$$\mathcal{G}_{\lambda, t_0}(x, y) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i(x-y) \cdot \xi] d\xi}{\sum_{0 \leq j, l \leq m} \alpha_{jl} t_0^{2((\sigma + \delta m) + (j+l)(1-\delta))} \xi^{j+l} + \lambda}.$$

Par le changement de variable: $\eta = t_0^{1-\delta} \cdot \xi$ il vient:

$$\mathfrak{G}_{\lambda, t_0}(x, x) = (2\pi)^{-1} \cdot t_0^{\delta-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{t_0^{2(\sigma+\delta m)} \cdot \omega(\eta) + \lambda}.$$

Posons:

$$\mathcal{F}_{\lambda}(t) = (2\pi)^{-1} t^{\delta-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{t^{2(\sigma+\delta m)} \cdot \omega(\xi) + \lambda}.$$

On a alors:

PROPOSITION (III.5). Soit $\alpha = \delta/2(\sigma + \delta m) < 1$. Alors:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-\alpha} \cdot \int_1^{\infty} \mathcal{F}_{\lambda}(t) dt = (2\pi\delta)^{-1} \cdot (\sin \pi\alpha)^{-1} \cdot \pi\alpha \int_{\mathbf{R}} \omega(\xi)^{-\alpha} d\xi.$$

DÉMONSTRATION. Par application du théorème de Fubini à des fonctions positives il vient:

$$\int_1^{\infty} \mathcal{F}_{\lambda}(t) dt = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} d\xi \left(\int_1^{\infty} \frac{t^{\delta-1} dt}{t^{2(\sigma+\delta m)} \cdot \omega(\xi) + \lambda} \right).$$

Posons:

$$f_{\lambda}(\xi) = \int_1^{\infty} \frac{t^{\delta-1}}{t^{2(\sigma+\delta m)} \cdot \omega(\xi) + \lambda} dt.$$

Par des changements de variables évidents on a:

$$f_{\lambda}(\xi) = \lambda^{-1+(\delta/2(\sigma+\delta m))} \cdot \frac{\omega(\xi)^{-\delta/2(\sigma+\delta m)}}{2(\sigma+\delta m)} \int_{\omega(\xi)/\lambda}^{+\infty} \frac{u^{-1+(\delta/2(\sigma+\delta m))}}{1+u} du.$$

Or:

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{-1+\beta}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin \beta\pi} \quad \text{où } 0 < \beta < 1.$$

Comme $\delta/2(\sigma + \delta m) < 1$, f est intégrable sur \mathbf{R} et le théorème de Lebesgue implique la proposition.

Nous allons établir une estimation précise de $\mathfrak{G}_{\lambda,t}(t, t) - \mathfrak{G}_{\lambda}(t, t)$ qui à l'aide de (III.5) donnera (3.5) pour $\delta \geq 1$.

Introduisons les notations suivantes: soit I un intervalle de \mathbf{R} . Posons:

$$\begin{aligned} |u|_{h,I}^2 &= \int_I |D^h u|^2 dt; & \|u\|_{h,I}^2 &= \sum_{k=0}^h |u|_{k,I}^2; \\ |u|_{h,I,\tau}^2 &= \int_I |(\tau D)^h u|^2 dt; & \|u\|_{h,I,\tau}^2 &= \sum_{k=0}^h |u|_{k,I,\tau}^2. \end{aligned}$$

Si $I = \mathbf{R}$ on supprime la lettre \mathbf{R} .

On a l'inégalité d'interpolation:

$$(3.10) \quad |u|_{h,\tau} \leq C \cdot \left[\left(\frac{\rho}{\tau} \right)^{m-h} \cdot |u|_{m,\tau} + \left(\frac{\rho}{\tau} \right)^{-h} \cdot |u|_0 \right]$$

pour $1 \geq \rho \geq 0$, $u \in H_{(\tau)}^m$ et $0 \leq h \leq m$.

Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\text{Supp } \theta \subseteq [-1, 1]$, $\theta \equiv 1$ au voisinage de 0.

Pour $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, posons $\varrho_\varepsilon(t) = \theta((t - t_0)/(\varepsilon \cdot t_0 \cdot \tau))$. On a clairement

$$\text{Supp } \varrho_\varepsilon \subseteq I = \left[\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2} \right].$$

Posons:

$$\zeta(t) = \varrho_{1/2}(t) = \theta\left(\frac{2(t - t_0)}{t_0 \cdot \tau}\right) \quad \text{et} \quad H_{\lambda,\varepsilon} = \varrho_\varepsilon \cdot \mathfrak{G}_\lambda \cdot \zeta - \varrho_\varepsilon \cdot \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} \cdot \zeta.$$

On remarque que $\varrho_\varepsilon \cdot \mathfrak{G}_\lambda \cdot \zeta \in \mathcal{L}(H_{(\tau)}^{-m}, H_{(\tau)}^m)$.

En effet si $g \in H_{(\tau)}^{-m}$ on a $\zeta \cdot g \in V'$ où $V = W_{\sigma,\delta}^m([1, \infty[)$ d'où: $\varrho_\varepsilon \cdot \mathfrak{G}_\lambda \cdot \zeta g \in V \subset H_{(\tau)}^m$ (prolongement par 0 hors de $[1, \infty[$).

Par conséquent $H_{\lambda,\varepsilon}$ a un noyau $H_{\lambda,\varepsilon}(t, \tau)$ que l'on peut estimer à l'aide de (3.8). Pour cela il nous faut majorer les normes: $\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;m,\tau}$, $\|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;0}$

$$(3.11) \quad \|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;m,\tau} = \text{Sup}_{f,g \in L^2} \frac{|\langle g, H_{\lambda,\varepsilon} f \rangle|}{\|g\|_{-m,\tau} \cdot \|f\|_{-m,\tau}}.$$

On a des expressions analogues pour les autres normes de $H_{\lambda,\varepsilon}$.

Il vient facilement:

$$(\mathfrak{G}_\lambda - \mathfrak{G}_{\lambda,t_0}) \zeta f = \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} (\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \mathfrak{G}_\lambda \cdot \zeta f$$

et

$$H_{\lambda,\varepsilon}f = \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} \cdot \varrho_\varepsilon(\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \mathfrak{G}_\lambda \zeta f - [\mathfrak{G}_{\lambda,t_0}, \varrho_\varepsilon](\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \mathfrak{G}_\lambda \cdot \zeta f$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le commutateur de deux opérateurs.

On a donc :

$$\langle g, H_{\lambda,\varepsilon}f \rangle = \Delta_{\lambda,\varepsilon}^1(f, g) + \Delta_{\lambda,\varepsilon}^2(f, g)$$

où :

$$\Delta_{\lambda,\varepsilon}^1(f, g) = \langle g_\varepsilon, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} \varrho_\varepsilon(\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \mathfrak{G}_\lambda \zeta f \rangle$$

et

$$\Delta_{\lambda,\varepsilon}^2(f, g) = \langle g, [\varrho_\varepsilon, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0}](\mathcal{A}_{t_0} - \mathcal{A}) \cdot \mathfrak{G}_\lambda \cdot \zeta f \rangle.$$

Utilisant le caractère hermitien de α et α_{t_0} il vient :

$$\overline{\Delta_{\lambda,\varepsilon}^1(f, g)} = \alpha_{t_0}(\mathfrak{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha(\mathfrak{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda,\varepsilon}^2(f, g) &= \langle g, [\varrho_\varepsilon, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0}](\mathcal{A}_{t_0} + \lambda) \mathfrak{G}_\lambda \zeta f \rangle - \langle g, [\varrho_\varepsilon, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0}](\mathcal{A} + \lambda) \mathfrak{G}_\lambda \zeta f \rangle = \\ &= \text{(I)} - \text{(II)}. \end{aligned}$$

On a : $\text{(I)} = \langle g, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0}[\mathcal{A}_{t_0}, \varrho_\varepsilon] \mathfrak{G}_\lambda \zeta f \rangle$

et $\text{(\bar{I})} = -\alpha_{t_0}(\mathfrak{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g) + \alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_\lambda \zeta f, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g)$

$$\text{(II)} = \langle g, [\varrho_\varepsilon, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0}] \zeta f \rangle$$

$$= \langle g, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0}[\mathcal{A}_{t_0}, \varrho_\varepsilon] \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} \zeta f \rangle$$

d'où $\text{(\bar{II})} = \alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} \zeta f, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha_{t_0}(\mathfrak{G}_{\lambda,t_0} \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g).$

En définitive on a :

$$\begin{aligned} (3.11) \quad \overline{\langle g, H_{\lambda,\varepsilon}f \rangle} &= \alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_\lambda \zeta f, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha_{t_0}(\mathfrak{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g) + \\ &\quad + \alpha_{t_0}(\varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} \zeta f, \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha_{t_0}(\mathfrak{G}_{\lambda,t_0} \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g) + \\ &\quad + \alpha_{t_0}(\mathfrak{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g) - \alpha(\mathfrak{G}_\lambda \zeta f, \varrho_\varepsilon \mathfrak{G}_{\lambda,t_0} g). \end{aligned}$$

L'estimation de $\langle g, H_{\lambda,\varepsilon}f \rangle$ va résulter des lemmes suivants :

LEMME (III.6). *Posons $J = [t_0/2, \infty[$. On a :*

$$(i) \quad \|\mathfrak{G}_\lambda \zeta f\|_{m,J;\tau} \leq ct_0^{-2(\sigma+\delta m)} \|f\|_{-m,\tau}$$

$$(ii) \quad \|\mathfrak{G}_\lambda \zeta f\|_{m,J;\tau} \leq ct_0^{-(\sigma+\delta m)} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2} \|f\|_0$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & \|\mathcal{G}_\lambda \zeta f\|_{0,J} \leq c_0^{-(\sigma+\delta m)} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2} \|f\|_{-m,J} \\ \text{(iv)} \quad & \|\mathcal{G}_\lambda \zeta f\|_{0,J} \leq c(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1} \|f\|_0 \end{aligned}$$

pour tout $f \in L^2$ et pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, λ_0 assez grand.

DÉMONSTRATION. Posons $u = \mathcal{G}_\lambda \zeta f$. On a alors :

$$(\mathcal{A} + \lambda)u = \zeta f$$

ou encore : $\alpha(u, v) + \lambda(u, v) = (\zeta f, v)$ pour tout $v \in V$.

La coercivité de α (3.1) entraîne :

$$(3.12) \quad c\|u\|_V^2 + (\lambda - \lambda_0)\|u\|_L^2 \leq |(\zeta f, u)| \quad \text{pour } \lambda \geq \lambda_0.$$

Or on a facilement :

$$|(\zeta f, u)| \leq \gamma \|f\|_{-m,\tau} \|u\|_{m,J;\tau}$$

et

$$\|u\|_{m,J;\tau}^2 \leq \gamma t_0^{-2(\sigma+\delta m)} \|u\|_V^2 \quad \text{avec } \tau = t_0^{1-\delta}.$$

D'où il résulte :

$$(3.13) \quad c t_0^{2(\sigma+\delta m)} \|u\|_{m,J;\tau}^2 + (\lambda - \lambda_0) \|u\|_{0,J}^2 \leq \gamma \|f\|_{-m,\tau} \|u\|_{m,J;\tau}$$

de même on a :

$$(3.14) \quad c t_0^{2(\sigma+\delta m)} \|u\|_{m,J;\tau}^2 + (\lambda - \lambda_0) \|u\|_{0,J}^2 \leq \gamma' \|f\|_0 \cdot \|u\|_0.$$

(3.13) entraîne (i).

De (3.14) on tire :

$$[c t_0^{2(\sigma+\delta m)} + (\lambda - \lambda_0)] \|u\|_{0,J} \leq \gamma' \|f\|_0$$

d'où (iv) et

$$c t_0^{2(\sigma+\delta m)} \cdot \|u\|_{m,J;\tau}^2 \leq \gamma' \cdot \|f\|_0 \cdot \|u\|_{0,J} \leq \gamma' [c t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda - \lambda_0]^{-1} \|f\|_0^2$$

d'où (ii).

On a de même (iii) à partir de (3.13).

LEMME (III.7). Posons :

$$\Delta_\varepsilon^{(j,l)}(u, v) = \int_{\mathbf{R}} \tau^{j+l} D^j u \overline{D^l(\varrho_\varepsilon v)} dt - \int_{\mathbf{R}} \varrho_\varepsilon \tau^{j+l} D^j u \overline{D^l v} dt.$$

Il existe $C > 0$ telle que :

$$(3.15) \quad |\Delta_{\varepsilon}^{(j,l)}(u, v)| \leq C \varepsilon^{-m} t_0^{-1+(\sigma+\delta m)/m} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2m} \cdot \|u\|_{m,I;\tau} \left[|v|_{m,\tau} + \frac{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}} |v|_0 \right]$$

pour tout $u, v \in W_{\sigma,\delta}^m[1, \infty[$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq j, l \leq m$, $\lambda > 0$, $t_0 \geq 2$.

DÉMONSTRATION. Par Leibnitz et compte tenu de la définition de $\Delta_{\varepsilon}^{(j,l)}$ il vient :

$$|\Delta_{\varepsilon}^{(j,l)}(u, v)| \leq C |u|_{j,I;\tau} \sum_{h=0}^{l-1} (\varepsilon t_0)^{h-l} |v|_{h,\tau}.$$

Appliquons (3.10) à v avec $\varrho = \tau \cdot t_0^{(\sigma+\delta m)/m} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2m}$.

On a en particulier $\varrho \leq \tau$ d'où il résulte :

$$(3.16) \quad |v|_{h,\tau} \leq C \cdot t_0^{(\sigma+\delta m)/m} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2m} \cdot \left[|v|_{m,\tau} + \frac{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}} |v|_0 \right]$$

pour tout $0 \leq h \leq m-1$.

(3.15) est alors une conséquence de (3.16) sachant que $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ et $t_0 \geq 2$.

LEMME (III.8). Il existe $C > 0$ telle que

$$(3.17) \quad |\alpha_{\varepsilon}(u, \varrho_{\varepsilon} v) - \alpha(u, \varrho_{\varepsilon} v)| \leq C \cdot \varepsilon \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)} \|u\|_{m,J;\tau} \cdot \left[1 + \frac{\varepsilon^{-m} t_0^{((\sigma+\delta m)/m)-1}}{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2m}} \right] \left[|v|_{m,\tau} + \frac{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}} |v|_0 \right]$$

pour tout $u, v \in W_{\sigma,\delta}^m([1, \infty[)$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $\lambda \geq 0$, $t_0 \geq 2$.

DÉMONSTRATION. $\alpha_{\varepsilon}(u, \varrho_{\varepsilon} v) - \alpha(u, \varrho_{\varepsilon} v)$ est une combinaison linéaire de termes du type :

$$D_{\varepsilon}^{(j,l)}(u, v) = \int t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l \varrho_{\varepsilon} v} dt - \int t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l \varrho_{\varepsilon} v} dt.$$

Or $\text{Supp } \varrho_{\varepsilon} \subseteq I$ et il existe $C > 0$ indépendante de t et $t_0 \geq 2$ telle que :

$$|t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} - t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}| \leq C |t - t_0| t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)-1}$$

pour tout $t \in I$.

Or sur $\text{Supp } \varrho_\varepsilon$ on a: $|t - t_0| \leq \varepsilon \cdot t_0 \cdot \tau$ d'où

$$|t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} - t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}| \leq C \cdot \varepsilon \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)}$$

pour tout $t \in \text{Supp } \varrho_\varepsilon$.

Par Leibnitz, comme dans la démonstration de (3.15) on à:

$$(3.18) \quad |D_\varepsilon^{(j,l)}(u, v)| \leq C \cdot \varepsilon \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)} \|u\|_{m,J;\tau} \left(\sum_{h=0}^l (\varepsilon t_0)^{h-l} |v|_{\tau,h} \right).$$

Pour $0 \leq h \leq l-1$ on majore $|v|_{\tau,h}$ par (3.16) et $|v|_{\tau,l} \leq C(|v|_{m,\tau} + |v|_0)$ ((3.10) avec $\varrho = \tau$).

On obtient alors facilement (3.17) à partir de (3.18).

LEMME (III.9). *Il existe $C > 0$ telle que:*

$$(3.19) \quad |\alpha_{t_\varepsilon}(\varrho_\varepsilon u, v) - \alpha_{t_0}(u, \varrho_\varepsilon v)| \leq C t_0^{2(\sigma+\delta m)} \cdot \varepsilon^{-m} \frac{t_0^{-1} + ((\sigma+\delta m)/m)}{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2m}} \cdot \left[|u|_{m,\tau} + \frac{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}} |u|_0 \right] \left[|v|_{m,\tau} + \frac{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2}}{t_0^{\sigma+\delta m}} |v|_0 \right]$$

pour tout $u, v \in W_{\sigma,\delta}^m([1, \infty[)$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $\lambda \geq 0$, $t_0 \geq 2$.

DÉMONSTRATION. On procède comme dans (III.7): on combine Leibnitz avec (3.16) appliqué à u et à v .

REMARQUE. Dans le second membre de (3.19) on peut remplacer $|u|_{m,\tau}$ et $|u|_0$ respectivement par $|u|_{m,J;\tau}$ et $|u|_{0,J}$ où $J = [t_0/2, \infty[$.

Les quatre lemmes qui précèdent permettent d'estimer les différentes normes de $H_{\lambda,\varepsilon}$.

LEMME (III.10). *Il existe $C > 0$ telle que:*

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;\tau} &\leq C t_0^{-2(\sigma+\delta m)} \left[\varepsilon + \varepsilon^{-m} \frac{t_0^{-1} + ((\sigma+\delta m)/m)}{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2m}} \right], \\ \|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{-m,\tau;L^1} &\leq C t_0^{-(\sigma+\delta m)} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2} [\dots], \\ \|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{L^1;m,\tau} &\leq C t_0^{-(\sigma+\delta m)} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2} [\dots], \\ \|H_{\lambda,\varepsilon}\|_{L^1,L^1} &\leq C (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1} [\dots], \end{aligned}$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $t_0 \geq 2$, $\lambda \geq \lambda_0$, λ_0 assez grand.

DÉMONSTRATION. De (3.9) on tire les inégalités :

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_{\lambda, t_0}\|_{-m, \tau; m, \tau} &\leq E^{-1} t_0^{-2(\sigma+\delta m)} \\ \|\mathfrak{G}_{\lambda, t_0}\|_{-m, \tau; L^1} &\leq E^{-1/2} \cdot t_0^{-(\sigma+\delta m)} (E \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2} \\ \|\mathfrak{G}_{\lambda, t_0}\|_{L^1; m, \tau} &\leq E^{-1/2} \cdot t_0^{-(\sigma+\delta m)} (E \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1/2} \\ \|\mathfrak{G}_{\lambda, t_0}\|_{L^1; L^1} &\leq (E \cdot t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

D'après (3.11) on a :

$$\overline{\langle g, H_{\lambda, \varepsilon} f \rangle} = \Delta_\varepsilon^{(1)}(f, g) + \Delta_\varepsilon^{(2)}(f, g) + \Delta_\varepsilon^{(3)}(f, g).$$

$\Delta_\varepsilon^{(1)}$ et $\Delta_\varepsilon^{(2)}$ se majorent à l'aide du lemme (III.6), de (3.21) et du lemme (III.9). On majore $\Delta_\varepsilon^{(3)}$ à l'aide de (3.17).

PROPOSITION (III.11). $H_{\lambda, \varepsilon}$ est un opérateur intégral de noyau $H_{\lambda, \varepsilon}(x, y)$ vérifiant :

$$(3.22) \quad |H_{\lambda, \varepsilon}(x, y)| \leq C t_0^{\delta-1-(\sigma+\delta m)/m} (t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1+(1/2m)} \cdot \left[\varepsilon + \varepsilon^{-m} \frac{t_0^{-1+(\sigma+\delta m)/m}}{(t_0^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2m}} \right]$$

pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $t_0 \geq 2$, $\lambda \geq \lambda_0$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de (3.8) et (3.20).

PROPOSITION (III.12). En plus des hypothèses du théorème (III.3), supposons $\delta \geq 1$. On a alors :

$$(3.5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_1^{+\infty} \mathfrak{G}_\lambda(t, t) dt = (\pi\alpha)(2\pi\delta)^{-1} (\sin \pi\alpha)^{-1} \int_{\mathbf{R}} \omega(\xi)^{-\alpha} d\xi.$$

DÉMONSTRATION. On a évidemment :

$$H_{\lambda, \varepsilon}(t_0, t_0) = \mathfrak{G}_\lambda(t_0, t_0) - \mathfrak{G}_{\lambda, t_0}(t_0, t_0)$$

d'où :

$$H_{\lambda, \varepsilon}(t_0, t_0) = \mathfrak{G}_\lambda(t_0, t_0) - \mathcal{F}_\lambda(t_0)$$

pour tout $t_0 \geq 2$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $\lambda \geq \lambda_0$.

Utilisons (3.22). Remarquons d'abord que l'on a :

$$(3.23) \quad \int_2^{\infty} t^{\delta-1-(\sigma+\delta m)/m} (t^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1+(1/2m)} dt \leq C \cdot \lambda^{\alpha-1}$$

$$(3.24) \quad \int_2^{\infty} t^{\delta-2} (t^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1} dt \leq \lambda^{-\theta} \int_2^{\infty} t^{\delta-2+(\theta-1)(\sigma+\delta m)} dt$$

pour tout $\theta \in [0, 1[$ vérifiant $0 < \theta < 1 - \alpha + 1/2(\sigma + \delta m)$.

Comme $\alpha \in [0, 1[$ on peut choisir $\theta = 1 - \alpha + \eta$, $\eta > 0$ assez petit. On obtient alors :

$$(3.25) \quad \int_2^{\infty} t^{\delta-2} (t^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1} dt \leq C \lambda^{\alpha-1-\eta}$$

(3.23) et (3.25) donnent :

$$(3.26) \quad \lambda^{1-\alpha} \left| \int_2^{\infty} (\mathfrak{G}_{\lambda}(t, t) - \mathfrak{G}_{\lambda,t}(t, t)) dt \right| \leq C[\varepsilon + \varepsilon^{-m} \lambda^{-\eta}].$$

Par le théorème du noyau dans les espaces de Sobolev usuels on a :

$$\begin{aligned} \lambda^{1-\alpha} \left| \int_1^2 [\mathfrak{G}_{\lambda}(t, t) - \mathfrak{G}_{\lambda,t}(t, t)] dt \right| &\leq C \cdot \lambda^{(1/2m)-\alpha} \\ &\leq C \cdot \lambda^{\sigma/2m(\sigma+\delta m)} \end{aligned}$$

d'où

$$(3.27) \quad \lambda^{1-\alpha} \left| \int_1^{\infty} [\mathfrak{G}_{\lambda}(t, t) - \mathfrak{G}_{\lambda,t}(t, t)] dt \right| \leq C[\varepsilon + \varepsilon^{-m} \lambda^{-\eta} + \lambda^{\sigma/2m(\sigma+\delta m)}].$$

On obtient alors (3.5) en faisant tendre λ vers l'infini puis ε vers 0, compte tenu de la proposition (III.5).

(III.B): $\delta \in]0, 1[$. Posons :

$$L(t, D)_i = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \alpha_{ji} \cdot D_i [t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} \cdot D_i^j]$$

$$L_0(t, D_i) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \alpha_{ji} \cdot t^{2(\sigma+\delta m)+(j+l)(1-\delta)} \cdot D_i^{j+l}$$

(partie principale de L à l'infini) et

$$L_1(t, D_i) = L(t, D_i) - L_0(t, D_i).$$

D'après (3.2) on a :

$$(3.28) \quad L_0(t, \xi) \geq E \cdot t^{2(\sigma + \delta m)} \cdot (1 + (t^{1-\delta} \xi)^2)^m$$

pour tout $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$.

Posons :

$$\phi(t, \xi) = \begin{cases} (1 + |\xi|^2)^{1/2} & \text{pour } |\xi| \geq 1, t \geq 1 \\ t^{\delta-1} & \text{pour } |\xi| \leq 1, t \geq 1 \end{cases}$$

et $\varphi(t, \xi) = 1 + t$ pour $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$.

On vérifie facilement que l'on a :

$$(3.29) \quad \phi \cdot \varphi \geq (1/3)(1 + t^\delta + |\xi|) \quad \text{pour tout } (t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}.$$

L'intérêt des fonctions ϕ et φ réside dans le :

LEMME (III.13). *Pour tout couple d'entiers $p, q \geq 1$, il existe $C_{p,q} > 0$ telle que*

$$(3.30) \quad |\partial_\xi^p D_t^q L_0| \leq C_{p,q} \cdot L_0 \cdot \phi^{-p} \cdot \varphi^{-q}$$

$$(3.31) \quad |\partial_\xi^p D_t^q L_1| \leq C_{p,q} \cdot L_0 \cdot \phi^{-p-1} \varphi^{-q-1}$$

uniformément pour $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION. $\partial_\xi^p \cdot D_t^q L_0$ est une combinaison linéaire de termes du type : $\xi^{j+l-p} \cdot t^{2(\sigma + \delta m) + (j+l)(1-\delta) - q}$.

Pour $|\xi| \leq 1, t \geq 1$ on a :

$$|\xi^{j+l-p} \cdot t^{(j+l)(1-\delta) - q}| \leq 2^{-q} t^{p(1-\delta)} (1 + t)^{-q}$$

d'où pour $|\xi| \leq 1$ et $t \geq 1$ on a, compte tenu de (3.28) :

$$|\partial_\xi^p D_t^q L_0| \leq C \cdot L_0 \cdot \phi^{-p} \cdot \varphi^{-q}.$$

Pour $|\xi| \geq 1$ et $t \geq 1$ on a :

$$|\xi^{j+l-p} \cdot t^{(j+l)(1-\delta) - q}| \leq 2^{-q} \cdot (1 + t)^{-q} \cdot (t^{1-\delta} \cdot \xi)^{2m} \cdot |\xi|^{-p}$$

d'où l'on déduit (3.30).

(3.31) s'établit de la même manière.

(3.30) et (3.31) vont nous permettre de construire une paramétrix à droite pour $L(t, D_t) + \lambda$ au voisinage de l'infini et d'obtenir des estimations sur le symbole en fonction de λ . Nous avons déjà fait ce type de calcul dans [9] et [10].

Définissons la suite de symboles suivants:

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{0,\lambda}(t, \xi) = (L_0(t, \xi) + \lambda)^{-1} \\ \text{et par récurrence sur } j \in \mathbf{N}: \\ b_{j+1,\lambda}(t, \xi) = -b_{0,\lambda}(t, \xi) \sum_{\substack{i+\alpha=j-k+1 \\ 0 \leq k \leq j \\ i=0,1}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha L_i \cdot D_t^\alpha b_{k,\lambda} \end{array} \right.$$

où $(t, \xi) \in [1, \infty] \times \mathbf{R}$, $\lambda \geq 0$.

Posons:

$$B_{N,\lambda} = \sum_{k=0}^N b_{k,\lambda} \quad \text{et} \quad R_{N,\lambda} = (L(t, D_t) + \lambda) \cdot B_{N,\lambda} - I.$$

Un calcul simple prouve que le symbole de $R_{N,\lambda}$ est donné par:

$$(3.33) \quad R_{N,\lambda}(t, \xi) = \sum_{\substack{\gamma+k \geq N+1 \\ k \leq N}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\gamma L_0(t, \xi) D_t^\gamma b_{k,\lambda} + \sum_{\substack{\gamma+k \geq N \\ k \leq N}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\gamma L_1(t, \xi) \cdot D_t^\gamma b_{k,\lambda}.$$

Le lemme suivant se démontre comme dans [10] lemme (4.1) à partir de (3.30), (3.31) et (3.32):

LEMME (III.14). *Pour tout entiers $p, q, N \geq 0$, il existe $C(N, p, q) > 0$ telle que:*

$$(3.34) \quad |\partial_\xi^p D_t^q b_{N,\lambda}| \leq C(N, p, q) |b_{0,\lambda}| \sum_{i=1}^{2N+p+q} |L_0 \cdot b_{0,\lambda}|^i (\phi \cdot \varphi)^{-N} \phi^{-p} \varphi^{-q}$$

pour tout $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}$, $\lambda \geq 0$.

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\text{Supp } \chi \subseteq [1, \infty[$ et $\chi \equiv 1$ sur $[2, \infty[$. On a alors:

$$(3.35) \quad (L(t, D_t) + \lambda)(\chi \cdot B_{N,\lambda}) = \chi + \chi \cdot R_{N,\lambda} + [L(t, D_t), \chi] B_{N,\lambda}.$$

LEMME (III.15). *Si $f \in C_0^\infty([1, \infty[)$ alors $(\chi \cdot B_{N,\lambda})f \in D(\mathcal{A})$ où $D(\mathcal{A})$ est le domaine de \mathcal{A} considéré comme opérateur non borné de $L^2([0, \infty[)$ dans lui-même.*

DÉMONSTRATION. On a :

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in W_{\sigma,\delta}^m([1, \infty[) : v \rightarrow \alpha(u, v) \text{ est } L^2\text{-continue}\}.$$

Il suffit de prouver que $(\chi_{B_{N,\lambda}})f$ est C_-^∞ sur $[1, \infty[$ et à décroissance rapide au voisinage de l'infini.

On a :

$$B_{N,\lambda}f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} \exp[it\xi] \cdot B_{N,\lambda}(t, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

d'où il résulte que $B_{N,\lambda}f$ est C^∞ .

D'autre part, pour $p, q \geq 1, t \geq 1, t^p \cdot D_t^q B_{N,\lambda}f(t)$ est une combinaison linéaire d'intégrales du type :

$$\int_{\mathbf{R}} \exp[it\xi] \cdot \xi^h \cdot \partial_\xi^k \cdot D_t^l(B_{N,\lambda}) \cdot \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Or (3.28) et (3.24) entraînent :

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^k D_t^l B_{N,\lambda}| &\leq C \cdot L_0^{-1} \phi^{-k} \cdot \varphi^{-l} \\ &\leq C \cdot E^{-1} \cdot t^{-2(\sigma+\delta m)} (1 + (t^{1-\delta} \cdot \lambda)^2)^{-m} \end{aligned}$$

d'où :

$$t^p \cdot D_t^q \cdot B_{N,\lambda}f(t) = O(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

\mathcal{A} étant une réalisation de $L(t, D_t)$ et $\mathfrak{G}_\lambda = (\mathcal{A} + \lambda)^{-1}$, λ réel ≥ 0 , on a alors, d'après (3.35) et le lemme (III.15) :

$$(3.36) \quad \chi \cdot B_{N,\lambda}f = \mathfrak{G}_\lambda \cdot \chi \cdot f + \mathfrak{G}_\lambda \cdot \chi \cdot R_{N,\lambda} \cdot f + \mathfrak{G}_\lambda \cdot [L, \chi] \cdot B_{N,\lambda} \cdot f$$

pour tout $f \in C_0^\infty([1, \infty[)$.

Le symbole: $[L, \chi] \cdot b_{k,\lambda}$ est de la forme :

$$[L, \chi] \cdot b_{k,\lambda} = \sum_{p,q \leq 2m-1} \psi_{p,q} \cdot D_t^{p+q} t_{k,\lambda}$$

où $\psi_{p,q} \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\text{Supp } \psi_{p,q} \subset [1, 2]$.

Soit $\delta_{k,\lambda}$ le noyau-distribution défini par le symbole $\psi_{k,\lambda} D_t^{p+q} b_{k,\lambda}$:

$$(3.37) \quad \delta_{k,\lambda}(\tau, t) = (2\pi)^{-1} \cdot \psi_{p,q}(\tau) \int_{\mathbf{R}} \exp[i(\tau - t) \cdot \xi] \cdot D_\tau^{p+q} b_{k,\lambda}(\tau, \xi) d\xi$$

on a alors :

LEMME (III.16). *Il existe C , $\lambda_0 > 0$ telles que :*

$$(3.38) \quad |\delta_{k,\lambda}(\tau, t)| \leq \frac{C}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{(\tau - t)^2}$$

pour $1 \leq \tau \leq 2$, $\lambda \geq \lambda_0$ et $t \geq 3$.

DÉMONSTRATION. Par intégration par parties on a :

$$(3.39) \quad (\tau - t)^h \delta_{k,\lambda}(\tau, t) = (2\pi)^{-1} \psi_{p,q}(\tau) \int_{\mathbf{R}} \exp[i(\tau - t)\xi] D_{\tau}^{p+q} \partial_{\xi}^h b_{k,\lambda}(\tau, \xi) d\xi.$$

D'après (3.34) on a :

$$|D_{\tau}^{p+q} \partial_{\xi}^h b_{k,\lambda}| \leq C(L_0 + \lambda)^{-2} \cdot I_0(\phi \cdot \varphi)^{-k} \phi^{-h} \cdot \varphi^{-p-q}.$$

Comme $1 \leq \tau \leq 2$ il vient :

$$|D_{\tau}^{p+q} \partial_{\xi}^h b_{k,\lambda}| \leq C\lambda^{-2}(1 + \xi^2)^{m-(h/2)}.$$

On obtient donc (3.38) à partir de (3.39) en choisissant h assez grand.

Désignons par $\varrho_{N,\lambda}(t, \tau)$ le noyau-distribution associé à $R_{N,\lambda}$. On a l'estimation suivante :

LEMME (III.17). *Pour tous entiers $p \geq 0$ et $N \geq 2m + 1$ il existe $C(p, N) > 0$ telle que*

$$(3.40) \quad |\varrho_{N,\lambda}(t, \tau)| \leq C(p, N) \cdot \lambda^{-1} \cdot [1 + (t - \tau)^2]^{-p} \cdot t^{2(\sigma+m+\delta m)-N\delta}$$

pour tout $\lambda \geq 1$, τ et $t \geq 1$.

DÉMONSTRATION. Par intégration par parties il vient :

$$(3.41) \quad \varrho_{N,\lambda}(t, \tau) = (2\pi)^{-1} [1 + (t - \tau)^2]^{-p} \int_{\mathbf{R}} \exp[i(t - \tau)\xi] \cdot \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right)^p R_{N,\lambda}(t, \xi) d\xi.$$

Or d'après (3.33) et (3.34) on a :

$$\left| \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right)^p R_{N,\lambda}(t, \xi) \right| \leq C''(p, N) L_0(t, \xi) \cdot \lambda^{-1} \cdot (\phi \cdot \varphi)^{-N-1}.$$

D'autre part :

$$L_0(t, \xi) \leq C \cdot t^{2(\sigma+\delta m)} (t^{1-\delta} \cdot \lambda)^{2m} \quad \text{et} \quad (\phi \varphi)^{-N-1} \leq C \cdot (1 + t^{\delta} + |\xi|)^{-N-1}$$

d'où

$$(3.42) \quad \left| \left(1 - \frac{d^2}{d\xi^2} \right)^p R_{N,\lambda}(t, \xi) \right| \leq \\ \leq C'(p, N) \lambda^{-1} \cdot t^{2(\sigma+\delta m)} \cdot (t^{1-\delta} \cdot \lambda)^{2m} \cdot (1 + t^\delta + |\xi|)^{-N-1}$$

pour tout $t \geq 1$, $\lambda \geq 1$, $\xi \in \mathbf{R}$.

(3.41) et (3.42) entraînent facilement (3.40).

Pour estimer le membre de gauche on a besoin du:

LEMME (III.18). *Pour tout entier $k \geq 1$ il existe $C(k) > 0$ telle que:*

$$(3.43) \quad \int_1^\infty \int_{\mathbf{R}} |b_{k,\lambda}(t, \xi)| d\xi \leq C(k) \cdot \lambda^{-1/2m} \int_1^\infty \int_{\mathbf{R}} b_{0,\lambda}(t, \xi) d\xi dt$$

pour tout $\lambda \geq 1$.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord qu'il existe $C > 0$ telle que:

$$(3.44) \quad L_0^{1/2m} \leq C \cdot \phi \cdot \varphi \quad \text{uniformément sur } [1, \infty[\times \mathbf{R}.$$

Il résulte de (3.34) qu'il existe $C > 0$ telle que:

$$|b_{k,\lambda}| \leq C |b_{0,\lambda}|^2 L_0^{1-(1/2m)}.$$

Or:

$$|b_{0,\lambda}| \leq L_0^{-\theta} \cdot \lambda^{-1+\theta} \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 1].$$

Donc $\theta = 1 - 1/2m$ donne:

$$|b_{k,\lambda}| \leq C(k) \cdot b_{0,\lambda} \cdot \lambda^{-1/2m}$$

d'où (3.43).

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de (3.5).

Fin de la démonstration de (3.5) lorsque $\delta \in]0, 1[$: En plus des lemmes précédents nous utilisons l'inégalité déjà citée:

$$(3.3) \quad |\mathcal{G}_\lambda(t, \tau)| \leq C(t \cdot \tau)^{-(\sigma+m)/m} \cdot \lambda^{-1+(1/2m)}.$$

D'après (3.38) et (3.3) on a:

$$(3.45) \quad \sum_{k=0}^N \int_3^\infty dt \int_1^2 |\mathcal{G}_\lambda(t, \tau) \delta_{k,\lambda}(\tau, t)| d\tau \leq C \cdot \lambda^{-2} \int_3^\infty \int_1^2 |G_\lambda(t, \tau)| (t-\tau)^{-2} d\tau dt \leq \\ \leq C' \cdot \lambda^{-3+(1/2m)} \int_3^\infty (t-2)^{-2} \cdot t^{-(\sigma+m)/m} dt \leq C'' \cdot \lambda^{-3+(1/2m)}.$$

Posons d'autre part:

$$\Delta_{N,\lambda}(t, t) = \int_1^\infty \mathfrak{G}_\lambda(t, \tau) \chi(\tau) \varrho_{N,\lambda}(\tau, t) d\tau.$$

(3.3) et (3.40) donnent:

$$|\Delta_{N,\lambda}(t, t)| \leq C \cdot \lambda^{-2+(1/2m)} \int_1^\infty \tau^{\beta-N\delta} \cdot [1 + (t - \tau)^2]^{-p} d\tau$$

où l'on a posé: $\beta = 2(\sigma + m + \delta m)$.

Or d'après l'inégalité de Peetre on a:

$$\int_1^\infty [1 + (t - \tau)^2]^{-p} \tau^{\beta-N\delta} d\tau \leq C(1 + t^2)^{-p} \int_1^\infty \tau^{\beta-N\delta} (1 + \tau^2)^p d\tau.$$

Choisissons $p = 1$ et N assez grand, il vient:

$$(3.46) \quad \int_1^\infty |\Delta_{N,\lambda}(t, t)| dt \leq C \cdot \lambda^{-2+(1/2m)}.$$

D'après la proposition (III.5) on a:

$$(3.47) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}} b_{0,\lambda}(t, \xi) dt d\xi = (2\pi\delta \sin \pi\alpha)^{-1} \pi\alpha \int_{\mathbb{R}} \omega(\xi)^{-\alpha} d\xi.$$

D'autre part: $1 - \alpha - 2 - (1/2m) = -\alpha - 1 + (1/2m) < 0$.

Par conséquent on obtient (3.5) à partir de (3.36), (3.45), (3.46), (3.43) et (3.47).

REMARQUES (III.19): (1) La méthode de (III.B) s'appliquerait également au cas $\delta \geq 1$ en prenant: $\phi(t, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ et $\varphi(t, \xi) = 1 + t$ pour $(t, \xi) \in [1, \infty[\times \mathbb{R}$.

(2) Le calcul de paramétrix fait dans (III.B) permettrait d'obtenir des formules asymptotiques avec reste pour $\text{Trace } \mathfrak{G}_\lambda$ et pour $N(\lambda)$. On pourrait également étudier le prolongement holomorphe de la fonction d'Epstein ζ_A associée à $(\zeta_A(s) = \sum_{j=0} \lambda_j^{-s})$. Ceci sera détaillé ailleurs.

IV. — Comportement de $\text{Tr}(A^p + \lambda)^{-1}$.

Dans tout ce paragraphe p désigne un entier tel que $p > \alpha$ où $\alpha = \delta/2(\sigma + \delta m)$.

Posons $G_\lambda^{(p)} = (A^p + \lambda)^{-1}$. On a $G_\lambda^{(p)} \in \mathcal{L}(W_{\sigma,\delta}^{-m}, W_{\sigma,\delta}^m)$ donc $G_\lambda^{(p)}$ a un noyau continu sur $]0, \infty[\times]0, \infty[$. De plus $t \rightarrow G_\lambda^{(p)}(t, t)$ est localement intégrable sur $]0, \infty[$ (1.7).

LEMME (IV.1). *Sous les hypothèses du théorème (II.2) on a :*

$$(4.1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-(\alpha/p)} \int_0^T G_\lambda^{(p)}(t, t) dt = 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ un système orthonormal de vecteurs propres de A associé à la suite des valeurs propres $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Un argument classique utilisé dans la démonstration du théorème de Mercer montre que :

$$\sum_{j \geq 0} \frac{|\varphi_j(t)|^2}{\lambda_j^p + \lambda} \leq G_\lambda^{(p)}(t, t) \quad \text{pour tout } t \in]0, \infty[$$

d'où l'on déduit que pour tout $\varepsilon \in]0, T[$, la série $\sum_{j \geq 0} |\varphi_j(t)|^2 / (\lambda_j^p + \lambda)$ converge uniformément vers $G_\lambda^{(p)}(t, t)$ sur $[\varepsilon, T]$.

En faisant tendre ε vers 0 il vient alors :

$$(4.2) \quad \int_0^T G_\lambda^{(p)}(t, t) dt = \sum_{j \geq 0} \int_0^T \frac{|\varphi_j(t)|^2}{\lambda_j^p + \lambda} dt.$$

Posons :

$$M(\tau) = \sum_{\lambda_j \leq \tau} \int_0^T |\varphi_j(t)|^2 dt.$$

On a alors :

$$\int_0^T G_\lambda(t, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau + \lambda}$$

et

$$\int_0^T G_\lambda^{(p)}(t, t) dt = \int_0^\infty \frac{dM(\tau)}{\tau^p + \lambda}.$$

On sait (Lemme (III.1)) que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_0^\infty \frac{dM(\tau)}{\tau + \lambda} = 0$$

d'où l'on déduit:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^{-\alpha} \cdot M(\tau) = 0 \quad (\text{Agmon [1]}) .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\tau(\varepsilon) > 0$ assez grand on a:

$$(4.4) \quad M(\tau) \leq \varepsilon \cdot \tau^\alpha \quad \text{pour } \tau \geq \tau(\varepsilon)$$

d'où:

$$\int_{\tau(\varepsilon)}^{\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau^p + \lambda} = p \int_{\tau(\varepsilon)}^{\infty} \frac{\tau^{p-1} M(\tau) d\tau}{(\tau^p + \lambda)^2} - \left[\frac{M(\tau)}{\tau^p + \lambda} \right]_{\tau(\varepsilon)}^{\infty} .$$

Utilisant (4.4) il vient alors:

$$\int_{\tau(\varepsilon)}^{\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau^p + \lambda} \leq C \cdot \varepsilon \cdot \lambda^{-1+(\alpha/p)}$$

et

$$(4.5) \quad \lambda^{1-(\alpha/p)} \int_0^{\infty} \frac{dM(\tau)}{\tau^p + \lambda} \leq \lambda^{1-(\alpha/p)} \int_0^{\tau(\varepsilon)} \frac{dM(\tau)}{\tau^p + \lambda} + C .$$

Dans (4.5) faisant $\lambda \rightarrow +\infty$ puis $\varepsilon \rightarrow 0$ on en déduit (4.1).

PROPOSITION (IV.2). On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $a_{il}(t)$ est constant sur $[T, \infty[$ pour $0 \leq j, l \leq m$. On a alors:

$$(4.6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{1-(\alpha/p)} \int_0^{\infty} G_{\lambda}^{(p)}(t, t) dt = (2\pi\delta)^{-1} \left(\sin \left(\frac{\pi\alpha}{p} \right) \right)^{-1} \left(\frac{\pi\alpha}{p} \right) \int_{\mathbf{R}} \omega_{\infty}(\xi)^{-\alpha} d\xi .$$

DÉMONSTRATION. D'après (4.1) il suffit de calculer $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{1-(\alpha/p)} \left(\int_{T'}^{\infty} G_{\lambda}^{(p)}(t, t) dt \right)$ pour $T' > T$, T' assez grand.

Pour faire ce calcul on adapte la construction de paramétrix faite dans (III.B) à l'opérateur $L^p + \lambda$ sur $]T, \infty[$. On distingue les cas $0 < \delta < 1$ et $\delta \geq 1$ pour la définition de ϕ et φ . Il est facile de voir que l'on peut prendre $(L_0(t, \xi))^p$ comme symbole principal de L .

On prouve comme dans (III.B) que le terme principal de $\int_{T'}^{\infty} G_{\lambda}^{(p)}(t, t) dt$ pour $\lambda \rightarrow +\infty$ est donné par:

$$(2\pi)^{-1} \int_{T'}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{dt d\xi}{L_0^p(t, \xi) + \lambda} .$$

Un calcul analogue à celui fait dans la proposition (III.5) donne:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-(\alpha/p)} (2\pi)^{-1} \int_{T'} \int_{\mathbf{R}} \frac{dt d\xi}{L_0^p(t, \xi) + \lambda} = (2\pi\delta)^{-1} \left(\sin \left(\frac{\pi\alpha}{p} \right) \right)^{-1} \left(\frac{\pi\alpha}{p} \right) \int_{\mathbf{R}} \omega_{\infty}(\xi)^{-\alpha} d\xi.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a prouvé (2.1) et (2.2) pour des opérateurs à coefficients constants à l'infini. (2.2) résulte de (4.6) par application du théorème de Hardy-Littlewood [1].

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de (2.1) et (2.2) dans le cas général.

Fin de la démonstration de (2.1) et (2.2): Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.

Posons:

$$a_{j,i}^{(\varepsilon)}(t) = \begin{cases} a_{j,i}(\infty) & \text{pour } t \geq T(\varepsilon) \\ a_{j,i}(t) & \text{pour } 0 \leq t < T(\varepsilon) \end{cases}$$

où $T(\varepsilon) > 0$ tel que: $|a_{j,i}(t) - a_{j,i}(\infty)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq T(\varepsilon)$.

Posons alors:

$$a_{\varepsilon}(u, v) = \sum_{0 \leq j, l \leq m} \int_0^{\infty} a_{j,l}^{(\varepsilon)} t^{2(\sigma+m\delta) + (j+l)(1-\delta)} D^j u \overline{D^l v} dt$$

pour $u, v \in W_{\sigma,\delta}^m$, on a clairement:

$$|a(u, v) - a_{\varepsilon}(u, v)| \leq \varepsilon \cdot \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^m} \cdot \|v\|_{W_{\sigma,\delta}^m}$$

d'où il résulte que pour ε assez petit, a_{ε} est $W_{\sigma,\delta}^m$ -coercive et que l'on a:

$$(4.7) \quad |a(u, u) - a_{\varepsilon}(u, u)| \leq C \cdot \varepsilon \cdot a_{\varepsilon}(u, u) + \lambda'_0 \cdot \|u\|_L^2,$$

pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^m$.

Soit $(\lambda_j^{(\varepsilon)})_{j \in \mathbf{N}}$ la suite des valeurs propres relative à a_{ε} (chaque valeur propre étant répétée suivant sa multiplicité). De (4.7) et de la formule du Max-Min (Courant-Hilbert [4]) on déduit

$$(4.8) \quad -\lambda'_0 + (1 - C \cdot \varepsilon) \lambda_j^{(\varepsilon)} \leq \lambda_j \leq (1 + C \cdot \varepsilon) \lambda_j^{(\varepsilon)} + \lambda'_0$$

pour $j \in \mathbf{N}$, ε assez petit.

(4.8) entraîne:

$$(4.9) \quad N_\varepsilon\left(\frac{\lambda}{1+C\cdot\varepsilon}\right) \leq N(\lambda + \lambda'_0),$$

$$(4.10) \quad N(\lambda - \lambda_0) \leq N_\varepsilon\left(\frac{\lambda}{1-C\cdot\varepsilon}\right),$$

pour $\lambda > 0$, $\varepsilon \in]0, 1[$ assez petit.

Posons:

$$\gamma = (2\pi\delta)^{-1} \int_{\mathbf{R}} \omega_\infty^{-\alpha}(\xi) d\xi.$$

On a vu précédemment que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\alpha} N_\varepsilon(\lambda) = \gamma \quad \text{pour tout } \varepsilon \in]0, 1[.$$

(4.9) donne alors:

$$(1 + C\cdot\varepsilon)^{-\alpha} \cdot \gamma \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\alpha} \cdot N(\lambda)$$

et (4.10):

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\alpha} \cdot N(\lambda) \leq (1 - C\cdot\varepsilon)^{-\alpha} \cdot \gamma.$$

Faisons tendre ε vers 0:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\alpha} \cdot N(\lambda) = \gamma.$$

On a donc prouvé (2.2). On en déduit (2.1) dans le cas général, pour $\alpha < 1$ par le théorème réciproque de Hardy-Littlewood [1].

REFERENCES

- [1] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Math. Studies no. 2, Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [2] P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER, *Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques*, J. Math. Pures Appl., **55** (1976), pp. 131-171.
- [3] P. BOLLEY - J. CAMUS - PHAM THE LAI, *Noyau, résolvante et valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés*, à paraître.
- [4] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, vol. I, Interscience Publishers, 1953.
- [5] V. V. GRUSHIN - M. A. SAVSAN, *Smoothness of the solutions of boundary-value problems for a class of elliptic equations of arbitrary order which degenerate on the boundary of the domain*, Vestnik Moskov. Univ. Math., **30** (1975), pp. 33-41.

- [6] B. M. LEVITAN - I. S. SARGSJAN, *Introduction to spectral theory*, Trans. of Math. Monographs **39**, American Mathematical Society, 1975.
- [7] A. MOHAMED, *Régularité et théorie spectrale d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demidroite*, Thèse de Doctorat de 3-ème cycle, Université de Nantes, 1977.
- [8] PHAM THE LAI, *Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés non nécessairement auto-adjoint*, J. Math. Pures Appl., **55** (1976), pp. 379-420.
- [9] PHAM THE LAI, *Théorie spectrale d'une classe d'opérateurs différentiels hypo-elliptiques*, Comm. Partial Differential Equations, **2** (1977), pp. 439-497.
- [10] D. ROBERT, *Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels*, Comm. Partial Differential Equations, **3** (9) (1978), pp. 755-826.