ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

S. L. SOBOLEV

Les coefficients optimaux des formules d'intégration approximative

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 5, nº 3 (1978), p. 455-469

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_3_455_0>

Les coefficients optimaux des formules d'intégration approximative.

S. L. SOBOLEV (*)

dédié à Jean Leray

§ 1. – Les formules d'intégration des fonctions d'une variable indépendante ont été l'object de plusieurs recherches. Depuis le XVII siècle ont connaît les formules de rectangles, de trapèces, les formules de Simpson et Gregory. Les formules qui ont apparu plus tard appartiennent à Gauss, Tchebychov, Radon et aux autres.

A présent l'intérêt à ces formules est renouvelé et on considère leur théorie comme une partie de la théorie générale d'approximation.

Le problème important qui se pose c'est le problème de la construction des formules optimales, minimisant la norme de la fonctionnelle d'erreur. (Nous n'entamons ici ni la question des formules optimales par la degré d'approximation, ni des formules assymptotiquement optimales).

Récemment les différents auteurs ont élaboré à l'aide de « spline » approximation les méthodes de la construction des formules optimales dans certains espaces naturels du type hilbertien et de pareilles formules ont été construites pour l'intervalle semi-infini (voir [1]-[4]).

Dans le livre [5] l'auteur a considéré les problèmes qui se rattachent à l'integration des fonctions de plusieurs variables indépendantes à la base du calcul de variation. On a trouvé que cette méthode, appliquée aux fonctions d'une seule variable a permis de trouver quelques résultats bien générals qui dans un certain sens vont plus loin que les résultats obtenus par la méthode de « spline ». Cette théorie est le sujet de l'article présent.

Rappelons quelques notations du livre [5]. On considère l'espace $L_2^{(m)}(R^n)$

(*) Institut des Mathématiques, Académie des Sciences de l'URSS, Novosibirsk.
Pervenuto alla Redazione il 17 Giugno 1977.

des classes des fonctions données dans R^n avec la norme:

$$\|\varphi | L_2^{(m)} | R^n\|^2 = \left\{ \int \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (\mathfrak{D}^\alpha \varphi)^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

invariante par rapport à toutes les transformations orthogonales de R^n. Les éléments w de cet espace sont des classes des fonctions qui se diffèrent d'un polynome du degré $< m$. Soit $\boldsymbol{P}_{m-1}$ est l'espace de tous ces polynomes. Alors:

$$Cl\, v_1 = Cl\, v_2 \; dans \; L_2^{(m)} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \boldsymbol{P}_{m-1} \, . \tag{2}$$

Chaque formule d'intégration est caractérisée par sa fonctionnelle d'erreur $l(x)$:

$$\big(l(x), \varphi(x)\big) \geqslant \int l(x) \varphi(x) \, dx \, , \tag{3}$$

$$l(x) = g(x) - \sum_{r} h^n c[\gamma] \delta(x - hH\gamma) \, . \tag{4}$$

Ici $g(x)$ est le poids de la formule (4), tel que

$$\operatorname{supp} g(x) = \Omega$$

où Ω est un domaine compact, h est un paramètre considéré comme petit, H est une matrice telle que:

$$\det H = 1 \tag{5}$$

x est la variable d'intégration qui est un vecteur colonne, γ-variable discrète est aussi un vecteur colonne aux éléments entiers. La fonction $c[\gamma]$ dénote les coefficients de la formule d'intégration. Les parenthèses carrées sont toujours employées pour les fonctions des variables discrètes. Ici nous supposons toujours que

$$c[\beta] = 0 \qquad hH\beta \mathrel{\bar{\in}} \Omega \tag{6}$$

c.a.d.

$$\operatorname{supp} c[\beta] = \beta \colon hH\beta \in \Omega \, .$$

Pour que la fonctionnelle d'erreur soit définie et bornée dans $L_2^{(-m)}$-l'espace, conjugué à $L_2^{(m)}$, il faut et il suffit que

$$m > \frac{n}{2} \tag{7}$$

et

$$(l(x), x^\alpha) = 0 \; ; \qquad |\alpha| < m \tag{8}$$

c.a.d. que

$$(l(x), f(x)) = 0 \qquad \text{si } f \in \boldsymbol{P}_{m-1} \, .$$

Les problèmes relatifs aux formules d'intégration sont liés avec la minimisation de la norme de l'erreur dans $L_2^{(-m)}$.

Dans [5] se trouve l'expression explicite de cette norme pour chaque $l(x) \in L_2^{(-m)}$

$$\| l(x) | L_2^{(-m)} | R^n \|^2 = \big(l(x), \mathcal{G}_m(x) * l(x)\big) \, . \tag{9}$$

Ici $\mathcal{G}_m(x)$ est la solution fondamentale de l'équation polyharmonique:

$$\Delta^m \mathcal{G}_m(x) = \delta(x) \tag{10}$$

$l(x)$ étant une fonctionnelle d'erreur du type (3) on obtient

$$\begin{aligned} \| l(x) | L_2^{(-m)} \|^2 = \sum_\beta \sum_\gamma h^{2n} c[\gamma] c[\beta] \mathcal{G}_m\big(hH(\gamma - \beta)\big) - \\ - 2 \sum_\beta h^n c[\beta] \int \mathcal{G}_m(y - hH\beta) g(y) \, dy + \iint \mathcal{G}_m(y - z) g(y) g(z) \, dy \, dz \, . \end{aligned} \tag{11}$$

Une fonctionnelle d'erreur sera appellée optimale si $c[\beta]$ rend le minimum à sa norme par rapport à tous les $c'[\beta]$ possibles.

Le carré de la norme (11) étant une forme quadratique en $c[\beta]$ la formule optimale existe toujours. On peut établir aussi son unicité.

Indiquons un théorème qui s'ensuit de cette définition. Considérons la première variation de la forme (11) aux conditions (8). Nous aurons:

$$\begin{aligned} \delta \| l(x) \|^2 = 2 \sum_\beta h^n k[\beta] \mathcal{G}_m(x - hH\beta) - 2 \int \mathcal{G}_m(y - hH\beta) g(y) \, dy = \\ = - 2\big(l(x), \sum k[\beta] \mathcal{G}_m(x - hH\beta)\big) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

pour chaque $k[\beta]$ telle que

$$k[\beta] = 0 \; ; \qquad hH\beta \,\bar{\in}\, \Omega \, , \tag{13}$$

$$\sum_\beta k[\beta] \beta^\alpha = 0 \; ; \qquad |\alpha| < m \, . \tag{14}$$

Le résultat peut être formulé comme:

THÉORÈME I. *La formule optimale donne la valeur exacte à l'intégrale*

$$\int g(x)\varphi(x)\,dx \tag{15}$$

pour toutes les fonctions du type:

$$\varphi(x) = \sum k[\beta]\mathcal{G}_m(x - hH\beta)\,. \tag{16}$$

Dans le cas $n = 1$, $g(x) = \iota_{[\alpha,\beta]}(x)$, l'indicateur de l'intervalle $[a, b]$, les fonctions du type (16) sont des «splines» de la fonction quelconque. La exactitude de la formule optimale pour les «splines» suit donc du Théorème I. Ce résultat appartient à Schoenberg [3], [4]. Remarquons que la démonstration citée sera valable non seulement pour les formules optimales avec les noeuds dans une maille $hH\gamma$ mais pour les formules aux noeuds arbitraires.

En se servant de la méthode de Lagrange pour le minimum relatif on obient le système d'équations pour les coefficients optimaux (voir [5]).

$$h^n c[\beta] * \mathcal{G}_m[\beta] + P_{m-1}[\beta] = f[\beta]\,; \qquad hH\beta \in \Omega\,, \tag{17}$$

$$c[\beta] = 0\,; \qquad hH\beta \mathrel{\bar{\in}} \Omega\,, \tag{18}$$

$$(c[\beta], \beta^\alpha) = \sum_\beta c[\beta]\,\beta^\alpha = f_\alpha\,; \qquad |\alpha| < m\,. \tag{19}$$

Ici $P_{m-1}[\beta]$ est un certain polynome inconnu

$$P_{m-1}[\beta] \in \pi_{m-1} \tag{20}$$

π_k étant l'espace des polynomes du degré k d'une variable discrète,

$$\mathcal{G}_m[\beta] = \mathcal{G}_m(hH\beta)\,, \tag{21}$$

$$f[\beta] = \int g(y)\,\mathcal{G}_m(y - hH\beta)\,dy\,, \tag{22}$$

$$f_\alpha = \int g(y)\,y^\alpha\,dy\,. \tag{23}$$

Le système (17)-(19) est un système du type Hopf-Wiener pour $c[\beta]$.

Remarquons que si

$$g(x) = w(x)\,\iota_\Omega(x)$$

où

$$w(x) \in \boldsymbol{P}_q\,, \qquad \text{alors } f[\beta] \in \pi_{2m+q};\ \beta \in \Omega\,.$$

La condition (19) peut être remplacée par une autre qui se rattache à la fonction

$$u(\beta) = v[\beta] + P_{m-1}[\beta] , \qquad v[\beta] = c[\beta] * \mathcal{G}_m[\beta] , \tag{24}$$

définie pour tous les β.

Bornons nous ici du cas qui nous intéresse: $n = 1$.

Soient

$$n = 1 ; \quad h = 1 ; \quad \Omega = [-\eta_1, N + \eta_2] ; \quad N\text{-entier} , \ 0 \leqslant \eta_j < 1 . \tag{25}$$

Alors

$$\mathcal{G}_m(x) = \frac{1}{2(2m-1)!} x^{2m-1} \operatorname{sgn} x , \tag{26}$$

$$\mathcal{G}_m[\beta] = \frac{1}{2(2m-1)!} \beta^{2m-1} \operatorname{sgn} \beta , \tag{27}$$

Nous avons

$$v[\beta] = \sum_{\gamma} \mathcal{G}_m[\beta - \gamma] c[\gamma] . \tag{28}$$

En développant le $\mathcal{G}_m[\beta - \gamma]$ en dehors du Ω on obtient:

$$v[\beta] = \operatorname{sgn} \beta \cdot \sum_k \Big(\sum_{\gamma} \gamma^{2m-k-1} c[\gamma] \Big) \frac{(-1)^{k+1}}{k!(2m-k-1)!} \beta^k . \tag{29}$$

En tenant compte du (23) nous avons pour $v[\beta]$ l'expression:

$$v[\beta] = Q^{(2m-1,m)}[\beta] + Q_{m-1}[\beta] \begin{cases} +1 & \beta > N , \\ -1 & \beta < 0 , \end{cases} \tag{30}$$

où

$$Q^{(2m-1,m)}[\beta] = \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{(-1)^{k+1} f_{2m-k-1}}{k!(2m-k-1)!} \beta^k . \tag{31}$$

$Q_{m+1}[\beta]$ sera un nouveau polynome inconnu

$$Q_{m-1}[\beta] \in \pi_{m-1} . \tag{32}$$

La condition (19) est équivalente à (30) où $Q^{(2m-1,m)}[\beta]$ est défini par (31). De cette façon en dehors de Ω

$$u[\beta] = \pm Q^{(2m-1,m)}[\beta] + Q^{(\pm)}[\beta] \tag{33}$$

où

$$Q^{(\pm)}[\beta] = \pm Q^{(2m-1,m)}[\beta] + P_{m-1}[\beta], \tag{34}$$

$Q^{(+)}[\beta]$ et $Q^{(-)}[\beta]$ sont deux nouveaux polynomes du degré moins que m et d'ailleurs, indépendants à cause de l'indépendance de $Q_{m-1}[\beta]$ et $P_{m-1}[\beta]$.

Finalement pour $u[\beta]$ on a les équations (33) et

$$u[\beta] = f[\beta]; \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant N. \tag{35}$$

D'ailleurs, $u[\beta]$ doit être représentable sous la forme (24)

$$u[\beta] = v[\beta] + P_{m+1}[\beta] \quad \text{où} \quad v[\beta] = \mathcal{G}_m[\beta] * c[\beta]. \tag{36}$$

On peut établir que le problème de la recherche de $u[\beta]$ qui satisfait à ces conditions est complétement équivalent au problème de la recherche des coefficients optimaux de la formule de l'integration approchée.

Le système (33)-(35) permet de reconstituer $u[\beta]$ à un polynome $P_{m-1}[\beta] \in \in \pi_{m-1}$ près et ensuite de trouver $c[\beta]$ à l'aide de l'opérateur inverse $(\mathcal{G}_m[\beta]*\cdot)^{-1}$ comme c'était exposé en [5]. Cependant, la condition de la représentabilité en forme (24) se trouve incommode d'être employée. L'opérateur $(\mathcal{G}_m[\beta]*\cdot)^{-1}$ n'est pas fini, son support est tout l'espace de β discrets. C'est pourquoi la condition (26) s'exprime comme une infinité des équations qui lient les valeurs de $u[\beta]$ dans tous les points. Et quoique ces valeurs en dehors du domain Ω s'expriment à priori par les valeurs du $u[\beta]$ à l'intérieur du Ω c.a.d. par une quantité finie d'inconnues, nous aurons pour $u[\beta]$ un système encombrant avec $N+1$ d'inconnues.

Ici nous allons choisir une autre voie.

§ 2. – Au lieu de la recherche du potentiel $v[\beta]$ nous allons trouver un autre

$$\hat{v}[\beta] = c[\beta] * H_m[\beta] \tag{37}$$

et une nouvelle fonction

$$\hat{u}[\beta] = \hat{v}[\beta] + \hat{P}_{m-1}[\beta] \tag{38}$$

où

$$H_m[\beta] = \frac{(\beta - m + 1)(\beta - m + 2) \dots \beta(\beta + 1) \dots (\beta + m - 1)}{2(2m-1)!} \operatorname{sgn} \beta. \tag{39}$$

Indiquons:

(40) $$\Delta_2[\beta] = \delta[\beta+1] - 2\delta[\beta] + \delta[\beta-1]$$

et

(41) $$\Delta_2^{[m]} \equiv \Delta_2^{[m]}[\beta] = \overbrace{\Delta_2[\beta] * \Delta_2[\beta] * \ldots * \Delta_2[\beta]}^{m\text{-fois}} = \\ = \sum_{k=-m}^{m} \binom{2m}{m+k} (-1)^k \delta(\beta - k) .$$

La fonction $H_m[\beta]$ satisfait à l'équation:

(42) $$\Delta_2^{[m]} * H_m[\beta] = \delta[\beta] .$$

La formule (42) suit des identités:

(43) $$\Delta_2 * H_m[\beta] = H_{m-1}[\beta]$$

et

(44) $$\Delta_2 * H_1[\beta] = H_0[\beta] = \delta[\beta]$$

que l'on vérifie par le calcul immédiat.

Des équations (38) et (42) on obtient l'identité

(45) $$c[\beta] = \Delta_2^{[m]}[\beta] * \hat{u}[\beta] .$$

La recherche de $c[\beta]$ sera donc réduite à la prise d'une différence finie de la fonction $\hat{u}[\beta]$ et, comme nous allons voir un peu plus tard, on va obtenir au bout du compte un système des $(2m-2)$ équations pour la recherche de $c[\beta]$. Entre les fonctions $\mathcal{G}_m[\beta]$ et $H_m[\beta]$ il y a une relation que nous allons établir.

Passons aux images de Fourier de ces deux fonctions. Soit

(46) $$\begin{cases} \widetilde{f(x)} = \tilde{f}(p) = \int \exp\,[2\pi i p x] f(x)\, dx \,; \\ \overline{\psi(p)} = \overline{\psi}(x) = \int \exp\,[-2\pi i p x] \psi(p)\, dp \,. \end{cases}$$

L'opérateur de la transformation de Fourier étant étendu sur les distributions d'une façon correspondante (voir [5]).

On a:

(47) $$\overline{\overline{f}}(x) = f(x) , \qquad \overline{\overline{\psi}}(p) = \psi(p) .$$

Notons encore:

$$\overline{\chi[\beta]} = \chi(x) = \sum_\beta \chi[\beta]\delta(x-\beta) \tag{48}$$

et

$$\widetilde{f[\beta]} = \widetilde{\overline{f}}(p) = \int \exp[2\pi i p x]\overline{f}(x)\,dx\,. \tag{49}$$

Il est connu que dans ces relations (voir [5])

$$\widetilde{1} = \underset{\smile}{1} = \delta(p)\,; \qquad \widetilde{\delta(x)} = \underset{\smile}{\delta(x)} = 1\,, \tag{50}$$

$$\widetilde{\varphi(x)\cdot\psi(x)} = \tilde{\varphi}(p) * \tilde{\psi}(p)\,, \tag{51}$$

$$\widetilde{\varphi(x) * \psi(x)} = \tilde{\varphi}(p)\cdot\tilde{\psi}(p)\,, \tag{52}$$

et les mêmes relations pour $\smile$.

Soit

$$\phi_0(x) = \sum_\beta \delta(x-\beta)\,.$$

Alors, la formule suivante a lieu

$$\widetilde{\phi_0[x]} = \phi_0(p) \tag{53}$$

ce qui présente une expression moderne de la formule connue de Poisson.

On a

$$\widetilde{\Delta_2[\beta]} = -4\sin^2\pi p\,. \tag{54}$$

Pour la fonction $\widetilde{H_m[\beta]}$ on obtient du (42):

$$H_m[\beta] = (\Delta_2^{[m]}[\beta])^{-1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\sin^{2m}\pi p}\,. \tag{55}$$

Pour l'image de Fourier de la fonction $\mathcal{G}_m[\beta]$ on a:

$$\overline{\mathcal{G}_m[\beta]} = \sum_\beta \mathcal{G}_m[\beta]\delta(x-\beta) = \mathcal{G}_m(x)\cdot\phi_0(x)\,. \tag{56}$$

D'où en indiquant:

$$\mathfrak{D}^k(x) = (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\delta(x)\,, \tag{57}$$

$$\mathcal{G}_m\widetilde{[\beta]} = \widetilde{\mathcal{G}_m(x)\cdot\phi_0(x)} = \left(\widetilde{\mathfrak{D}^{[2m]}(x)}\right)^{-1} * \phi_0(p)\,, \tag{58}$$

et comme

$$\mathfrak{D}^{[2m]}(x) = (-1)^m (2\pi)^{2m} p^{2m} \tag{59}$$

finalement

$$\widetilde{\mathfrak{G}_m[\beta]} = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta (p-\beta)^{-2m} = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}(2m-1)!} \frac{d^{2m-2}}{dp^{2m-2}} \sum_\beta (p-\beta)^{-2}. \tag{60}$$

D'après le développement connu de Mittag-Leffler pour $\pi^2/\sin^2 \pi p$ on obtient:

$$\widetilde{\mathfrak{G}^m[\beta]} = \frac{(-1)^m}{2\pi^{2m}(2m-1)!} \frac{d^{2m-2}}{dp^{2m-2}} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi p}. \tag{61}$$

De (50) et (56) il suit aisément:

$$\widetilde{\mathfrak{G}^m[\beta]} = \frac{\mathcal{A}^{(m)}(\sin^2 \pi p)}{2^{2m}(2m-1)!} \frac{1}{\sin^{2m} \pi p} = \frac{\mathcal{A}^{(m)}(\sin^2 \pi p)}{(2m-1)!} \widetilde{H_m[\beta]} \tag{62}$$

où

$$\mathcal{A}^{(m)}(\sin^2 \pi p) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{m-j}^{(m)} (\sin^2 \pi p)^j \tag{63}$$

est un polynome en $\sin^2 \pi p$ du degrès $(m-1)$. Dans [5] les formules récurrentes pour les coefficients $a_{m-1}^{(m)}$ ont été données et quelques premières d'entre eux ont été calculées. Remarquons que

$$a_m^{(m)} = (2m-1)! \tag{64}$$

La formule générale pour $a_j^{(m)}$ a été donnée par Mme F. Zaguirova (pas publié).

Ici nous nous servons d'autre formule, qui lie

$$\widetilde{\mathfrak{G}_m[\beta]} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{H_m[\beta]}\,.$$

Posons

$$\exp(2\pi i p) = \lambda\,.$$

Alors:

$$\frac{d}{dp} = 2\pi i \lambda \frac{d}{d\lambda}, \qquad \sin^2 \pi p = \frac{(1-\lambda)^2}{-4\lambda}. \tag{65}$$

D'où

$$\frac{d^{2m-2}}{dp^{2m-2}} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi p} = (-1)^m (2\pi)^{2m} \left(\lambda \frac{d}{d\lambda}\right)^{[2m-2]} \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}. \tag{66}$$

Introduisons les polynomes de Euler par la formule

$$\lambda E_k(\lambda) = (1-\lambda)^{k+2}\left(\lambda \frac{d}{d\lambda}\right)^{[k]} \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \tag{67}$$

(voir [1]). La formule (66) peut être écrite sous la forme:

$$\widetilde{\mathcal{G}_m[\beta]} = \frac{1}{(2m-1)!}\, \frac{\lambda^{-m+1}}{2^{2m}} \left[\frac{-4\lambda}{(1-\lambda)^2}\right]^m E_{2m-2}(\lambda)\,. \tag{68}$$

D'où enfin

$$\widetilde{\mathcal{G}_m[\beta]} = \frac{1}{(2m-1)!}\, e^{-2\pi i(m-1)p} E_{2m-2}(\exp[2\pi i p])\, \widetilde{H(\beta)}\,. \tag{69}$$

Soit

$$\exp[-2\pi i(m-1)p] E_\lambda(\exp[2\pi i p]) = \sum_{\beta=-m+1}^{m-1} B_{2m-2}[\beta] \exp[2\pi i \beta p]\,. \tag{70}$$

Il est connu [1] que

$$B_{2m-2}[\beta] = B_{2m-2}[-\beta]\,.$$

La fonction $B_{2m-2}[\beta]$ de la variable discrète β est evidemment le prototype de Fourier de

$$\exp[-2\pi i(m-1)p] E_{2m-2}(\exp[2\pi i p])\,.$$

Revenant des $\widetilde{\mathcal{G}_m[\beta]}$ et $\widetilde{H_m[\beta]}$ aux fonctions mêmes, on obtient le théorème important suivant.

THÉORÈME II. *Les fonctions $\mathcal{G}_m[\beta]$ et $H_m[\beta]$ sont liées par une équation aux différences finies avec les coefficients constants:*

$$\mathcal{G}_m[\beta] = B_{2m-2}[\beta] * H_m[\beta]\,. \tag{71}$$

§ 3. – Considérons d'une façon plus détaillée l'équation aux différences finies et aux coefficients constants:

$$B_{2m-2}[\beta] * \mathring{\chi}[\beta] = \chi[\beta]\,. \tag{72}$$

L'équation caractéristique de (72) est

$$E_{2m-2}(\lambda) = 0\,. \tag{73}$$

Il est connu que les racines de cette équation sont réels simples et négatives. Ils sont réciproquement inverses par paires. Il est convenable de les noter comme:

$$(74) \qquad -1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{m-1} < 0\,, \qquad \lambda_{-j} = 1/\lambda_j\,.$$

Du fait qu'il n'y a pas d'unité parmi les racines de (73) il suit que le second membre $\chi[\beta]$ de (72) étant un polynome du degré q la solution particulière existe $\hat{\chi}[\beta]$ qui est à son tour un polynome du degré q.

$$\chi[\beta] \in \pi_q \Rightarrow \exists \hat{\chi}_0[\beta]: \hat{\chi}_0[\beta] \in \pi_q\,.$$

Les coefficients du polynome $\hat{\chi}[\beta]$ sont liés dans ce cas par un système d'équations avec la matrice triangle Ξ dont tous les éléments situés au dessous de la diagonale principale sont nuls. Ainsi tous les coefficients auprès des termes de puissance q $q-1, \ldots, r$ de $\hat{\chi}[\beta]$ s'expriment par les coefficients auprès des puissances $q, q-1, \ldots, r$ de $\chi[\beta]$. La formule (63) montre, que $B_{2m-2}[\beta]$ peut être présenté sous la forme:

$$(75) \qquad B_{2m-2}[\beta] = \frac{1}{(2m-1)!} \sum_{j=0}^{m-1} a_{m-j}^{(m)} \Delta_2^{[j]}[\beta]\,.$$

De (64) il suit alors, que les éléments de la diagonale principale de Ξ sont égals à 1. Les coefficients $B_{2m-2}[-m+1] = 1$ ne sont pas nuls. Il s'ensuit que la valeur de la fonction $\hat{\chi}[\beta]$ dans un certain point β peut être exprimée par les valeurs de cette fonction dans $(2m-2)$ points précédents et la valeur de $\chi[\beta-m+1]$ de même que par les valeurs de $\hat{\chi}[\beta]$ dans $(2m-2)$ points suivants et $\chi[\beta+m-1]$. Nous avons la conséquence:

Si $\chi[\beta]$ est donné dans l'intervalle $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$ la fonction $\hat{\chi}[\beta]$ dans l'intervalle $\beta_1 - m + 1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2 + m - \beta$ sera définie uniquement par ses valeurs dans n'importe quels $(2m-2)$ points successifs $\beta_3, \beta_3+1, \ldots, \beta_3+(2m-1)$ situés dans $[\beta_1 - m + 1, \beta_2 + m - 1]$. En particulier, si $\chi[\beta] \in \pi_q$ dans le domaine $0 \leqslant \beta \leqslant N$ alors, il existe (et il est unique) la solution particulière de l'équation (72) dans l'intervalle $-m+1 \leqslant \beta \leqslant N + m - 1$ telle que

$$\hat{\chi}_0[\beta] \in \pi_q\,.$$

Revenant maintenant à notre «potentiel» $\hat{v}[\beta] = c[\beta] * H_m[\beta]$ nous voyons que pour tous les β la formule suivante est vraie:

$$(76) \qquad B_{2m-2}[\beta] * \hat{v}[\beta] = v[\beta]\,.$$

On peut voir bien aisément que si l'on prend pour $\hat{P}_{m-1}[\beta]$ la solution polynomiale de l'équation

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{P}_{m-1}[\beta] = P_{m-1}[\beta], \qquad \hat{P}_{m-1}[\beta] \in \pi_{m-1}[\beta],$$

alors, la fonction $\hat{u}[\beta]$ définie par (38) sera partout la solution de l'équation

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}[\beta] = u[\beta]. \tag{77}$$

En partant de ceci nous essayons de trouver les conditions que $\hat{u}[\beta]$ doit remplir.

Dans l'intervalle $-m+1 \leqslant \beta \leqslant N+m-1$ la fonction $\hat{u}[\beta]$ doit s'exprimer comme

$$\hat{u}[\beta] = \hat{f}_0[\beta] + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \lambda_j^\beta + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \lambda_j^{N-\beta}, \tag{78}$$

$\hat{f}_0[\beta]$ étant une solution particulière de l'équation

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{f}_0[\beta] = f[\beta]. \tag{79}$$

Dans le cas où $f[\beta]$ dans $0 \leqslant \beta \leqslant N$ est un polynome du degré q il existe une solution $\hat{f}_0[\beta]$ (et seulement une) telle que:

$$\hat{f}_0[\beta] \in \pi_{2m+q}. \tag{80}$$

Pour les $\beta : \beta > N - m + 2$ ou $\beta < m - 2$ nous aurons comme une conséquence de (33)

$$\hat{u}[\beta] = \pm Q^{(2m-1,m)}[\beta] + \hat{Q}^{(\pm)}[\beta] \tag{81}$$

où les coefficients de

$$\hat{Q}^{(2m-1,m)}[\beta] = \sum_{k=m}^{2m-1} \hat{q}_k \beta^k \tag{82}$$

se définissent de l'équation (77) tandis que $Q_{m-1}^{(\pm)}$ reste inconnue.

Pour reconstituer $\hat{u}[\beta]$ finalement nous obtenons de la formule (45)

$$\Delta_2^{[\beta]}[\beta] * \hat{u}[\beta] = 0, \qquad \beta > N \text{ ou } \beta < 0. \tag{83}$$

L'équation (83) nous donne:

$$\hat{u}[\beta] \subset \pi_{2m-1}, \qquad \beta > N - m + 1 \text{ ou } \beta < m - 1. \tag{84}$$

Il est aisé de voir que la formule (81) doit être vraie dans un intervalle un peu plus large et notemment

$$\beta > N + m - 1 \qquad \text{ou} \qquad \beta < m - 1\,. \tag{85}$$

Remarquons que de cette façon la fonction $\hat{u}[\beta]$ dans des intervalles

$$\Omega_2 = \{\beta: N - m + 1 \leqslant \beta \leqslant N + m - 1\} \text{ et } \Omega_3 = \{\beta: -m + 1 \leqslant \beta \leqslant m - 1\}$$

est définie d'une façon double par (78) et par (81).

Pour que ces deux valeurs coincident il faut se servir de la liberté du choix des $2m - 2$ coefficients a_j et b_j et $2m$ coefficients des deux polynomes qui restent encore arbitraires: $\hat{Q}^{\pm}_{m-1}[\beta]$. Ce sont exactement les $4m - 2$ constantes qui nous permettent de parvenir à la coïncidence des formules (78) et (81) dans $4m - 2$ points de Ω_2 et Ω_3.

Nous voyons donc que les conditions définissant $\hat{u}[\beta]$ se réduisent à celles qui peuvent être exprimées au moyen d'un système de $4m - 2$ équations linéaires dont les coefficients ne dépendent pas du nombre N des points d'intégration ce qui diffère les conditions auxquelles satisfait la fonction $u[\beta]$.

Se nombre peut être réduit encore. Comme les polynomes $Q^{(\pm)}[\beta]$ ne présentent aucun intérêt, nous pouvons éviter leur calcul.

Dans ce but considérons deux fonctions

$$\chi_+[\beta] = \hat{f}_0[\beta] + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \lambda_j^{\beta} + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \lambda_j^{N-\beta} - \hat{Q}^{(2m-1,m)}[\beta] \tag{86}$$

pour

$$N - m + 1 \leqslant \beta \leqslant N + m - 1$$

et

$$\chi_-[\beta] = \hat{f}_0[\beta] + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \lambda_j^{\beta} + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \lambda_j^{N-\beta} + \hat{Q}^{(2m-1,m)}[\beta] \tag{87}$$

pour

$$- m < 1 \leqslant \beta \leqslant m - 1\,.$$

Des formules (78) et (81) il s'ensuit que dans des intervalles correspondants

$$\chi_{\pm}[\beta] \in \pi_{m-1}\,. \tag{88}$$

Chaque de ces intervalles contient exactement $2m - 1$ points. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\chi_+[\beta]$ ou $\chi_-[\beta]$ soit un polynome du degré $(m - 1)$ consiste en ce que tous ses différences finies d'ordre m qui se définissent dans les intervalles correspondants doivent être nulles.

Comme chaque cet intervalle contient $(2m-1)$ points et comme la formation d'une différentielle finie de l'ordre m demande les valeurs de la fonction dans $(m+1)$ point successif on voit qu'à chaque fonction $\chi_+[\beta]$ ou $\chi_-[\beta]$ il faut et il suffit d'imposer exactement $(m-1)$ condition suivante:

$$\Delta^{[m]}\chi_+[\beta]=0\ ; \qquad N-m+1\leqslant\beta\leqslant N-1\ , \tag{89}$$

$$\Delta^{[m]}\chi_-[\beta]=0\ ; \qquad -m+1\leqslant\beta\leqslant -1\ . \tag{90}$$

Les conditions (89) et (90) nous donnent un système d'équations pour les $2m-2$ constantes inconnues: a_j et b_j.

Il est bien évident que le déterminant du système (89)-(90) est différent du zéro. Après avoir calculé les a_j et b_j on parvient à definir les fonctions $\chi_+[\beta]$ et $\chi_-[\beta]$ donc on peut trouver les polynomes $\hat{Q}^{(\pm)}_{m-1}[\beta]$.

Il nous reste enfin de calculer la fonction $c[\beta]$. La formule (78) permet de prendre la différence finite $\Delta_2^{[m]}[\beta]*\hat{u}[\beta]$ pour les valeurs de β: $1\leqslant\beta\leqslant$ $\leqslant N-1$. La formule (45) nous donne donc pour $c[\beta]$ dans cet intervalle

$$c[\beta]=\Delta_2^{[m]}[\beta]*\hat{f}_0[\beta]+\sum_{j=1}^{m-1}k_j\lambda_j^\beta+\sum_{j=1}^{m-1}l_j\lambda_j^{n-\beta}\ . \tag{91}$$

Dans le cas où $g(x)=\iota_{[-\eta_1,N+\eta_2]}(x)$ le terme de l'ordre $2m$ du polynome $\hat{f}_0[\beta]$ est égal à $\beta^{2m}/2m!$, d'où

$$c[\beta]=1+\sum_{j=1}^{m-1}k_j\lambda_j^\beta+\sum_{j=1}^{m-1}l_j\lambda_j^{N-\beta}\ . \tag{92}$$

On calcule les valeurs du $c[\beta]$ aux points extrêmes $\beta=0$ et $\beta=N$ au moyen de la formule

$$\Delta_2^{[m]}[\beta]=\Delta^{[2m-1]}[\beta-m+2]-\Delta^{[2m-1]}[\beta-m+1]\ . \tag{93}$$

Les deux termes dans (93) peuvent être calculés séparément en se servant des formules (78) et (81).

Les raisonnements simples nous montrent que toutes les conditions (17), (18) et (19) sont remplies. Le problème est résolu.

Toute notre considération a été basée sur l'utilisation de l'espace fonctionnel $L_2^{(m)}(R^n)$ avec la norme définie par (1). Dans le cas spécial $n=1$ que nous avons traité ici cette norme coïncide avec la norme $L_2^{(m)}(-\eta_1<$

$< x < N + \eta_2)$ définie par

$$\|\varphi | L_2^{(m)}| - \eta_1 \leqslant x \leqslant N + \eta_2\|^2 = \int_{-\eta_1}^{N+\eta_2} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (\mathfrak{D}^\alpha \varphi)^2 \, dx \, .$$

En effet, la fonction $\varphi(x)$ donnée dans l'intervalle $-\eta_1 < x < N + \eta_2$ peut être étendue sur toute la droite réele avec la norme minimale dans $L_2^{(m)}(R)$. Ce prolongement consiste en ce qu'on doit poser

$$\varphi(x) \in \pi_{m-1} \, ; \qquad x < 0 \text{ or } x > N \, .$$

On voit immédiatement que si l'on demande la continuité des dérivées de $\varphi(x)$ de l'ordre $< m$ alors,

$$\|\varphi | L_2^{(m)} | R\| = \|\varphi | L_2^{(m)}| - \eta_1 < x < N + \eta_2\| \, .$$

Il s'ensuit que la minimisation de la norme de la fonctionnelle d'erreur donne évidemment le même résultat pour les deux cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Frobenius, *Über Bernoullische Zahlen und Eulerschen Polynomen*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (1910), pp. 809-847.

[2] L. F. Meyers - A. Sard, Am. J. Math. Phys., **29**.

[3] I. J. Schoenberg, Bull. of the Am. Math. Soc., **70**, no. 1 (1964), pp. 143-148.

[4] I. J. Schoenberg - S. P. Silliman, Math. of Comp., **22**, no. 126 (1974), pp. 483-497.

[5] A. Sard, Am. J. of Math., **71** (1949), pp. 80-91.

[6] S. L. Sobolev, *Introduction dans la théorie des formules d'intégration approximative*, M. Nauka (1974).