

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

M. I. VIŠIK

A. V. FOURSIKOV

**Solutions statistiques homogènes des systèmes différentiels
paraboliques et du système de Navier-Stokes**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 4, n° 3
(1977), p. 531-576

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_3_531_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Solutions statistiques homogènes des systèmes différentiels paraboliques et du système de Navier-Stokes.

M. I. VIŠIK - A. V. FOURSIKOV (*)

dédié à Jean Leray

Les flux de fluide turbulentes, homogènes et isotropes sont les objets importants des recherches dans le hydromécanique statistique [1]. Les flux turbulentes peuvent être décrits à l'aide de la famille des mesures $\mu(t, du)$, où le paramètre t c'est le temps, définies sur l'espace des flux $\{u\}$.

Les mesures $\mu(t, du)$, ou, ce qui est équivalent, leur fonctionnelles caractéristiques $\chi(t, \omega)$ satisfont à une équation, obtenue par E. Hopf [2]. La famille $\mu(t, du)$ s'appelle la solution statistique du système de Navier-Stokes. La solution du problème de Cauchy pour l'équation de Hopf était construite, par exemple, dans [3-7]. Dans ces travaux on applique des méthodes différentes mais dans toutes les constructions on utilise l'estimation énergétique pour le système de Navier-Stokes. C'est pourquoi les solutions statistiques, construites dans ces travaux, sont concentrées dans les espaces L_2 .

L'article est consacré à la construction des solutions statistiques homogènes, c.à.d. à la construction de telles familles des mesures $\mu(t, du)$, que pour tout $h \in R^n$ $\mu(t, \hat{h}\omega) = \mu(t, \omega)$, où ω -l'ensemble borélien arbitraire dans l'espace des fonctions $u(x)$, $\hat{h}u(x) = u(x + h)$. La difficulté principale qu'on rencontre en essayant de construire de telles solutions statistiques est suivante: d'après la homogénéité les mesures $\mu(t, du)$ ne peuvent pas être concentrées dans l'espace $L_2(R^n)$ (cf. la remarque 2.2). La construction des mesures isotropes n'est pas lié avec des difficultés supplémentaires. On ne les considère pas ici.

(*) The Institute for Problems in Mechanics, Academy of Sciences, Moscow.
Pervenuto alla Redazione il 27 Dicembre 1976.

Pour la construction de la mesure statistique homogène d'abord on remplace le système de Navier-Stokes par un système approximé L_ε , dépendant d'un petit paramètre $\varepsilon > 0$. Elle se diffère du système de Navier-Stokes par le terme $\varepsilon|u|^4 u$, où $u = (u_1, \dots, u_n)$: la vitesse et, en outre, la condition de solénoïdalité est remplacée par $\langle \nabla, u \rangle = -\varepsilon p$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, p : la pression. On démontre que le problème de Cauchy pour le système L_ε a une solution unique dans l'espace de type $L_\infty(0, T; H_0(r))$, où $H_0(r)$: l'espace des fonctions, ayant la norme $\|u\|_{0,r} = \|(1 + |x|^2)^{r/2} u\|_{L_2(R^n)}$ finie. Remarquons que les mesures homogène peuvent être concentrées sur l'espace $H_0(r)$, $r < -n/2$, consistant des fonctions qui, en général ne décroissent pas à l'infini. On définit la solution statistique homogène $\mu_\varepsilon(t, du)$ correspondante à L_ε par la formule $\mu_\varepsilon(t, \omega) = \mu(0, S_\varepsilon(t)^{-1}\omega)$, où $S_\varepsilon(t)$: l'opérateur de translation suivant les trajectoires du système L_ε , $\omega \subset H_0(r)$: l'ensemble borélien, $\mu(0, du)$: la mesure initiale donnée. On a

$$(1) \quad \hat{h}S_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t)\hat{h} \quad \forall h \in R^n,$$

alors la mesure $\mu_\varepsilon(t, du)$ est homogène pour tout $t > 0$, si la mesure initiale $\mu(0, du)$ est homogène. Pour le système L_ε la propriété (1) est satisfait. C'est pourquoi on l'a choisi comme système approximé, car on utilise cette propriété essentiellement dans la construction de $\mu(t, du)$.

On a réussi à la construction de la solution statistique homogène $\mu(t, du)$ grâce à la suivante estimation cruciale dans les espaces $H_0(r)$, $r < -n/2$, uniforme en ε , qui est satisfait par les solutions $\mu_\varepsilon(t, du)$:

$$(2) \quad \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(t, du) + \int \int \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{0,r}^2 \mu(\tau, du) d\tau + \\ + \varepsilon \cdot \int \int \| (1 + |x|^2)^{r/6} u \|_{L_6}^6 \mu(\tau, du) d\tau + \varepsilon \int \int \|p\|_{0,r}^2 \mu(\tau, du) d\tau \leq C \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du)$$

où C ne dépend pas de ε . Dans la déduction de cette estimation une grande importance a l'homogénéité des mesures $\mu_\varepsilon(t, du)$, $\varepsilon > 0$. Remarquons, que pour les solutions individuelles du système L_ε l'estimation de type (2) uniforme en ε n'a pas lieu. Peut-être, c'est la cause, de ce qu'on n'a pas réussi jusqu'à maintenant à la construction de la solution du système de Navier-Stokes dans les espaces $H_0(r)$, $r < -n/2$.

Utilisant l'estimation (2) pour $\mu_\varepsilon(t, du)$ on peut passer à la limite, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et obtenir la famille des mesures $\mu(t, du)$. Ce passage à la limite est

accompli suivant le schéma qui était donné dans [4], [5]. Mais dans la démonstration, que $\mu(t, du)$ satisfait à l'équation de Hopf, on a été obligé d'appliquer de nouvelles méthodes. D'abord on démontre que les mesures approximées μ_ε satisfont à l'équation de Hopf:

$$(3) \quad \chi_\varepsilon(t, w) - \chi_\varepsilon(0, w) = \int_0^t \int \exp[i(u, w)] (\hat{L}_\varepsilon u, w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau,$$

où $\hat{L}_\varepsilon$: l'opérateur, correspondant au système L_ε , et $\chi_\varepsilon(t, w)$ la fonctionnelle caractéristique de la mesure μ_ε . On accomplit ensuite le passage à la limite dans (3), quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour cela on considère les deux membres dans (3) comme les fonctionnelles généralisées en w et l'on prend les mesures-tests de type: $g(w)\Gamma(dw)$ où $\Gamma(dw)$: la mesure gaussienne fixée, et $g(w)$: la fonctionnelle, deux fois différentiable au sens de Fréchet. En intégrant les deux membres dans (3) en $g(w)\Gamma(dw)$ et en utilisant l'homogénéité de la mesure $\mu_\varepsilon(t, du)$, on peut passer à la limite, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et démontrer, que la mesure $\mu(t, du)$ est la solution de l'équation de Hopf.

Par la méthode exposée on construit la solution statistique homogène $\mu(t, du)$ du système de Navier-Stokes, concentrée pour tout t sur l'espace $H_0(r)$, $r < -n/2$.

Pour simplifier l'exposition on considère d'abord les systèmes paraboliques avec les termes nonlinéaires quadratiques. Dans le § 8 on indique les modifications qu'il est à faire dans l'exposition précédente, pour qu'on puisse construire la solution statistique homogène dans le cas du système de Navier-Stokes.

1. — Le système des équations différentielles. Les espaces fonctionnels.

1) Soit

$$(1.1) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -\mathcal{A}(\mathcal{D})u(t, x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j(u)}{\partial x_j}, \quad x \in R^n, \quad t > 0,$$

un système des équations différentielles paraboliques, $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$: la fonction à valeurs vectorielles cherchée; $\mathcal{A}(\mathcal{D})$: l'opérateur différentiel linéaire; $F_j(u)$: la fonction quadratique de u . Plus précisément,

$$(1.2) \quad \mathcal{A}(\mathcal{D})u(t, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

a_{ij} , b_i , c : les matrices $p \times p$. On suppose, que l'inégalité suivante est satisfaite:

$$(1.3) \quad \int \langle \mathcal{A}(\mathcal{D})v, v \rangle dx \geq \alpha \|v\|_1^2 - C \|v\|_0^2, \quad \forall v \in H_2(R^n),$$

α , C : les constantes positives, qui ne dépendent pas de v ,

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^p \xi_i \eta_i, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_p), \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_p) \in R^p, \quad \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_0 :$$

les normes des espaces de Sobolev $H_1(R^n)$, $H_0(R^n)$.

L'inégalité (1.3) est équivalente à la condition, que l'opérateur $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est fortement elliptique [8].

On définit

$$(1.4) \quad F_j(u) = (F_j^1(u), \dots, F_j^p(u)),$$

$$(1.5) \quad F_j^k(u) = \sum_{l,m} F_{j,lm}^k u_l u_m \quad \forall u = (u_1, \dots, u_p) \in R^p.$$

On suppose, que pour toute fonction $u(x) = (u_1(x), \dots, u_p(x)) \in C_0^\infty(R^n)$ on a

$$(1.6) \quad \int \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j(u)}{\partial x_j}, u \right\rangle dx = 0.$$

On montre aisément [5] que (1.6) est satisfait, pour

$$F_{j,lm}^k = F_{j,ml}^k = F_{j,km}^l, \quad \forall k, l, m = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n.$$

La fonction $u(t, x)$ cherchée doit vérifier en outre la condition initiale

$$(1.7) \quad u(t, x)|_{t=0} = u_0(x) = (u_{0,1}(x), \dots, u_{0,p}(x)).$$

2) On utilisera dans la suite les espaces des fonctions suivants:

DÉFINITION 1.1. L'espace $H_s(r)$, $r \in R^1$, $s \in \mathbf{Z}_+$, consiste de toutes les fonctions, définies sur R^n , à valeurs dans R^p , ayant la norme finie suivante:

$$(1.8) \quad \|u\|_{s,r} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{R^n} (1 + |x|^2)^r |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a utilisé les notations:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbf{Z}_+, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$|v|^2 = \sum_j v_j^2, \text{ où } v = (v_1, \dots, v_p).$$

Utilisant la règle de dérivation de produit des fonctions, il est facile de démontrer la

PROPOSITION 1.1. *La norme (1.8) est équivalente à la norme*

$$(1.9) \quad \|u\|'_{s,r} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int |\mathcal{D}^\alpha(u(x)(1 + |x|^2)^{r/2})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la suite on utilisera la norme (1.8), (1.9) et, pour simplifier l'écriture, on les notera par le symbole unique: $\|u\|_{s,r}$.

Pour $r = 0$ $H_s(r)$ coïncide avec l'espace de Sobolev $H_s \equiv H_s(R^n)$ avec la norme $\|\cdot\|_s$. Evidemment les espaces $H_s(r)$ ont la structure hilbertienne, on notera $(\cdot, \cdot)_{s,r}$ le produit scalaire dans $H_s(r)$ et par $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire dans $L_2(R^n) \equiv H_0 = H_0(0)$.

DÉFINITION 1.2. L'espace $L_q(r)$, $r \in R^1$, $1 < q < \infty$, c'est l'espace des fonctions définies sur R^n à valeurs dans R^p , muni de la norme

$$(1.10) \quad \|u\|_{L_q(r)} = \left(\int (1 + |x|^2)^r |u(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Dans la suite on notera $\|\cdot\|_{L_q}$ la norme dans l'espace $L_q \equiv L_q(0)$.

DÉFINITION 1.3. $C^k(r)$: espace des fonctions k fois continûment différentiables muni de la norme

$$(1.11) \quad \|u\|_{C^k(r)} = \sup_{x \in R^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (1 + |x|^2)^r |\mathcal{D}^\alpha u(x)| \right).$$

2. — Les mesures homogènes.

1) Nous allons exposer quelques résultats concernant les mesures homogènes, qui seront utiles dans la suite.

On notera $\mathcal{B}(B)$ la tribu borélienne de l'espace B de Banach. On définit l'opérateur de translation $\hat{h}$ par la formule

$$(2.1) \quad \hat{h}u(x) = u(x + h), \quad h \in R^n.$$

Il est clair, que $\hat{h}$ est un automorphisme dans chacun des espaces, introduits plus haut.

Soit $\mu(du)$ une mesure complètement additive sur $\mathcal{B}(B)$, où $B \subset L_1^{\text{loc}}(R^n)$. On suppose, que l'opérateur (2.1) $\forall h \in R^n$ est automorphisme dans B . On

définit la mesure

$$\mu_h(\omega) = \mu(h^{-1}\omega), \quad \forall \omega \in \mathfrak{B}(B).$$

DÉFINITION 2.1. On appelle la mesure $\mu(du)$ homogène, si

$$(2.2) \quad \mu_h(\omega) = \mu(\omega), \quad \forall \omega \in \mathfrak{B}(B), \quad \forall h \in R^n.$$

On déduit de la définition 2.1, que pour toute fonctionnelle $f(u)$, $u \in B$, $\mu(du)$ intégrable, où $\mu(du)$ est homogène,

$$(2.3) \quad \int f(u) \mu(du) = \int f(hu) \mu(du) (*).$$

2) Signalons une propriété intéressante des mesures homogènes. Soit $g(v_0, v_1, \dots, v_n)$ une fonction continue de $v_j \in R^p$ ($j = 0, 1, \dots, n$), et

$$G(u(x)) = g\left(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right).$$

THÉORÈME 2.1. Soit $\mu(du)$ une mesure homogène sur $\mathfrak{B}(B)$, et pour $u(x)$ appartenant à un ensemble U de mesure totale par rapport à $\mu(du)$

$$(2.4) \quad G(u(x)) \in L_1^{\text{loc}}(R^n), \quad \forall u(x) \in U.$$

On suppose, que les fonctionnelles

$$u \rightarrow \int G(u(x)) w(x) dx, \quad u \rightarrow \int |G(u(x))| w(x) dx$$

sont μ -intégrable pour toute $w \in C_0^\infty(R^n)$:

$$(2.5) \quad \left| \int \left(\int G(u(x)) w(x) dx \right) \mu(du) \right| < \infty, \quad \left| \int \left(\int |G(u(x))| w(x) dx \right) \mu(du) \right| < \infty.$$

Alors, il existe une constante G_0 telle, que pour toute $w(x) \in L_1$

$$(2.6) \quad \iint G(u(x)) w(x) dx \mu(du) = G_0 \int w(x) dx.$$

REMARQUE 2.1. On peut traiter le théorème 2.1 comme une assertion sur la possibilité du changement de l'ordre de l'intégration dans le membre

(*) Ici et dans la suite, si l'on n'indique pas le domaine d'intégration, alors on intègre sur tout l'espace, où la mesure est concentrée.

gauche de (2.6). Par définition on pose $G_0 = \int G(u(x)) \mu(du)$. Alors, utilisant cette notation, on peut écrire (2.6) sous la forme

$$(2.7) \quad \iint G(u(x)) w(x) dx \mu(du) \equiv \int G(u(x)) \mu(du) \int w(x) dx, \quad \forall w \in L_1.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. Considérons la fonctionnelle

$$(2.8) \quad F(w) = \iint G(u(x)) w(x) dx \mu(du), \quad w \in C_0^\infty(R^n).$$

D'après (2.5) et le théorème de Lebesgue la fonctionnelle $F(u)$ est continue sur $\mathcal{D}(R^n)$, alors $F \in \mathcal{D}'(R^n)$ (*).

Il résulte d'homogénéité de $\mu(du)$ et d'après (2.8), (2.3)

$$(2.9) \quad F(hw) = \iint G(u(x-h)) w(x) dx \mu(du) = \iint G(u(x)) w(x) dx \mu(du) = F(w), \\ \forall h \in R^n.$$

Alors

$$\frac{d}{dh} F = 0 \quad \forall h \in R^n.$$

Donc il existe une constante G_0 telle, que

$$(2.10) \quad F(w) = G_0 \int w(x) dx.$$

D'après (2.8), (2.10) on déduit (2.6) pour $w(x) \in C_0^\infty(R^n)$. Par les raisonnements analogues on démontre l'existence d'une telle constante G_1 , que $\forall w(x) \in C_0^\infty(R^n)$

$$(2.11) \quad \iint |G(u(x))| w(x) dx \mu(du) = G_1 \int w(x) dx.$$

Substituant $w = w_k \in C_0^\infty$ dans (2.11), où $w_k(x)$ tend vers $w(x)$ pour presque tout x , $w_k(x) \uparrow w(x) \in L_1$, $w(x) \geq 0$, $k \rightarrow \infty$, et utilisant le théorème de Beppo Levi on déduit, que (2.11) est satisfait pour $w(x) \in L_1$, $w(x) \geq 0$. D'après (2.11) il résulte, que l'ensemble

$$U_v = \left\{ u \in B : \int |G(u(x))| \cdot |v(x)| dx < \infty \right\} \quad (v \in L_1)$$

(*) $\mathcal{D}'(R^n)$: espace des distributions sur R^n au sens de L. Schwartz.

a la mesure totale par rapport à $\mu(du)$. D'après le théorème de Lebesgue

$$(2.12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int w_k(x) G(u(x)) dx = \int v(x) G(u(x)) dx, \quad u \in U_v,$$

$v \in L_1$, $w_k \in C_0^\infty(R^n)$, $|w_k(x)| \leq |v(x)|$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k(x) = v(x)$ p.p. (presque partout).

Substituant w_k dans (2.6) et passant à la limite quand $k \rightarrow \infty$, on déduit d'après (2.11), (2.12) et le théorème de Lebesgue, que (2.6) a lieu pour toute $w \in L_1$. ■

REMARQUE 2.2. D'après (2.4) et (2.5) on ne peut pas conclure, quel est le comportement dans l'entourage de l'infini des fonctions, appartenant à l'ensemble où est concentrée la mesure $\mu(du)$. Mais quand $\mu(du)$ est homogène on peut en obtenir quelque information. En effet, si on peut appliquer le théorème 2.1 à la fonction $G(u(x)) = |u(x)|^p$, $p > 1$, alors, posant dans (2.6) $w(x) = (1 + |x|^2)^r$, $r < -n/2$, d'après le théorème de [9], p. 390, on conclut, que la mesure μ est concentrée sur $L_p(r)$, $-n/2 - \varepsilon < r < -n/2$, $\forall \varepsilon > 0$, alors, sur un ensemble des fonctions « croissant lentement » quand $x \rightarrow \infty$.

D'autre part on montre aisément qu'il n'existe pas de mesure borélienne homogène sur $\mathcal{B}(L_p)$ concentrée sur L_p , sauf la mesure, concentrée sur $\{0\}$. En effet, supposons qu'une telle mesure $\mu(du)$ existe. La boule $S = \{u \in L_p, \|u\| \leq R\}$, étant invariante par rapport à la famille des opérateurs $\hat{h}$, $h \in R^n$, alors la mesure $\mu_1 = \chi \mu$, où χ , l'indicateur de l'ensemble S , est homogène. D'après (2.6) pour R telle, que $\int \|u\|_{L_p}^2 \mu_1(du) > 0$, et d'après le théorème de Beppo Levi on déduit la formule

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int w_k(x) dx \cdot \int |u(x)|^p \mu_1(du) &= \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint |u(x)|^p w_k(x) dx \mu_1(du) = \int \|u\|_{L_p}^2 \mu_1(du) < \infty \end{aligned}$$

pour $w_k(x) \in L_1(R^n)$, $w_k(x) \uparrow 1$, $\forall x \in R^n$ pour $k \rightarrow \infty$. Contradiction.

REMARQUE 2.3. Le théorème 2.1 reste juste dans le cas de la fonction

$$G(u(x)) = g(u(x), u(x + y_1), \dots, u(x + y_m)),$$

$y_1, \dots, y_m \in R^n$, $g(v_0, v_1, \dots, v_m)$: une fonction continue par rapport à $v_i \in R^p$, $j = 0, 1, \dots, m$, si les conditions (2.4), (2.5) sont satisfaites. Dans ce cas $G_0 = G_0(y_1, \dots, y_m)$.

Soit $\mu(du)$ une mesure homogène telle, que

$$(2.13) \quad \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(du) < \infty, \quad r < -\frac{n}{2}.$$

Posant dans (2.6) $G(u(x)) = u_j(x)u_k(x+y)$, où $u_m(x)$ une des coordonnées du $u(x) = (u_1(x), \dots, u_p(x))$, d'après la remarque 2.3 on obtient

$$(2.14) \quad \int \int u_j(x) u_k(x+y) w(x) dx \mu(du) = G_{jk}(y) \int w(x) dx, \quad \forall w \in L_1.$$

Le tenseur $\{G_{jk}(y); j, k = 1, \dots, p\}$, dépendant de $y \in R^p$, s'appelle le tenseur des corrélations de la mesure μ .

PROPOSITION 2.1. Soit $\mu(du)$ la mesure homogène, satisfaisant à (2.13), alors le tenseur $\{G_{jk}(y)\}$ ((2.14)) correspondant est continue en y .

DÉMONSTRATION. D'après (2.14) et l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski

$$(2.15) \quad \begin{aligned} & \int |G_{jk}(y + \Delta y) - G_{jk}(y)| (1 + |x|^2)^r dx \leq \\ & \leq \|u\|_{0,r} \left(\int |u(x + y + \Delta y) - u(x + y)|^2 (1 + |x|^2)^r dx \right)^{\frac{1}{2}} \mu(du), \quad r < -\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Mais

$$(2.16) \quad \begin{aligned} & \int |u(x + y + \Delta y) - u(x + y)|^2 (1 + |x|^2)^r dx \leq \\ & \leq C(y) \int |u(x + \Delta y) - u(x)|^2 (1 + |x|^2)^r dx \end{aligned}$$

et pour toute $u \in H_0(r)$ le membre droit de (2.16) tend vers 0 quand $\Delta y \rightarrow 0$, alors d'après (2.15), (2.16) et d'après le théorème de Lebesgue, le membre de (2.15) tend vers 0 quand $\Delta y \rightarrow 0$. ■

3) Exemple de la mesure homogène. Soit $\hat{K}: L_2 \rightarrow L_2$ un opérateur intégral continu, non négatif dans L_2 :

$$(2.17) \quad \hat{K}f(x) = \int K(x-y)f(y) dy, \quad K(z) = K(-z),$$

avec le noyau $K(z)$ continu dans le voisinage de 0. Par exemple toutes ces conditions sont satisfaites par l'opérateur avec le noyau

$$K(z) = \int \exp[i\langle \xi, z \rangle] (1 + |\xi|)^s d\xi, \quad s < -n.$$

Considérons la fonctionnelle

$$(2.18) \quad \chi(w) = \exp[-(\hat{K}w, w)].$$

PROPOSITION 2.2. *Il existe une mesure gaussienne $\mu(du)$ sur $\mathcal{B}(H_0(r))$, $r < -n/2$, telle, que*

$$(2.19) \quad \chi(w) = \int \exp[i(u, w)] \mu(du),$$

où $\chi(w)$ est la fonctionnelle (2.18).

DÉMONSTRATION. La fonctionnelle (2.18) est continue sur L_2 , alors elle est continue sur $H_0(-r)$. Soit $w \in H_0(-r)$ et $w_1 = (1 + |x|^2)^{-r} w \in H_0(r)$. Alors, d'après (2.19) on a

$$(2.20) \quad \chi(w) = \int \exp[i(u, w_1)_{0,r}] \mu(du) = \chi_1(w_1).$$

La dernière égalité dans (2.20) est la définition de $\chi_1(w_1)$. D'après (2.20), (2.18)

$$(2.21) \quad \chi_1(w_1) = \exp \left[-(\hat{K}(1 + |x|^2)^r w_1, (1 + |x|^2)^r w_1) \right] = \exp \left[-(\hat{M} w_1, w_1)_{0,r} \right],$$

$$(2.22) \quad \hat{M} w_1(x) = \int K(x - y) w_1(y) (1 + |y|^2)^r dy.$$

Pour établir la proposition il reste de montrer ([9], p. 416), que l'opérateur $\hat{M}: H_0(r) \rightarrow H_0(r)$, défini par (2.22), est nucléaire. Pour $w_1 \in H_0(r)$, $(1 + |x|^2)^r \cdot w_1(x) \in H_0(-r) \subset L_2$, alors, utilisant les propriétés du noyau K on déduit que l'opérateur $\hat{M}: H_0(r) \rightarrow H_0(r)$ est continu et nonnégatif.

Alors ([10], p. 147) de l'estimation

$$\int K(0) (1 + |y|^2)^r dy < \infty$$

il résulte, que $\hat{M}$ est nucléaire. ■

On va démontrer, que la mesure $\mu(du)$, construite dans la proposition 2.2, est homogène. Pour cela on aura besoin de la proposition suivante, qui suit aisément de (2.3):

PROPOSITION 2.3. *Soit $\mu(du)$ une mesure sur $\mathcal{B}(H_0(r))$ ($r < -n/2$) et $\chi(w)$ sa fonctionnelle caractéristique, définie par (2.19). Alors la homogénéité de $\mu(du)$ est équivalente à la condition*

$$(2.23) \quad \chi(w) = \chi(hw) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathfrak{A},$$

où $\mathfrak{A}$ un ensemble dense dans $H_0(r)$.

PROPOSITION 2.4. *La mesure $\mu(du)$, construite dans la proposition 2.2, est homogène.*

DÉMONSTRATION. D'après (2.18), (2.17) il résulte, que pour la fonctionnelle caractéristique de $\mu(du)$ (2.23) est satisfait. Alors de la proposition 2.3 il résulte la proposition 2.4. ■

3. — La formulation des résultats principaux.

Soit $\mu(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, $0 < T < \infty$, $\omega \in \mathcal{B}(H_0(r))$, $r < -n/2$, une famille de mesures, définies sur $\mathcal{B}(H_0(r))$ et dépendant de paramètre t , et $\chi(t, w)$ les fonctionnelles caractéristiques correspondantes:

$$(3.1) \quad \chi(t, w) = \int \exp[i(u, w)] \mu(t, du), \quad w \in H_0(-r), \quad t \in [0, T].$$

On suppose, que

$$(3.2) \quad \chi(t, w)|_{t=0} = \chi(0, w) = \int \exp[i(u, w)] \mu(0, du),$$

$$(3.3) \quad \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du) < \infty, \quad r < -n/2.$$

On appelle l'équation de Hopf ([2], [5], [4]), correspondante à (1.1), l'équation

$$(3.4) \quad \chi(t, w) - \chi(0, w) = -i \int_0^t \int \exp[i(u, w)] L(u, w) \mu(\tau, du) d\tau,$$

$$(3.5) \quad L(u, w) = (u, \mathcal{A}^*(\mathcal{D})w) + \sum_{j=1}^n \left(F_j(u), \frac{\partial w}{\partial x_j} \right),$$

$\mathcal{A}^*(\mathcal{D})$ est l'opérateur différentiel formellement adjoint à l'opérateur (1.2) par rapport au produit scalaire dans L_2 , $F_j(u)$ les opérateurs (1.4), (1.5).

A l'aide de l'intégration par parties on a

$$(3.6) \quad L(u, w) = - \sum_{i,j=1}^n \int \left\langle a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\rangle dx + \int \langle \mathcal{A}_1(\mathcal{D})u, w \rangle dx + \sum_{j=1}^n \left(F_j(u), \frac{\partial w}{\partial x_j} \right),$$

$$(3.7) \quad \mathcal{A}_1(\mathcal{D})u = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu,$$

a_{ij} , b_i , c sont les matrices dans (1.2).

Dans les paragraphes suivants on démontrera le théorème principal suivant:

THÉOREME 3.1. Soit $\mu(0, du)$ la probabilité homogène sur $\mathcal{B}(H_0(r))$, $r < -n/2$, vérifiant (3.3). Alors, il existe une fonctionnelle $\chi(t, w)$, définie sur $[0, T] \times H_0(-r)$, $0 < T < \infty$, $\forall r < -n/2$, et ayant les propriétés suivantes:

a) Pour tout $t \in [0, T]$ $\chi(t, w)$ est la fonctionnelle caractéristique d'une mesure de probabilité $\mu(t, du)$ homogène, définie sur $\mathcal{B}(H_0(r))$, alors on a (3.1).

b) La mesure $\mu(t, du)$ pour presque tout $t \in [0, T]$ (par rapport à la mesure dt de Lebesgue) est concentrée sur $H_1(r)$, $r < -n/2$.

c) Pour tout $t \in [0, T]$ et $r < -n/2$ il existe les constantes α , C , indépendantes de t , telles que

$$(3.8) \quad \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(t, du) + \alpha \int_0^t \int \|u\|_{1,r}^2 \mu(\tau, du) d\tau \leq \exp [Ct] \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du).$$

d) Pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$(3.9) \quad \int |u(x)|^2 \mu(t, du) + \alpha \int_0^t \int \sum_{|\beta| \leq 1} |\mathcal{D}^\beta u(x)|^2 \mu(\tau, du) d\tau \leq \\ \leq \exp [Ct] \int |u(x)|^2 \mu(0, du)$$

où les intégrales ont le sens indiqué dans la remarque 2.1.

e) $\chi(t, w)$ satisfait à (3.2).

f) Pour tout $t \in [0, T]$ et $w \in W_1^1(*)$ l'équation (3.4), (3.6) est satisfaite.

On appelle la famille $\mu(t, du)$, ayant les propriétés indiquées dans le théorème 3.1, la solution statistique du problème (1.1), (1.7).

4. - Le système des équations différentielles approchées.

1) Nous considérons un système des équations différentielles pour lequel le problème de Cauchy dans les espaces $H_0(r)$ a une solution unique, et ce système approche en quelque sens le système (1.1).

Voilà ce système

$$(4.1) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -\mathcal{A}(\mathcal{D})u + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j(u)}{\partial x_j} - \varepsilon |u|^4 u(t, x), \quad x \in R^n, \quad t > 0,$$

(*) W_1^1 — l'espace de Sobolev des fonctions intégrables sur R^n avec ses dérivées de premier ordre.

$u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_p(t, x))$: la fonction cherchée; $\varepsilon > 0$: le petit paramètre, les opérateurs $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ et $F_j(u)$ comme dans (1.2), (1.4), (1.5). On suppose, que

$$(4.2) \quad u(t, x)|_{t=0} = u_0(x) \in H_0(r).$$

Introduisons l'espace

$$(4.3) \quad B(0, T; r) = L_\infty(0, T; H_0(r)) \cap L_2(0, T; H_1(r)) \cap L_6(0, T; L_6(r)).$$

DÉFINITION 4.1. La fonction $u(t, x) \in B(0, T; r)$, définie pour tout $t \in [0, T]$, s'appelle la solution faible du problème (4.1), (4.2), si:

a) pour toute fonction $w \in H_1(-r) \cap L_6(-5r)$ presque partout en $t \in [0, T]$ on a

$$(4.4) \quad \int \left\langle \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, w(x) \right\rangle dx = L_\varepsilon(u(t, \cdot), w),$$

$$(4.5) \quad L_\varepsilon(u, w) = \int_{i,j=1}^n \left\langle a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\rangle dx - \int \langle \mathcal{A}_1(\mathcal{D}) u, w \rangle dx + \\ + \sum_{j=1}^n \int \left\langle \frac{\partial F_j(u)}{\partial x_j}, w \right\rangle dx - \varepsilon \int \langle |u|^4 u, w \rangle dx,$$

a_{ij} : les matrices de (1.2), $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$: l'opérateur (3.7). Tous les membres dans (4.5) sont intégrables en t ;

b) (4.2) est satisfait;

c) pour tout $t \in [0, T]$

$$(4.6) \quad \|u(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \alpha \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{1,r}^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{L_6(r)}^6 d\tau \leq \exp[C_\varepsilon t] \|u_0\|_{0,r}^2$$

où les constantes α , C_ε ne dépendent pas de t , u_0 .

THÉORÈME 4.1. Pour toute condition initiale $u_0 \in H_0(r)$ il existe une unique solution faible $u(t, x) \in B(0, T; r)$ du problème (4.1), (4.2).

La démonstration est donnée dans le § 7.

Notons $S_\varepsilon(t)$ l'opérateur suivant:

$$(4.7) \quad S_\varepsilon(t) u_0 = u(t, x),$$

alors c'est une application de la condition initiale $u_0 \in H_0(r)$ à la solution $u(t, x) \in B(0, T; r)$ du problème (4.1), (4.2) dans le moment t . Grâce au théo-

rème 4.1 cette définition est correcte. Dans la suite on aura besoin de propositions suivantes:

PROPOSITION 4.1. *Pour tout $t \in [0, T]$ l'opérateur*

$$(4.8) \quad S_\varepsilon(t): H_0(r) \rightarrow H_0(r)$$

est continu.

PROPOSITION 4.2. *Soit $\mu(du)$ une mesure sur $\mathcal{B}(H_0(r))$, dt la mesure de Lebesgue, $w = H_1(-r) \cap L_6(-5r)$. Alors les fonctionnelles $\Phi(t, u) = (S_\varepsilon(t)u, w)$, $\Psi(t, u) = L_\varepsilon(S_\varepsilon(t)u, w)$ sont $dt \times \mu(du)$ -mesurables.*

PROPOSITION 4.3. *Soit $\mu(du)$ la mesure sur $\mathcal{B}(H_0(r))$, dt la mesure de Lebesgue. Alors, pour toute fonction $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$*

$$(4.8') \quad |\varphi(x)| \leq \text{const} (1 + |x|^2)^r$$

les fonctionnelles

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \Phi_1(t, u) &= \int \varphi(x) |S_\varepsilon(t)u|^2 dx, & \Phi_2(t, u) &= \int \varphi(x) \sum_{|\alpha| \leq 1} |D_x^\alpha S_\varepsilon(t)u(x)|^2 dx, \\ \Phi_3(t, u) &= \int \varphi(x) |S_\varepsilon(t)u(x)|^6 dx, & \Phi_4(t, u) &= \int \varphi(x) \langle F_j(S_\varepsilon(t)u), S_\varepsilon(t)u \rangle dx, \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, n,$

sont $dt \times \mu(du)$ -mesurables. Les fonctionnelles

$$(4.10) \quad \Psi_l(t, u) = \int_0^t \Phi_l(\tau, u) d\tau, \quad l = 1, \dots, 4,$$

sont $dt \times \mu(du)$ -mesurables et pour tout $t \in [0, T]$ $\Psi_l(t, u)$ sont $\mu(du)$ -mesurable.

Les démonstrations de propositions 4.1, 4.2, 4.3 sont données dans le § 7.

2) On va déduire une estimation uniforme en ε pour les solutions des problèmes (4.1), (4.2), $\varepsilon > 0$. On aura besoin du

LEMME 4.1. *On suppose, que l'opérateur (1.2) satisfait à (1.3). Alors*

$$(4.11) \quad \begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \int \left\langle a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial(1 + |x|^2)^r u}{\partial x_j} \right\rangle dx + \int \langle \mathcal{A}_1(\mathcal{D})u, u \rangle (1 + |x|^2)^r dx \geq \\ \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H_1(r)}^2 - C \|u\|_{H_0(r)}^2, \quad \forall u \in H_1(r), \end{aligned}$$

où α, C ne dépendent pas de u .

DÉMONSTRATION. Soit $u \in H_2(r)$. Notons $v(x) = (1 + |x|^2)^{r/2} u(x) \in H_2$. Alors

$$(4.12) \quad - \sum_{i,j=1}^n \int \left\langle a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial (1 + |x|^2)^r u}{\partial x_j} \right\rangle dx + \int \langle \mathcal{A}_1(\mathcal{D}) u, u \rangle (1 + |x|^2)^r dx = \\ = (\mathcal{A}(\mathcal{D}) v, v) + I(v),$$

$$(4.13) \quad I(v) = - \sum_{i,j=1}^n \int \left\langle a_{ij} v \frac{\partial (1 + |x|^2)^{-r/2}}{\partial x_i}, (1 + |x|^2)^{r/2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle + \\ + \left\langle a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}, v (1 + |x|^2)^{-r/2} \frac{\partial (1 + |x|^2)^{r/2}}{\partial x_j} \right\rangle + \\ + \left\langle a_{ij} v \frac{\partial (1 + |x|^2)^{-r/2}}{\partial x_i}, v \frac{\partial (1 + |x|^2)^{r/2}}{\partial x_j} \right\rangle dx + \\ + \int \sum_{j=1}^n \left\langle b_j v \frac{\partial (1 + |x|^2)^{-r/2}}{\partial x_j}, (1 + |x|^2)^{r/2} v \right\rangle dx.$$

D'après (4.13), l'inégalité de Schwarz et utilisant $|ab| \leq \delta a^2 + b^2/\delta$ on déduit

$$(4.14) \quad |I(v)| \leq \frac{\alpha}{2} \|v\|_1^2 + C_1 \|v\|_0^2.$$

Alors (4.12), (1.3), (4.14) entraînent (4.11) pour $u \in H_2(r)$. $H_2(r)$ est dense dans $H_1(r)$, alors (4.11) a lieu pour $u \in H_1(r)$. ■

LEMME 4.2. On suppose, que $F_j(u)$ ((1.4), (1.5)) satisfont à (1.6). Alors

$$(4.15) \quad \sum_{j=1}^n \int \left\langle \frac{\partial F_j(u(x))}{\partial x_j}, u(x) \right\rangle (1 + |x|^2)^r dx = \\ = - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^n \int \langle F_j(u), u \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx, \quad \forall u \in H_1(r) \cap L_6(r).$$

DÉMONSTRATION. On a

$$(4.16) \quad \sum_{j=1}^n \int \left\langle \frac{\partial F_j(u(x))}{\partial x_j}, u(x) \right\rangle (1 + |x|^2)^r dx = \\ = \sum_{j=1}^n \int \left\langle \frac{\partial F_j((1 + |x|^2)^{r/3} u)}{\partial x_j}, (1 + |x|^2)^{r/3} u \right\rangle dx - \\ - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^n \int \langle F_j(u), u \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx.$$

D'après (1.6) et (4.16) résulte (4.15), $\forall u \in C_0^\infty(R^n)$. Alors (4.15) est satisfait aussi par $u \in H_1(r) \cap L_6(r)$. ■

PROPOSITION 4.4. Soit $S_\varepsilon(t)u(x) \in B(0, T; r)$ la solution de (4.1), (4.2). Alors pour tout $t \in [0, T]$

$$(4.17) \quad \|S_\varepsilon(t)u\|_{0,r}^2 + \alpha \int_0^t \|S_\varepsilon(\tau)u\|_{1,r}^2 d\tau + 2\varepsilon \int_0^t \|S_\varepsilon(\tau)u\|_{L_\varepsilon(r)}^6 d\tau \leq \\ \leq \|u\|_{0,r}^2 + C \int_0^t \|S_\varepsilon(\tau)u\|_{0,r}^2 d\tau - \frac{4}{3} \sum_{j=1}^n \int_0^t \langle F_j(S_\varepsilon(\tau)u), S_\varepsilon(\tau)u \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx d\tau,$$

où α, C ne dépendent pas de t, u, ε .

DÉMONSTRATION. Soit $S_\varepsilon(t)u(x) = u(t, x)$. On a $u(t, x) \in B(0, T; r)$, alors pour presque tout t $u(t, x)(1 + |x|^2)^r \in H_1(-r) \cap L_6(-5r)$. Substituant dans (4.4) $w = u(t, x)(1 + |x|^2)^r$ on déduit, que p.p. en t

$$(4.18) \quad \int \left\langle \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, u(t, x) \right\rangle (1 + |x|^2)^r dx = \int \sum_{i,j=1}^n \left\langle a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial (1 + |x|^2)^r u}{\partial x_j} \right\rangle dx - \\ - \int \langle \mathcal{A}_1(\mathbb{D})u, u \rangle (1 + |x|^2)^r dx + \sum_{j=1}^n \int \left\langle \frac{\partial F_j(u)}{\partial x_j}, u \right\rangle \cdot (1 + |x|^2)^r dx - \\ - \varepsilon \int \langle |u|^4 u, u \rangle (1 + |x|^2)^r dx.$$

D'après les lemmes 4.1, 4.2 et (4.18)

$$(4.19) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u(t, \cdot)\|_{1,r}^2 + \varepsilon \|u(t, \cdot)\|_{L_\varepsilon(r)}^6 \leq \\ \leq C \|u(t, \cdot)\|_{0,r}^2 - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^n \int \langle F_j(u), u \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx.$$

En intégrant (4.19) en t , on obtient (4.17). ■

5. — Equation approximée de Hopf et sa solution.

1) Soit $\mu(0, du)$ la mesure, vérifiant les hypothèses du théorème 3.1. Posons

$$(5.1) \quad \mu_\varepsilon(t, \omega) = \mu(S_\varepsilon(t)^{-1}\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{B}(H_0(r)), \quad r < -n/2, \quad \forall t \in [0, T],$$

$S_\varepsilon(t)$ est l'opérateur (4.7). D'après la proposition 4.1 la définition (5.1) est correcte. La famille des mesures $\mu_\varepsilon(t, du)$, qui dépend du paramètre t , s'appelle la solution statistique du problème (4.1), (4.2).

De (5.1) suit, que pour toute fonctionnelle $f(u)$, pour la quelle la fonctionnelle $f(S_\varepsilon(t)u)$ est $\mu(0, du)$ -intégrable,

$$(5.2) \quad \int f(u) \mu_\varepsilon(t, du) = \int f(S_\varepsilon(t)u) \mu(0, du).$$

Alors, la fonctionnelle caractéristique $\chi_\varepsilon(t, w)$ de la solution statistique $\mu_\varepsilon(t, du)$ peut être définie par chacune des égalités:

$$(5.3) \quad \chi_\varepsilon(t, w) = \int \exp[i(u, w)] \mu_\varepsilon(t, du) = \int \exp[i(S_\varepsilon(t)u, w)] \mu(0, du),$$

$$\forall w \in H_0(-r).$$

Nous allons montrer, que la mesure $\mu_\varepsilon(t, du)$ est homogène. D'abord on démontrera le

LEMME 5.1. *Soit $S_\varepsilon(t)$ l'opérateur de translation suivant les trajectoires du système (4.1). Alors*

$$(5.4) \quad \hat{h}(S_\varepsilon(t)u)(x) = S_\varepsilon(t)(\hat{h}u)(x), \quad t \in [0, T], \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

DÉMONSTRATION. Les coefficients de l'équation (4.1) ne dépendent pas de x , alors $\forall h \in \mathbb{R}^n$ la fonction $\hat{h}S_\varepsilon(t)u(x)$ est la solution de (4.1). Mais pour $t = 0$ les fonctions $\hat{h}S_\varepsilon(t)u$ et $S_\varepsilon(t)\hat{h}u$ coïncident, alors d'après le théorème de l'unicité de la solution du problème (4.1), (4.2) résulte (5.4).

PROPOSITION 5.1. *Soit la mesure $\mu(0, du)$ homogène. Pour tout $t \in [0, T]$ la mesure $\mu_\varepsilon(t, du)$ est aussi homogène.*

DÉMONSTRATION. D'après (5.3), (5.4), (2.3)

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(t, \hat{h}w) &= \int \exp[i(-\hat{h})S_\varepsilon(t)u, w] \mu(0, du) = \\ &= \int \exp[i(S_\varepsilon(t)u, w)] \mu(0, du) = \chi_\varepsilon(t, w), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

alors d'après la proposition 2.3 on déduit l'homogénéité de la mesure $\mu_\varepsilon(t, du)$. ■

2) Nous allons établir une estimation pour $\mu_\varepsilon(t, du)$ uniforme en ε , qui sera importante dans la suite.

THÉORÈME 5.1. *Soit $\mu(0, du)$ une mesure, vérifiant les hypothèses du théorème 3.1, et $\mu_\varepsilon(t, du)$ la famille des mesures, définie par (5.1). Alors il existe*

les constantes α et C , qui ne dépendent de t et de ε , que

$$(5.5) \quad \int \|u\|_{0,r}^2 \mu_\varepsilon(t, du) + \alpha \int_0^t \int \|u\|_{1,r}^2 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^6 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \leq \\ \leq \exp [Ct] \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du), \quad r < -n/2, \quad t \in [0, T].$$

On a aussi

$$(5.6) \quad \int |u(x)|^2 \mu_\varepsilon(t, du) + \alpha \int_0^t \sum_{|\gamma| \leq 1} |\mathcal{D}^\gamma u(x)|^2 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau + \\ + \varepsilon \int_0^t \int |u(x)|^6 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \leq \exp [Ct] \int |u(x)|^2 \mu(0, du)$$

où tous les membres dans (5.6) ont le sens indiqué dans la remarque 2.1.

DÉMONSTRATION. D'après les propositions 4.1, 4.3 tout membre dans (4.17) pour tout $t \in [0, T]$ est $\mu(0, du)$ -mesurable. D'après (1.4), (1.5), l'inégalité de Hölder et (4.6) on déduit

$$(5.7) \quad \left| \int_0^t \int F_j(S_\varepsilon(\tau)u), S_\varepsilon(\tau)u \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx d\tau \right| \leq \\ \leq C \int_0^t \int |S_\varepsilon(\tau)u(x)|^3 (1 + |x|^2)^r dx d\tau \leq C \left(\int_0^t \|S_\varepsilon(\tau)u\|_{L_\varepsilon(r)}^6 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ \cdot \left(\int_0^t \|S_\varepsilon(\tau)u\|_{0,r}^2 d\tau \right)^{\frac{3}{2}} \leq C_\varepsilon \|u\|_{0,r}^2.$$

Alors, d'après (4.6), (5.7), (3.3) tout membre dans (4.17) est $\mu(0, du)$ -intégrable. En intégrant (4.17) en $\mu(0, du)$ et en utilisant le théorème de Fubini (ce qu'est possible grâce aux propositions 4.3 et 4.2), on déduit

$$(5.8) \quad \int \|u\|_{0,r}^2 \mu_\varepsilon(t, du) + \alpha \int_0^t \int \|u\|_{1,r}^2 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^6 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \leq \\ \leq \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du) + C \int_0^t \int \|u\|_{0,r}^2 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau - \\ - \frac{4}{3} \sum_{j=1}^n \int_0^t \int \int \langle F_j(u), u \rangle \frac{\partial (1 + |x|^2)^r}{\partial x_j} dx \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau.$$

A l'aide du théorème 2.1 on va montrer le point crucial dans la démonstration :

$$(5.9) \quad \sum_{j=1}^n \iiint \langle F_j(u), u \rangle \frac{\partial(1 + |x|^2)^r}{\partial x_j} dx \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau = 0.$$

D'après (5.2), le théorème de Fubini et l'estimation, analogue à (5.7)

$$\int_0^t \iiint |\langle F_j(u), u \rangle| (1 + |x|^2)^r dx \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \leq C_\varepsilon \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du),$$

alors pour presque tout $t \in [0, T]$

$$(5.10) \quad \int \langle F_j(u), u \rangle (1 + |x|^2)^r dx \mu_\varepsilon(t, du) < \infty.$$

Pour ces t de (5.10) il résulte, que l'hypothèse (2.4) du théorème 2.1 est satisfait par la fonction $Gu(x) = \langle F_j(u(x)), u(x) \rangle$ et $\mu(du) = \mu_\varepsilon(t, du)$.

L'hypothèse (2.5) du théorème 2.1 est satisfait d'après (5.2), la proposition 4.3 et (5.10). Alors, d'après (2.6)

$$\begin{aligned} \iint \langle F_j(u), u \rangle \frac{\partial(1 + |x|^2)^r}{\partial x_j} dx \mu_\varepsilon(t, du) &= \int \langle F_j(u(x)), u(x) \rangle \mu_\varepsilon(\tau, du) \cdot \\ &\quad \cdot \int \frac{\partial}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx = 0 \end{aligned}$$

d'où (5.9). D'après (5.8), (5.9) et l'inégalité de Gronuoll on déduit

$$(5.11) \quad \int \|u\|_{0,r}^2 \mu_\varepsilon(t, du) \leq \exp [Ct] \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du).$$

De (5.8), (5.9), (5.11) suit (5.5). Par les considérations analogues on montre aisément, qu'on peut appliquer le théorème 2.1 à tous les autres termes de (5.8). Alors de (5.5) et (2.7) suit (5.6). ■

3) PROPOSITION 5.2. *Pour tout $t \in [0, T]$, $w \in H_1(-r) \cap L_6(-5r)$, $r < -n/2$, la mesure $\mu_\varepsilon(t, du)$ et leur fonctionnelle caractéristique $\chi_\varepsilon(t, w)$ satisfont à l'équation*

$$(5.12) \quad \chi_\varepsilon(t, w) - \chi_\varepsilon(0, w) = i \int_0^t \int \exp [i(u, w)] L_\varepsilon(u, w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau.$$

DÉMONSTRATION. Soit $w(x) \in H_1(-r) \cap L_6(-5r)$, $r < -n/2$, $f(\tau)$: absolument continue et $f(\tau) = 0$ pour $\tau \leq 0$, $\tau \geq t$. Multipliant (5.3) par $f'(\tau)$,

intégrant en τ , d'après le théorème de Fubini (*), on obtient

$$(5.13) \quad \int_0^t f'(\tau) \chi_\varepsilon(\tau, w) d\tau = \int_0^t \int f'(\tau) \exp [i(S_\varepsilon(\tau)u, w)] d\tau \mu(0, du).$$

D'après le théorème 4.1 la fonction $t \rightarrow (S_\varepsilon(t)u, w)$ est absolument continue, donc, utilisant (4.4), on a

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \int_0^t \int f'(\tau) \exp [i(S_\varepsilon(\tau)u, w)] d\tau \mu(0, du) = \\ = -i \int_0^t \int f(\tau) \exp [i(S_\varepsilon(\tau)u, w)] L_\varepsilon(S_\varepsilon(\tau)u, w) d\tau \mu(0, du). \end{aligned}$$

Montrons que

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \int_0^t |f(\tau) \exp [i(S_\varepsilon(\tau)u, w)] L_\varepsilon(S_\varepsilon(\tau)u, w)| d\tau \leq \\ \leq C \sup_\tau |f(\tau)| (\|w\|_{1,-r} + \|w\|_{L_\varepsilon(-5r)})(t + \|u\|_{0,r}^2). \end{aligned}$$

En effet, d'après l'inégalité de Schwarz

$$(5.16) \quad \left| \int \sum_{i,j} \left\langle a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\rangle dx - \int \langle \mathcal{A}_1(\mathbb{D})u, w \rangle dx \right| \leq C \|u\|_{1,r} \|w\|_{1,-r}$$

et

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \left| \int \left\langle \frac{\partial F_j(u)}{\partial x_j}, w \right\rangle dx \right| \leq C \|w\|_{1,-r} \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^2 \leq \\ \leq C \|w\|_{1,-r} \|u\|_{0,r}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^{\frac{3}{2}} \leq C \|w\|_{1,-r} (\|u\|_{0,r} + \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^3). \end{aligned}$$

Enfin, d'après l'inégalité de Hölder

$$(5.18) \quad \left| \int \langle |u|^4 u, w \rangle dx \right| \leq \|w\|_{L_\varepsilon(-5r)} \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^5.$$

D'après (4.5), (5.16)-(5.18) on déduit

$$(5.19) \quad \begin{aligned} |L_\varepsilon(u, w)| \leq C \|w\|_{1,-r} (\|u\|_{1,r} + \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^3) + \|w\|_{L_\varepsilon(-5r)} \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^5 \leq \\ \leq C_1 (\|w\|_{1,-r} + \|w\|_{L_\varepsilon(-5r)}) (1 + \|u\|_{1,r}^2 + \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^6). \end{aligned}$$

(*) C'est possible grâce à la proposition 4.2.

De (5.19), (4.6) suit (5.15). D'après (5.15) la proposition 4.2 utilisant le théorème de Fubini on a

$$(5.20) \quad i \int_0^t f(\tau) \exp [i(S_\varepsilon(\tau)u, w)] L_\varepsilon(S_\varepsilon(\tau)u, w) d\tau \mu(0, du) = \\ = i \int_0^t f(\tau) \int \exp [i(S_\varepsilon(\tau)u, w)] L_\varepsilon(S_\varepsilon(\tau)u, w) \mu(0, du) d\tau$$

et

$$(5.21) \quad \tau \rightarrow \int \exp [i(S_\varepsilon(\tau)u, w)] L_\varepsilon(S_\varepsilon(\tau)u, w) \mu(0, du) \in L_1(0, t).$$

D'après (5.13), (5.14), (5.20), (5.2)

$$(5.22) \quad - \int_0^t f'(\tau) \chi_\varepsilon(\tau, w) d\tau = i \int_0^t f(\tau) \int \exp [i(u, w)] L_\varepsilon(u, w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau.$$

Soit

$$f(\tau) = f_k(\tau) = \begin{cases} k\tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{k}, \\ 1, & \frac{1}{k} \leq \tau \leq t - \frac{1}{k}, \\ k(t - \tau), & t - \frac{1}{k} \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

D'après la continuité de la fonction $t \rightarrow (S_\varepsilon(t)u, w)$ et d'après le théorème de Lebesgue, la fonctionnelle $\chi_\varepsilon(t, w)$ est continue on t et par conséquence

$$(5.23) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f'_k(\tau) \chi_\varepsilon(\tau, w) d\tau = \chi_\varepsilon(0, w) - \chi_\varepsilon(t, w).$$

D'après (5.21) et le théorème de Lebesgue

$$(5.24) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f_k(\tau) \int \exp [i(u, w)] L_\varepsilon(u, w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau = \\ = \int_0^t \int \exp [i(u, w)] L_\varepsilon(u, w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau.$$

De (5.22), (5.23), (5.24) suit (5.12). ■

6. — La construction de la solution de l'équation de Hopf.

1) On va montrer, que de l'ensemble des fonctionnelles $\{\chi_\varepsilon(t, w)\}$ on peut extraire une suite $\{\chi_{\varepsilon'}(t, w)\}$, tendant vers une fonctionnelle $\chi(t, w)$, quand $\varepsilon' \rightarrow 0$, qui a les propriétés a)-f) du théorème 3.1.

Les mesures $\mu_\varepsilon(t, du)$ sont les probabilités, alors on a

$$(6.1) \quad |\chi_\varepsilon(t, w)| \leq \chi_\varepsilon(t, 0) = 1 \quad \forall t > 0, w \in H_0(r), \varepsilon > 0.$$

LEMME 6.1. *Il existe une constante C , qui ne dépend pas de ε , t , w_1 , w_2 , telle que*

$$(6.2) \quad |\chi_\varepsilon(t, w_1) - \chi_\varepsilon(t, w_2)| \leq C \|w_1 - w_2\|_{0,-r}.$$

DÉMONSTRATION. D'après (5.3), (5.5)

$$(6.3) \quad |\chi_\varepsilon(t, w_1) - \chi_\varepsilon(t, w_2)| \leq \int |\exp[i(u, w_1)](1 - \exp[i(u, w_1 - w_2)])| \mu_\varepsilon(t, du) \leq \\ \leq \int \|u\|_{0,r} \|w_1 - w_2\|_{0,-r} \mu_\varepsilon(t, du) \leq C \|w_1 - w_2\|_{0,-r}. \quad \blacksquare$$

Notons S_R la boule de rayon R dans l'espace

$$(6.4) \quad W(-r) = H_1(-r) \cap L_6(-5r) \cap C^1(-r)$$

ayant le centre dans 0.

LEMME 6.2. *Pour R fixé l'ensemble des fonctionnelles $\chi_\varepsilon(t, w)$ est uniformément continu en ε sur $[0, T] \times S_R$.*

DÉMONSTRATION. Soit $w_1, w_2 \in S_R$, $t_1, t_2 \in [0, T]$. Alors, d'après (6.2) avec $t = t_2$

$$(6.5) \quad |\chi_\varepsilon(t_1, w_1) - \chi_\varepsilon(t_2, w_2)| \leq |\chi_\varepsilon(t_1, w_1) - \chi_\varepsilon(t_2, w_1)| + C \|w_1 - w_2\|_{0,-r}$$

où C ne dépend pas de $w_1, w_2, t_1, t_2, R, \varepsilon$. D'après (1.4), (1.5), (6.4)

$$(6.6) \quad \left| \int \left\langle \frac{\partial F_j(u)}{\partial x_j}, w \right\rangle dx \right| \leq C \|u\|_{0,r}^2 \|w\|_{C^1(-r)}.$$

De (5.12), (4.5), (5.16), (5.18), (6.6) on déduit, que

$$(6.7) \quad |\chi_\varepsilon(t_1, w_1) - \chi_\varepsilon(t_2, w_1)| \leqslant C \left| \int_{t_1}^{t_2} (\|u\|_{1,r} + \|u\|_{0,r}^2 + \varepsilon \|u\|_{L_6(r)}^5) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \|w_1\|_{W(-r)} \right|.$$

D'après l'inégalité de Hölder et (5.5)

$$(6.8) \quad \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \|u\|_{L_6(r)}^5 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \leqslant C \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\int \|u\|_{L_6(r)}^6 \mu_\varepsilon(\tau, du) \right)^{5/6} d\tau \leqslant \\ \leqslant C \varepsilon |t_1 - t_2|^{1/6} \left(\int_0^T \|u\|_{L_6(r)}^6 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \right)^{5/6} \leqslant C_1 \varepsilon^{\frac{5}{6}} |t_1 - t_2|^{\frac{5}{6}}$$

où C_1 ne dépend pas de ε . D'une manière analogue on démontre, que

$$(6.9) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} (\|u\|_{1,r} + \|u\|_{0,r}^2) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \right| \leqslant C (|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} + |t_1 - t_2|).$$

De (6.5), (6.7), (6.8), (6.9) suit l'assertion du lemme. ■

THÉORÈME 6.1. *Sous les hypothèses du théorème 3.1 de l'ensemble des fonctionnelles $\{\chi_\varepsilon(t, w)\}$ on peut extraire une suite $\{\chi_{\varepsilon'}(t, w)\}$ ($\varepsilon' \rightarrow 0$), tendant vers une fonctionnelle $\chi(t, w)$ quand $\varepsilon' \rightarrow 0$ pour tout $(t, w) \in [0, T] \times W(-r)$. Pour $t \in [0, T]$ $\chi(t, w)$ se prolonge par continuité sur $H_0(-r)$, $r < -n/2$. La fonctionnelle $\chi(t, w)$ a les propriétés a)-e) du théorème 3.1.*

DÉMONSTRATION. D'après (6.1) et le lemme 6.2, l'ensemble $\chi_\varepsilon(t, w)$ satisfait les hypothèses du théorème d'Arzela sur $[0, T] \times S_R$, $R > 0$ quelconque, mais fixé. Alors à l'aide du processus diagonal, d'une manière analogue à [5], on peut extraire une suite $\{\chi_{\varepsilon'}(t, w)\}$, tendant sur $[0, T] \times W(-r)$ vers une fonctionnelle $\chi(t, w)$, quand $\varepsilon' \rightarrow 0$. $W(-r)$ est dense dans $H_0(-r)$, alors, d'après (6.2), pour tout t la fonctionnelle $\chi(t, w)$ par continuité se prolonge sur $H_0(-r)$. χ_ε est positive définie en w , $\forall \varepsilon > 0$, alors $\chi(t, w)$ est positive définie en w . D'après la homogénéité de $\mu_\varepsilon(t, du)$ et la proposition 2.3 il résulte

$$\chi_\varepsilon(t, hw) = \chi_\varepsilon(t, w), \quad \forall \varepsilon > 0, h \in R^n,$$

alors

$$(6.10) \quad \chi(t, w) = \chi(t, hw), \quad \forall h \in R^n.$$

Par le changement: $w_1 = (1 + |x|^2)^r w$ et d'après (5.5), on voit aisément, qu'on peut utiliser le théorème 4.1 de [5], dont il suit, que pour tout $t \in [0, T]$ il existe une mesure $\mu(t, du)$ sur $\mathcal{B}(H_0(r))$, $r < -n/2$, vérifiant (3.1). D'après (6.10) et la proposition 2.3 il résulte, que cette mesure est homogène. De $\chi(t, 0) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \chi_{\varepsilon'}(t, 0) = 1$ on déduit, que $\mu(t, du)$ est une probabilité.

Rappelons, que d'après le théorème 4.1 de [5] pour toute fonctionnelle $f(u)$, continue et bornée sur $H_0(r)$, et pour tout sous-espace $L \subset H_0(r)$ de dimension finie

$$(6.11) \quad \int f(P_L u) \mu_{\varepsilon'}(t, du) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \int f(P_L u) \mu(t, du), \quad t \in [0, T],$$

où P_L est le projecteur sur L , ou l'opérateur linéaire, borné à valeur sur L .

Soit $\{e_j\}$, $\{f_j\}$, $f_j \in H_2(r)$ ($j = 1, 2, \dots$) bases orthonormées respectivement dans $H_0(r)$ et $H_1(r)$. Soit P_k (resp. Q_k) le projecteur sur $[e_1, \dots, e_k]$ (resp. sur $[f_1, \dots, f_k]$) dans $H_0(r)$ (resp. dans $H_1(r)$). Posons

$$(6.12) \quad \varphi_R(u) = \min(R, \|P_R u\|_{0,r}^2), \quad \psi_R(u) = \min(R, \|Q_R u\|_{1,r}^2).$$

Evidemment $\varphi_R(u) \leq \|u\|_{0,r}^2$, $\psi_R(u) \leq \|u\|_{1,r}^2$, alors, d'après (5.5)

$$(6.13) \quad \int \varphi_R(u) \mu_{\varepsilon'}(\tau, du) + \alpha \int_0^t \int \psi_R(u) \mu_{\varepsilon'}(\tau, du) d\tau \leq \exp[Ct] \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du), \quad \forall \varepsilon'.$$

Utilisant (6.11) et le théorème de Lebesgue on voit aisément qu'on peut passer à la limite dans (6.13) quand $\varepsilon' \rightarrow 0$ et on obtient l'inégalité

$$(6.14) \quad \int \varphi_R(u) \mu(t, du) + \alpha \int_0^t \int \psi_R(u) \mu(\tau, du) d\tau \leq \exp[Ct] \int \|u\|_{0,r}^2 \mu(0, du).$$

Utilisant le théorème de Beppo Levi on montre que dans (6.14) on peut passer à la limite quand $R \rightarrow \infty$. On obtient l'inégalité (3.8). De (3.8) il résulte, que pour $t \in [0, T] \setminus \gamma$, où γ est un ensemble de mesure nulle,

$$(6.15) \quad \int \|u\|_{1,r}^2 \mu(t, du) < \infty.$$

D'ici et de théorème de [9], p. 390, il résulte que pour ces t la mesure $\mu(t, du)$ est concentrée sur $H_1(r)$ et σ -additive sur $\mathcal{B}(H_1(r))$.

On va montrer l'estimation (3.9). De (6.15) pour $t \in [0, T] \setminus \gamma$ résulte (2.4) avec $G u(x) = \sum_{|\alpha| \leq 1} |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2$ et $\mu(du) = \mu(t, du)$. Les hypothèses (2.5) sont aussi satisfaites par ces G et $\mu(du)$ grâce à la continuité de la fonctionnelle

$u \rightarrow \int \sum_{|\alpha| \leq 1} |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 w(x) dx$, $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sur $H_1(r)$. D'une manière analogue on établit, que $G(u(x)) = |u(x)|^2$, $\mu(du) = \mu(t, du)$, $t \in [0, T]$ satisfont les hypothèses (2.4), (2.5). Alors, de théorème 2.1 et de (3.8) il résulte (3.9). La relation (3.2) suit de l'égalité $\chi_\varepsilon(t, w)|_{t=0} = \int \exp[i(u, w)] \mu(0, du)$ qui est satisfaite pour tout $\varepsilon > 0$ d'après (5.1). ■

2) Il reste de démontrer le *p. f*) du théorème 3.1. On utilisera le passage à la limite dans l'équation (5.12) quand $\varepsilon' \rightarrow 0$. Pour justifier ce passage à la limite nous aurons besoin de quelques propositions.

PROPOSITION 6.1. *Pour tout $t \in [0, T]$, $w \in W(-r)$*

$$(6.16) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^t \exp[i(u, w)] (|u|^4 u, w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau = 0.$$

DÉMONSTRATION. D'après (5.5) et de l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon \int_0^t \exp[i(u, w)] (|u|^4 u, w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \right| &\leq \int_0^t (\varepsilon^{9/10} |u|^5, \varepsilon^{1/10} |w|) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \leq \\ &\leq C \int_0^t (\varepsilon^{27/25} \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^6 + \varepsilon^{3/5} \|w\|_{L_\varepsilon(-5r)}^6) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \leq \varepsilon^{2/25} C_1 + \varepsilon^{3/5} C_2 \|w\|_{W(-r)}^6 \end{aligned}$$

d'où (6.16). ■

LEMME 6.3. *Soit $r < -n/2$. Il existe les nombres $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $s > 2$, que $H_s(\alpha) \subset W(-2r) \subset W(-r)$, l'injection $H_s(\alpha) \rightarrow W(-2r)$ ($\subset W(-r)$) est continue, et l'injection $H_s(\alpha) \rightarrow H_0(r)$ est compacte. Il existe une telle base orthonormée $\{e_j(x)\}$ dans $H_0(-r)$, une suite $\lambda_j \rightarrow \infty$, $\lambda_j > 0 \forall j$, que $\{e_j(x)/\lambda_j^{1/2}\}$ est une base orthonormée dans $H_s(\alpha)$.*

Les démonstrations du lemme 6.3 résultent des lemmes 7.1, 7.2 (v. § 7).

Soit $E_k = [e_1, \dots, e_k]$ l'espace linéaire, engendré par $e_1, \dots, e_k$, et $E_k^\perp$ le complément orthogonal de E_k dans $H_0(-r)$. Soit $\Gamma(dw)$ la mesure gaussienne, qui pour tout ensemble cylindrique: $\mathcal{A} \oplus E_k^\perp$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(E_k)$, est égale

$$(6.17) \quad \Gamma(\mathcal{A} \oplus E_k^\perp) = \int_{\mathcal{A}} \exp\left(-\sum_{j=1}^k w_j^2 / 2f_j\right) \prod_{j=1}^k \frac{dw_j}{\sqrt{2\pi f_j}}.$$

Ici $(w_1, \dots, w_k)$ les coordonnées de $w \in E_k$ dans la base $(e_1, \dots, e_k)$: $w_j = (w, e_j)_{0,-r}$,

$f_j > 0 \quad \forall j$ et

$$(6.18) \quad \sum_{j=1}^{\infty} f_j \lambda_j < \infty.$$

Le lemme suivant est bien connu:

LEMME 6.4. *On suppose, que $H_s(\alpha)$ a les propriétés indiquées le lemme 6.3. Alors la mesure $\Gamma(dw)$ est concentrée sur $H_s(\alpha)$.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 6.3

$$(6.19) \quad \|w\|_{s,\alpha}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j w_j^2, \quad w_j = (w, e_j)_{0,-r}.$$

De (6.17), (6.18) résulte

$$(6.20) \quad \int \sum_{j=1}^k \lambda_j w_j^2 \Gamma(dw) = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j < \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j < \infty.$$

D'après (6.20), (6.19) et le théorème dans [9], p. 390 il résulte l'assertion du lemme. ■

Pour tout $K > 0$ on a

$$(6.20') \quad \int \|u\|_{s,\alpha}^K \Gamma(dw) < \infty.$$

La fonctionnelle $g(w)$, $w \in H_0(-r)$, est deux fois différentiable au sens de Fréchet dans le point w , si

$$(6.21) \quad g(w + \Delta w) = g(w) + (g'(w), \Delta w) + ((g''(w), \Delta w \otimes \Delta w)) + R(w, \Delta w),$$

$\forall \Delta w \in H_0(-r)$, $|R(w, \Delta w)| / \|\Delta w\|_{0,-r}^2 \rightarrow 0$ quand $\|\Delta w\|_{0,-r} \rightarrow 0$. Ici $g'(w)$ a les valeurs dans $H_0(r)$ et s'appelle la différentielle Fréchet de premier ordre de $g(w)$, $g''(w)$ a les valeurs dans $H_0(r) \otimes H_0(r)$ et s'appelle la différentielle de Fréchet de deuxième ordre de $g(w)$. On a noté par $((\cdot, \cdot))$ la relation de dualité entre les espaces $H_0(r) \otimes H_0(r)$ et $H_0(-r) \otimes H_0(-r)$. Il est égal à l'intégrale de la somme des produits correspondants (*). Les fonctionnelles

$$(6.22) \quad \frac{\partial g(w)}{\partial w_j} = (g'(w), e_j), \quad \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w_i \partial w_j} = ((g''(w), e_i \otimes e_j))$$

(*) Soit

$$g''(w) = g''(w, x, y) = \{g''_{ij}(w, x, y), i, j = 1, \dots, p\};$$

$$w \otimes w = w(x) \otimes w(y) = \{w_i(x)w_j(y), i, j = 1, \dots, p\}$$

pour

$$w(x) = (w_1(x), \dots, w_p(x)); ((g''(w), w \otimes w)) = \int \langle g''(w, x, y), w(x) \otimes w(y) \rangle dx dy =$$

$$= \int \sum_{i,j=1}^p g''_{ij}(w, x, y) w_i(x) w_j(y) dx dy.$$

sont les dérivées partielles de la fonctionnelle g .

Soit $\mathfrak{A}$ l'espace des fonctionnelles $g(w)$, deux fois différentiables au sens de Fréchet, définies sur $H_0(-r)$, vérifiant les estimations suivantes:

$$|g(w)| \leq C_0(1 + \|w\|_{0,-r}^{k(0)}), \quad \left| \frac{\partial}{\partial w_i} g(w) \right| \leq C_i(1 + \|w\|_{0,-r}^{k(i)}), \\ + \left| \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w_i \partial w_j} \right| \leq C_{ij}(1 + \|w\|_{0,-r}^{k(i,j)}),$$

où les constantes k , C dépendent de g .

Soit $L_1(\Gamma(dw))$ l'espace des fonctionnelles $\Gamma(dw)$ intégrables. On introduit aussi l'espace $L_\infty(\Gamma(dw))$ analogiquement.

D'après (6.20') $\mathfrak{A} \subset L_1(\Gamma(dw))$. Evidemment $\mathfrak{A}$ est dense dans $L_1(\Gamma(dw))$ et $L_\infty(\Gamma(dw)) \subset L_1(\Gamma(dw))$.

LEMME 6.5. Soit $g_1(w), g_2(w) \in \mathfrak{A}$. Alors on a les formules suivantes de l'intégration par parties:

$$(6.23) \quad \begin{cases} \int \frac{\partial g_1(w)}{\partial w_i} g_2(w) \Gamma(dw) = \int g_1(w) A_1(i, \mathfrak{D}) g_2(w) \Gamma(dw), \\ \int \frac{\partial^2 g_2(w)}{\partial w_i \partial w_j} g_1(w) \Gamma(dw) = \int g_1(w) A_2(i, j, \mathfrak{D}) g_2(w) \Gamma(dw), \quad \forall i, j \in \mathbf{Z}_+ \end{cases}$$

où

$$(6.24) \quad \begin{cases} A_1(i, \mathfrak{D}) g(w) = g(w) \frac{w_i}{f_i} - \frac{\partial g}{\partial w_i}, \\ A_2(i, j, \mathfrak{D}) g(w) = \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w_i \partial w_j} - \frac{w_i}{f_i} \frac{\partial g(w)}{\partial w_j} - \frac{w_j}{f_j} \frac{\partial g(w)}{\partial w_i} + \\ + g(w) \left(\frac{w_i w_j}{f_i f_j} + \frac{\delta_{ij}}{f_i} \right), \end{cases}$$

δ_{ij} le symbole de Kronecker.

DÉMONSTRATION. Remplaçant dans (6.23), (6.24) $g_k(w)$ ($k = 1, 2$) par $g_k(P_l w)$, où P_l est le projecteur sur E_l , $l > \max(i, j)$, on déduit que les formules (6.23), (6.24) résultent de la définition (6.17) de la mesure $\Gamma(dw)$ et de la formule de l'intégration par parties en dimension finie. L'assertion du lemme s'obtient par passage à la limite $l \rightarrow \infty$ et à l'aide du théorème de Lebesgue. ■

Soit $t \in [0, T]$, $g(w) \in L_1(\Gamma(dw))$. Alors de l'inégalité (3.8) on déduit aisément, que la fonctionnelle

$$v \rightarrow \int_0^t g(w) \int \int ((u \otimes u, v)) \exp[i(u, w)] \mu(\tau, du) d\tau \Gamma(dw)$$

est continue sur $H_0(-r) \otimes H_0(-r)$. Donc il existe le noyau $K(t, g, x, y) = K(x, y) \in H_0(r) \otimes H_0(r)$ tel que

$$(6.25) \quad \int g(w) \int_0^t \langle (u \oplus u, v) \rangle \exp[i(u, w)] \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) = \langle (K, v) \rangle = \\ = \int \langle K(x, y), v(x, y) \rangle dx dy, \quad \forall v \in H_0(-r) \otimes H_0(-r).$$

Il existe aussi le noyau $K_\varepsilon(t, g, x, y) = K_\varepsilon(x, y) \in H_0(r) \otimes H_0(r)$ tel que

$$(6.26) \quad \int g(w) \int_0^t \langle (u \otimes u, v) \rangle \exp[i(u, w)] \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) = \langle (K_\varepsilon, v) \rangle = \\ = \int \langle K_\varepsilon(x, y), v(x, y) \rangle dx dy, \quad \forall v \in H_0(-r) \otimes H_0(-r) (*).$$

THÉOREME 6.2. *Pour tout $v \in H_0(-r) \otimes H_0(-r)$ on a*

$$(6.27) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle (K_\varepsilon, v) \rangle = \langle (K, v) \rangle$$

où $\varepsilon = \varepsilon'$ est la suite, définie dans le théorème 6.1.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 6.1 et le lemme 6.3 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_\varepsilon(t, w) = \chi(t, w)$, $\forall w \in H_s(\alpha) \subset W(-r)$. D'après le lemme 6.4, la mesure $\Gamma(dw)$ est concentrée sur $H_s(\alpha)$, alors, utilisant le théorème de Lebesgue, on a

$$(6.28) \quad \int \chi_\varepsilon(t, w) g(w) \Gamma(dw) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int \chi(t, w) g(w) \Gamma(dw), \quad \forall g \in \mathfrak{A}, t \in [0, T].$$

D'après (3.1), (5.3) et (3.8), (5.5) on déduit aisément, que pour tout $t \in [0, T]$ $\chi_\varepsilon(t, w)$ et $\chi(t, w)$ appartiennent à $\mathfrak{A}$. Alors, remplaçant dans (6.28) $g(w)$ par $A_2(i, j, D)g$ ((6.24)) ($g(w) \in \mathfrak{A}$) et utilisant (6.23) on déduit

$$(6.29) \quad \int \frac{\partial^2 \chi_\varepsilon(t, w)}{\partial w_i \partial w_j} g(w) \Gamma(dw) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\partial^2 \chi(t, w)}{\partial w_i \partial w_j} g(w) \Gamma(dw).$$

En intégrant les deux parties de (6.29) en t et en utilisant le théorème de Lebesgue on déduit que le membre gauche tend au membre droit obtenu. Alors, d'après le théorème de Fubini on a

$$(6.30) \quad \int g(w) \int_0^t \frac{\partial^2 \chi_\varepsilon(\tau, w)}{\partial w_i \partial w_j} d\tau \Gamma(dw) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int g(w) \int_0^t \frac{\partial^2 \chi(\tau, w)}{\partial w_i \partial w_j} d\tau \Gamma(dw).$$

(*) D'après (5.5), (6.26)

$$(6.26') \quad \int |K_\varepsilon(x, y)|^2 (1 + |x|^2)^r (1 + |y|^2)^r dx dy \leq \mathcal{M}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D'après (3.1), (3.8), (5.3), (5.5), (6.22)

$$(6.30') \quad \frac{\partial^2 \chi_\varepsilon(t, w)}{\partial w_i \partial w_j} = - \int \exp [i(u, w)] (u, e_i) (u, e_j) \mu_\varepsilon(t, du), \quad \frac{\partial^2 \chi(t, w)}{\partial w_i \partial w_j} = \\ = \int \exp [i(u, w)] (u, e_i) (u, e_j) \mu(t, du).$$

$\mathfrak{A}$ est dense dans $L_1(\Gamma(dw))$ et d'après (6.30'), (3.8), (5.5) $\partial^2 \chi / (\partial w_i \partial w_j)$, $\partial^2 \chi_\varepsilon / (\partial w_i \partial w_j)$ sont uniformément en ε bornées, alors (6.30) a lieu pour toute $g(w) \in L_1(\Gamma(dw))$.

Soit

$$(6.31) \quad v = \sum_{i,j=1}^N v_{ij} e_i \otimes e_j.$$

Multipliant les deux parties de (6.30) par v_{ij} et sommant en i, j , de 1 à N , d'après (6.30'), (6.25), (6.26) on déduit, que (6.27) est satisfait par toute fonction v , ayant la forme (6.31). Les fonctions (6.31) sont denses dans $H_0(-r) \otimes H_0(-r)$, alors, d'après (6.26'), l'égalité (6.27) est juste pour toute $v \in H_0(-r) \otimes H_0(-r)$. ■

La démonstration du théorème suivant est complètement analogue à celle du théorème précédant.

THÉORÈME 6.3. *Pour tout $v \in H_0(-r)$ on a*

$$(6.32) \quad \int g(w) \int_0^t \int (u, v) \exp [i(u, w)] \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \\ \int g(w) \int_0^t \int (u, v) \exp [i(u, w)] \mu(\tau, du) d\tau \Gamma(dw)$$

où $\varepsilon = \varepsilon'$ comme dans le théorème 6.1.

On va déduire quelques propriétés de la régularité des fonctions $K_\varepsilon(x, y)$, $K(x, y)$, définies dans (6.25), (6.26).

LEMME 6.6. *Les fonctions $K(x, y)$, $K_\varepsilon(x, y)$ sont continues en $(x, y) \in R^{2n}$. On a*

$$(6.33) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(x, y) = K(x, y) \quad \forall (x, y) \in R^{2n}, \quad \varepsilon = \varepsilon'.$$

DÉMONSTRATION. On va déduire, que

$$(6.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vraisup}_{(x,y) \in R^{2n}} \left| \frac{\partial K_\varepsilon(x, y)}{\partial x_j} \right| < C, \quad \text{vraisup}_{(x,y) \in R^{2n}} \left| \frac{\partial^2 K_\varepsilon(x, y)}{\partial y_j} \right| < C, \quad j = 1, \dots, n, \\ \text{vraisup}_{(x,y) \in R^{2n}} |K_\varepsilon(x, y)| < C, \end{array} \right.$$

où C ne dépend pas de ε . En effet, d'après (6.26) pour toute fonction $\varphi(x, y) \in C_0^\infty(R^{2n})$

$$(6.35) \quad \left| \int \left\langle K_\varepsilon(x, y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j} \right\rangle dx dy \right| \leq \\ \leq C \int |g(w)| \int_0^t \int \int \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right|^2 + |u(y)|^2 \right) |\varphi(x, y)| dx dy \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) \leq \\ \leq C_1 \int_0^t \int \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right|^2 \left(\int |\varphi| dy \right) dx + \int |u(y)|^2 \left(\int |\varphi| dx \right) dy \right) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau.$$

D'après le théorème 2.1 le membre droit de (6.35) est moins que

$$C \int \int \sum_{|\alpha| \leq 1} |\mathbb{D}^\alpha u(x)|^2 \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \cdot \int |\varphi(x, y)| dx dy,$$

alors utilisant (5.6) on a

$$(6.36) \quad \left| \int \left\langle K_\varepsilon(x, y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j} \right\rangle dx dy \right| \leq C \int |\varphi(x, y)| dx dy$$

où C ne dépend pas de ε et φ . De (6.36) résulte la première des inégalités (6.34). Les démonstrations des autres inégalités (6.34) sont semblables. De (6.34) il résulte, que les fonctions $K_\varepsilon(x, y)$, après une modification (si celle-ci est nécessaire) sur l'ensemble de mesure nulle, sont uniformément en ε bornées et uniformément continues. Alors, d'après le théorème d'Arzela et (6.27) on déduit (6.33) et la continuité de $K(x, y)$ (après une modification (si celle-ci est nécessaire) sur l'ensemble de mesure nulle). ■

LEMME 6.7. Soit $\varphi(x) = \{\varphi_{ij}(x), i, j = 1, \dots, p\}$, où $\varphi_i(x) = (\varphi_{i1}(x), \dots, \varphi_{ip}(x)) \in W(-2r)$. Alors

$$(6.37) \quad \int \langle K(x, x), \varphi(x) \rangle dx = \\ = \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \int \langle u(x) \otimes u(x), \varphi(x) \rangle dx \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw),$$

$$(6.38) \quad \int \langle K_\varepsilon(x, x), \varphi(x) \rangle dx = \\ = \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \int \langle u(x) \otimes u(x), \varphi(x) \rangle dx \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\delta_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $m \in \mathbf{Z}_+$, une δ -suite, c'est à dire

$$\text{supp } \delta_m(x) \in \{|x| \leq 1\}, \quad \delta_m(x) \geq 0, \quad \int \delta_m(x) dx = 1, \quad \forall m \in \mathbf{Z}_+$$

et

$$(6.39) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int \delta_m(x) \psi(x) dx = \psi(0), \quad \forall \psi \in C(R^n).$$

D'après (6.4)

$$W(-2r) \subset H_0(-2r) \cap C^0(-2r),$$

alors

$$\varphi(x) \delta_m(x-y) \subset H_0(-r) \otimes H_0(-r) \cap C^0(-r) \otimes C^0(-r).$$

D'après le lemme 6.6 la fonction $h \rightarrow \int \langle K(x, x+h), \varphi(x) \rangle dx$ est continue et d'après (6.39)

$$(6.40) \quad \begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int \langle K(x, y), \varphi(x) \rangle \delta_m(x-y) dx dy &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int \delta_m(h) \int \langle K(x, x+h), \varphi(x) \rangle dx dh = \int \langle K(x, x), \varphi(x) \rangle dx. \end{aligned}$$

D'après (6.39) et la continuité de la fonction $h \rightarrow \int \langle u(x) \otimes u(x+h), \varphi(x) \rangle dx$, $u \in H_0(r)$ on déduit analogiquement

$$(6.41) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int \langle u(x) \otimes u(y), \varphi(x) \rangle \delta_m(x-y) dx dy = \int \langle u(x) \otimes u(x), \varphi(x) \rangle dx.$$

On a aussi d'après (6.39),

$$(6.42) \quad \left| \int \langle u(x) \otimes u(y), \varphi(x) \rangle \delta_m(x-y) dx dy \right| \leq \int \delta_m(h) \sup_h \int |u(x)| \cdot |u(x+h)| \cdot \\ \cdot |\varphi(x)| dx dh \leq \sup_{|h| \leq 1} \int |\varphi(x)| \cdot |u(x)| \cdot |u(x+h)| dx \leq C \|u\|_{0,r}^2 \|\varphi\|_{C^0(-2r)}$$

où C ne dépend pas de u et de m . De (6.25) résulte

$$(6.43) \quad \begin{aligned} \int \langle K(x, y), \varphi(x) \rangle \delta_m(x-y) dx dy &= \\ &= \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \int \langle u(x) \otimes u(y), \varphi(x) \rangle \delta_m(x-y) dx dy d\mu(\tau, du) d\tau \Gamma(dw). \end{aligned}$$

D'après (6.40), (6.41), (6.42) et le théorème de Lebesgue, passant dans (6.43) à la limite, quand $m \rightarrow \infty$, on obtient (6.37). La démonstration de (6.38) est analogue. ■

Enfin, nous allons démontrer le

LEMME 6.8. *Pour tout $t \in [0, T]$, $g(w) \in L_\infty(\Gamma(dw))$, $j = 1, \dots, n$*

$$(6.44) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \left(F_j(u), \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) = \\ = \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \left(F_j(u), \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \mu(\tau, d\mu) d\tau \Gamma(dw), \quad \varepsilon = \varepsilon',$$

$F_j(u)$ sont définies dans (1.4), (1.5).

DÉMONSTRATION. D'après (6.33), la dernière des inéquations (6.34) et le théorème de Lebesgue on déduit, que pour tout tenseur $\varphi(x)$, vérifiant les hypothèses du lemme 6.7,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \langle K_\varepsilon(x, x), \varphi(x) \rangle dx = \int \langle K(x, x), \varphi(x) \rangle dx, \quad \varepsilon = \varepsilon'.$$

Alors, d'après (6.37), (6.38) pour $g(w) \in L_\infty(\Gamma(dw))$

$$(6.45) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \int \langle u(x) \otimes u(x), \varphi(x) \rangle dx \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) = \\ = \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \int \langle u(x) \otimes u(x), \varphi(x) \rangle dx \mu(\tau, du) \Gamma(dw).$$

Soit $z(x) = (z_1(x), \dots, z_p(x)) \in W(-2r)$. Posant dans (6.45) $\varphi(x)$ égale à tenseur avec les coordonnées $\varphi_{l,m}(x) = \sum_{k=1}^p F_{j,lm}^k \partial z_k(x) / \partial x_j$ où $F_{j,lm}^k$ coïncident avec les coefficients dans (1.5), d'après (1.4), (1.5) on a

$$(6.46) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \left(F_j(u), \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) = \\ = \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \left(F_j(u), \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \mu(\tau, du) d\tau \Gamma(dw).$$

D'après (6.20) la fonctionnelle $\|w\|_{H_r(z)}$ est $\Gamma(dw)$ -intégrable, alors, d'après le théorème de Pettis et Bochner ([12], pp. 187, 190) il existe une suite de

fonctionnelles-escaliers,

$$\psi_{\mathcal{N}}(w) = \sum I_{Q_i}(w) z^i, \quad w, z^i \in H_s(\alpha), \quad \mathcal{N} = 1, 2, \dots,$$

où la somme est finie, $I_{Q_i}(w)$ l'indicateur de l'ensemble $Q_i \in \mathcal{B}(H_s(\alpha))$, telle, que

$$(6.47) \quad \lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \int \|w - \psi_{\mathcal{N}}(w)\|_{H_s(\alpha)} \Gamma(dw) = 0.$$

D'après (6.47) et la continuité de l'opérateur $\partial/\partial x_j: H_s(\alpha) \rightarrow C_0(-2r)$

$$(6.48) \quad \lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \int \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{\mathcal{N}}(w) \right\|_{C^0(-2r)} \Gamma(dw) = 0$$

et par conséquence

$$(6.49) \quad \left| \int \left(F_j(u), \frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{\mathcal{N}}(w) \right) \Gamma(dw) \right| \leq \\ \leq C(1 + \|u\|_{0,r}^2) \int \left\| \frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{\mathcal{N}}(w) \right\|_{C^0(-2r)} \Gamma(dw) = (1 + \|u\|_{0,r}^2) \delta_{\mathcal{N}}$$

où $\delta_{\mathcal{N}} \rightarrow 0$ quand $\mathcal{N} \rightarrow \infty$.

D'après (6.49), (5.5) et le théorème de Fubini, on déduit pour $g(w) \in L_{\infty}(\Gamma(dw))$

$$(6.50) \quad \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \left(F_j(u), \frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{\mathcal{N}}(w) \right) \cdot \\ \cdot \mu_{\varepsilon}(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) \xrightarrow{\mathcal{N} \rightarrow \infty} 0$$

uniformément en ε . Par les mêmes raisonnements on a

$$(6.51) \quad \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \left(F_j(u), \frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{\mathcal{N}}(w) \right) \cdot \\ \cdot \mu(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) \xrightarrow{\mathcal{N} \rightarrow \infty} 0.$$

La formule (6.46) est aussi juste, quand on remplace z par $\psi_{\mathcal{N}}(w)$, alors d'après (6.50), (6.51) on a (6.44) pour $g(w) \in L_{\infty}(\Gamma(dw))$. ■

D'une manière analogue on démontre le

LEMME 6.9. Pour tout $t \in [0, T]$, $g(w) \in L_\infty(\Gamma(dw))$

$$(6.52) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)](u, \mathcal{A}^*(\mathcal{D})w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) = \\ = \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)](u, \mathcal{A}^*(\mathcal{D})w) \mu(\tau, du) d\tau \Gamma(dw), \quad \varepsilon = \varepsilon'.$$

Enfin on va démontrer, que la famille de mesures $\mu(t, du)$ satisfait à l'équation de Hopf (3.4).

THÉORÈME 6.4. La famille de mesures $\mu(t, du)$ et leurs fonctionnelles caractéristiques, construites dans le théorème 6.1, satisfont à l'équation de Hopf (3.4) pour tout $t \in [0, T]$, $w \in W_1^1$.

DÉMONSTRATION. Soit $w \in H_s(\alpha)$. Alors, d'après (6.2), (5.19) et de lemme 6.3 il résulte, que les deux membres de l'équation (5.12) appartiennent à $L_1(\Gamma(dw))$. Alors, multipliant les deux membres (5.12) par $g(w) \in L_\infty(\Gamma(dw))$ et en intégrant en $\Gamma(dw)$ on obtient

$$(6.53) \quad \int g(w) [\chi_\varepsilon(t, w) - \chi_\varepsilon(0, w)] \Gamma(dw) = \\ = i \int g(w) \int_0^t L_\varepsilon(u, w) \exp[i(u, w)] \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw).$$

D'après le théorème 6.1, la proposition 6.1 et le théorème de Lebesgue

$$(6.54) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g(w) [\chi_\varepsilon(t, w) - \chi_\varepsilon(0, w)] \Gamma(dw) = \int g(w) [\chi(t, w) - \chi(0, w)] \Gamma(dw),$$

$$(6.55) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g(w) \int_0^t \exp[i(u, w)] \varepsilon(|u|^4 u, w) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \Gamma(dw) = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon'.$$

Utilisant (6.54), (6.55), (6.44), (6.52) et passant à la limite dans (6.53) quand $\varepsilon' \rightarrow 0$, on obtient

$$(6.56) \quad \int g(w) [\chi(t, w) - \chi(0, w)] \Gamma(dw) = \\ = -i \int g(w) \int_0^t L(u, w) \exp[i(u, w)] \mu(\tau, du) d\tau \Gamma(dw).$$

La formule (6.56) est juste pour tout $g(w) \in L_\infty(\Gamma(dw))$ et les deux parties de (3.4) sont continues en $w \in H_s(\alpha)$, alors de (6.56) on déduit, que (3.4)

est satisfait par tout $w \in H_s(\alpha)$. La mesure $\mu(t, du)$ est homogène pour tout t , alors d'après (3.8) et le théorème 2.1 il résulte, que les deux membres de l'équation (3.4) se prolongent par continuité sur l'espace de Sobolev W_1^1 . ■

7. — La démonstration de la solubilité unique du problème de Cauchy pour le système des équations approximé.

1) On va démontrer la solubilité du problème de Cauchy par la méthode de compacité, qui est bien connue.

LEMME 7.1. *Soit $r, q \in R^1$, $q > 0$ et $s > 0$ un entier. Alors dans l'espace $H_0(r)$ il existe une base orthonormée $\{e_j(x)\}$ ($j = 1, 2, \dots$) telle que les fonctions $\{e_j(x)/\sqrt{\lambda_j}\}$ sont une base orthonormée dans $H_s(r+q)$. Ici $\{\lambda_j\}$ c'est une suite des nombres, $\lambda_j > 0$, $\forall j$, et $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$.*

DÉMONSTRATION. On montre aisément (d'une manière analogue comme dans le lemme 4.3 de [5]), que l'injection: $H_s(r+q) \subset H_0(r)$, pour $s > 0$, $q > 0$, est compacte. Alors, d'après le théorème de Hilbert-Schmidt, le problème spectral

$$(u, v)_{s, r+q} = \lambda(u, v)_{0, r}, \quad \forall v \in H_s(r+q),$$

a une suite dénombrable des fonctions propres et des valeurs propres: $\{e_j(x), \lambda_j, j = 1, 2, \dots\}$, qui ont les propriétés indiquées dans le lemme. ■

Soit $E_k = [e_1(x), \dots, e_k(x)]$, P_k le projecteur dans $H_0(r)$ sur E_k :

$$(7.1) \quad P_k u(x) = \sum_{j=1}^k (u, e_j)_{0, r} e_j(x).$$

Soit $(H_s(r+q))'$ l'espace adjoint à $H_s(r+q)$ par rapport au produit scalaire dans $H_0(r)$. On a

$$(7.2) \quad \|u\|_{(H_s(r+q))'} = \sup_{v \in H_s(r+q)} \frac{(u, v)_{0, r}}{\|v\|_{s, r+q}}.$$

De lemme 7.1 résulte de

COROLLAIRE 7.1. a) On a les inéquations:

$$(7.3) \quad \|P_k u\|_{0, r} \leq \|u\|_{0, r}, \quad \|P_k u\|_{s, r+q} \leq \|u\|_{s, r+q}.$$

b) L'opérateur P_k peut être prolongé par continuité sur l'espace $(H_s(r+q))'$. On a

$$(7.4) \quad \|P_k u\|_{(H_s(r+q))'} \leq \|u\|_{(H_s(r+q))'}.$$

LEMME 7.2. Les injections suivantes sont continues: a) $H_s(\alpha) \subset H_p(r)$, $s \geq p$, $\alpha \geq r$; b) $H_s(\alpha) \subset L_6(r)$, $s > n/3$, $\alpha > r/3$; c) $H_s(\alpha) \subset C^k(r)$, $s > n/2 + k$, $\alpha > 2r$; $n = \dim R^n$.

DÉMONSTRATION. La démonstration de a) est évidente. Pour la démonstration de b) et c) il faut utiliser le théorème de Sobolev et a):

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_6(r)} &= \|(1 + |x|^2)^{r/6} u\|_{L_6} \leq C \|(1 + |x|^2)^{r/6} u\|_{H_s} \leq C_1 \|u\|_{s,\alpha}, \\ \|u\|_{C^k(r)} &= \|(1 + |x|^2)^r u\|_{C^k} \leq C \|(1 + |x|^2)^r u\|_{H_s} \leq C_1 \|u\|_{s,\alpha}. \end{aligned}$$

2) Dans la suite on suppose, que les nombres s , r , q , indiqués dans le lemme 7.1 satisfont aussi aux inégalités:

$$(7.5) \quad s > \max(1, n/3), \quad q > \max(0, -2r/3).$$

On appelle l'approximation de Galerkin du problème (4.1), (4.2) le problème de Cauchy suivant:

$$(7.6) \quad \frac{\partial u_N(t, x)}{\partial t} = -P_N \mathcal{A}(\mathcal{D}) u_N + \sum_{j=1}^n P_N \frac{\partial F_j(u_N)}{\partial x_j} - \varepsilon P_N (|u_N|^4 u_N),$$

$$(7.7) \quad u_N(t, x)|_{t=0} = P_N u_0(x).$$

C'est un problème pour les équations différentielles ordinaires, alors il est résoluble pour les petits t . De l'estimation qu'on va établir résulte que celui-ci a la solution pour tout t .

LEMME 7.3. La solution u_N du (7.6), (7.7) satisfait à l'inéquation:

$$(7.8) \quad \|u_N(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \alpha \int_0^t \|u_N(\tau, \cdot)\|_{1,r} d\tau + \varepsilon \int_0^t \|u_N(\tau, \cdot)\|_{L_6(r)}^6 d\tau \leq \\ \leq \exp[Ct] \|u_N(0, \cdot)\|_{0,r}^2,$$

où les constantes α , $C = C_\varepsilon$ ne dépendent pas de N .

DÉMONSTRATION. Les fonctions $e_j(x) \in H_s(r+q)$, $\forall j$, alors d'après (7.5) et le lemme 7.2 il résulte, que pour tout $t \in [0, T]$ $u_{\mathcal{N}}(t, x) \in H_2(r) \cap L_6(r)$. Alors, procédant comme dans la proposition 4.2, c'est à dire, si l'on prend le produit scalaire dans $H_0(r)$ des deux membres de (7.6) par $u_{\mathcal{N}}(t, x)$ et utilisant $P_{\mathcal{N}} u_{\mathcal{N}} = u_{\mathcal{N}}$ on voit aisément que l'estimation (4.17) est satisfait, si on la remplace $S_\varepsilon(t)u$ par $u_{\mathcal{N}}(t, x)$. De cette estimation, utilisant

$$\int \langle F_j(u_{\mathcal{N}}(t, x)), u_{\mathcal{N}} \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx \leq C \|u_{\mathcal{N}}\|_{L_6(r)}^3 \leq \varepsilon \|u_{\mathcal{N}}\|_{L_6(r)}^6 + \frac{C}{\varepsilon} \|u_{\mathcal{N}}\|_{0,r}^2,$$

on obtient l'inéquation

$$(7.9) \quad \|u_{\mathcal{N}}(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \alpha \int_0^t \|u_{\mathcal{N}}(\tau, \cdot)\|_{1,r}^2 d\tau + \varepsilon \int_0^t \|u_{\mathcal{N}}(\tau, \cdot)\|_{L_6(r)}^6 d\tau \leq \\ \leq \|u_{\mathcal{N}}(0, \cdot)\|_{0,r}^2 + C_1 \int_0^t \|u_{\mathcal{N}}(\tau, \cdot)\|_{0,r}^2 d\tau.$$

De (7.9) et de l'inéquation le Gronuoll résulte (7.8). ■

3) Considérons la suite $\{u_{\mathcal{N}}(t, x)\}$ des solutions du problème (7.6), (7.7). D'après (7.8)

$$(7.10) \quad u_{\mathcal{N}}(t, x) \quad \text{sont bornées en } \mathcal{N} \quad \text{dans } B(0, T; r).$$

Nous allons montrer, que

$$(7.11) \quad \frac{\partial u_{\mathcal{N}}(t, x)}{\partial t} \text{ sont bornées en } \mathcal{N} \text{ dans } L_{6/5}(0, T; (H_s(r+q)))'.$$

En effet, d'après (7.6) et (4.5), utilisant que l'opérateur $P_{\mathcal{N}}$ est autoadjoint dans $H_0(r)$, on a

$$\left(\frac{\partial u_{\mathcal{N}}(t, \cdot)}{\partial t}, w \right)_{0,r} = L_\varepsilon(u_{\mathcal{N}}, (1 + |x|^2)^r P_{\mathcal{N}} w)$$

Alors, utilisant

$$\|(1 + |x|^2)^r P_{\mathcal{N}} w\|_{1,-r} = \|P_{\mathcal{N}} w\|_{1,r}, \quad \|(1 + |x|^2)^r P_{\mathcal{N}} w\|_{L_6(-5r)} = \|P_{\mathcal{N}} w\|_{L_6(r)},$$

et la première des inéquations (5.19), où u est remplacée par $u_{\mathcal{N}}$ et w par

$(1 + |x|^2)^r P_{\mathcal{N}} w$, on a

$$(7.12) \quad \left| \left(\frac{\partial u_{\mathcal{N}}(t, \cdot)}{\partial t}, w \right)_{0,r} \right| \leq C(1 + \|u_{\mathcal{N}}\|_{1,r} + \|u_{\mathcal{N}}\|_{L_6(r)}^5) (\|P_{\mathcal{N}} w\|_{1,r} + \|P_{\mathcal{N}} w\|_{L_6(r)}).$$

D'après (7.5), le lemme 7.2 et (7.3) résulte

$$\|P_{\mathcal{N}} w\|_{1,r} + \|P_{\mathcal{N}} w\|_{L_6(r)} \leq C \|w\|_{s,r+q}.$$

D'ici, de la définition (7.2) et de (7.12), (7.8), suit

$$\left\| \frac{\partial u_{\mathcal{N}}}{\partial t} \right\|_{L_{6/5}(0,T;(H_s(r+q))')} \leq C \left(\int_0^T (1 + \|u_{\mathcal{N}}(\tau, \cdot)\|_{1,r} + \|u_{\mathcal{N}}(\tau, \cdot)\|_{L_6(r)}^5)^{6/5} d\tau \right)^{5/6} \leq C(1 + \|u_0\|_{0,r}^2)$$

et (7.11) est établie. Evidemment les injections des espaces: $H_1(r) \subset \subset H_0(r-q) \subset (H_s(r+q))'$ sont continues, et l'injection $H_1(r) \subset H_0(r-q)$ est compacte. Posons

$$W = \left\{ u : u \in L_2(0, T; H_1(r)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{6/5}(0, T; (H_s(r+q))') \right\}.$$

Alors, d'après le théorème 5.1 de [11] (p. 58), l'injection $W \subset L_2(0, T; H_0(r-q))$ est compacte. D'après (7.10), (7.11) la suite $\{u_{\mathcal{N}}\}$ est bornée dans W , alors il existe une sous-suite $\{u_{\mathcal{M}}\}$ telle, que

$$(7.13) \quad u_{\mathcal{M}} \rightarrow u \quad \text{dans } L_2(0, T; H_0(r-q)) \quad \text{fort et p.p. dans } [0, T] \times R^n$$

quand $\mathcal{M} \rightarrow \infty$. D'après (7.10), (7.11) on peut supposer, que la même suite

$$(7.14) \quad u_{\mathcal{M}} \rightarrow u \quad \text{dans } L_2(0, T; H_1(r)) \text{ et dans } L_6(0, T; L_6(r)) \text{ faible,}$$

$$(7.15) \quad u_{\mathcal{M}} \rightarrow u \quad \text{dans } L_{\infty}(0, T; H_0(r)) \text{ weak star,}$$

$$(7.16) \quad \frac{\partial u_{\mathcal{M}}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{dans } L_{6/5}(0, T; (H_s(r+q))') \text{ faible.}$$

On a évidemment

$$(7.17) \quad \int_0^T \|F_j(u_{\mathcal{M}})\|_{L_6(r)}^3 d\tau \leq C \int_0^T \|u_{\mathcal{M}}\|_{L_6(r)}^6 d\tau,$$

alors, d'après (7.8), on peut supposer aussi, que

$$(7.18) \quad \begin{cases} F_j(u_{\mathcal{M}}) \rightarrow \chi_j & \text{dans } L_3(0, T; L_3(r)) & \text{faible,} \\ |u_{\mathcal{M}}|^4 u_{\mathcal{M}} \rightarrow \psi & \text{dans } L_6(0, T; L_{6/5}(r)) & \text{faible.} \end{cases}$$

Pour toute $w \in H_s(r+q)$

$$(7.18') \quad (u_{\mathcal{M}}(t), w)_{0,r} = (u_{\mathcal{M}}(0), w)_{0,r} + \int_0^t \left(\frac{\partial u_{\mathcal{M}}(\tau, \cdot)}{\partial \tau}, w \right)_{0,r} d\tau.$$

D'après (7.14), (7.16), (7.18) passant à la limite quand $\mathcal{M} \rightarrow \infty$ on déduit que la même formule est juste pour $u(t, x)$. Alors la fonction $u(t, x)$ peut être définie d'une telle manière, que la fonction $t \rightarrow (u(t, \cdot), w)_{0,r}$ soit absolument continue pour toute $w \in H_s(r+q)$. Passant à la limite dans (7.8) quand $\mathcal{M} \rightarrow \infty$ et utilisant (7.14), (7.15) on obtient, que (4.6) a lieu pour tout $t \in [0, T]$.

Soit $w(t, x) \in L_6(0, T; H_s(r+q))$. D'après (7.3)

$$(7.19) \quad P_{\mathcal{N}} w \rightarrow w \quad \text{dans } L_6(0, T; H_s(r+q)) \quad \text{forte.}$$

D'après (7.19) $P_{\mathcal{N}} w \rightarrow w$ dans $L_2(0, T; H_1(r))$ forte, alors, d'après (7.14),

$$\begin{aligned} \lim_{\mathcal{M} \rightarrow \infty} \int_0^t (P_{\mathcal{M}} \mathcal{A}(\mathcal{D}) u_{\mathcal{M}}, w)_{0,r} d\tau = \\ = - \int_0^t \int \sum_{i,j} \left\langle a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_j} \left((1 + |x|^2)^r w \right) \right\rangle dx d\tau + \int_0^t (\mathcal{A}_1(\mathcal{D}) u, w)_{0,r} d\tau. \end{aligned}$$

D'après (7.19), (7.5) $P_{\mathcal{N}} w \rightarrow w$ dans $L_6(0, T; L_6(r))$ forte. Alors, de (7.13), (7.18) résulte, que p.p. $\psi = |u|^4 u$ et

$$(7.21) \quad \lim_{\mathcal{M} \rightarrow \infty} \int_0^t (P_{\mathcal{M}} |u_{\mathcal{M}}|^4 u_{\mathcal{M}}, w)_{0,r} d\tau = \int_0^t (|u|^4 u, w)_{0,r} d\tau.$$

D'une manière analogue de (7.19), (7.13), (7.17) il résulte, que

$$\begin{aligned} (7.22) \quad \lim_{\mathcal{M} \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{j=1}^n \left(P_{\mathcal{M}} \frac{\partial F_j(u_{\mathcal{M}})}{\partial x_j}, w \right)_{0,r} d\tau = \\ = \int_0^t \sum_{j=1}^n \int \left\langle F_j(u), \frac{\partial}{\partial x_j} \left((1 + |x|^2)^r w \right) \right\rangle dx d\tau. \end{aligned}$$

Si $w \in L_6(0, T; H_s(r+q))$ alors $w_1 = (1 + |x|^2)^r w \in L_6(0, T; H_s(q-r))$. Substituant dans (7.20), (7.21), (7.22) $w_1 = (1 + |x|^2)^r w$ et utilisant (7.16), (7.6) on obtient, que pour toute fonction $w_1 \in L_6(0, T; H_s(q-r))$

$$(7.23) \quad \int_0^t \int \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, w_1 \right\rangle dx d\tau = \int_0^t L_\varepsilon(u(\tau, \cdot), w_1(\tau, \cdot)) d\tau.$$

L_ε est définie dans (4.5). D'après la première des inégalités (5.19), on peut prolonger (7.23) par continuité en w_1 sur $L_2(0, T; H_1(-r)) \cap L_6(0, T; L_6(-5r))$. On prend maintenant dans (7.23) la fonction $w_1 \in H_1(-r) \cap L_6(-5r)$ ne dépendant de t , et par dérivation en t on obtient, que $u(t, x)$ satisfait à l'équation (4.4). Alors, on a prouvé, que $u(t, x)$ est la solution faible du problème (4.1), (4.2). ■

4) On va démontrer l'unicité dans la classe $B(0, T; r)$ de la solution u construite ci-dessus. Soit $u_1(t, x)$, $u_2(t, x) \in B(0, T; r)$ deux solutions faibles du problème (4.1), (4.2), avec les valeurs initiales $u_{0,1}(x)$, $u_{0,2}(x)$ respectivement. Posons $v(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$. Substituant dans (7.23) $w_1(t, x) = (u_1 - u_2)(1 + |x|^2)^r$, $u = u_i$ ($i = 1, 2$) et par soustraction de l'une égalité l'autre on vient à

$$(7.24) \quad \int_0^t \left(\frac{\partial v(\tau, \cdot)}{\partial \tau}, v(\tau, \cdot) \right)_{0,r} d\tau = \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \left\langle a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial(1 + |x|^2)^r v}{\partial x_j} \right\rangle dx d\tau - \\ - \int_0^t (\mathcal{A}_1(\mathcal{D})v, v)_{0,r} d\tau + \sum_{j=1}^n \int_0^t \left(\frac{\partial F_j(u_1)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j(u_2)}{\partial x_j}, v \right)_{0,r} d\tau - \\ - \varepsilon \int_0^t (|u_1|^4 u_1 - |u_2|^4 u_2, v)_{0,r} d\tau.$$

Remarquons, que

$$\begin{aligned} \langle |w_1|^4 w_1 - |w_2|^4 w_2, w_1 - w_2 \rangle &= |w_1|^6 + |w_2|^6 - (|w_1|^4 + |w_2|^4) \langle w_1, w_2 \rangle, \\ |w_1|^6 + |w_2|^6 &\geq \frac{1}{2} (|w_1|^4 + |w_2|^4) (|w_1|^2 + |w_2|^2), \quad w_1, w_2 \in \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

alors

$$(7.25) \quad \langle |w_1|^4 w_1 - |w_2|^4 w_2, w_1 - w_2 \rangle \geq \frac{1}{2} (|w_1|^4 + |w_2|^4) |w_1 - w_2|^2.$$

De (7.24), (7.25) et de lemme 4.1 résulte l'inéquation

$$(7.26) \quad \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \|v(\tau, \cdot)\|_{0,r}^2 d\tau + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|v(\tau, \cdot)\|_{1,r}^2 d\tau + \\ + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \int (|u_1|^4 + |u_2|^4) |v|^2 (1 + |x|^2)^r dx d\tau \leq \\ \leq C_1 \int_0^t \|v(\tau, \cdot)\|_{0,r}^2 d\tau + \sum_{j=1}^n \int_0^t \int \left\langle \frac{\partial F_j(u_1)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j(u_2)}{\partial x_j}, v \right\rangle (1 + |x|^2)^r dx d\tau.$$

On va estimer la dernière somme dans (7.26). Soit $u_s = (u_{s1}, \dots, u_{sp})$, $s = 1, 2$, $v = (v_1, \dots, v_p)$. On a

$$(7.27) \quad \int (1 + |x|^2)^r v_m \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{1i} u_{1i} - u_{2i} u_{2i}) dx = - \int u_{1i} v_i \frac{\partial v_m}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx - \\ - \int u_{1i} v_i v_m \frac{\partial}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx - \int u_{2i} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (v_m (1 + |x|^2)^r) dx.$$

Estimons le premier membre à droite dans (7.27). D'après l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski

$$(7.28) \quad \left| \int u_{1i} v_i \frac{\partial v_m}{\partial x_j} (1 + |x|^2)^r dx \right| \leq \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,r} \|v\|_{0,r}^{\frac{1}{2}} \left(\int |v|^2 |u_1|^4 (1 + |x|^2)^r dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \delta \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,r}^2 + \varepsilon \delta \int |v|^2 |u_1|^4 (1 + |x|^2)^r dx + \frac{1}{\varepsilon \delta^2} \|v\|_{0,r}^2.$$

Pour le deuxième et le troisième membre à droite dans (7.27) on a les estimations analogues. Alors, de (7.27), (7.28) avec un petit δ , et de (1.4), (1.5) il résulte, que

$$(7.29) \quad \left| \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_j(u_1)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j(u_2)}{\partial x_j}, v \right) \right|_{0,r} \leq \frac{\alpha}{2} \|v(t, \cdot)\|_{1,r}^2 + C(\varepsilon) \|v(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \\ + \frac{\varepsilon}{2} \int (|u_1|^4 + |u_2|^4) |v|^2 (1 + |x|^2)^r dx.$$

De (7.26), (7.29) résulte

$$\|v(t, \cdot)\|_{0,r}^2 \leq \|v(0, \cdot)\|_{0,r}^2 + C \int_0^t \|v(\tau, \cdot)\|_{0,r}^2 d\tau$$

d'où, utilisant l'inéquation de Gronuoll,

$$(7.30) \quad \|v(t, \cdot)\|_{0,r}^2 \leq \exp[Ot] \|v(0, \cdot)\|_{0,r}^2.$$

De (7.30) résulte l'unicité de la solution du problème (4.1), (4.2) dans les espaces $B(0, T; r)$. ■

Remarquons, que de (7.30) suit la proposition 4.1.

5) On va démontrer les propositions 4.2, 4.3. Ils sont les corollaires de la propriété suivante: la μ -mesurabilité de la fonction $f(u)$ reste juste, quand on passe à la limite au sens de μ -p.p. Démontrons la $dt \times \mu(0, du)$ -mesurabilité de la fonctionnelle $\Psi_3(t, u)$, définie par (4.9), (4.10). Posons dans le membre gauche de (7.21) $(1 + |x|^2)^r w(x) = \varphi(x) u_k(t, x)$, où $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$ et satisfait à (4.8'); $u_k(t, x)$ est la solution du problème (7.6), (7.7), $N = k$. La fonctionnelle ainsi définie est continue par rapport à deux variables: $t \in [0, T]$, la condition initiale $u_0 \in H_0(r)$, et, par conséquence elle est mesurable sur $\mathcal{B}([0, T] \times H_0(r))$. Alors, d'après (7.21), les fonctionnelles

$$\chi_k(t, u_0) = \int_0^t \int \varphi(x) \langle |S_\varepsilon(\tau) u_0|^4 S_\varepsilon(\tau) u_0, u_k(\tau, x) \rangle dx d\tau,$$

$\forall k$, sont mesurables sur $\mathcal{B}([0, T] \times H_0(r))$. D'après (7.14) $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_k(t, u_0) = \Psi_3(t, u_0)$, donc $\Psi_3(t, u_0)$ est mesurable sur $\mathcal{B}([0, T] \times H_0(r))$. Pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\Phi_3(t, u) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \Psi_3(\tau, u_0) d\tau,$$

alors la fonctionnelle $\Phi_3(t, u)$ est $dt \times \mu(0, du)$ -mesurable.

La mesurabilité des autres fonctionnelles des propositions 4.2, 4.3 peut être démontrée analogiquement. ■

8. - Les solutions statistiques homogènes du système de Navier-Stokes.

Les résultats précédants (en particulier le théorème 3.1) restent justes dans le cas du problème de Cauchy pour le système de Navier-Stokes:

$$(8.1) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k u}{\partial x_k} = -\nabla p + \Delta u, \quad u = (u_1, \dots, u_n),$$

$$(8.2) \quad \langle \nabla, u \rangle \equiv \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \quad t > 0,$$

$$(8.3) \quad u(t, x)|_{t=0} = u_0(x),$$

$\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, Δ est l'opérateur de Laplace. Les démonstrations des théorèmes correspondants dans ce cas sont absolument analogues à celles des §§ 1-7 pour le système parabolique. Nous allons indiquer les changements à accomplir à cause du membre p dans (8.1) et de l'équation (8.2).

Comme système approximé, analogue à (4.1), on peut prendre dans le cas (8.1), (8.2) le système

$$(8.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k u}{\partial x_k} = -\nabla p + \Delta u - \varepsilon |u|^4 u,$$

$$(8.5) \quad \langle \nabla, u \rangle = -\varepsilon p.$$

Voilà l'analogue du théorème 4.1:

THÉOREME 8.1. *Pour toute condition initiale $u_0 \in H_0(r)$ il existe une solution unique $u(t, x) \in B(0, T; r)$ du problème (8.4), (8.5), (8.3).*

DÉMONSTRATION. L'approximation de Galerkin du problème (8.4), (8.5) est le problème de Cauchy suivant:

$$(8.6) \quad \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n P_N \frac{\partial v_k v}{\partial x_k} = \varepsilon^{-1} P_N \nabla \langle \nabla, v \rangle + P_N \Delta v - \varepsilon P_N (|v|^4 v),$$

$$(8.7) \quad v(t, x) \in E_N \quad \forall t \in [0, T], \quad v(t, x)|_{t=0} = P_N u_0$$

où P_N et E_N sont définis dans le § 7.

On va déduire l'estimation pour la solution du problème (8.6), (8.7), analogue à (7.8). On prend le produit scalaire dans $H_0(r)$ de deux membres de (8.6) par $v(t, x)$ et utilisant l'égalité $P_N v = v$ et que l'opérateur P_N est autoadjoint dans $H_0(r)$, et en intégrant l'égalité obtenue en t , on déduit que

$$(8.8) \quad \frac{1}{2} \|v(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \int_0^t \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial v_k v}{\partial x_k}, v \right)_{0,r} d\tau = \varepsilon^{-1} \int_0^t (\nabla \langle \nabla, v \rangle, v)_{0,r} d\tau + \\ + \int_0^t (\Delta v, v)_{0,r} d\tau - \varepsilon \int_0^t \|v\|_{L_4(r)}^6 d\tau + \frac{1}{2} \|v(0, \cdot)\|_{0,r}^2.$$

On a

$$(8.9) \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial v_k v}{\partial x_k}, v \right)_{0,r} = \frac{1}{2} \int \langle \nabla, v \rangle |v|^2 (1 + |x|^2)^r dx - \\ - \frac{1}{2} \int |v|^2 \langle v, \nabla (1 + |x|^2)^r \rangle dx.$$

Utilisant les inéquations de Cauchy-Bouniakovski et de Young, on a

$$(8.10) \quad \left| \int \langle \nabla, v \rangle |v|^2 (1 + |x|^2)^r dx \right| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\langle \nabla, v \rangle\|_{0,r}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_{L_4(r)}^4 \leq \\ \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\langle \nabla, v \rangle\|_{0,r}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_{L_4(r)}^6 + C\varepsilon \|v\|_{0,r}^2,$$

$$(8.11) \quad \left| \int |v|^2 \langle v, \nabla (1 + |x|^2)^r \rangle dx \right| \leq C \|v\|_{L_4(r)}^3 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_{L_4(r)}^6 + \frac{C_1}{\varepsilon} \|v\|_{0,r}^2.$$

De l'égalité

$$(8.12) \quad \varepsilon^{-1} (\nabla \langle \nabla, v \rangle, v)_{0,r} = -\varepsilon^{-1} \|\langle \nabla, v \rangle\|_{0,r}^2 - \varepsilon^{-1} \int \langle \nabla, v \rangle \langle v, \nabla (1 + |x|^2)^r \rangle dx$$

résulte l'inéquation

$$(8.13) \quad \varepsilon^{-1} (\nabla \langle \nabla, v \rangle, v)_{0,r} \leq -\frac{\varepsilon^{-1}}{2} \|\langle \nabla, v \rangle\|_{0,r}^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|v\|_{0,r}^2.$$

De (8.8)-(8.13) et de lemme 4.1 résulte

$$\|v(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \int_0^t \left(2 \|v(\tau, \cdot)\|_{1,r}^2 + \varepsilon \|v\|_{L_4(r)}^6 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\langle \nabla, v \rangle\|_{0,r}^2 \right) d\tau \leq \\ \leq \|v(0, \cdot)\|_{0,r}^2 + \frac{C_2}{\varepsilon} \int_0^t \|v(\tau, \cdot)\|_{0,r}^2 d\tau$$

et, à l'aide du lemme de Gronuoll on déduit l'inéquation:

$$\|v(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \int_0^t \left(2 \|v(\tau, \cdot)\|_{1,r}^2 + \varepsilon \|v(\tau, \cdot)\|_{L_4(r)}^6 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\langle \nabla, v(\tau, \cdot) \rangle\|_{0,r}^2 \right) d\tau \leq \\ \leq \exp \left[\frac{C_2}{\varepsilon} t \right] \|v(0, \cdot)\|_{0,r}^2.$$

En outre la démonstration de l'existence de la solution du problème (8.1), (8.2), (8.3) reste la même comme dans § 7 dans le cas du système (4.1).

Dans la démonstration de l'unicité de la solution du problème (8.4), (8.5), (8.3) il faut estimer le membre

$$I = \int_0^t (\nabla(p_1 - p_2), u_1 - u_2)_{0,r} d\tau$$

où (u_i, p_i) , $i = 1, 2$, sont les solutions du problème (8.4), (8.5), (8.3), qui est absent dans le cas du problème (4.1), (4.2). D'après (8.5) et de l'inéquation de Cauchy-Bouniakovski

$$I = \varepsilon \int_0^t \|p_1 - p_2\|_{0,r}^2 d\tau - \int_0^t \int (p_1 - p_2) \langle u_1 - u_2, \nabla(1 + |x|^2)r \rangle dx d\tau > \\ > \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \|p_1 - p_2\|_{0,r}^2 d\tau - \varepsilon^{-1} C \int_0^t \|u_1 - u_2\|_{0,r}^2 d\tau.$$

En outre la démonstration de l'unicité reste la même, comme dans le § 7. ■

La solution statistique homogène $\mu(t, du)$ du système (8.1), (8.2) on construit comme dans le § 6, à l'aide des mesures $\mu_\varepsilon(t, du)$, définies dans (5.1), où $S_\varepsilon(t)u_0(x) = u(t, x)$, $u_0 \in H_0(r)$ la donnée initiale, $u(t, x)$ est la solution correspondante du problème (8.4), (8.5), (8.3) au moment t . Comme dans le § 6 l'inéquation suivante est très importante:

$$(8.14) \quad \int \|u\|_{0,r}^2 \mu_\varepsilon(t, du) + \int_0^t (\|u\|_{1,r}^2 + \varepsilon \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^6 + \varepsilon^{-1} \|\langle \nabla, u \rangle\|_{0,r}^2) \mu_\varepsilon(\tau, du) d\tau \leq \\ \leq \exp[Ct] \int \|u\|^2 \mu(0, du),$$

où la constante C ne dépend pas de ε . Cette inéquation est déduite de l'inéquation

$$(8.15) \quad \|u(t, \cdot)\|_{0,r}^2 + \int_0^t (\varepsilon \|u\|_{L_\varepsilon(r)}^6 + 2 \|u(\tau, \cdot)\|_{1,r}^2 + \varepsilon^{-1} \|\langle \nabla, u \rangle\|_{0,r}^2) d\tau \leq \\ \leq \|u(0, \cdot)\|_{0,r}^2 + C \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{0,r}^2 d\tau - \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t \int \langle \nabla, u \rangle \langle u, \nabla(1 + |x|^2)r \rangle dx d\tau + \\ + \int_0^t \int |u|^2 \langle u, \nabla(1 + |x|^2)r \rangle dx d\tau$$

d'une manière analogue, que (5.5) était déduite de (4.17). La démonstration (8.14) est basée sur le fait, qu'après l'intégration (8.15) par rapport à la mesure $\mu(0, du)$ les deux derniers membres dans le membre droit dans (8.15), d'après le théorème 2.1, s'annulent. On prend le produit scalaire dans $H_0(r)$ des deux membres de (8.4) par $u(t, \cdot)$ et on intègre en t de 0 à t , alors on obtient (8.8), où il faut remplacer v par u . De (8.8), (8.9), (8.10), (8.12) et

de lemme 4.1 résulte (8.15). A l'aide de (8.14) d'une manière analogue comme dans le § 6 on démontre l'existence de la solution statistique $\mu(t, du)$, qui a toutes les propriétés indiquées dans le théorème 3.1.

Dans le cas du système de Navier-Stokes il faut encore montrer, que pour presque tout $t \in [0, T]$ la solution statistique $\mu(t, du)$ est concentrée sur l'espace $SH_1 = \{u \in H_1(r), \langle \nabla, u \rangle = 0\}$ des vecteurs solénoïdaux. Cette propriété de la mesure $\mu(t, du)$ résulte de

$$\int_0^T \int \|\langle \nabla, u \rangle\|_{0,r}^2 \mu(\tau, du) d\tau = 0$$

qu'on déduit aisément de l'estimation (8.14) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. S. MONIN - A. M. YAGLOME, *Hydrodynamique statistique*, v. 2, M., « Naouka », 1967.
- [2] E. HOPF, *Statistical hydromechanics and functional calculus*, J. Rat. Mech. Anal., v. 1, no. 1 (1952), pp. 87-123.
- [3] C. FOIAS, *Statistical study of Navier-Stokes equations - I, II*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **48** (1972), pp. 219-348; **49** (1973), pp. 9-123.
- [4] M. I. VIŠIK - A. V. FOURSIKOV, *Problème de Cauchy pour l'équation de Hopf, correspondant aux équations paraboliques. Les solutions statistiques et les fonctions moments*, Doklady AN, **227**, no. 5 (1976), pp. 1041-1044.
- [5] M. I. VIŠIK - A. V. FOURSIKOV, *Equation de Hopf, les solutions statistiques, les fonctions moments, correspondant aux systèmes des équations paraboliques quasi-linéaires*, Journ. Math. Pures Appl. 1977.
- [6] A. M. VIERŠIK - O. A. LADYZHENSKAJA, *Sur l'évolution des mesures, définies par les équations de Navier-Stokes et sur la solubilité du problème de Cauchy pour la équation de E. Hopf. Les problèmes aux limites dans la physique mathématique et les problèmes voisins*, L., « Naouka », 1976, pp. 3-24.
- [7] A. A. ARSIENJEV, *La construction de la mesure turbulente pour la système des équations de Navier-Stokes*, Doklady AN, **225** (1975), pp. 18-20.
- [8] M. I. VIŠIK, *Sur les systèmes des équations fortement elliptiques*, Recueil mathem., **29** (71), no. 31 (1951), pp. 615-676.
- [9] U. U. GICHMAN - A. V. SKOROKHOD, *La théorie des processus aléatoires*, v. 1, M., « Naouka », 1971.
- [10] U. C. GOCHBERG - M. G. KREIN, *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires nonautoadjoints*, M., « Naouka », 1965.
- [11] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [12] K. YOSIDA, *Analyse fonctionnelle*, M., « Mir », 1967.