ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FRANÇOIS MURAT

Compacité par compensation

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 5, nº 3 (1978), p. 489-507

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_489_0>

Compacité par compensation.

FRANÇOIS MURAT (*)

Soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\boldsymbol{R}^N$. On déduit du théorème de compacité de Rellich-Kondrashov que si deux suites de fonctions u_n et v_n vérifient:

$$\begin{cases} u_n \text{ borné dans } (H^1(\Omega))^N; \; u_n \rightharpoonup u \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible}, \\ v_n \text{ borné dans } (L^2(\Omega))^N; \; v_n \rightharpoonup v \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible}, \end{cases}$$

alors on a

$$\langle u_n, v_n \rangle \rightharpoonup \langle u, v \rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Le but de cette note est de montrer que l'on a encore convergence du produit $\langle u_n, v_n \rangle$ vers $\langle u, v \rangle$ si l'on remplace l'hypothèse « toutes les dérivées de u_n bornées dans $L^2(\Omega)$, aucune hypothèse sur les dérivées de v_n » par une hypothèse du type « certaines dérivées de u_n et certaines dérivées de v_n (en quelque sorte complémentaires) bornées dans $L^2(\Omega)$ ».

Ce type de résultat de continuité est notamment utile pour étudier des problèmes d'homogénéisation ou de G-convergence (convergence des solutions d'équations elliptiques quand les coefficients de celles-ci sont bornés dans $L^\infty(\Omega)$) (pour ces problèmes, cf. par exemple A. Bensoussan, J. L. Lions et G. Papanicolaou [1], [2], E. De Giorgi et S. Spagnolo [1], L. Tartar [1]).

Nous suivons le plan:

1) Le cas modèle: divergence et rotationnel dans L^2.

2) Divergence dans L^r, rotationnel dans L^q.

3) Généralisation à des opérateurs du premier ordre dans L^2.

4) Le cas du système de l'élasticité.

(*) Univ. Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique, Tour 55-65, 4 Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

Pervenuto alla Redazione il 28 Ottobre 1976 ed in forma definitiva il 9 Febbraio 1977.

La démonstration du Théorème 1 a été obtenue en collaboration avec L. Tartar, que je remercie également pour les discussions fructueuses que nous avons eues.

1. – Le cas modèle: divergence et rotationnel dans L^2.

Etant donnés un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^N$ et une distribution $u \in (\mathcal{D}'(\Omega))^N$ on note:

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

et on désigne par $\operatorname{rot} u$ l'élément de $(\mathcal{D}'(\Omega))^{N^2}$ de composantes:

$$(\operatorname{rot} u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (1 \leqslant i,\, j \leqslant N)\,.$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $|\cdot|$ le produit scalaire et la norme de $\boldsymbol{C}^N$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1} x_i \bar{y}_i\,, \qquad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\,.$$

THÉORÈME 1. *Soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\boldsymbol{R}^N$ et soient $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ les espaces*:

$$\left\{\begin{aligned} X(\Omega) &= \{u \in (L^2(\Omega))^N,\ \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}\,,\\ Y(\Omega) &= \{v \in (L^2(\Omega))^N,\ \operatorname{rot} v \in (L^2(\Omega))^{N^2}\}\,,\end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

que l'on munit des normes:

$$\left\{\begin{aligned} \|u\|_{X(\Omega)} &= [\|u\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{div} u\|^2_{L^2(\Omega)}]^{\frac12}\,,\\ \|v\|_{Y(\Omega)} &= [\|v\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{rot} v\|^2_{(L^2(\Omega))^{N^2}}]^{\frac12}\,.\end{aligned}\right.$$

Si deux suites u_n et v_n vérifient:

$$\left\{\begin{aligned} &u_n \text{ borné dans } X(\Omega);\ u_n \rightharpoonup u \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible}\,,\\ &v_n \text{ borné dans } Y(\Omega);\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible}\,,\end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

alors on a

$$\langle u_n, v_n \rangle \rightharpoonup \langle u, v \rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,. \quad \blacksquare \tag{1.3}$$

REMARQUE 1.1. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω, on déduit du Théorème 1 que la suite $\langle u_n, v_n\rangle$ converge vers $\langle u, v\rangle$ dans la topologie vague des mesures.

La question est ouverte de savoir si cette convergence a lieu dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ faible, c'est-à-dire de savoir si:

$$\begin{cases} \forall\varphi \in L^\infty(\Omega)\,, \qquad \forall K \text{ compact}\,,\ K\subset\Omega\,, \\ \displaystyle\int_K \langle u_n, v_n\rangle \varphi\, dx \to \int_K \langle u, v\rangle\varphi\, dx\,. \end{cases}$$ ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. La démonstration utilise de façon essentielle la transformation de Fourier dans $L^2(\boldsymbol{R}^N)$, et notamment l'égalité de Plancherel-Parseval.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test. On localise en choisissant $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur le support de φ et en posant:

$$\begin{cases} w_n = (\varphi u_n)^\sim\,, \qquad t_n = (\psi v_n)^\sim\,, \\ w\ \ = (\varphi u)^\sim\,, \qquad t\ \ = (\psi v)^\sim\,, \end{cases} \tag{1.4}$$

où $(\phi)^\sim$ désigne le prolongement de ϕ par zéro en dehors de Ω.

La suite w_n (resp. t_n) est bornée dans $X(\boldsymbol{R}^N)$ (resp. $Y(\boldsymbol{R}^N)$) et converge vers w (resp. t) dans $(L^2(\boldsymbol{R}^N))^N$ faible. De plus toutes ces fonctions sont à support dans un compact fixe ω et l'on a:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \langle u_n, v_n\rangle\varphi\, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N}\langle w_n, t_n\rangle\, dx\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \langle u, v\rangle\varphi\, dx \ \ = \int_{\boldsymbol{R}^N}\langle w, t\rangle\, dx\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Soient $\hat{w}_n$, $\hat{t}_n$, $\hat{w}$ et $\hat{t}$ les transformées de Fourier de w_n, t_n, w et t. Elles verifient:

$$\begin{cases} \hat{w}_n \text{ borné dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N\,, \\ \hat{w}_n \rightharpoonup \hat{w} \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N \text{ faible}\,, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N \xi_i(\hat{w}_n)_i \text{ borné dans } L^2(\boldsymbol{R}^N)\,, \\ \hat{t}_n \text{ borné dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N\,, \\ \hat{t}_n \rightharpoonup \hat{t} \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N \text{ faible}\,, \\ \xi_j(\hat{t}_n)_i - \xi_i(\hat{t}_n)_j \text{ borné dans } L^2(\boldsymbol{R}^N)\,, \qquad 1\leqslant i,\ j\leqslant N\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

On vérifie facilement que l'on a, pour $1 \leq k \leq N$, l'identité:

$$\left\{\begin{array}{l} \forall W \in \boldsymbol{C}^N, \qquad \forall T \in \boldsymbol{C}^N, \qquad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N, \\ \xi_k \langle W, T \rangle = \xi_k \sum_{i=1}^{N} W_i \overline{T}_i = \overline{T}_k \sum_{i=1}^{N} \xi_i W_i + \sum_{i=1}^{N} (\xi_k \overline{T}_i - \xi_i \overline{T}_k) W_i . \end{array}\right.$$

De cette identité et de (1.6), on déduit que:

$$\left\{\begin{array}{l} |\xi| \langle \hat{w}_n, \hat{t}_n \rangle \text{ borné dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) , \\ |\xi| \langle \hat{w}, \hat{t} \rangle \in L^1(\boldsymbol{R}^N) . \end{array}\right. \tag{1.7}$$

D'autre part, w_n étant à support dans le compact fixe ω, on a la majoration:

$$\|\hat{w}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^N} \leq \|w_n\|_{(L^1(\boldsymbol{R}^N))^N} = \|w_n\|_{(L^1(\omega))^N} \leq C_\omega \|w_n\|_{(L^2(\omega))^N} \leq C_\omega \|\boldsymbol{u}_n\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq C ,$$

et pour tout $\xi \in \boldsymbol{R}^N$

$$\hat{w}_n(\xi) = \int_\omega w_n(x) \exp(-2i\pi \langle x, \xi \rangle)\, dx$$

converge vers

$$\int_\omega w(x) \exp(-2i\pi \langle x, \xi \rangle)\, dx = \hat{w}(\xi) .$$

De même $\|\hat{t}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^N} \leq C$ et $\hat{t}_n$ converge vers $\hat{t}$ en tout point ξ de $\boldsymbol{R}^N$.

Le théorème de Lebesgue montre alors que:

$$\langle \hat{w}_n, \hat{t}_n \rangle \to \langle \hat{w}, \hat{t} \rangle \qquad \text{dans } L^1(B) \text{ fort} ,$$

quel que soit B borné. Joint à (1.7), ce résultat entraine que:

$$\langle \hat{w}_n, \hat{t}_n \rangle \to \langle \hat{w}, \hat{t} \rangle \qquad \text{dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) \text{ fort} . \tag{1.8}$$

On en déduit que

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} \langle \hat{w}_n, \hat{t}_n \rangle\, d\xi \to \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle \hat{w}, \hat{t} \rangle\, d\xi ,$$

d'où par Plancherel-Parseval:

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} \langle w_n, t_n \rangle\, dx \to \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle w, t \rangle\, dx ,$$

ce qui, joint à (1.5), achève la démonstration du Théorème 1. ∎

REMARQUE 1.2. Si l'on note

$$w(*)t = \sum_{i=1}^{N} w_i * t_i ,$$

on déduit de (1.8) que l'on a, sous les hypothèses du Théorème 1, le résultat supplémentaire (un peu inattendu):

$$\begin{cases} \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) , \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(\Omega) , \\ (\varphi u_n)^\sim(*)(\psi v_n)^\sim \to (\varphi u)^\sim(*)(\psi v)^\sim \qquad \text{dans } C^0(\boldsymbol{R}^N) . \end{cases} \qquad \blacksquare$$

2. – Divergence dans L^p, rotationnel dans L^q.

Nous adopterons dans ce paragraphe les mêmes notations qu'au paragraphe 1.

THÉORÈME 2. *Soient p et q tels que*

$$1 < p, q < +\infty \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 , \tag{2.1}$$

et soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\boldsymbol{R}^N$. On définit les espaces $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$:

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{u \in (L^p(\Omega))^N, \operatorname{div} u \in L^p(\Omega)\} , \\ Y(\Omega) = \{v \in (L^q(\Omega))^N, \operatorname{rot} v \in (L^q(\Omega))^{N^2}\} , \end{cases} \tag{2.2}$$

que l'on munit des normes:

$$\begin{cases} \|u\|_{X(\Omega)} = \|u\|_{(L^p(\Omega))^N} + \|div\, u\|_{L^p(\Omega)} , \\ \|v\|_{Y(\Omega)} = \|v\|_{(L^q(\Omega))^N} + \|\operatorname{rot} v\|_{(L^q(\Omega))^{N^2}} . \end{cases}$$

Si deux suites u_n et v_n vérifient:

$$\begin{cases} u_n \text{ borné dans } X(\Omega);\ u_n \rightharpoonup u \text{ dans } (L^p(\Omega))^N \text{ faible} , \\ v_n \text{ borné dans } Y(\Omega);\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } (L^q(\Omega))^N \text{ faible} , \end{cases}$$

alors on a

$$\langle u_n, v_n\rangle \rightharpoonup \langle u, v\rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) . \tag{2.3} \qquad \blacksquare$$

REMARQUE 2. Le Théorème 2 est une généralisation du Théorème 1. Nous allons cependant en donner une démonstration tout à fait différente: dans le cas où les fonctions v_n vérifient $\operatorname{rot} v_n = 0$ (c'est-à-dire sont des gradients), cette démonstration se résume à une intégration par parties. Pour se ramener à ce cas simple, on utilise un relèvement compact du rotationnel, dont l'existence est l'objet du Lemme 2. ■

LEMME 2. *Soit ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^N$ $(N \geqslant 2)$. Etant donné q tel que $1 < q < +\infty$, on choisit q_* tel que:*

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{N}{N-1} < q_* < +\infty & \text{si } q \geqslant N\,, \\ \dfrac{1}{q_*} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{N} & \text{si } q < N\,. \end{cases}$$

Alors à tout g qui vérifie:

$$(2.5) \qquad \begin{cases} g \in (L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}\,, \\ g = \operatorname{rot} t\,, \qquad \text{où } t \in (\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N))^N \text{ et où } t \text{ est à support compact dans } \omega\,, \end{cases}$$

on peut associer linéairement z tel que:

$$(2.6) \qquad \begin{cases} z \in (L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N\,, \qquad \dfrac{\partial z_i}{\partial x_l} \in L^q(\boldsymbol{R}^N) \qquad 1 \leqslant i, l \leqslant N\,, \\ \operatorname{rot} z = g \qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^N\,, \\ \|z\|_{(L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N} + \displaystyle\sum_{i,l=1}^N \left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_l} \right\|_{L^q(\boldsymbol{R}^N)} \leqslant C \|g\|_{(L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}}\,, \end{cases}$$

où la constante C dépend uniquement de ω, q, q_* et N. ■

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. La démonstration repose sur une solution explicite de l'équation en z

$$\operatorname{rot} z = g \qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^N$$

utilisant des noyaux singuliers.

Dans le cours de la démonstration $*$ et $\partial/\partial x_j$ désigneront toujours la convolution et la dérivation au sens des distributions. On remarquera que dans les convolutions, la condition des supports est toujours satisfaite. (L'hypothèse que t est à support compact est essentielle pour vérifier cette condition).

Définissons les noyaux E_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ par:

$$\begin{cases} E_j(x) = \dfrac{1}{S_N} \dfrac{x_j}{|x|^N} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(-\dfrac{1}{N-2} \dfrac{1}{S_N} \dfrac{1}{|x|^{N-2}}\right) & \text{si } N \geqslant 3 , \\ E_j(x) = \dfrac{1}{S_2} \dfrac{x_j}{|x|^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(-\dfrac{1}{S_2} \operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)\right) & \text{si } N = 2 , \end{cases}$$

où S_N désigne l'aire de la sphère unité de $\boldsymbol{R}^N$. Soit q_1 donné par:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{q_*} + \dfrac{1}{N} & \text{si } q \geqslant N , \\ q_1 = q & \text{si } q < N . \end{cases}$$

On vérifie que $q_1 \leqslant q$, et puisque $g \in (L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}$ est à support compact dans ω, on a donc:

$$g \in (L^{q_1}(\boldsymbol{R}^N))^{N^2} , \qquad \|g\|_{(L^{q_1})^{N^2}} \leqslant C \|g\|_{(L^q)^{N^2}} .$$

Considérons alors la distribution $z \in (\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N))^N$ définie par:

$$z_i = \sum_{j=1}^{N} g_{ij} * E_j , \qquad 1 \leqslant i \leqslant N . \tag{2.7}$$

Les noyaux E_j appartiennent à l'espace de Marcinkiewicz $M^{N/(N-1)}$ et les fonctions g_{ij} appartiennent à $L^{q_1}(\boldsymbol{R}^N)$ $(1 < q_1 < N)$. On a donc pour tout $1 \leqslant i,\ j \leqslant N$:

$$\begin{cases} g_{ij} * E_j \in L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N) , & \dfrac{1}{q_*} = \dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{N/(N-1)} - 1 , \\ \|g_{ij} * E_j\|_{L^{q_*}} \leqslant C \|g_{ij}\|_{L^{q_1}} \|E_j\|_{M^{N/N-1}} . \end{cases}$$

On en déduit que $z \in (L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N$ et que:

$$\|z\|_{(L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N} \leqslant C \|g\|_{L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}} . \tag{2.8}$$

Les dérivées partielles $\partial z_i / \partial x_l$ $(1 \leqslant i,\ l \leqslant N)$ sont données par:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^{N} g_{ij} * \frac{\partial E_j}{\partial x_l} .$$

On vérifie que pour tout $1 \leqslant j,\ l \leqslant N$, on a:

$$\begin{cases} \text{si } j \neq l & \dfrac{\partial E_j}{\partial x_l} = \text{v.p.}\left(-N \dfrac{x_j x_l}{|x|^{N+2}}\right) , \\ \text{si } j = l & \dfrac{\partial E_j}{\partial x_j} = \text{v.p.}\left(\dfrac{1}{|x|^N} - \dfrac{N x_j^2}{|x|^{N+2}}\right) + \dfrac{S_N}{N} \delta , \end{cases}$$

où v.p. désigne la valeur principale. Les fonctions

$$\frac{x_j x_l}{|x|^{N+2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{|x|^N} - \frac{N x_j^2}{|x|^{N+2}}$$

vérifient les hypothèses du théorème de Calderon-Zygmund (homogénéité d'ordre $-N$, intégrale nulle sur la sphère, régularité pour $x \neq 0$) et donc pour tout $1 \leqslant i,\ j, l \leqslant N$:

$$\begin{cases} g_{ij} * \dfrac{\partial E_j}{\partial x_l} \in L^q(\boldsymbol{R}^N)\,, \\ \left\| g_{ij} * \dfrac{\partial E_j}{\partial x_l} \right\|_{L^q} \leqslant C \|g_{ij}\|_{L^q}\,. \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $1 \leqslant i,\ l \leqslant N,\ \partial z_i/\partial x_l \in L^q(\boldsymbol{R}^N)$ et que:

$$\left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_l} \right\|_{L^q(\boldsymbol{R}^N)} \leqslant C \|g\|_{(L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}}\,. \tag{2.9}$$

Calculons maintenant rot z:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} z)_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\sum_{k=1}^N g_{ik} * E_k\right\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{k=1}^N g_{jk} * E_k\right\} = \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\frac{\partial t_i}{\partial x_k} - \frac{\partial t_k}{\partial x_i}\right) * E_k\right\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left(\frac{\partial t_j}{\partial x_k} - \frac{\partial t_k}{\partial x_j}\right) * E_k\right\} = \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial t_i}{\partial x_k} * E_k\right\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial t_j}{\partial x_k} * E_k\right\} = \\
&= \left(\frac{\partial t_i}{\partial x_j} - \frac{\partial t_j}{\partial x_i}\right) * \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial E_k}{\partial x_k}\right).
\end{aligned}$$

En notant que:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^N \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \Delta\left(-\frac{1}{N-2}\,\frac{1}{S_N}\,\frac{1}{|x|^{N-2}}\right) = \delta \quad \text{si } N \geqslant 3\,, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^N \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \Delta\left(-\frac{1}{S_2}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) = \delta \quad \text{si } N = 2\,, \end{cases}$$

on en déduit que:

$$\operatorname{rot} z = g \tag{2.10}$$

ce qui, avec (2.8) et (2.9), achève la démonstration du Lemme 2. ∎

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Dans le cas où $N = 1$, le théorème résulte immédiatement du théorème de compacité de Rellich-Kondrashov. Nous supposerons donc dans la démonstration que $N \geqslant 2$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test. On localise en choisissant $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur le support de φ et en posant:

$$(2.11) \qquad \begin{cases} w_n = (\varphi u_n)^\sim , & t_n = (\psi v_n)^\sim , \\ w \;= (\varphi u)^\sim , & t \;= (\psi v)^\sim , \end{cases}$$

où $(\phi)^\sim$ désigne le prolongement de ϕ par zéro en dehors de Ω.

La suite w_n (resp. t_n) est bornée dans $X(\boldsymbol{R}^N)$ (resp. $Y(\boldsymbol{R}^N)$) et converge vers w (resp. t) dans $(L^p(\boldsymbol{R}^N))^N$ faible. Soit ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^N$ tel que support $\psi \subset \omega$; toutes ces fonctions sont à support compact dans ω et l'on a:

$$(2.12) \qquad \left| \begin{aligned} &\int_\Omega \langle u_n, v_n\rangle \varphi\, dx = \int_\omega \langle w_n, t_n\rangle\, dx , \\ &\int_\Omega \langle u, v\rangle \varphi\, dx \;\; = \int_\omega \langle w, t\rangle\, dx . \end{aligned} \right.$$

Si on fixe q_* vérifiant (2.4), il existe, d'aprés le Lemme 2, des fonctions z_n telles que:

$$\begin{cases} z_n \in (L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N , & \dfrac{\partial (z_n)_i}{\partial x_l} \in L^q(\boldsymbol{R}^N) \qquad 1 \leqslant i\,,\; l \leqslant N\,, \\ \operatorname{rot} z_n = \operatorname{rot} t_n & \text{dans } \boldsymbol{R}^N , \\ \|z_n\|_{(L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^N \left\| \frac{\partial (z_n)_i}{\partial x_l} \right\|_{L^q(\boldsymbol{R}^N)} \leqslant C \|\operatorname{rot} t_n\|_{(L^q(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}} \leqslant C . \end{cases}$$

Du théorème de compacité de Rellich-Kondrashov, on déduit qu'il existe une sous-suite (notée avec l'indice $p \in \boldsymbol{N}$) et un $z \in (L^{q_*}(\boldsymbol{R}^N))^N$ tels que:

$$\begin{cases} z_p \to z & \text{dans } (L^q(\omega))^N \text{ fort} , \\ \operatorname{rot} z = \operatorname{rot} t & \text{dans } \boldsymbol{R}^N . \end{cases}$$

On a donc, quand $p \to +\infty$

$$(2.13) \qquad \int_\omega \langle w_p, z_p\rangle\, dx \to \int_\omega \langle w, z\rangle\, dx .$$

D'autre part

$$\operatorname{rot}(t_n - z_n) = 0 \qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^N , \qquad t_n - z_n \in (L^q_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N))^N .$$

Il existe donc des fonctions y_n (cf. par exemple L. Schwartz [1], Théorème VI, p. 59 et Théorème XV, p. 181) telles que:

$$\begin{cases} y_n \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N)\,, \\ \operatorname{grad} y_n = t_n - z_n \qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^N\,, \\ \displaystyle\int_\omega y_n\,dx = 0\,, \end{cases}$$

et l'on a, puisque y_n est de moyenne nulle sur ω:

$$\|y_n\|_{W^{1,q}(\omega)} \leqslant C \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\right\|_{L^q(\omega)} \leqslant C\left\{\|t_n\|_{(L^q(\omega))^N} + \|z_n\|_{(L^q(\omega))^N}\right\} \leqslant C\,.$$

Quitte à extraire une nouvelle sous-suite (encore notée avec l'indice $p \in \boldsymbol{N}$), on peut supposer qu'il existe $y \in W^{1,q}(\omega)$ tel que:

$$\begin{cases} y_p \to y & \text{dans } L^q(\omega) \text{ fort}\,, \\ \operatorname{grad} y = t - z & \text{dans } \omega\,. \end{cases}$$

Alors, puisque w_p et w sont à support compact dans ω, on a quand $p \to +\infty$

$$(2.14)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\omega \langle w_p, t_p - z_p\rangle\,dx = \int_\omega \langle w_p, \operatorname{grad} y_p\rangle\,dx = -\int_\omega (\operatorname{div} w_p)\,y_p\,dx \\ \displaystyle\to -\int_\omega (\operatorname{div} w)\,y\,dx = \int_\omega \langle w, \operatorname{grad} y\rangle\,dx = \int_\omega \langle w, t - z\rangle\,dx\,. \end{cases}$$

De (2.13) et (2.14) on déduit que, quand $p \to +\infty$

$$\int_\omega \langle w_p, t_p\rangle\,dx \to \int_\omega \langle w, t\rangle\,dx\,,$$

c'est-à-dire d'après (2.12) que:

$$\int_\omega \langle u_p, v_p\rangle \varphi\,dx \to \int_\omega \langle u, v\rangle \varphi\,dx\,.$$

L'unicité de la limite assure alors que la suite tout entière converge, ce qui achève la démonstration du Théorème 2. ■

3. – Généralisation à des opérateurs du premier ordre dans L^2.

Dans ce paragraphe, nous allons donner une généralisation du Théorème 1 à un espace défini comme domaine d'un opérateur du premier ordre à coefficients constants, opérant dans L^2.

Soient $A_1 \dots A_N$ des matrices appartenant à $\mathcal{L}(\boldsymbol{C}^m, \boldsymbol{C}^{m'})$ et soit Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^N$. On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par:

$$\mathcal{A}f = \sum_{j=1}^{N} A_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^{m'} \qquad \forall f \in (\mathcal{D}'(\Omega))^m . \tag{3.1}$$

Le symbole $A(\xi)$ de l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par:

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j A_j \in \mathcal{L}(\boldsymbol{C}^m, \boldsymbol{C}^{m'}) \qquad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N . \tag{3.2}$$

Soit enfin une matrice M telle que:

$$M \in \mathcal{L}(\boldsymbol{C}^m, \boldsymbol{C}^m) . \tag{3.3}$$

On désigne par $\operatorname{Ker} A$ le noyau de l'opérateur A et par $\langle\, ,\, \rangle$ le produit scalaire dans $\boldsymbol{C}^m$.

THÉORÈME 3. *Soit Ω un ouvert (borné ou non) de $\boldsymbol{R}^N$ et soit $Z(\Omega)$ l'espace:*

$$Z(\Omega) = \{f \in (L^2(\Omega))^m,\ \mathcal{A}f \in (L^2(\Omega))^{m'}\} , \tag{3.4}$$

que l'on munit de la norme:

$$\|f\|_{Z(\Omega)} = [\|f\|^2_{(L^2(\Omega))^m} + \|\mathcal{A}f\|^2_{(L^2(\Omega))^{m'}}]^{\frac{1}{2}} .$$

On suppose que:

$$\forall \xi \in \boldsymbol{R}^N ,\ \xi \neq 0 ,\ \forall F \in \boldsymbol{C}^m \text{ tel que } F \in \operatorname{Ker} A(\xi), \text{ alors } \langle MF, F\rangle = 0 , \tag{3.5}$$

$$\forall \xi \in \boldsymbol{R}^N ,\ \xi \neq 0 ,\ \text{le rang de } A(\xi) \text{ est constant} . \tag{3.6}$$

Si deux suites f_n et g_n vérifient:

$$\begin{cases} f_n \text{ borné dans } Z(\Omega);\ f_n \rightharpoonup f \text{ dans } (L^2(\Omega))^m \text{ faible} , \\ g_n \text{ borné dans } Z(\Omega);\ g_n \rightharpoonup g \text{ dans } (L^2(\Omega))^m \text{ faible} , \end{cases} \tag{3.7}$$

alors on a

$$\langle Mf_n, g_n\rangle \rightharpoonup \langle Mf, g\rangle \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,. \tag{3.8}$$ ■

REMARQUE 3.1. Le Théorème 3 est une généralisation du Théorème 1. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $m = 2N$, $m' = 1 + N^2$ et de considérer l'espace

$$Z(\Omega) = \{f \in (L^2(\Omega))^{2N},\ f = (u, v)|u \in (L^2(\Omega))^N,\ v \in (L^2(\Omega))^N,$$
$$\mathcal{A}f \in (L^2(\Omega))^{1+N^2},\ \mathcal{A}f = (\operatorname{div} u, \operatorname{rot} v)\}$$

et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

où I est la matrice identité de $\boldsymbol{C}^N$.

On a alors $\langle Mf, f\rangle_{\boldsymbol{C}^m} = \langle u, v\rangle_{\boldsymbol{C}^N}$, et des calculs simples (mais fastidieux) montrent que les hypothèses (3.5) et (3.6) sont satisfaites. Le Théorème 3 redonne donc le Théorème 1. ■

REMARQUE 3.2. L'hypothèse (3.5) est nécessaire pour obtenir la convergence (3.8). En effet soient $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, $\xi \neq 0$, et $F \in \operatorname{Ker} A(\xi)$; considérons les suites de fonctions f_n et g_n définies par:

$$f_n(x) = g_n(x) = \varphi(x) \exp\big(in\langle x, \xi\rangle\big)F$$

où φ est donnée dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Ces suites vérifient l'hypothèse (3.7) avec $f = g = 0$. Or $\langle Mf_n, f_n\rangle = \varphi^2\langle MF, F\rangle$ ne converge vers $\langle M0, 0\rangle = 0$ que si $\langle MF, F\rangle = 0$.

Par contre l'hypothèse (3.6) a un caractère technique qui tient à la méthode utilisée pour démontrer le Théorème 3. Cette méthode repose sur la transformée de Fourier dans L^2 et est voisine, par certains aspects, de la méthode de démonstration du Théorème 1. Elle reprend l'idée d'une démonstration de L. Sarason [1] qui généralisait un résultat de J. R. Schulenberger et C. H. Wilcox [1], [2], tout en en simplifiant la démonstration. Ce résultat, qui éclaire le Théorème 3, est le suivant:

THÉORÈME. *Si un opérateur* $\mathcal{A}$ *donné par* (3.1) *est tel que son symbole* $A(\xi)$ *soit de rang constant pour tout* $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, $\xi \neq 0$, *alors pour tout* $u \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ *tel que* $u \in (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$ *et* $\mathcal{A}u \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^{m'}$ *on a*:

$$\begin{cases} u \in (H^1(\boldsymbol{R}^N))^m\,, \\ \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m} \leqslant C \| \mathcal{A} u \|_{(L^2(\boldsymbol{R}^N))^{m'}} \qquad 1 \leqslant j \leqslant N\,. \qquad \blacksquare \end{cases}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ une fonction test. On localise en choisissant $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur le support de φ et en posant:

$$\begin{cases} h_n = (\varphi f_n)^\sim\,, & k_n = (\psi g_n)^\sim\,, \\ h \;= (\varphi f)^\sim\,, & k \;= (\psi g)^\sim\,, \end{cases}$$

où $(\phi)^\sim$ désigne le prolongement de ϕ par zéro en dehors de Ω.

Les suites h_n et k_n sont bornées dans $Z(\boldsymbol{R}^N)$ et convergent respectivement vers h et k dans $(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ faible. De plus toutes ces fonctions sont à support dans un compact fixe ω et l'on a:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \langle M f_n, g_n \rangle \varphi\, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle M h_n, k_n \rangle\, dx\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \langle M f, g \rangle \varphi\, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle M h, k \rangle\, dx\,. \end{cases}$$

Compte-tenu de l'identité

$$4\langle Mh, k\rangle = \langle M(h+k), (h+k)\rangle - \langle M(h-k), (h-k)\rangle + \\ + i\langle M(h+ik), (h+ik)\rangle - i\langle M(h-ik), (h-ik)\rangle\,,$$

il suffit donc pour démontrer le Théorème 3 d'établir le Lemme 3 que nous énonçons ci-dessous. $\blacksquare$

LEMME 3. *Si une suite H_n vérifie*:

$$\text{(3.9)} \qquad \begin{cases} H_n \text{ borné dans } Z(\boldsymbol{R}^N)\,, \\ H_n \text{ à support dans un compact fixe } \omega\,, \\ H_n \rightharpoonup H \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m \text{ faible}\,, \end{cases}$$

alors on a

$$\text{(3.10)} \qquad \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle M H_n, H_n \rangle\, dx \to \int_{\boldsymbol{R}^N} \langle M H, H \rangle\, dx\,. \qquad \blacksquare$$

REMARQUE 3.3. Avant de démontrer le Lemme 3, énonçons deux résultats (cf. L. Sarason [1]).

On montre facilement que si $f \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$

$$(3.11) \quad \begin{cases} f \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) \in \operatorname{Ker} A(\xi) & \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N . \\ f \in (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) \in (\operatorname{Ker} A(\xi))^\perp & \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N . \end{cases}$$

D'autre part, il existe $c > 0$ tel que:

$$(3.12) \quad \begin{cases} \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N , \quad |\xi|_{\boldsymbol{R}^N} = 1 , \quad \forall L \in (\operatorname{Ker} A(\xi))^\perp , \quad |L|_{\boldsymbol{C}^m} = 1 , \\ |A(\xi) L|_{\boldsymbol{C}^m} \geqslant c . \end{cases}$$

En effet si (3.12) n'était pas vérifié, il existerait deux suites ξ_n et L_n telles que:

$$\begin{cases} |\xi_n|_{\boldsymbol{R}^N} = 1 , \quad |L_n|_{\boldsymbol{C}^m} = 1 , \quad L_n \in (\operatorname{Ker} A(\xi_n))^\perp , \\ A(\xi_n) L_n \to 0 , \end{cases}$$

d'où l'on déduit qu'il existerait ξ_0 et L_0 tels que:

$$|\xi_0| = 1 , \quad |L_0| = 1 , \quad L_0 \in (\operatorname{Ker} A(\xi_0))^\perp , \quad A(\xi_0) L_0 = 0 ,$$

ce qui est contradictoire. [Pour passer à la limite dans $L_n \in (\operatorname{Ker} A(\xi_n))^\perp$, on utilise de façon essentielle l'hypothèse que $A(\xi)$ est de rang constant, ce qui implique la continuité de l'application

$$\xi \to \text{Projection sur } \operatorname{Ker} A(\xi)] . \qquad \blacksquare$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. Soient K_n et K (resp. L_n et L) les projections dans $(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ de H_n et H sur Ker $\mathcal{A}$ (resp. $(\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$). Les suites K_n et L_n sont bornées dans $Z(\boldsymbol{R}^N)$. Désignons par $\hat{H}_n$, $\hat{K}_n$,$\hat{L}_n$ et $\hat{H}$, $\hat{K}$, $\hat{L}$ les transformées de Fourier de H_n, K_n, L_n et H, K, L.

En raison de l'hypothèse (3.5) et de (3.11), on a:

$$(3.13) \quad \begin{cases} \langle M\hat{K}_n(\xi), \hat{K}_n(\xi)\rangle = 0 \\ \langle M\hat{K}(\xi), \hat{K}(\xi)\rangle \ = 0 \end{cases} \quad \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N .$$

D'autre part on déduit de (3.11) et de (3.12) (par homogénéité en L et ξ) que:

$$\begin{cases} c|\xi|\,|\hat{L}_n(\xi)| \leqslant |A(\xi)\hat{L}_n(\xi)| \\ c|\xi|\,|\hat{L}\ (\xi)| \leqslant |A(\xi)\hat{L}(\xi)| \end{cases} \quad \text{p.p. en } \xi \in \boldsymbol{R}^N .$$

On a donc:

$$\left\{\begin{array}{l}|\xi|\hat{L}_n \text{ borné dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m\,,\\ |\xi|\hat{L}\in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m\,.\end{array}\right. \tag{3.14}$$

Les fonctions H_n étant à support dans un compact fixe ω, leurs transformées de Fourier $\hat{H}_n$ vérifient:

$$\|\hat{H}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^m}\leqslant \|H_n\|_{(L^1(\boldsymbol{R}^N))^m}\leqslant C_\omega\|H_n\|_{(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m}\leqslant C,$$

et pour tout $\xi\in\boldsymbol{R}^N$,

$$\hat{H}_n(\xi)=\int_\omega H_n(x)\exp\big(-2i\pi\langle x,\xi\rangle\big)\,dx$$

converge vers

$$\int_\omega H(x)\exp\big(-2i\pi\langle x,\xi\rangle\big)\,dx=\hat{H}(\xi)\,.$$

Puisque d'après (3.11) $\hat{K}_n(\xi)$ et $\hat{L}_n(\xi)$ sont, p.p. en $\xi\in\boldsymbol{R}^N$, les projections de $\hat{H}_n(\xi)$ sur $\operatorname{Ker} A(\xi)$ et $(\operatorname{Ker} A(\xi))^\perp$, on en déduit que:

$$\left\{\begin{array}{ll}\|\hat{K}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^m}\leqslant C\,, & \|\hat{L}_n\|_{(L^\infty(\boldsymbol{R}^N))^m}\leqslant C\,,\\ \hat{K}_n(\xi)\to K(\xi) & \text{p.p. en } \xi\in\boldsymbol{R}^N\,,\\ \hat{L}_n(\xi)\to L(\xi) & \text{p.p. en } \xi\in\boldsymbol{R}^N\,.\end{array}\right.$$

Le théorème de Lebesgue montre alors que:

$$\left\{\begin{array}{ll}\langle M\hat{L}_n,\hat{K}_n\rangle\to\langle M\hat{L},\hat{K}\rangle & \text{dans } L^1(B) \text{ fort}\,,\\ \langle M\hat{K}_n,\hat{L}_n\rangle\to\langle M\hat{K},\hat{L}\rangle & \text{dans } L^1(B) \text{ fort}\,,\\ \langle M\hat{L}_n,\hat{L}_n\rangle\to\langle M\hat{L},\hat{L}\rangle & \text{dans } L^1(B) \text{ fort}\,,\end{array}\right.$$

quel que soit B borné, ce qui joint à (3.14) et au fait que $\hat{K}_n$ et $\hat{L}_n$ sont bornées dans $(L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ implique que:

$$\left\{\begin{array}{ll}\langle M\hat{L}_n,\hat{K}_n\rangle\to\langle M\hat{L},\hat{K}\rangle & \text{dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) \text{ fort}\,,\\ \langle M\hat{K}_n,\hat{L}_n\rangle\to\langle M\hat{K},\hat{L}\rangle & \text{dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) \text{ fort}\,,\\ \langle M\hat{L}_n,\hat{L}_n\rangle\to\langle M\hat{L},\hat{L}\rangle & \text{dans } L^1(\boldsymbol{R}^N) \text{ fort}\,.\end{array}\right. \tag{3.15}$$

La formule de Plancherel-Parseval:

$$\int_{\mathbf{R}^N} \langle MH_n, H_n\rangle\, dx = \int_{\mathbf{R}^N} \langle M\hat{H}_n, \hat{H}_n\rangle\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} \langle M\hat{K}_n, \hat{K}_n\rangle\, d\xi + \int_{\mathbf{R}^N} \langle M\hat{L}_n, \hat{K}_n\rangle\, d\xi + \int_{\mathbf{R}^N} \langle M\hat{K}_n, \hat{L}_n\rangle\, d\xi + \int_{\mathbf{R}^N} \langle M\hat{L}_n, \hat{L}_n\rangle\, d\xi$$

avec (3.13) et (3.15) permet alors d'achever la démonstration du Lemme 3. ■

4. – Le cas du système de l'élasticité.

Dans ce paragraphe, nous allons donner un résultat analogue au Théorème 1, relatif au système de l'élasticité.

On note $\overline{\overline{m}}$ les tenseurs $(N \times N)$

$$\overline{\overline{m}} = \{m_{ij} | 1 \leq i,\, j \leq N\}$$

et « , » le produit scalaire dans $\mathbf{R}^{N^2}$

$$« \sigma, \varepsilon » = \sum_{i,j=1}^{N} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, .$$

Etant donnée une distribution $u \in (\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N))^N$, on désigne par $\overline{\overline{\varepsilon}}(u)$ le tenseur (des déformations)

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(u) = \left\{\varepsilon_{ij}(u) | \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad 1 \leq i\,,\; j \leq N\right\}.$$

THÉORÈME 4. *Soient X et Y les espaces*:

$$(4.1)\qquad \begin{cases} X = \left\{\overline{\overline{\sigma}} | \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\, \overline{\overline{\sigma}} \in (L^2(\mathbf{R}^N))^N,\, \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \in L^2(\mathbf{R}^N),\, 1 \leq i \leq N\right\}, \\ Y = \left\{\overline{\overline{\varepsilon}} | \exists u \in (L^2(\mathbf{R}^N))^N,\, \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,(u),\, \overline{\overline{\varepsilon}} \in (L^2(\mathbf{R}^N))^{N^2}\right\}, \end{cases}$$

que l'on munit des normes:

$$\begin{cases} \|\overline{\overline{\sigma}}\|_X = \left[\|\sigma\|^2_{(L^2(\mathbf{R}^N))^{N^2}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left\| \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^N)}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \|\overline{\overline{\varepsilon}}\|_Y = \|\overline{\overline{\varepsilon}}\|_{(L^2(\mathbf{R}^N))^{N^2}}\, . \end{cases}$$

Si deux suites $\bar{\bar{\sigma}}^n$ *et* $\bar{\bar{\varepsilon}}^n$ *vérifient:*

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}}^n \text{ borné dans } X;\ \bar{\bar{\sigma}}^n \rightharpoonup \sigma \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^{N^2} \text{ faible}, \\ \bar{\bar{\varepsilon}}^n \text{ borné dans } Y;\ \bar{\bar{\varepsilon}}^n \rightharpoonup \varepsilon \text{ dans } (L^2(\boldsymbol{R}^N))^{N^2} \text{ faible}, \end{cases}$$

alors on a

$$(4.3)\qquad « \bar{\bar{\sigma}}^n, \bar{\bar{\varepsilon}}^n » \rightharpoonup « \bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{\varepsilon}} » \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N)\,. \qquad \blacksquare$$

REMARQUE 4. Remarquons que l'espace Y n'est pas localisable au sens suivant: si $\bar{\bar{\varepsilon}} \in Y$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$, $\varphi\bar{\bar{\varepsilon}}$ n'appartient pas nécessairement à Y. D'autre part, on montre facilement que Y n'est pas le noyau d'un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients constants.

Nous allons donner une démonstration du Théorème 4 analogue à la démonstration utilisée au Théorème 2. Elle repose sur une intégration par parties et sur des conséquences de l'inégalité de Korn.

Rappelons brièvement celles-ci (pour les démonstrations on pourra par exemple consulter G. Duvaut et J. L. Lions [1], Chap. 3).

Si $\bar{\bar{\varepsilon}} \in Y$, il existe un unique $u \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^N$ tel que $\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}(u)$; de plus $u \in (H^1(\boldsymbol{R}^N))^N$.

Etant donnée ω une boule de $\boldsymbol{R}^N$, on désigne par $\mathcal{R}_\omega$ l'ensemble des déplacements rigides sur ω:

$$\mathcal{R}_\omega = \{u | u(x) = Ax + b,\ \forall x \in \omega \text{ où } A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^N, \boldsymbol{R}^N),\ A + {}^tA = 0,\ b \in \boldsymbol{R}^N\}\,,$$

et par P_ω la projection dans $(L^2(\omega))^N$ sur $\mathcal{R}_\omega$.

Alors si $\bar{\bar{\varepsilon}} \in Y$, $\bar{\bar{\varepsilon}}(u - P_\omega u) = \bar{\bar{\varepsilon}}(u)$ dans ω et

$$(4.4)\qquad \|u - P_\omega u\|_{(H^1(\omega))^N} \leqslant C \|\bar{\bar{\varepsilon}}\|_{(L^2(\boldsymbol{R}^N))^{N^2}}$$

où C est une constante donnée (inégalité de Korn). $\blacksquare$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$ une fonction test et soit ω une boule telle que support $\varphi \subset \omega$. Alors:

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} « \bar{\bar{\sigma}}^n, \bar{\bar{\varepsilon}}^n » \varphi\, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} « \bar{\bar{\sigma}}^n, \bar{\bar{\varepsilon}}^n(u^n) » \varphi\, dx = \int_\omega « \bar{\bar{\sigma}}^n, \bar{\bar{\varepsilon}}(u^n - P_\omega u^n) » \varphi\, dx =$$

$$= \int_\omega \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (u^n - P_\omega u^n)_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (u^n - P_\omega u^n)_j \right\} \varphi\, dx\,.$$

En intégrant par parties, il vient:

$$
(4.5)\quad \left|\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N} «\,\bar{\bar{\sigma}}^n, \bar{\bar{\varepsilon}}^n\,» \varphi\, dx = \\
&\quad = -\int_\omega \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}^n \left\{(u^n - P_\omega u^n)_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + (u^n - P_\omega u^n)_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\} dx - \\
&\quad\quad - \int_\omega \frac{1}{2}\varphi \left\{\sum_{i=1}^N (u^n - P_\omega u^n)_i \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N (u^n - P_\omega u^n)_j \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_i}\right\} dx\,.
\end{aligned}\right.
$$

Les tenseurs $\bar{\bar{\sigma}}^n$ sont symétriques, bornés dans X, et convergent faiblement vers $\bar{\bar{\sigma}}$; on a donc:

$$
(4.6)\quad \left|\begin{array}{ll}
\sigma_{ij}^n \rightharpoonup \sigma_{ij} & \text{dans } L^2(\mathbf{R}^N) \text{ faible}\,, \\[2mm]
\displaystyle\sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_j} \rightharpoonup \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} & \text{dans } L^2(\mathbf{R}^N) \text{ faible}\,, \\[2mm]
\displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial x_i} \rightharpoonup \sum_{i=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} & \text{dans } L^2(\mathbf{R}^N) \text{ faible}\,.
\end{array}\right.
$$

D'autre part, de (4.4) et du théorème de compacité de Rellich-Kondrashov, on déduit qu'il existe une sous-suite (notée avec l'indice $p \in \mathbf{N}$) et $v \in (H^1(\omega))^N$ tels que:

$$
u^p - P_\omega u^p \to v \qquad \text{dans } (L^2(\omega))^N \text{ fort}\,.
$$

Or

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\bar{\bar{\varepsilon}}(u^p - P_\omega u^p) = \bar{\bar{\varepsilon}}(u^p) = \bar{\bar{\varepsilon}}^p & \text{dans } \omega\,, \\
P_\omega(u^p - P_\omega u^p) = 0 & \text{dans } \omega\,,
\end{array}\right.
$$

et donc en passant à la limite

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\bar{\bar{\varepsilon}}(v) \;\; = \bar{\bar{\varepsilon}} & \text{dans } \omega\,, \\
P_\omega(v) = 0 & \text{dans } \omega\,.
\end{array}\right.
$$

Comme il existe $u \in (L^2(\mathbf{R}^N))^N$, unique, tel que $\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}(u)$, on a donc

$$
v = u - P_\omega u \qquad \text{dans } \omega\,.
$$