ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO MIRANDA

Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 4, nº 1 (1977), p. 129-132

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_1_129_0>

Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime.

MARIO MIRANDA (*)

dedicato a Hans Lewy

Nel 1965 E. De Giorgi e G. Stampacchia [1] hanno dimostrato che: *se Ω è aperto di $\boldsymbol{R}^n$, se K è compatto in Ω con $H_{n-1}(K)=0$, se f è soluzione dell'equazione delle superficie minime in $\Omega - K$, allora f è soluzione dell'equazione delle superficie minime in Ω.*

L'ipotesi di compattezza di K in Ω è essenziale per il successo della tecnica di De Giorgi-Stampacchia, fondata sul principio del massimo. Tale ipotesi non è esplicitamente fatta nel caso $n=2$, vedi J. C. C. Nitsche, § 6 di [2], in quanto di fatto contenuta nell'ipotesi $H_1(K)=0$.

In questo articolo provo la tesi di De Giorgi-Stampacchia senza l'ipotesi di compattezza di K. Il risultato è ottenuto come conseguenza pressochè immediata dello studio delle soluzioni generalizzate dell'equazione delle superficie minime contenuto in [3]. L'osservazione che qui faccio è che *una soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in $\Omega - K$, con K chiuso e $H_{n-1}(K)=0$, è soluzione generalizzata in Ω, quindi,* grazie a quanto provato nel § 1 di [3], *è soluzione classica in Ω.*

A titolo di curiosità dirò che la tecnica per lo studio delle soluzioni generalizzate applicata in [3] è essenzialmente fondata sulla diseguaglianza di Harnack per le soluzioni delle equazioni ellittiche su superficie minime (E. Bombieri-E. Giusti [4]) quindi, se si vuole, su un principio di massimo forte.

Ringrazio D. Kinderlehrer e G. Anzellotti con i quali ho discusso il contenuto di questo articolo.

1. – Ricordiamo che un insieme di Borel E di R^k ha frontiera di misura minima nell'aperto A di R^k se per ogni aperto limitato A_0, contenuto con

(*) Facoltà di Scienze, Libera Università degli Studi. Povo (Trento).
Pervenuto alla Redazione il 3 Maggio 1976.

la sua chiusura in $A(A_0 \subset\subset A)$ si ha

$$(1.1) \qquad |D\varphi_E|(A_0) = \sup\left\{\int_E \sum_{i=1}^k D_i\phi_i \, \mathrm{d}x \,|\, \phi \in [C_0^1(A_0)]^k,\ |\phi(x)| \leqslant 1,\ \forall x\right\} < +\infty,$$

e se per ogni boreliano M tale che $E\Delta M = (M-E) \cup (E-M) \subset\subset A_0$ si ha

$$(1.2) \qquad |D\varphi_E|(A_0) \leqslant |D\varphi_M|(A_0)\,.$$

Vale ovviamente, se E ha frontiera di misura minima in A, per ogni aperto $L \subset\subset A$, con frontiera localmente lipschitziana,

$$(1.3) \qquad |D\varphi_E|(L) \leqslant H_{k-1}(\partial L)\,.$$

La (1.3) si ottiene dalla (1.2) ponendo $M = E - L$, scegliendo un qualunque A_0 tale che $L \subset\subset A_0 \subset\subset A$ e osservando che con tali scelte, grazie al teorema 2 di [5], si ha

$$(1.4) \qquad |D\varphi_M|(A_0) = |D\varphi_E|(A_0 - \bar{L}) + \int_{\partial L} T\varphi_E \, dH_{k-1}\,,$$

dove $T\varphi_E$ è la traccia della funzione caratteristica di E su ∂L (dall'esterno).

Per applicare i risultati del § 1 di [3] al problema di eliminazione di singolarità che qui c'interessa ho bisogno del seguente

LEMMA. « *Se A è aperto di R^k, se N è chiuso con $H_{k-1}(N) = 0$, se E è boreliano con frontiera di misura minima in $A - N$, allora E ha frontiera di misura minima in A* ».

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo innanzitutto che per ogni aperto $A_0 \subset\subset A$ si ha

$$(1.5) \qquad |D\varphi_E|(A_0) = |D\varphi_E|(A_0 - N)\,.$$

Infatti, essendo N chiuso e $H_{k-1}(N) = 0$, esiste una successione di aperti B_j di R^k con frontiera localmente lipschitziana tali che

$$(1.6) \qquad N \subset B_j,\ \forall j\,; \quad \lim_j H_k(B_j) = 0\,; \quad \lim_j H_{k-1}(\partial B_j) = 0\,.$$

Pertanto $\forall \phi \in [C_0^1(A_0)]^k$ si ha

$$(1.7) \qquad \int_E \sum_{i=1}^k D_i\phi_i \, dx = \lim_j \int_{E-B_j} \sum_{i=1}^k D_i\phi_i \, dx = \lim_j \cdot \left\{-\sum_{i=1}^k \int_{A_0 - \bar{B}_j} \phi_i \, d\alpha_i + \int_{\partial B_j} T\varphi_E \phi \cdot \nu \, dH_{k-1}\right\},$$

dove α_i è la misura di Radon, derivata i-ma della funzione caratteristica di E, $T\varphi_E$ è la traccia esterna su ∂B_j della φ_E, ν è la normale a ∂B_j:

Dalla (1.7), se $|\phi(x)|\leqslant 1$, $\forall x$, si ricava

$$\int_E \sum_{i=1}^{k} D_i\phi_i\,dx \leqslant \max\lim_j \{|D\varphi_E|(A_0-\bar{B}_j)+H_{k-1}(\partial B_j)\}\leqslant |D\varphi_E|(A_0-N)\,. \tag{1.8}$$

Dalle (1.8) e (1.1) segue (1.5).

Per quanto riguarda la finitezza di $|D\varphi_E|(A_0)$ osserviamo che se A_0 ha frontiera localmente lipschitziana allora applicando la (1.3) a $L=A_0-\bar{B}_j$ (B_j può essere scelto in modo che $A_0-\bar{B}_j$ abbia anch'esso frontiera localmente lipschitziana) si ha

$$|D\varphi_E|(A_0-\bar{B}_j)\leqslant H_{k-1}(\partial A_0)+H_{k-1}(\partial B_j)\,, \tag{1.9}$$

da cui segue che

$$|D\varphi_E|(A_0)\leqslant H_{k-1}(\partial A_0)\,. \tag{1.10}$$

Finalmente la proprietà di minimo di E in A si prova, come conseguenza della proprietà di minimo in $A-N$, nel modo seguente. Se M è un boreliano con $M\Delta E\subset\subset A_0\subset\subset A$, posto $M_j=(M-B_j)\cup(E\cap B_j)$ abbiamo che

$$M_j\Delta E\subset\subset A_0-N\,.$$

Possiamo allora scrivere la diseguaglianza

$$|D\varphi_E|(A_0-N)\leqslant|D\varphi_{M_j}|(A_0-N)\,. \tag{1.11}$$

Dal già usato teorema 2 di [5] abbiamo

$$|D\varphi_{M_j}|(A_0-N)\leqslant|D\varphi_E|(B_j)+|D\varphi_M|(A_0-\bar{B}_j)+H_{k-1}(\partial B_j)\,. \tag{1.12}$$

Dalle (1.5), (1.10), (1.11) e (1.12) si ha

$$|D\varphi_E|(A_0)\leqslant|D\varphi_M|(A_0)+2H_{k-1}(\partial B_j)\,, \tag{1.13}$$

da cui, passando al limite per $j\to\infty$ e tenendo conto della (1.6) si ha la (1.2). c.v.d.

2. – Venendo al problema di eliminazione delle singolarità osserviamo che se Ω è aperto di R^n, se K è chiuso e f è soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in $\Omega-K$, l'insieme $E=\{(x,t)|x\in\Omega-K,\ t<f(x)\}$ ha

frontiera di misura minima nell'aperto $(\Omega - K)\times R$ di R^{n+1} (questo fatto è conseguenza della convessità dell'integrale dell'area e del teorema 2.4 di [6]). Se poi $H_{n-1}(K) = 0$ allora avremo anche $H_n(K\times R) = 0$ e quindi applicando il Lemma del § 1 all'aperto $A = \Omega\times R$ di R^{n+1} e al chiuso $K\times R$ avremo che E ha frontiera di misura minima in $\Omega\times R$, cioè, secondo la denominazione introdotta in [3], abbiamo che f è soluzione generalizzata della equazione delle superficie minime in Ω.

Applicando ora i risultati dello studio degli insiemi di punti in cui f può assumere valori $+\infty$, $-\infty$ al caso presente abbiamo che tali insiemi hanno misura nulla in quanto sottoinsiemi di K, d'altra parte dovendo avere frontiera di misura minima in Ω debbono essere vuoti. La f è quindi, per i risultati del § 1 di [3], soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in Ω.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. De Giorgi - G. Stampacchia, *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali*, Rend. Acc. Lincei, **38** (1965), pp. 352-357.

[2] J. C. C. Nitsche, *On new results in the theory of minimal surfaces*, Bull. A.M.S., **71** (1965), pp. 195-270.

[3] M. Miranda, *Superficie minime illimitate*, di prossima pubblicazione sugli Ann. Scuola Norm. Sup,, Pisa.

[4] E. Bombieri - E. Giusti, *Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces*, Inv. Math., **15** (1972), pp. 24-46.

[5] M. Miranda, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Padova, **38** (1967), pp. 238-257.

[6] M. Miranda, *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro finito sui prodotti cartesiani*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **18** (1964), pp. 515-542.