

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SIGERU MIZOHATA

## **Une remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalewski**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série*, tome 5, n° 3 (1978), p. 559-566

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1978\\_4\\_5\\_3\\_559\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_559_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Une remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalewski.

SIGERU MIZOHATA (\*)

*dédié à Jean Leray*

### 1. – Introduction.

Il s'agit du problème de Cauchy. Etant donnée une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine ( $\subset \mathbb{C}^{n+1}$ ):

$$(1.1) \quad \partial_t^m u + \sum_{j=1}^m a_j(x, t; \partial_x) \partial_t^{m-j} u = f(x, t),$$

le théorème de Cauchy-Kowalewski dit que si

$$(1.2) \quad \text{ordre } a_j(x, t; \partial_x) \leq j \quad (1 \leq j \leq m),$$

alors pour toutes les données holomorphes  $\partial_t^j u(x, 0) = u_j(x)$  ( $0 \leq j \leq m-1$ ) et  $f$  au voisinage de l'origine, il existe une solution  $u(x, t)$  holomorphe dans un voisinage de l'origine.

La condition (1.2) serait nécessaire pour garantir l'existence des solutions holomorphes pour toutes les données holomorphes. En effet, l'auteur a montré que la condition

$$(1.3) \quad \text{ordre } a_j(x, 0; \partial_x) \leq j \quad (1 \leq j \leq m)$$

est nécessaire [2] <sup>(1)</sup>.

Cet article a pour but de montrer que si tous les coefficients ne dépendent que de  $t$ , la condition (1.2) est nécessaire. Le problème est tout-à-fait

(\*) Department of Mathematics, Kyoto University.

<sup>(1)</sup> Il y a quelques articles sur ce sujet. Citons parmi eux, [3], [4].

Pervenuto alla Redazione il 27 Giugno 1977.

simple. Mais la méthode est différente de celle de [2] qui ne marche plus dans le cas actuel. Énonçons sous la forme suivante: Soit

$$(1.4) \quad \partial_t^m u + \sum_{j=1}^m a_j(t; \partial_x) \partial_t^{m-j} u = f.$$

**THÉORÈME.** *Pour que le théorème de Cauchy-Kowalewski pour (1.4) avec les données de Cauchy à  $t = 0$  soit valable, il faut et suffit qu'on ait*

$$(1.5) \quad \text{ordre } a_j(t; \partial_x) < j \quad (1 \leq j \leq m).$$

Esquisons la démonstration. On cherche une famille de solutions  $u_\zeta(x, t)$  de (1.4), supposée  $f = 0$ , sous la forme  $e^{\zeta x} u(t; \zeta)$  avec des données de Cauchy  $e^{\zeta x}$  multipliées par des vecteurs convenables  $c(\zeta)$  bornés en  $\zeta$ . Supposé que la condition (1.5) est violée, on montre qu'on peut trouver  $u_\zeta(x, t)$  qui se comporte de façon qu'on ait

$$(1.6) \quad \sum_{j=0}^{m-1} |\partial_t^j u_\zeta(0, t_0)| \geq C \exp(\delta |\zeta|^p) \quad (C, \delta: \text{ constantes positives})$$

où  $p > 1$  et  $t_0$  est une valeur fixée de  $t$ , quand  $\zeta (\in \mathbf{C}^n)$  tend vers à l'infini convenablement. Cette inégalité montre que l'application de l'espace des données de Cauchy  $\in \prod H(\mathbf{C}^n)$  dans l'espace des solutions  $\in H(V)$  n'est pas continue, où  $V$  est un voisinage (complexe) de l'origine, ce qui implique la non-existence de solutions (voir [1]). Or, si l'on pose

$$u_\zeta(x, t) = e^{\zeta x} u(t; \zeta),$$

l'équation (1.4) avec  $f = 0$  se réduit à l'équation différentielle ordinaire contenant le paramètre  $\zeta$ :

$$(1.7) \quad L[u] = u^{(m)}(t; \zeta) + \sum_{j \geq 1} a_j(t; \zeta) u^{(m-j)}(t; \zeta) = 0.$$

## 2. - Evaluations des solutions.

Soit

$$(2.1) \quad \max_{1 \leq j \leq m} \text{ordre } a_j(t; \zeta) / j = p.$$

On suppose que  $p > 1$ . Soit  $h_j(t; \zeta)$  la partie homogène d'ordre  $pj$  de  $a_j$ . Ensuite, soit  $q_j$  l'ordre de zéro en  $t$  à  $t = 0$  de  $h_j(t; \zeta)$  (si  $h_j \equiv 0$ , on con-

vient de considérer  $q_j = \infty$ ), et posons

$$(2.2) \quad \min_{1 \leq j \leq m} q_j/j = q .$$

Soit  $h_j(t; \zeta) = t^{q_j} \mathring{h}_j(t; \zeta)$ . Rappelons que  $\mathring{h}_j(t; \zeta)$  est homogène d'ordre  $pj$  en  $\zeta$ , alors vu que pour au moins un des  $j$  ( $1 \leq j \leq m$ ),  $\mathring{h}_j(0; \zeta) \neq 0$ , l'équation caractéristique

$$(2.3) \quad \lambda^m + \sum_j \mathring{h}_j(0; \zeta) \lambda^{m-j} = 0$$

a au moins une racine  $\lambda(\zeta)$  qui pour une valeur complexe convenable  $\zeta_0$  ( $|\zeta_0| = 1$ ) satisfait à

$$\operatorname{Re} \lambda(\zeta_0) > 0 .$$

Posons

$$\zeta = \xi \zeta_0 ,$$

$\xi$  étant réel positif à faire tendre vers à l'infini. La partie principale de (1.7) devient

$$L_P = \partial_t^m + \sum_j \mathring{h}_j(t; \zeta_0) (\xi^p t^q)^j \partial_t^{m-j} .$$

On pose ensuite, en désignant  $u(t; \xi \zeta_0)$  par  $u(t; \xi)$ ,

$$(2.4) \quad u_j = (\xi^p t^q)^{m-j-1} \partial_t^j u(t; \xi) \quad (0 \leq j \leq m-1) .$$

On a alors

$$(2.5) \quad \begin{cases} \partial_t u_j = \xi^p t^q u_{j+1} + q(m-1-j) u_j/t & (0 \leq j \leq m-2) , \\ L_P[u] = \partial_t u_{m-1} + \xi^p t^q \sum_j \mathring{h}_j(t) u_{m-j} , \end{cases}$$

où  $h_j(t) = \mathring{h}_j(t; \zeta_0)$ .

Quant à  $L - L_P$ , posons

$$a_j(t; \xi \zeta_0) - h_j(t; \xi \zeta_0) = b_j(t; \xi \zeta_0) .$$

Vu que ordre  $b_j(t; \zeta) < pj$  ( $1 \leq j \leq m$ ), et que

$$b_j(t; \xi \zeta_0) \partial_t^{m-j} u(t; \xi) = b_j(t; \xi \zeta_0) (\xi^p t^q)^{-(j-1)} u_{m-j} ,$$

posons

$$c_j(t; \xi) = b_j(t; \xi \zeta_0) (\xi^p t^a)^{-(j-1)}.$$

On voit que, quand  $\xi \rightarrow +\infty$ ,

$$|c_j(t; \xi)| \leq c \xi^{\text{ordre}(b_j) - p(j-1)} t^{-a(j-1)} = c \xi^{p - (pj - \text{ordre}(b_j))} t^{-a(j-1)},$$

où  $c$  est une constante ne dépend ni de  $t$  et ni de  $\xi$ .

Soit

$$r = \min_{1 \leq j \leq m} (pj - \text{ordre}(b_j)) \quad (> 0),$$

alors,

$$(2.6) \quad |c_j(t; \xi)| \leq c \xi^{p-r} t^{-a(j-1)}, \quad (1 \leq j \leq m).$$

Compte tenu de (2.6) et de

$$L[u] = \partial_t u_{m-1} + \xi^p t^a \sum_{j=1}^m h_j(t) u_{m-j} + \sum c_j(t; \xi) u_{m-j},$$

en posant

$$\mathfrak{U}(t; \xi) = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}),$$

$L[u] = 0$  s'écrit de la forme matricielle:

$$(2.7) \quad \partial_t \mathfrak{U} = A(t) \xi^p t^a \mathfrak{U} + \frac{1}{t} B \mathfrak{U} - C(t; \xi) \mathfrak{U},$$

où

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -h_m & -h_{m-1} & \dots & -h_1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e_0 & & & \\ & e_1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_{m-2} \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(t, \xi) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ c_m & c_{m-1} & \dots & c_1 \end{bmatrix},$$

où  $e_j = q(m-1-j)$  ( $0 \leq j \leq m-2$ ).

Les valeurs propres de  $A(0)$  sont des racines de (2.3) avec  $\zeta = \zeta_0$ . Soient donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  ( $k > 1$ ) celles dont la partie réelle sont positives, et soit  $\min_{1 \leq j \leq k} \operatorname{Re} \lambda_j = 4\delta$  ( $> 0$ ), on peut trouver une matrice régulière  $N$  telle que

$$NA(0)N^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & a_{ij} & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

et  $|a_{ij}| \leq \delta/4m$ . D'après la continuité de  $A(t)$ , si l'on prend  $t_0$  ( $> 0$ ) assez petit,

$$NA(t)N^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & & & \\ & \lambda_2(t) & & a_{ij}(t) \\ & & \ddots & \\ & a_{ij}(t) & & \lambda_m(t) \end{bmatrix}$$

satisfait dans  $t \in [0, t_0]$  aux conditions suivantes:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{i) } \min_{1 \leq j \leq k} \operatorname{Re} \lambda_j(t) \geq 3\delta, \\ \text{ii) } \max_{k+1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} \lambda_j(t) < \delta, \\ \text{iii) } |a_{ij}(t)| \leq \delta/2m \quad (i \neq j). \end{cases}$$

Appliquons  $N$  à (2.7) à gauche,

$$(2.9) \quad \partial_t N^q \mathcal{U} = NA(t)N^{-1} \xi^p t^q (N^q \mathcal{U}) + NBN^{-1} \frac{1}{t} (N^q \mathcal{U}) - NC(t; \xi) N^{-1} (N^q \mathcal{U}).$$

Posons

$$(2.10) \quad N^q \mathcal{U} = \mathcal{V} = {}^t(v_1, v_2, \dots, v_m),$$

et considérons

$$(2.11) \quad S(t; \xi) = \exp(-4\delta \xi^p t^{q+1}/q + 1) \left\{ \sum_{i=1}^k |v_i(t; \xi)|^2 - \sum_{i=k+1}^m |v_i(t; \xi)|^2 \right\}.$$

Compte tenu de (2.6) et (2.8), par un calcul habituel, on a

$$(2.12) \quad \exp(4\delta \xi^p t^{q+1}/q + 1) S'(t; \xi) \geq \left( \delta \xi^p t^q - \frac{\text{const}}{t} - \text{const} \xi^{p-\tau} t^{-q(m-1)} \right) \cdot \sum_{i=1}^m |v_i|^2,$$

où dans le second membre  $\text{const}/t$  provient du second terme de (2.9) et le terme  $\text{const} \xi^{p-r} t^{-a(m-1)}$  provient du troisième terme de (2.9).

Rappelons que  $\xi$  est un paramètre positif qu'on fait tendre vers  $\infty$ . On choisit  $t_\xi (> 0)$  tendant vers 0 lorsque  $\xi \rightarrow \infty$  de telle manière que

$$(2.13) \quad \begin{cases} \text{i)} & \xi^p t_\xi^q \gg \frac{1}{t_\xi}, \\ \text{ii)} & \xi^p t_\xi^q \gg \xi^{p-r} t_\xi^{-a(m-1)}, \end{cases}$$

c'est-à-dire,  $t_\xi^{q+1} \gg \xi^{-p}$ ,  $t_\xi^{qm} \gg \xi^{-r}$ . Si l'on veut choisir  $t_\xi$  sous la forme  $t_\xi = \xi^{-\sigma}$  ( $\sigma > 0$ ), ces conditions signifient:

$$(2.14) \quad \sigma < \min \left( \frac{p}{q+1}, \frac{r}{qm} \right).$$

On considère (2.11) et (2.12) pour  $t \in [t_\xi, t_0]$ . En choisissant  $\delta'$  positif  $< \delta$ , (2.12) devient, pour  $\xi$  assez grand,

$$S'(t; \xi) \geq \exp(-4\delta \xi^p t^{q+1}/q + 1) \delta' \xi^p t^q \sum_{i=1}^m |v_i|^2 \geq \delta' \xi^p t^q S(t; \xi), \quad t \geq t_\xi.$$

D'où,

$$(2.15) \quad S(t; \xi) \geq \exp\left(\delta' \xi^p \int_{t_\xi}^t s^q ds\right) S(t_\xi; \xi), \quad t \geq t_\xi.$$

### 3. - Démonstration du Théorème.

D'abord (2.15) donne

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m |v_i(t; \xi)|^2 &\geq \exp(4\delta \xi^p t^{q+1}/q + 1) S(t; \xi) \geq \\ &\geq \exp\left[(\delta' + 4\delta) \xi^p \int_{t_\xi}^t s^q ds\right] \left( \sum_{i=1}^k |v_i(t_\xi; \xi)|^2 - \sum_{i=k+1}^m |v_i(t_\xi; \xi)|^2 \right). \end{aligned}$$

Notons que  $\mathcal{U} = N\mathcal{U}$  et comme  $N$  est une matrice régulière constante,

$$\sum_{j=0}^{m-1} |u_j(t; \xi)|^2 \geq \text{const} \sum_{i=1}^m |v_i(t; \xi)|^2,$$

et rappelons que le premier membre n'est autre que

$$\sum_{j=0}^{m-1} (\xi^p t^q)^{2(m-1-j)} |\partial_j^2 u(t; \xi)|^2.$$

On considère l'évaluation des  $\partial_i^j u(t; \xi)$  ( $0 \leq j < m - 1$ ) pour  $t \in [0, t_\xi]$  de la manière habituelle: posons

$$\tilde{u}_j(t; \xi) = \xi^{p(m-1-j)} \partial_i^j u(t; \xi), \quad (0 \leq j < m - 1).$$

Alors,  $\partial_i \tilde{u}_j = \xi^p \tilde{u}_{j+1}$ , ( $0 \leq j < m - 2$ ), et

$$\begin{aligned} \partial_i \tilde{u}_{m-1} &= \partial_i^m u(t; \xi) = - \sum_{j=1}^m a_j(t; \xi \zeta_0) \partial_i^{m-j} u = \\ &= - \xi^p \sum_j a_j(t; \xi \zeta_0) / \xi^{pj} \xi^{p(j-1)} \partial_i^{m-j} u = - \xi^p \sum_j \tilde{a}_j(t; \xi) \tilde{u}_{m-j}, \end{aligned}$$

où les  $\tilde{a}_j(t; \xi)$  sont bornés par rapport à  $\xi$  et  $t$ .

D'où, en posant  $S_0(t; \xi) = \sum_{j=0}^{m-1} |\tilde{u}_j(t; \xi)|^2$ , on a

$$S_0(0; \xi) \leq \exp(c' \xi^p t_\xi) S_0(t_\xi; \xi),$$

où  $c'$  est une constante positive convenable. Cette inégalité montre que, si

$$(3.2) \quad S_0(t_\xi; \xi) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{2p(m-1-j)} |\partial_i^j u(t_\xi; \xi)|^2 \leq \exp(-c' \xi^p t_\xi),$$

on aura

$$(3.3) \quad S_0(0; \xi) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{2p(m-1-j)} |\partial_i^j u(0; \xi)|^2 \leq 1.$$

Notons que, d'après (2.10), en désignant  $(m_{ij}) = N^{-1}$ , on a

$$(3.4) \quad u_i(t_\xi; \xi) = \sum_j m_{i+1, j} v_j(t_\xi; \xi).$$

Or, si l'on définit la famille de solutions  $u_\xi(t; \xi)$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ) de (1.7) par les données de Cauchy à  $t = t_\xi$ :

$$(3.5) \quad v_i(t_\xi; \xi) = \begin{cases} \exp(-c' \xi^p t_\xi), & i = 1, \\ 0, & i \neq 1, \end{cases}$$

la condition (3.2) est bien remplie. En effet, compte tenu de (3.4) et (3.5),



on a  $u_j(t_\xi; \xi) = m_{j+1,1} \exp(-c' \xi^p t_\xi)$  ( $0 < j < m-1$ ), et d'après (2.4), on a

$$\begin{aligned} \xi^{2p(m-1-j)} |\partial_t^j u(t_\xi; \xi)|^2 &= t_\xi^{-2\alpha(m-1-j)} |u_j(t_\xi; \xi)|^2 = \\ &= t_\xi^{-2\alpha(m-1-j)} |m_{j+1,1}|^2 |v_1(t_\xi; \xi)|^2 = t_\xi^{-2\alpha(m-1-j)} \exp(-2c' \xi^p t_\xi) |m_{j+1,1}|^2, \end{aligned}$$

et compte tenu de  $\xi^p t_\xi = \xi^{p-\sigma}$  et  $p - \sigma > 0$ , on a

$$t_\xi^{-2\alpha(m-1-j)} \exp(-c' \xi^{p-\sigma}) \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \infty).$$

D'autre part, d'après (3.1) et (3.5),  $u_\xi(t; \xi)$  a la minoration:

$$\sum_{j=0}^{m-1} (\xi^p t^\alpha)^{2(m-1-j)} |\partial_t^j u_\xi(t; \xi)|^2 \geq \text{const} \exp \left[ (\delta' + 4\delta) \xi^p \int_{t_\xi}^t s^\alpha ds - 2c' \xi^p t_\xi \right].$$

On a donc montré (1.6), ce qui achève la démonstration du Théorème.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. MIZOHATA, *On kowalewskian systems* (in Russian), Uspehi Mat. Nauk, **29** (1974), pp. 213-227.
- [2] S. MIZOHATA, *On Cauchy-Kowalewski's Theorem; A necessary condition*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10** (1975), pp. 509-519.
- [3] M. MIYAKE, *A remark on Cauchy-Kowalewski's Theorem*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **10** (1974), pp. 243-255.
- [4] K. KITAGAWA - T. SADAMATSU, *A necessary condition of Cauchy-Kowalewski's theorem*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **11** (1976), pp. 523-534.