ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

H. G. GARNIR
P. LÉONARD

Extension d'un théorème de l. Gårding à certaines fonctions hyperboliques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 5, nº 1 (1978), p. 115-129
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_1_115_0>

Extension d'un théorème de L. Gårding à certaines fonctions hyperboliques.

H. G. GARNIR (*) - P. LÉONARD (*)

dédié à Jean Leray

It is shown that an important property of hyperbolicity due to L. Gårding (1950) shifts from the polynomials to some nonpolynomial functions. Such an extension is required to deal with the boundary value problems for hyperbolic matrix differential operators in the half-space. Our result is a completed and precised version of a theorem of R. Sakamoto (1974).

1. – L'hyperbolicité des opérateurs matriciels aux dérivées partielles joue un rôle capital dans l'étude des solutions élémentaires du problème d'évolution posé à leur sujet dans l'espace indéfini, grâce à un théorème de L. Gårding établi en 1950 relatif aux polynômes hyperboliques ([1], cf. aussi [2]). Elle permet notamment d'affirmer que les perturbations décrites par le système étudié se propagent par ondes.

Lorsqu'on étudie parallèlement la solution élémentaire des problèmes aux limites correspondants dans le demi-espace (voyez des travaux récents de M. Matsumura, S. Wakabayashi, M. Tsuji, H. G. Garnir et ses collaborateurs), on a besoin d'une extension du théorème de L. Gårding à certaines fonctions non polynomiales constituées par les dénominateurs de Lopatinski qui interviennent dans l'expression de ces solutions élémentaires.

Une telle généralisation a été signalée en 1974 par R. Sakamoto [3] dans une présentation qui nous paraît incomplète, sinon sujette à caution.

Nous donnons ici une version détaillée et rigoureuse de ce théorème, sous des hypothèses telles qu'il s'applique à la fois aux polynômes et aux dénominateurs de Lopatinski des problèmes aux limites du demi-espace.

(*) Université de Liège (Belgique).
Pervenuto alla Redazione il 12 Maggio 1977.

2. – Considérons une fonction $F(Z)$ de $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \boldsymbol{C}_n$.

a) *Supposons* $F(Z)$ holomorphe dans un ensemble de la forme

$$\{Z : \Re z \in ce + C\},$$

où C désigne un cône ouvert convexe, e un point de ce cône et c une constante $\geqslant 0$.

b) *Supposons* que cette fonction $F(Z)$ admette un *degré* et une *partie principale*, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel h une fonction $\mathring{F}(Z) \neq 0$ de $Z \in \{Z : \Re z \in C\}$, tels que si $\Re z \in C$,

$$\boxed{\lim_{\lambda \text{ réel} \to +\infty} \frac{F(\lambda z)}{\lambda^h} = \mathring{F}(Z)}\,.$$

Cette définition a un sens: *si* $\Re z \in C$, *alors* $\lambda \Re z \in ce + C$ *dès que* λ *réel est assez grand.*

En effet, comme C est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Re z - \varepsilon e \in C$ et alors

$$\lambda \Re Z = ce + \lambda\left(\Re z - \frac{c}{\lambda} e\right) \in C\,,$$

si $\lambda > c/\varepsilon$.

Remarquons d'ailleurs que *seuls les* Z *avec* $\Re Z \in C$ *sont tels que* $\lambda \Re Z \subset ce + C$ *dès que* λ *est assez grand.*

De fait, si $\lambda \Re Z \in ce + C$, $\forall \lambda \geqslant \lambda_0$, on a

$$\lambda Rz - ce \in C\,, \quad \forall \lambda > \lambda_0 \Rightarrow RZ - \frac{c}{\lambda} e \in C\,, \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_0 \Rightarrow RZ \in \overline{C}\,.$$

D'où la conclusion, car $\Re Z \notin \dot{C}$, sinon $\lambda \Re Z \in \dot{C}$, $\forall \lambda \geqslant \lambda_0$, et $\notin ce + C \subset C$ ouvert.

De plus, le *degré* h est unique.

En effet, pour $h' < h$, on a une limite $\equiv 0$ et pour $h' > h$ une limite infinie.

Voici notre hypothèse principale: *supposons* en outre, que dans la définition de $\mathring{F}(Z)$ la convergence puisse être renforcée sous la forme: *pour tout a tel que* $\Re a \in ce + C$, *pour tout compact* $K \subset \{Z : \Re Z \subset C\}$,

$$\boxed{\sup_{Z \in K} \left| \frac{F(\lambda Z + a)}{\lambda^h} - \mathring{F}(Z) \right| \to 0}\,, \tag{$*$}$$

lorsque $\lambda \to \infty$ *dans*

$$e_K = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \Re\lambda \geqslant 0,\ \Re(\lambda Z + a) \in ce + C,\ \forall Z \in K\}\ .$$

Si h n'est pas entier, on prend $\lambda^h = |\lambda| \exp[ih\theta]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Si on prend λ réel $\to +\infty$ alors, trivialement, la condition $\Re(\lambda Z + a) = \lambda\Re Z + \Re a \in ce + C$ est vérifiée pour tout $Z \in K$.

De là,

$$\boxed{\mathring{F}(Z) = \lim_{\lambda \text{ réel} \to +\infty} \frac{F(\lambda Z + a)}{\lambda^h}}$$

uniformément dans tout compact K *de* $\{Z: \Re Z \in C\}$.

Ainsi, $\mathring{F}(Z)$ *est holomorphe dans* C.

En effet, il en est ainsi de $F(\lambda Z + a)$, puisque $\Re(\lambda Z) + a \in ce + C$.

Cette formule reste encore vraie si on y remplace a par 0: ainsi l'hypothèse entraîne, en particulier,

$$\boxed{\lim_{\lambda \text{ réel} \to +\infty} \sup_{Z \in K} \left| \frac{F(\lambda Z)}{\lambda^h} - \mathring{F}(Z) \right| = 0}\ .$$

En effet, si $\Re a \in ce + C$, on a

$$\sup_{Z \in K} \left| \frac{F(\lambda Z)}{\lambda^h} - \mathring{F}(Z) \right| = \sup_{Z \in K} \left| \frac{F[\lambda(Z - a/\lambda) + a]}{\lambda^h} - \mathring{F}(Z) \right|$$
$$\leqslant \sup_{Z \in K'} \left| \frac{F(\lambda Z + a)}{\lambda^h} - \mathring{F}(Z) \right| + \sup_{Z \in K} \left| \mathring{F}\left(Z - \frac{a}{\lambda}\right) - \mathring{F}(Z) \right|,$$

en posant

$$K' = \{Z: d(Z, K) \leqslant \varepsilon\}\ ,$$

avec ε assez petit.

Le premier terme de la majorante tend vers 0, car

$$K' \subset \{Z: \Re Z \subset C\}\ .$$

Pour le second terme, cela résulte du théorème de la continuité uniforme appliqué à la fonction continue $F(Z)$ dans le compact K' car $(Z - a/\lambda) - Z \to 0$, avec $Z - a/\lambda$ et $Z \in K'$, si $Z \in K$.

c) Si

$$\boxed{c \in \boldsymbol{C},\quad \Re c \geqslant 0,\quad \Re Z \in C,\quad \Re(cZ) \in C},$$

alors

$$\boxed{\mathring{F}(cZ) = c^h \mathring{F}(Z)}.$$

De fait,

$$\mathring{F}(cZ) = \lim_{\lambda \text{ réel} \to +\infty} \frac{1}{h^h} F(\lambda c Z + a) = \lim_{\lambda \text{ réel} \to +\infty} c^h \frac{F[(\lambda c) Z + a]}{(\lambda c)^h} = c^h \mathring{F}(Z)\,.$$

En particulier, *si*

$$\boxed{c > 0,\quad \Re Z \in C},$$

on a

$$\boxed{\mathring{F}(cZ) = c^h \mathring{F}(Z)}.$$

Il est intéressant de remarquer que *si on postule* ($*$) *et c), notre hypothèse principale est trivialement vérifiée pour* $\mathring{F}(Z)$.

En effet, alors

$$\limsup_{\substack{\lambda \to \infty \\ R\lambda \geqslant 0}} \sup_{Z \in K} \left| \frac{\mathring{F}(\lambda Z + a)}{\lambda^h} - \mathring{F}(Z) \right| = \limsup_{\substack{\lambda \to \infty \\ R\lambda \geqslant 0}} \sup_{Z \in K} \left| \mathring{F}\left(Z + \frac{a}{\lambda}\right) - \mathring{F}(Z) \right| \to 0\,,$$

vu le théorème de continuité uniforme si $\Re(\lambda Z + a) \in C$ lorsque $\Re Z \in K$ et $\lambda \sim \infty$.

3. – Sous ces hypothèses, voici le théorème que nous avons en vue. *Si $F(z)$ est une fonction qui satisfait aux hypothèses ci-dessus, on a*

$$\boxed{\begin{array}{l} F(ix + \lambda y_0) \neq 0 \\ \forall x \in E_n,\quad \forall \lambda > c' \ (^1) \\ y_0 \in C,\quad \mathring{F}(y_0) \neq 0 \\ c' y_0 \in ce + C \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} F(ix + c' y_0 + y) \neq 0 \\ F(ix + y) \neq 0 \\ \forall x \in E_n,\quad \forall y \in \Gamma \subset C \end{array}}$$

(1) On peut supposer λ complexe avec $\Re \lambda > c'$, car

$$F(ix + \lambda y_0) = F[i(x + \Im \lambda y_0) + \Re \lambda y_0] \neq 0\,.$$

où

$$\boxed{\Gamma = \{y \in C : \mathring{F}(y + zy_0) \neq 0,\ \forall z \geqslant 0\}}$$

est un sous-cône ouvert convexe de C, contenant y_0 qu'on peut encore définir par

$$\boxed{\Gamma = \text{composante connexe de } y_0 \text{ dans } \{y \in C : \mathring{F}(y) \neq 0\}}\ .$$

Etablissons cette proposition.

A) Pour $y \in C$ les zéros z de la fonction

$$F(y + zy_0)\,,$$

qui intervient dans la définition de Γ, sont tels que

$$\Re z \geqslant 0 \Rightarrow \Im z = 0\ .$$

Cela résulte du théorème de Hurwitz, car

$$\mathring{F}(y + zy_0) \underset{(*)}{=} (\mp i)^h \mathring{F}(\pm iy \pm izy_0) \underset{(**)}{=} (\mp i)^h \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{F(\pm i\lambda y \pm i\lambda z y_0)}{\lambda}\,, \qquad \text{si } \begin{Bmatrix} Iz < 0 \\ Iz > 0 \end{Bmatrix}$$

où

$$F(\pm i\lambda y \pm i\lambda z y_0) \neq 0\,,$$

si

$$\Re(\pm i\lambda z) = \pm \lambda \Im z > c \Leftrightarrow \Im z \left\{ \begin{smallmatrix} < -c'(\lambda) \\ > c'(\lambda) \end{smallmatrix} \right\}.$$

En $(*)$, noter que

$$\Re(y + zy_0) = y + \Re z y_0 \in C, \text{ car } \Re z \geqslant 0\,,$$

$$\Re(\pm iy \pm izy_0) = \mp \Im z y_0 \in C, \text{ car } \Im z \left\{ \begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix} \right\} 0$$

et, en $(**)$, que la convergence est uniforme sur tout compact K de $\left\{\Re z \geqslant 0,\ \Im z \left\{ \begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix} \right\} 0\right\}$, puisque alors $\Im z \left\{ \begin{smallmatrix} < -\varepsilon \\ > \varepsilon \end{smallmatrix} \right\}$ si $z \in K$,

$$\Re(\pm i\lambda y \pm i\lambda z y_0) = \mp \Im \lambda z\, y_0 \in C \text{ et } \in ce + C \text{ si } \lambda \sim +\infty$$

et

$$\{\pm iy \pm izy_0 : z \in K\}$$

est un compact de $\{Z : \Re Z \in C\}$.

B) Montrons que, si $y_0 \in C$, alors

$$\mathring{F}(ix + \lambda y_0) \neq 0\,, \quad \forall x \in E_n\,, \quad \forall \lambda > 0\,.$$

Ceci règle le cas de $\mathring{F}$ avec $c = 0$ et c' arbitraire positif car $\mathring{F}$ satisfait à l'hypothèse principale et tout $y \in \Gamma$ s'écrit $\varepsilon y_0 + (y - \varepsilon y_0)$ avec $y - \varepsilon y_0 \in \Gamma$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

En effet, pour tout $x \in E_n$ fixé, on a

$$\mathring{F}(ix + \lambda y_0) = \lim_{\mu \to +\infty} \frac{F[\mu(ix + \lambda y_0)]}{\mu^h}\,,$$

la convergence étant uniforme pour $\lambda \in K$ compact quelconque de $\{\lambda : R\lambda > 0\}$.

De fait, comme $\Re\lambda > \varepsilon > 0$ si $\lambda \in K$, on a

$$\Re(ix + \lambda y_0) = \Re\lambda y_0 \in C\,,$$

$$\Re[\mu(ix + \lambda y_0)] = \mu\Re\lambda y_0 \in C \text{ et } \in ce + C \text{ si } \mu \sim \infty$$

et

$$\{ix + \lambda y_0 : \lambda \in K\}$$

est un compact de $\{Z : \Re Z \subset C\}$.

La conclusion résulte alors du théorème de Hurwitz, puisque

$$F(i\mu x + \lambda\mu y_0) = F(i[\mu x + \Im\lambda\mu y_0] + \Re\lambda\mu y_0) \neq 0 \quad \text{si } \Re\lambda > \frac{c}{\mu}\,.$$

Comme le cône Γ est le même pour F et $\mathring{F}$, toutes les démonstrations qui suivent relatives à F entraînent le résultat correspondant pour $\mathring{F}$.

C) Montrons que Γ est un cône connexe ouvert.

C'est un cône car, $\forall y \in \Gamma$, $\forall \lambda > 0$, on a

$$\mathring{F}(\lambda y + zy_0) = \lambda^h \mathring{F}\left(y + \frac{z}{\lambda} y_0\right) \neq 0$$

puisque $z/\lambda \geqslant 0$.

Il est connexe car, $\forall y \in \Gamma$, $\forall \theta \in [0, 1]$, $\theta y_0 + (1 - \theta) y \in \Gamma$.

En effet, $y_0 \in \Gamma$ puisque, si $z \geqslant 0$,

$$\mathring{F}(y_0 + zy_0) = (1+z)^h \mathring{F}(y_0) \neq 0$$

et, si $\theta \in [0, 1[$, $z \geqslant 0$,

$$\mathring{F}[\theta y_0 + (1-\theta)y + zy_0] = (1-\theta)^h \mathring{F}\left(y + \frac{z+\theta}{1-\theta} y_0\right) \neq 0 \ ,$$

car

$$\frac{z+\theta}{1-\theta} \geqslant 0 \ .$$

Enfin, Γ est ouvert.

Sinon, il existe $y_m \to y$ et $z_m \geqslant 0$ tels que

$$\mathring{F}(y_m + z_m y_0) = 0 \ .$$

Les z_m sont bornés. Sinon il existerait une sous-suite $z_{m'} \to +\infty$ pour laquelle

$$\mathring{F}(y_m + z_m y_0) = 0 \Rightarrow \mathring{F}\left(\frac{y_{m'}}{z_{m'}} + y_0\right) = 0 \Rightarrow \mathring{F}(y_0) = 0 \ ,$$

ce qui est contraire aux hypothèses.

Comme les z_m sont bornés, on peut en extraire une sous-suite $z_{m'} \to z_0 \geqslant 0$.

Il s'ensuit que

$$\mathring{F}(y_{m'} + z_{m'} y_0) = 0 \Rightarrow \mathring{F}(y + z_0 y_0) = 0 \ ,$$

ce qui est impossible puisque $y \in \Gamma$.

D) Démontrons l'équivalence des définitions de Γ.

Vu C,

$$\Gamma \subset \text{composante connexe de } y_0 \text{ dans } \{x \in C : \mathring{F}(x) \neq 0\} \ .$$

En fait, Γ s'identifie à cette composante connexe car

$$y \in \dot{\Gamma} \cap C \Rightarrow \mathring{F}(y) = 0 \ .$$

En effet, si $y \in \dot{\Gamma}$, alors $y \notin \Gamma$ et il existe $z \geqslant 0$ tel que

$$\mathring{F}(y + zy_0) = 0 \ .$$

Ce zéro ne peut être $\neq 0$ sinon, par le théorème d'Hurwitz et A, il reste réel et $\neq 0$ lorsque y' est voisin de y, ce qui est impossible.

Donc il est nul et on a $\mathring{F}(y) = 0$.

E) Etablissons maintenant la proposition annoncée.

Notons d'abord que dans l'énoncé, on peut remplacer

$$c' y_0 + y,\ y \in \Gamma \quad \text{par} \quad \lambda y_0 + y',\ \lambda > c',\ y' \in \Gamma .$$

En effet, d'une part, comme Γ est un cône ouvert, si $y \in \Gamma$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y - \varepsilon y_0 \in \Gamma$ et

$$c' y_0 + y = (c' + \varepsilon) y_0 + (y - \varepsilon y_0) = \lambda y_0 + y' .$$

D'autre part,

$$\lambda y_0 + y' = c' y_0 + [(\lambda - c') y_0 + y'] = c' y_0 + y .$$

Ceci posé, pour $x \in \boldsymbol{E}_n$, y_0, $y \in \Gamma$ fixés, considérons l'équation en la variable auxiliaire z

$$F(ix + \lambda y_0 + zy) = 0 .$$

Il s'agit de prouver que cette équation n'admet pas la racine $z = 1$, si $\lambda > c'$.

On y arrive comme suit.

a) Notons que l'équation étudiée n'admet pas de zéro z avec $\Re z = 0$. De fait, par hypothèse,

$$F[i(x + \Im z y) + \lambda y_0] \neq 0 , \qquad \forall \lambda > c' .$$

b) Vérifions d'abord que *l'ensemble*

$$\{z/\lambda \colon \lambda \geqslant c',\ \Re z \geqslant 0,\ F(ix + \lambda y_0 + zy) = 0\}$$

est borné.

Sinon, il existe $\lambda_m \geqslant c'$ et z_m avec $\Re z_m \geqslant 0$, tels que

$$F(ix + \lambda_m y_0 + z_m y) = 0 \quad \text{et} \quad \left|\frac{z_m}{\lambda_m}\right| \geqslant m ,$$

ce qui entraîne

$$z_m \to \infty , \qquad (\text{car } |z_m| \geqslant m |\lambda_m| \geqslant mc') ,$$

$$\frac{\lambda_m}{z_m} \to 0 , \qquad \left(\text{car } \left|\frac{\lambda_m}{z_m}\right| \leqslant \frac{1}{m}\right).$$

C'est absurde, car alors, il existe une sous-suite, encore notée z_m, λ_m, avec $\mathfrak{I}z_m \geqslant 0$ (ou $\mathfrak{I}z_m \leqslant 0$) telle que

$$0 = \frac{1}{z_m^h} F(ix + \lambda_m y_0 + z_m y) \xrightarrow[(*)]{} \overset{\circ}{F}(y) \neq 0 \, .$$

Pour justifier (*), (2) notons que dès que m est assez grand, on a

$$\left| \frac{1}{z_m^h} F(ix + \lambda_m y_0 + z_m y) - \overset{\circ}{F}(y) \right|$$
$$\leqslant \left| \frac{1}{z_m^h} F\left[z_m \left(\frac{(\lambda_m - c')y_0}{z_m} + y \right) + ix + c'y_0 \right] - \overset{\circ}{F}\left(\frac{(\lambda_m - c')y_0}{z_m} + y \right) \right|$$
$$+ \left| \overset{\circ}{F}\left(\frac{(\lambda_m - c')y_0}{z_m} + y \right) - \overset{\circ}{F}(y) \right| \leqslant \sup_{Z' \in K} \left| \frac{F(z_m Z' + ix + c'y_0)}{z_m^h} - \overset{\circ}{F}(Z') \right|$$
$$+ \left| \overset{\circ}{F}\left(\frac{(\lambda_m - c')y_0}{z_m} + y \right) - \overset{\circ}{F}(y) \right| ,$$

où

$$K = \{ y + \alpha y_0 : |\alpha| \leqslant \varepsilon, \ \mathfrak{R}\alpha \geqslant 0, \ \mathfrak{I}\alpha \left\{ \substack{\geqslant \\ \leqslant} \right\} 0 \ \text{si} \ \mathfrak{I}z_m \left\{ \substack{\leqslant \\ \geqslant} \right\} 0 \}$$

est un compact de $\{Z : \mathfrak{R}Z \in C\}$ si ε est assez petit.

Le premier terme de la majorante tend vers 0, par hypothèse, puisque

$$z_m \to \infty \, , \qquad \mathfrak{R}z_m \geqslant 0 \, ,$$

$$\mathfrak{R}[z_m(y + \alpha y_0] + c'y_0 = \mathfrak{R}z_m y + (\mathfrak{R}z_m \mathfrak{R}\alpha - \mathfrak{I}z_m \mathfrak{I}\alpha) y_0 + c'y_0 \in ce + C$$

puisque $\mathfrak{R}z_m \mathfrak{R}\alpha \geqslant 0$ et $\mathfrak{I}z_m \mathfrak{I}\alpha \leqslant 0$.

Pour le second terme de la majorante, cela résulte de la continuité de $\overset{\circ}{F}(Z)$ lorsque $\mathfrak{R}Z \in C$.

c) Pour tout $x \in \boldsymbol{E}_n$, y_0 et $y \in \Gamma$ fixés, le nombre de racines z à parties réelles > 0 de l'équation

$$F(ix + \lambda y_0 + zy) = 0$$

est fini et indépendant de $\lambda > c$.

Cela résulte du théorème de constance du nombre de zéros (conséquence

(2) C'est en ce seul point que se manifeste toute la force de l'hypothèse principale; formulée pour $a = 0$ seulement, elle ne permettrait pas de conclure.

facile du théorème de Hurwitz) appliqué à la fonction de

$$f(z, \lambda) = F(ix + \lambda y_0 + zy)$$

holomorphe dans $\{z: \Re z \geqslant -\varepsilon, (\varepsilon > 0)\}$ lorsque $\lambda > c$.

Les hypothèses de ce théorème sont vérifiées car

1) si $\Re z \geqslant -\varepsilon$, $\lambda \geqslant c$, $f(z, \lambda)$ est continu de (z, λ),

2) si $\lambda \in [a, b] \subset]c, +\infty[$,

on a

$$|z| \leqslant C|\lambda| \leqslant Cb\,,$$

3) si $f(\lambda, z) = 0$, vu b), donc $f(z, \lambda) \neq 0$ si $|z| > Cb$,

4) si $\Re z = 0$ et $\lambda > c$, on a

$$f(z, \lambda) = F[i(x + \Im zy) + \lambda y_0] \neq 0\,.$$

d) Le théorème annoncé est donc exact si on vérifie que l'équation étu diée n'a pas de racine z avec $\Re z \geqslant 0$ lorsque λ réel est assez grand.

En effet, alors cette équation n'a pas de racine z avec $\Re z \geqslant 0$ pour $\lambda > c$ et en particulier pas la racine $z = 1$.

Pour établir d), posons $z = \lambda z'$.

Alors, $\Re z$ et $\Re z'$ sont simultanément de même signe.

Vu a), les racines z' avec $\Re z' \geqslant 0$ de l'équation

$$F[ix + \lambda(y_0 + z'y)] = 0$$

sont bornées si $\lambda > c'$.

Elles sont donc dans le contour $\mathcal{C}$ qui limite un compact

$$\Delta(\mathcal{C}) = \{z' : \Re z' \geqslant 0, |z'| \leqslant M\}\,.$$

On a

$$\lim_{\lambda \text{ réel} \to +\infty} \frac{1}{\lambda^h} F[ix + \lambda(y_0 + z'y)] = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda^h} F\left(\lambda\left[\frac{ix}{\lambda} + (y_0 + z'y)\right]\right) = \mathring{F}(y_0 + z'y)$$

uniformément pour $z' \in \Delta(\mathcal{C})$.

Ceci puisque

$$\{y_0 + z'y : z' \in \Delta(\mathcal{C})\}$$

est un compact tel que $y_0 + \Re z'y \in C$, $\forall z \in \Delta(\mathcal{C})$.

Remarquons que

$$\mathring{F}(y_0 + z'y) \neq 0 \quad \text{ si } \Re z' \geqslant 0\,.$$

De fait, s'il y avait une racine z' avec $\Re z' \geqslant 0$, elle ne serait pas nulle, puisque $\mathring{F}(y) \neq 0$, donc on aurait

$$0 = F(y_0 + z'y) = z'^h \mathring{F}\left(y + \frac{y_0}{z'}\right).$$

Mais, comme $y \in \Gamma$, $\Re(1/z') = \Re z'/|z'|^2$ doit être < 0, donc aussi $\Re z'$.
Par le théorème de Hurwitz,

$$F[ix + \lambda(y_0 + z'y)]$$

n'a donc plus de racines z' dans $\Delta(\mathbf{C})$ donc dans $\{z' : \Re z' > 0\}$ dès que λ est assez grand.

F) Etablissons enfin la convexité de Γ.
Comme Γ est ouvert, pour tout $y \in \Gamma$, il existe ε tel que $y - \varepsilon y_0 \in \Gamma$.
On a donc

$$F(ix + \lambda y) = F[(ix + \lambda\varepsilon y_0 + \lambda(y - \varepsilon y_0)] \neq 0$$

si $\lambda\varepsilon > c$ donc si $\lambda > c/\varepsilon$.
On a aussi $\mathring{F}(y) \neq 0$.
Dès lors, en reprenant le raisonnement du texte, on déduit que la composante connexe de y dans $\{x \in C : \mathring{F}(x) \neq 0\}$ qui est aussi celle de y_0, donc Γ contient

$$\lambda y + \mu y', \qquad \forall y' \in \Gamma,$$

si $\lambda,\ \mu \geqslant 0,\ \lambda + \mu = 1$, (cf. *C*)).
D'où la propriété annoncée.

4. – Nos hypothèses sont trivialement vérifiées pour les polynômes avec $C = \boldsymbol{E}_n$ et $c = 0$.

Vérifions qu'elles le sont aussi pour les dénominateurs de Lopatinski qui apparaissent dans les problèmes aux limites du demi-expace $\{x = (x', x_n) : x_n > 0\}$.

a) (3) Soit $L(Z', Z_n, z)$ un polynôme hyperbolique par rapport à z, c'est-à-dire tel que

$$\mathring{L}(0, 0, 1) \neq 0\,,$$

$$L(Z', Z_n, z) \equiv 0 \quad \text{si } \Re z > c \text{ et } \Re(Z', Z_n) = 0\,.$$

(3) La théorie esquissée ici est développée dans un mémoire de H. G. Garnir, en préparation.

Le théorème de Gårding nous affirme l'existence d'un cône ouvert convexe Γ tel que

$$L(Z', Z_n, z) \neq 0 \quad \text{si } \Re(Z', Z_n, z) \in \Gamma + (0, 0, c)\,,$$

défini comme la composante connexe de $(0, 0, 1)$ dans

$$\{(x', x_n, t) \colon \mathring{L}(x', x_n, t) \neq 0\}$$

où $\mathring{L}$ désigne la partie principale de L.

Soit $\Gamma_\bullet$ la projection de Γ sur $x_n = 0$.

Alors, si $\Re(Z', z) \in \Gamma_\bullet + (0, c)$, l'équation $L(Z', W, z) = 0$ en W a l_- racines $W^-(Z_0, z)$ et l_+ racines $W^+(Z', z)$, telles que

$$\Re W_-(Z', z) \leqslant m(\Re Z', \Re z) < M(\Re Z', \Re z) \leqslant \Re W_+(Z', z)\,,$$

où

$$\begin{Bmatrix} m(\Re z', \Re z) \\ M(\Re z', \Re z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \inf \\ \sup \end{Bmatrix}_{\{W : R(Z', W, z) \in (0, 0, c) + \Gamma\}} \Re W\,.$$

Les dénominateurs de Lopatinski se présentent alors comme des polynômes

$$R(Z', z, \dots, S_k^-(Z', z), \dots)$$

où

$$S_k^-(Z', z) = \sum_{j=1}^{l_-} [W_j^-(Z', z)]^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} W^k \frac{D_W L(Z', W, z)}{L(Z', W, z)}\, dW$$

$\mathcal{C}$ désignant un contour du plan complexe des W entourant les seules racines $W^-(Z', z)$ de $L(Z', W, z)$.

Désignons par $\mathring{W}_j^\pm(Z, z)$ les racines correspondantes pour $\mathring{L}(Z', W, z)$ lorsque $\Re(Z', z) \in \Gamma_\bullet$, on sait que leur nombre est aussi $l_\pm$.

Les $S_k^-(Z', z)$ sont visiblement holomorphes de (Z', z) si $\Re(Z', z) \in \Gamma_\bullet + (0, c)$; de même les $\mathring{S}_k^-(Z', z)$ le sont si $\Re(Z', z) \in \Gamma_\bullet$.

b) Montrons que *nos hypothèses sont vérifiées pour* $R[(Z', z, \dots, S_k^-(Z', z), \dots]$ *en prenant*

$$ce + C = (0, c) + \Gamma_\bullet\,.$$

Vu la forme de $R[Z', z, \dots, S_k^-(Z', z), \dots]$, il suffit de vérifier que

$$\lim_{\substack{\lambda \to \infty \\ \lambda \in e_K}} \sup_{\substack{(Z', z) \in K \\ \text{compact de } \{(Z', z) : \Re(Z', z) \in \Gamma_\bullet\}}} \left| \frac{S_k^-[\lambda(Z', z) + (a, b)]}{\lambda^k} - \mathring{S}_k^-(Z', z) \right| = 0\,,$$

où

$$e_K = \{\lambda \in \mathbf{C}\colon \mathcal{R}\lambda \geq 0, \mathcal{R}[\lambda(Z', z) + (a, b)] \in \Gamma^{\bullet} + (0, c), \forall (Z', z) \in K\} .$$

Remarquons que les $W_j^-(\lambda Z' + a, \lambda z + b)/\lambda$ qui apparaissent alors sont les racines du polynôme

$$L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b)$$

tel que

$$\frac{L(\lambda Z' + a', \lambda, W, \lambda z + b)}{\lambda^m} \to \mathring{L}(Z', W, z) .$$

Prenons (Z_0', z_0) avec $\mathcal{R}(Z_0', z_0) \in \Gamma^{\bullet}$ et montrons que le théorème est exact en prenant pour K une certaine boule B_ϱ de rayon ϱ centrée en (Z_0', z_0) et si $|\lambda| \geq M_{B_\varrho}$. Il suffit alors de recouvrir un K quelconque par un nombre fini de telles boules pour conclure, en prenant λ supérieur à la *sup* des M_{B_ϱ} correspondants.

Supposons $(Z', z) \in B_\varrho$ et $|\lambda| \geq \lambda_0$, $\lambda \in e_{B_\varrho}$.

Supposons qu'on puisse choisir ϱ et λ_0 pour que, parmi les zéros de $L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b)$, seuls les

$$\frac{W^-(\lambda Z' + a, \lambda z + b)}{\lambda}$$

se trouvent dans un voisinage donné des $\mathring{W}^-(Z', z)$ qui ne contient aucun $\mathring{W}^+(Z', z)$.

Alors, il existe un contour fixe $\mathcal{C}$ de $\mathbf{C}$ qui entoure à la fois les $\mathring{W}^-(Z', z_0)$ et les

$$\frac{\mathring{W}^-(\lambda Z' + a, \lambda z + b)}{\lambda}, \quad \forall (Z', z) \in B_\varrho, \ \forall |\lambda| \geq \lambda_0, \ \lambda \in e_{B_\varrho} .$$

On a donc

$$\frac{S_k^-(\lambda Z' + a, \lambda z + b)}{\lambda^h} - \mathring{S}_k^-(Z', z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} W^k \left[\frac{D_W L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b)}{L(Z' + a, \lambda W, \lambda z + b)} - \frac{D_W \mathring{L}(Z', W, z)}{\mathring{L}(Z', W, z)}\right] dW$$

et tout revient à montrer que, si $\lambda \to \infty$ dans e_{B_ϱ},

$$\frac{D_W L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b)}{L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b)} \underset{(Z', z) \in B_\varrho, W \in \mathcal{C}}{\Rightarrow} \frac{\mathring{D}_W L(Z', W, z)}{\mathring{L}(Z', W, z)},$$

ce qui est exact, car

$$\frac{1}{\lambda^m} D_W L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b) \underset{B_\varrho \times \mathcal{C}}{\Rightarrow} \mathring{D}_W L(Z', W, z)\,,$$

$$\frac{1}{\lambda^m} L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b) \underset{B_\varrho \times \mathcal{C}}{\Rightarrow} \mathring{L}(Z', W, z)$$

et

$$\inf_{\substack{(Z',z)\in B_\varrho \\ W\in\mathcal{C}}} |\mathring{L}(Z', W, z)| > 0$$

vu le choix de $\mathcal{C}$.

Vérifions enfin l'hypothèse faite ci-dessus sur le choix de ϱ et λ_0.

Notons d'abord que

$$L_{a,b}(Z', W, Z) = L(Z' + a, W, z + b)$$

est hyperbolique avec L et de partie principale $\mathring{L}(Z', W, z)$.

De fait, on a trivialement $\mathring{L}(0, 0, 1) \neq 0$ et, vu le théorème de Gårding,

$$L(i\Im Z' + a, i\Im W, z + b) \neq 0$$

dès que $\mathcal{R}(a, 0, z + b) \in \Gamma + (0, 0, c)$, ce qui arrive toujours si $\mathcal{R}z$ est assez grand.

Alors,

$$\frac{1}{\lambda^m} L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b) = \frac{1}{\lambda^m} L_{a,b}(\lambda Z', \lambda W, \lambda z)$$

est hyperbolique de partie principale $\mathring{L}(Z', W, z) = L_m(Z', W, z)$ pour tout $\lambda \sim \infty$ et $c(\lambda) \to 0$ si $\lambda \to \infty$.

De fait, en séparant les parties homogènes de $(1/\lambda^m) L_{a,b}(\lambda i\Im Z', \lambda i\Im W, \lambda z)$ on a

$$\begin{aligned} L_m(i\Im Z', i\Im W, z) &+ \frac{1}{\lambda} L_{m-1}(i\Im Z', i\Im W, z) + \dots \\ &= L_m(i\Im Z', i\Im W, z)\left(1 + \frac{1}{\lambda}\,\frac{L_{m-1}(i\Im Z', i\Im W, z)}{L_m(i\Im Z', i\Im W, z)} + \dots\right). \end{aligned}$$

Mais, vu le théorème de Svensson, alors

$$Rz \geqslant \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{L_{m-k}(i\Im Z', i\Im W, z)}{L_m(i\Im Z', i\Im W, z)}\right| \leqslant C\,, \qquad \forall \Im Z',\ \forall \Im W,\ \forall \Im z,\ k = 1, \dots, m\,.$$

Donc, ε étant donné, on peut prendre λ assez grand pour que

$$|L_{a,b}(\lambda i\Im Z', \lambda i\Im W, \lambda z)| \geqslant \tfrac{1}{2}|L_m(i\Im Z', i\Im W, z)| \neq 0 \,,$$

si $\Re z \geqslant \varepsilon$.

De là, le cône de Gårding de $L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b)$ est $\Gamma + (0, 0, c(\lambda))$ avec $c(\lambda) \to 0$ si $\lambda \to \infty$ et sa projection est $\Gamma_{\bullet} + (0, c(\lambda))$.

Partons de $\Re(Z_0, z_0) \in \Gamma_{\bullet}$. Il existe W_0 tel que $\Re(Z_0, W_0, z_0) \in \Gamma$, donc une boule fermée de centre $\Re(Z_0, W_0, z_0)$ et de rayon ϱ dans Γ.

Prenons alors λ_0 pour que $\Gamma + (0, 0, c(\lambda))$ contienne cette boule si $|\lambda| \geqslant \lambda_0$.

Si $(Z', z) \in B_\varrho$ et $|\lambda| \geqslant \lambda_0$, les

$$m(\Re Z', \Re z) \qquad \text{et} \qquad M(\Re Z', \Re z)$$

pour

$$L(\lambda Z' + a', \lambda W, \lambda z + b)$$

restent alors différents.

Dans ces conditions, comme

$$\frac{L(\lambda Z' + a, \lambda W, \lambda z + b)}{\lambda^m} \to \mathring{L}(Z'_0, W, z_0)$$

si $\lambda \to \infty$ et $(Z', z) \to (Z'_0, z_0)$, vu le théorème de Hurwitz, on peut choisir ϱ et λ_0 pour réaliser notre hypothèse pour les

$$\frac{W^-(\lambda Z' + a, \lambda Z + b)}{\lambda}, \quad \forall (Z', z) \in B_\varrho, \ |\lambda| \geqslant \lambda_0 \,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. GÅRDING, *Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients*, Acta Matematica, **85** (1950), pp. 1-62.

[2] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, 3è ed., 1969, voyez spécialement ch. 5, § 5.5.

[3] R. SAKAMOTO, *E-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients*, Journal of Mathematics of Kyoto University, **14** (1974), pp. 93-118.

[4] S. L. SVENSSON, *Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part*, Arkiv för Matematik, **8**, (1969), pp. 145-162.