ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JACQUES SIMON

Quelques propriétés de solutions d'équations et d'inéquations d'évolution paraboliques non linéaires

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 2, nº 4 (1975), p. 585-609

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1975_4_2_4_585_0>

Quelques propriétés de solutions d'équations et d'inéquations d'évolution paraboliques non linéaires.

JACQUES SIMON (*)

0. – Introduction.

On s'intéresse dans ce travail aux solutions d'équations aux dérivées partielles d'évolution, paraboliques, fortement non linéaires. On utilisera comme exemple type la variante suivante de l'équation de la chaleur, de solution réelle $u = u(x, t)$ où $x \in \Omega$, Ω étant un ouvert de R^n, et où t est réel.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f & \text{au sens des distributions dans } \Omega \times I, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I . \end{cases}$$

où $f = f(x, t)$ est donnée, et où I sera successivement $(0, T)$, $)-\infty, +\infty($ et $(0, \infty)$.

Nous allons établir deux propriétés spécifiques du cas $p > 2$:

— la solution $u(T)$, T étant donné, du problème de Cauchy sur $(0, T)$ est bornée indépendemment de la donnée initiale $u(0)$ (¹);

— il existe une et une seule solution u de l'équation (1) définie pour tout $t \in R$.

(*) Université Paris VI, Laboratoire Analyse Numérique.

(¹) On en déduira des résultats de non existence ou d'explosion des solutions du problème de Cauchy rétrograde, donc du problème équivalent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{au sens des distributions dans } \Omega \times [0, T]$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]$$

$$u(0) = u_0 .$$

Pervenuto alla Redazione l'11 Marzo 1975.

Nous établirons également des résultats sur le comportement à l'infini de la solution du problème de Cauchy sur $(0, \infty($, qui sont vrais pour tout p, $1 < p < \infty$, principalement:

si $f(t)$ admet une limite $\boldsymbol{f}$ quand $t \to \infty$, alors $u(t)$ tend vers la solution u du problème stationnaire relatif à $\boldsymbol{f}$.

On s'intéressera ensuite aux solutions de l'équation à coefficients dépendant du temps

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f & \text{au sens des distributions dans } \Omega \times I, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I, \end{cases}$$

où les fonctions a_i sont strictement positives et majorées localement en temps, le comportement pour $t \to \pm\infty$ des fonctions $a_i(x, t)$ étant à priori quelconque.

On montrera que quand $p > 2$ existe une et une seule solution de (2) définie pour tout $t \in R$ si les a_i ne sont pas trop petits au voisinage de $-\infty$, plus précisément, en notant

$$a(t) = \inf_{\substack{i=1\ldots n \\ x \in \Omega}} a_i(x, t) \ , \quad \text{si} \int_0^\infty a(t)\, dt = +\infty \, .$$

Nous donnerons des résultats sur le comportement à l'infini de la solution $u(t)$ du problème de Cauchy sur $)0, \infty($ pour l'équation (2). Plus précisement

— si pour tout $t \geqslant 0$, $\|f(t)\| \leqslant c\ a(t)$, alors $u(t)$ reste borné quand $t \to \infty$;

— si $\|f(t)\|/a(t) \to 0$ quand $t \to \infty$, alors $u(t)$ tend vers 0 quand $t \to \infty$ (les normes de $f(t)$ et $u(t)$ étant prises dans des espaces convenables).

Enfin nous donnerons des classes d'équations ou d'inéquations pour lesquelles ces résultats, ou du moins certains d'entre eux, s'étendent. Nous citerons en particulier une équation intervenant dans l'étude des glaciers et des variantes des équations de Navier-Stokes et de Schrödinger.

L'essentiel de ces résultats ont été annoncés dans deux notes, cf. Simon [1], [2].

De très nombreux résultats analogues ont été établis, principalement sur les solutions d'équations non linéaires du type

$$(3) \qquad u'(t) + Au(t) + \varphi(u(t)) = f(t)$$

où A est linéaire coercif et φ est une fonction réelle, non linéaire, par exemple $\varphi(r) = |r|^{p-2}r$; sous des hypothèses convenables elles vérifient les mêmes majorations que les solutions d'équations fortement non linéaires.

C. Bardos et L. Tartar [1], [2] ont donné un résultat de bornage indépendemment de la donnée initiale des solutions d'une équation parabolique du type (3) à second membre uniformément borné en temps et en espace, et ont étudié les relations avec des problèms d'unicité rétrograde.

De nombreux auteurs ont établi des résultats d'existence ou d'unicité de solutions bornées d'équations sur tout R en supposant le second membre, ici f, borné et en particulier périodique ou presque périodique: pour les équations paraboliques non linéaires du type (1) cf. L. Amerio et G. Prouse [1], M. Biroli [1], J. L. Lions [1] chap. 4.8, G. Prouse [1] et J. Simon [1]; pour les équations paraboliques non linéaires du type (3) cf. F. E. Browder [1], [2] et G. Prodi [1], [2].

Le résultat qu'on donne ici présente la particularité d'être établi sans hypothèses globales (en temps) sur f ou u, c'est à dire sans restriction sur le comportement de $f(t)$ et $u(t)$ quand $t \to \pm\infty$, et pour des opérateurs dépendant du temps sans hypothèses uniformes sur ceux-ci; dans Simon [1] on donne d'autres résultats sans hypothèses globales.

La convergence à l'infini qui est liée à la stabilité de la solution du problème stationnaire, a suscité de nombreux travaux. Nous n'en connaissons pas pour les équations non linéaires du type (1); pour les équations du type (3) cf. A. Friedman [1], [2], [3], [4], H. Fujita [2], O. P. Oleinik [1], J. P. Puel [1] et D. H. Sattinger [1]; pour les équations linéaires on renvoie à S. Agmon et L. Nirenberg [1] § 18, où il ést donné un développement asymptotique des solutions. Enfin A. Friedman [6] étudie le comportement à l'infini de solutions d'équations linéaires avec des conditions aux limites non linéaires.

La majoration à l'infini de la solution du problème de Cauchy sur $)0, \infty($ pour l'équation (2) que nous donnons ici généralise (aux équations à coefficients à comportement quelconque à l'infini) un résultat de L. Amerio et G. Prouse, cf. également Lions [1], Chap. 4.8, qui est rappelé à la remarque 11.

Nous suivrons le plan:

1. Cadre fonctionnel.
2. Bornage de la solution du problème de Cauchy.
3. Solution sur R.
4. Convergence à l'infini de la solution du problème de Cauchy.
5. Solution sur R d'une équation à coefficients dépendant du temps.
6. Comportement à l'infini des solutions d'une équation à coefficients dépendant du temps.
7. Extension des résultats.

1. – Cadre fonctionnel.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ de point générique $x=(x_1,\dots,x_n)$, de frontière $\partial\Omega$. Etant donné $1\leqslant p\leqslant\infty$ on note

$$W_0^{1,p}(\Omega)=\left\{v \text{ t.q. } v,\ \frac{\partial v}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial v}{\partial x_n}\in L^p(\Omega) \text{ et } v=0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

qu'on munit de la norme

$$\|v\|=\left(\sum_i\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p\right)^{1/p},$$

et $W^{-1,p'}(\Omega)$, où $1/p+1/p'=1$, est son dual, qu'on munit de la norme duale $\|v\|_*$.

Enfin on note $|v|$ la norme dans $L^2(\Omega)$ et (v,w) le crochet de dualité entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p'}(\Omega)$. On a

$$|v|\leqslant k\|v\| \qquad \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{4}$$

On est en mesure d'énoncer le résultat d'existence et d'unicité d'une solution du problème de Cauchy établi dans Lions [1]:

PROPOSITION 1. *Soit $T>0$; étant donnés*

$$u_0\in L^2(\Omega) \qquad et \qquad f\in L^{p'}(0,T;\,W^{-1,p'}(\Omega))\,,$$

il existe une et une seule fonction u vérifiant

$$u\in C(0,T;\,L^2(\Omega))\cap L^p(0,T;\,W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$u'(t)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right)=f(t) \quad p.p.\ en\ t,\ dans\ W^{-1,p'}(\Omega)\,, \tag{5}$$

$$u(0)=u_0 \tag{6}$$

Notons

$$Av=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right); \tag{7}$$

L'opérateur A est coercif sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, en effet

$$(Av, v) = \|v\|^p, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{8}$$

Tartar [1] a montré que cet opérateur est fortement monotone quand $p \geqslant 2$ (²) au sens

$$(Av - Au, v - u) \geqslant \|v - u\|^p, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{9}$$

inégalité qui résulte de l'inégalité réelle

$$\big(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\big)(x - y) \geqslant |x - y|^p, \quad \forall x, y \in R. \tag{10}$$

Pour établir (10) on se ramène par homogénéité au cas $y = 1$, $|x| \leqslant 1$ et il ne reste qu'à minorer la fonction réelle

$$f(x) = \frac{\big(|x|^{p-2}x - 1\big)(x - 1)}{|x - 1|^p}, \; -1 \leqslant x < 1.$$

2. – Bornage de la solution du problème de Cauchy.

On va démontrer le

THÉORÈME 1. *Quand $p > 2$ l'ensemble U_T, parcouru par la solution $u(T)$ définie par la proposition 1 quand u_0 parcourt $L^2(\Omega)$, est borné dans $L^2(\Omega)$.*

REMARQUE 1. En général la solution $u(T)$ n'appartient pas à $W_0^{1,p}(\Omega)$ de sorte que l'ensemble U_T n'est pas borné dans cet espace, mais il résulte du théorème 1 et de la majoration (12) que, étant donnés $0 < T < T'$, l'ensemble $U_{T,T'}$, parcouru par la restriction de u à (T, T') quand u_0 parcourt $L^2(\Omega)$, est borné dans $L^p\big(T, T', W_0^{1,p}(\Omega)\big)$.

REMARQUE 2. Ces résultats sont spécifiques du cas $p > 2$. En effet quand $p = 2$, i.e. pour l'équation de la chaleur, l'application $u_0 \to u$ est linéaire et quand $1 < p < 2$ considérons l'exemple suivant: supposons qu'il

(²) La majoration (9) implique que A^{-1} est Höldérien d'ordre $1/(p-1)$; elle ne peut donc être vérifiée que pour $p \geqslant 2$.

existe une fonction g vérifiant [3]

$$(11)\qquad \begin{cases} g \in W_0^{1,p}(\Omega)\,, \quad g \neq 0\,, \\ \lambda g + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right|^{p-2} \dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right) = 0\,, \quad \text{où } \lambda > 0\,. \end{cases}$$

et soit r la fonction de classe $C^1(0, \infty)$ définie par $r(0) \geqslant 0$ et

$$\begin{cases} r(t) = \left(r(0)^{2-p} - \lambda(2-p)t\right)^{1/(2-p)} & \text{si } t \leqslant \dfrac{r(0)^{2-p}}{\lambda(2-p)}\,, \\ r(t) = 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Alors $u(t) = r(t)g$ est solution de la proposition 1 relative à $f \equiv 0$ et à $u_0 = r(0)g$, et on constate que, T étant fixé, $|u(T)| \to \infty$ quand $r(0) \to \infty$.

REMARQUE 3. Le problème rétrograde, c.à.d. la recherche d'une fonction u vérifiant

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right) = f(t) \quad \text{p.p. dans })0, T(\,,$$

$$u(T) = u_T$$

$$u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$$

où u_T est donné dans $L^2(\Omega)$ admet une solution si et seulement si $u_T \in U_T$:

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Multiplions l'équation (5) par $u(t)$, il vient avec (8)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \|u(t)\|^p = \left(f(t), u(t)\right) \leqslant \|f(t)\|_* \|u(t)\|$$

[3] Pour établir l'existence d'une telle fonction en dimension 1 on introduit une fonction γ de classe C^1 solution de

$$\gamma(x) + \frac{d}{dx}\left(\left|\frac{d\gamma}{dx}(x)\right|^{p-2} \frac{d\gamma}{dx}(x)\right) = 0 \quad \forall x \geqslant 0\,,$$

$$\gamma(0) = 0\,, \quad \gamma'(0) = 1\,;$$

on montre que γ s'annule et un point $\alpha > 0$, et étant donné $\Omega =]x_1, x_2[$, la fonction définie par $g(x) = \gamma\left(\alpha \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$ est solution de (11) avec $\lambda = \left|\dfrac{\alpha}{x_2 - x_1}\right|^{p-1}$.

et en majorant le second membre par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2+\frac{1}{p'}\|u(t)\|^p\leqslant\frac{1}{p'}\|f(t)\|_*^{p'} \tag{12}$$

et avec (4)

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2+\frac{2}{p'\gamma^p}|u(t)|^p\leqslant\frac{2}{p'}\|f(t)\|_*^{p'} \quad \text{p.p. dans })0;\,T(\,. \tag{13}$$

Le lemme 1 ci-après avec $\phi(t)=|u(t)|^2$ montre alors que

$$|u(T)|^2\leqslant\left(\frac{p-2}{p'\gamma^p}T\right)^{-2/(p-2)}+\frac{2}{p'}\int\limits_0^T\|f(\sigma)\|_*^{p'}\,d\sigma \tag{14}$$

ce qui établit le théorème.

Il nous reste à établir le

Lemme 1. *Soit ϕ une fonction réelle, continue, positive, p.p. dérivable sur un segment $I\subset R$, et telle que*

$$\phi'(t)+c\phi(t)^{p/2}\leqslant k(t) \quad \text{p.p. dans } I \tag{15}$$

où $p>2$, $c\geqslant 0$ et k est positif et intégrable sur I.

Alors pour tout θ, t dans I tels que $\theta\leqslant t$ on a

$$\phi(t)\leqslant\left(\frac{p-2}{2}c(t-\theta)\right)^{-2/(p-2)}+\int\limits_\theta^t k(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{16}$$

Démonstration du lemme 1. Si $\phi(\theta)=0$ il suffit d'intégrer (15) de 0 à t, supposons donc $\phi(\theta)>0$. On définit la fonction réelle ψ dans (θ,t) par

$$\psi(\tau)=\left(\phi(\theta)^{-(p-2)/2}+\frac{p-2}{2}c(\tau-\theta)\right)^{-2/(p-2)}+\int\limits_\theta^\tau k(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{17}$$

Elle y vérifie

$$\psi'(\tau)=-c\left(\phi(\theta)^{-(p-2)/2}+\frac{p-2}{2}c(\tau-\theta)\right)^{-p/(p-2)}+k(\tau)\,,$$

$$\psi(\tau)^{p/2}\geqslant\left(\phi(\theta)^{-(p-2)/2}+\frac{p-2}{2}c(\tau-\theta)\right)^{-2/(p-2)}$$

de sorte que

$$\psi'(\sigma)+c\psi(\sigma)^{p/2}=k(\sigma) \quad \text{p.p. dans } (\theta, t), \tag{18}$$

et enfin

$$\psi(\theta)=\phi(\theta). \tag{19}$$

On déduit de (15), (18), et (19) que

$$\phi(t)\leqslant\varphi(t) \tag{20}$$

d'où le lemme puisque (17) montre que

$$\psi(t)\leqslant\left(\frac{p-2}{2}c(t-\theta)\right)^{-2/(p-2)}+\int_\theta^t k(\sigma)\,d\sigma. \tag{21}$$

On remarque que la majoration (20) est également vraie si $1<p<2$ mais la majoration (21) n'est plus vérifiée.

Remarque 4. En utilisant la propriété (9) on majore la différence de deux solutions u_1 et u_2 de la proposition 1 associées à des valeurs initiales distinctes de façon analogue à (14), quand $p>2$, par

$$|u_2(T)-u_1(T)|^2\leqslant\left(\frac{p-2}{\gamma^p}T\right)^{-2/(p-2)}$$

donc l'ensemble U_T défini dans l'énoncé du théorème 1 est inclus dans une boule de rayon $\big(((p-2)/\gamma_P)T\big)^{-1/(p-2)}$, qui décroit vers 0 and T croit vers l'infini.

Remarque 5. En posant $v(t)=u(T-t)$ le problème rétrograde posé à la remarque 3 s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{l} v'(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(t)\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}(t)\right)=g(t) \quad (=-f(T-t)) \text{ p.p. dans })0,T(\,, \\ v(0)=v_0(=u_T)\,, \\ v\in L^p(0,T;\,W_0^1(\Omega))\,. \end{array}\right. \tag{22}$$

En majorant u avec (20) au lieu de (16) on complète le résultat de non existence globale par le résultat de croissance et d'explosion suivant: toute solution de (22) vérifie, quand $p > 2$,

$$|v(t)| \geqslant \left(\left(|v_0|^2 - \frac{2}{p'} \int_0^t \|g(\sigma)\|_*^{p'} d\sigma \right)^{-(p-2)/2} - \frac{p-2}{p'\gamma^p} t \right)^{-1/(p-2)}$$

tant que t est assez petit pour que le second membre soit défini:

si θ est fixé, pour v_0 assez grand en fonction de θ, toute solution de (22) explose, i.e. devient infinie dans $L^2(\Omega)$, au plus tard quand $t \to \theta_-$.

En particulier si $g \equiv 0$, on a

$$|v(t)| \geqslant \left(|v_0|^{-(p-2)} - \frac{p-2}{p'\gamma^p} t \right)^{-1/(p-2)} .$$

On trouvera d'autres résultats de non existence globale ou d'explosion de solutions d'équations paraboliques dans A. Friedman [5], M. Fujita [1], [2], S. Ito [1], S. Kaplan [1], M. A. Levine [1] et J. L. Lions [1], chap. 1.2.

3. – Solution sur R.

Etant donné un espace de Banach X, on note

$$L^p_{\text{loc}}(R, X) = \{v, v \text{ defini sur } R, \text{ t.q. } v \in L^p(T, T', X),\ \forall T \leqslant T' \text{ finis}\}.$$

On va démontrer le

THÉORÈME 2. *On suppose $p > 2$. Etant donné*

$$f \in L^p_{\text{loc}}(R, W^{-1,p'}(\Omega))$$

il existe une et une seule fonction u vérifiant

$$u \in C(R, L^2(\Omega)) \cap L^p_{\text{loc}}(R, W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{23}$$

$$u'(t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \right) = f(t) \quad \text{p.p. dans } R, \text{ dans } W^{-1,p'}(\Omega) . \tag{24}$$

DÉMONSTRATION DE L'UNICITÉ DANS LE THÉORÈME 2. Soient u et u_* deux solutions de (23), (24). Soustrayons les équations (24) relatives à v et u_* et multiplions par $u(t) - u_*(t)$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - u_*(t)|^2 + \big(Au(t) - Au_*(t), u(t) - u_*(t) \big) = 0 \qquad \text{p.p. dans } R \, ;$$

avec (9) il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-u_*(t)|^2+\|u(t)-u_*(t)\|^p\leqslant 0 \tag{25}$$

et avec (4),

$$\frac{d}{dt}|u(t)-u_*(t)|^2+\frac{2}{\gamma^p}|u(t)-u_*(t)|^p\leqslant 0 \qquad \text{p.p. dans } R\,. \tag{26}$$

Le lemme 1 montre alors que pour tout θ, t tels que $\theta\leqslant t$, on a

$$|u(t)-u_*(t)|^2\leqslant\left(\frac{p-2}{\gamma^p}(t-\theta)\right)^{-2/(p-2)} \tag{27}$$

et en faisant $\theta\to-\infty$ on obtient

$$u(t)-u_*(t)=0\,,\qquad \forall t\,.$$

Démonstration d'existence dans le Théorème 2. Etant donné n entier on définit u_n dans $L^p_{\text{loc}}(R, W^{1,p}_0(\Omega))$ par

$$\begin{cases} u_n(t)=0 & \forall t\leqslant -n\,,\\ u_n'(t)-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(t)\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(t)\right)=f(t) & \text{p.p. dans } (-n,\infty(\,. \end{cases} \tag{28}$$

Soient T et T' donnés, et m et n tels que $-m\leqslant -n\leqslant T\leqslant T'$. En soustrayant les équations (28) relatives à u_m et u_n sur $(-n,t)$ on obtient de façon analogue à (27)

$$|u_n(t)-u_m(t)|^2\leqslant\left(\frac{p-2}{\gamma^p}(t+n)\right)^{-2/(p-2)}\qquad \forall t\geqslant -n$$

d'où

$$|u_n-u_m|_{L^\infty(T,T';L^2(\Omega))}\leqslant\left(\frac{p-2}{\gamma^p}(T+n)\right)^{-1/(p-2)}. \tag{29}$$

On a de façon analogue à (25)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)-u_m(t)|^2+\|u_n(t)-u_m(t)\|^p\leqslant 0 \qquad \text{p.p. dans })-n,\infty($$

et en intégrant de T à T'

$$\int_T^{T'}\|u_n(\sigma)-u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma\leqslant\frac{1}{2}|u_n(T)-u_m(T)|^2\leqslant\left(\frac{p-2}{\gamma^p}(T+n)\right)^{-2/(p-2)}. \tag{30}$$

Les majorations (29) et (30) montrent que les u_n forment une suite de Cauchy dans $C(R; L^2(\Omega))$ ([4]) $\cap L^p_{\mathrm{loc}}(R; W_0^{1,p}(\Omega))$, et convergent vers un élément u dans ces espaces. Le passage à la limite dans l'équation (28) sur tout intervalle fini (T, T') est immédiat, ce qui montre que u est solution de (24).

REMARQUE 6. Si $p = 2$ il n'y a pas unicité des solutions de (23) et (24): si u est une solution de (24), et si g est un vecteur propre de $-\Delta$ associé à la valeur propre λ, i.e. $-\Delta g = \lambda g$, $g \in H_0^1(\Omega)$, la fonction définie par $v(t) = u(t) + g \exp[-\lambda t]$ est également solution de (23) et (24); en effect on a

$$v'(t) - \Delta v(t) = u'(t) - \Delta u(t) - (\lambda g + \Delta g) \exp[-\lambda t] = f(t) .$$

4. – Convergence a l'infini de la solution du problème de Cauchy.

Soit X un espace de Banach, on note ici

$$L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; X) = \{v,\ v \text{ défini sur } (0, \infty(\text{ t.q. } v \in L^p(0, T; X),\ \forall T \text{ fini}\}.$$

Etant donnés

$$f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(0, \infty; W^{-1,p'}(\Omega)) \quad \text{et} \quad u_0 \in L^2(\Omega), \tag{31}$$

la proposition 1 montre qu'il existe une et une seule fonction u vérifiant

$$u \in C(0, \infty, L^2(\Omega)) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega)), \tag{32}$$

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \right) = f(t) \qquad \text{p.p. dans })0, \infty(, \tag{33}$$

$$u(0) = u_0 . \tag{34}$$

On va donner une condition sur f pour que $u(t)$ ait une limite quand $t \to \infty$.

THÉORÈME 3. *Si f, défini par* (31), *admet une limite $\boldsymbol{f}$ dans* $W^{-1,p'}(\Omega)$ au sens

$$\int_t^{t+1} \| f(\sigma) - \boldsymbol{f} \|_*^{p'} d\sigma \to 0 \qquad \textit{quand } t \to \infty , \tag{35}$$

([4]) Muni de la topologie de la convergence uniforme sut tout intervalle borné.

la solution $u(t)$ de (32), (33) *et* (34) *converge dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to \infty$ vers la solution unique $\boldsymbol{u}$ du problème stationnaire.*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \in W_0^{1;p}(\Omega)\,, \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right|^{p-2}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right) = \boldsymbol{f}\,. \end{cases} \tag{36}$$

REMARQUE 7. L'hypothèse (35) est évidemment réalisée si f est continu dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ avec $f(t) \to \boldsymbol{f}$ quand $t \to \infty$.

REMARQUE 8. La solution u n'étant pas continue dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u(t)$ ne converge en général pas dans cet espace, mais il résulte du théorème 3 et de la majoration (38) que

$$\int_t^{t+1} \|u(\sigma) - \boldsymbol{u}\|^p d\sigma \to 0 \qquad \text{quand } t \to \infty\,. \tag{37}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 QUAND $p > 2$. Soustrayons les égalités (33) et (36), et multiplions par $u(t) - \boldsymbol{u}$; avec (9) il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - \boldsymbol{u}|^2 + \|u(t) - \boldsymbol{u}\|^p \leqslant \big(f(t) - \boldsymbol{f},\ u(t) - \boldsymbol{u}\big)\,,$$

et en majorant le second membre par l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - \boldsymbol{u}|^2 + \frac{1}{p'}\|u(t) - \boldsymbol{u}\|^p \leqslant \frac{1}{p'}\|f(t) - \boldsymbol{f}\|_*^{p'}\,, \tag{38}$$

et avec (4)

$$\frac{d}{dt}|u(t) - \boldsymbol{u}|^2 + \frac{2}{p'\gamma^p}|u(t) - \boldsymbol{u}|^p \leqslant \frac{2}{p'}\|f(t) - \boldsymbol{f}\|_*^{p'}\,. \tag{39}$$

Soit $i > 0$ donné. Le lemme 1 montre alors que pour tout $t \geqslant i$ on a

$$|u(t) - \boldsymbol{u}|^2 \leqslant \left(\frac{p-2}{\gamma^p}\, i\right)^{2/(p-2)} + \int_{t-i}^{t} \|f(\sigma) - \boldsymbol{f}\|_*^{p'} d\sigma \tag{40}$$

et l'hypothèse (35) entraine

$$\limsup_{t \to \infty} |u(t) - \boldsymbol{u}|^2 \leqslant \left(\frac{p-2}{\gamma^p}\, i\right)^{-2/(p-2)}$$

d'où le théorème puisque cette majoration est vérifiée pour tout i.

REMARQUE 9. Si $f(t) = \boldsymbol{f}$, $\forall t$, le second membre de (38) est nul et la majoration (20) s'écrit quand $p > 2$

$$|u(t) - \boldsymbol{u}| \leqslant \left(\frac{1}{|u_0 - \boldsymbol{u}|^{p-2}} + \frac{p-2}{\gamma^p} t \right)^{-1/(p-2)} . \tag{41}$$

L'exemple de la remarque 2, qui est également valable pour $p > 2$, montre dans le cas où $\boldsymbol{f} = 0$, $\boldsymbol{u} = 0$ que la majoration (41) est la meilleure possible; on n'a donc pas décroissance exponentielle comme dans le cas linéaire.

REMARQUE 10. Quand $p = 2$, la majoration des solutions de l'inégalité (39) est classique,

$$|u(t) - \boldsymbol{u}| \leqslant |u_0 - \boldsymbol{u}| \exp\left(-\frac{t}{\gamma^2}\right) + \left(\int_0^t \|f(\sigma) - \boldsymbol{f}\|^2 \exp\left(\frac{\sigma - t}{\gamma^2}\right) d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

et le théorème 3 en résulte aisément.

Quand $1 < p \leqslant 2$ la propriété (9) est remplacée, cf. note (2), par

$$(Av - Au, v - u) \geqslant \frac{\|v - u\|^2}{\|u\|^{2-p} + \|v\|^{2-p}} \qquad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ce qui complique notablement la démonstration, que nous ne donnerons pas ici.

REMARQUE 11. La majoration (40) relative à $\boldsymbol{f} = 0$ et $\boldsymbol{u} = 0$ (ce qui n'utilise alors pas la propriété (9) mais seulement la coercivité de A, i.e. (8)) permet de retrouver la condition pour qu'une solution soit bornée donnée par L. Amerio et G. Prouse:

Si

$$\int_t^{t+1} \|f(\sigma)\|_*^{p'} d\sigma \leqslant \text{cte} \qquad \forall t \geqslant 0$$

alors

$$u \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \int_t^{t+1} \|u(\sigma)\|^p d\sigma \leqslant \text{cte}, \quad \forall t \geqslant 0 .$$

Le Th. 3 s'étend aisément aux solutions d'équations à coefficients dépen dant du temps, uniformément minorés et majorés: soient a_i, $i = 1, \ldots, n$

des fonctions mesurables telles que

$$(42)\qquad 0 < a \leqslant a_i(x,t) \leqslant b < \infty \quad \text{p.p. dans } \Omega \times)0, \infty(.$$

et soient $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(0, \infty; W^{-1,p'}(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Si f et les a_i admettent des limites $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{a}_i$ au sens

$$(43)\qquad \int_t^{t+1} \|f(\sigma) - \boldsymbol{f}\|_*^{p'} d\sigma \to 0 \quad \text{quand } t \to \infty$$

$$(44)\qquad \limsup_{t\to\infty} |a_i(t) - \boldsymbol{a}_i|_{L^\infty(\Omega)} = 0 , \quad \forall i$$

alors la solution $u(t)$ de

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{au sens des distributions dans } \Omega \times)0, \infty(, \\ u \in C(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega)) , \\ u(0) = u_0 , \end{cases}$$

converge dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to \infty$ vers la solution $\boldsymbol{u}$ du problème stationnaire

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{a}_i \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right) = \boldsymbol{f},$$

$$\boldsymbol{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) .$$

Pour établir ce résultat on se ramène à une équation à coefficients constants en écrivant l'équation (45) ainsi:

$$(46)\qquad u'(t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{a}_i \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right) = \\ = f(t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left((\boldsymbol{a}_i - a_i(t)) \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right)$$

et on utilise le théorème 3; il suffit donc de vérifier que le second membre de (46) converge vers $\boldsymbol{f}$ au sens (35).

5. – Solution sur R d'une équation coefficients dépendant du temps.

On se propose de généraliser le résultat d'existence et d'unicité du § 3 aux équations à coefficients dépendant du temps. Cette généralisation est triviale si les coefficients vérifient des conditions uniformes en temps, mais on ne va faire à priori que l'hypothèse locale suivante: soient a_i, $i=1, \ldots, n$ des fonctions mesurables dans $\Omega\times R$ et t.q.

$$(47)\qquad 0<a_T\leqslant a_i(x, t\leqslant b_T<\infty \quad \text{p.p. dans } \Omega\times)-T, +T(\text{ pour tout } T \text{ fini}.$$

On note

$$(48)\qquad a(t)=\inf_{\substack{i=1\ldots n\\ x\in\Omega}} a_i(x, t)\,.$$

On a alors de façon analogue à (9)

$$(49)\qquad \big(A(t)v-A(t)u, v-u\big)\geqslant a(t)\|v-u\|^p, \qquad \forall u, v\in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

On généralise le Th. 2 par le

THÉORÈME 4. *On suppose $p>2$, l'hypothèse* (47) *vérifiée et* (5)

$$(50)\qquad \int_0^\infty a(\sigma)\,d\sigma=+\infty\,;$$

Etant donné

$$f\in L^{p'}_{\text{loc}}(R, W^{-1,p'}(\Omega))$$

il existe une et une seule fonction u vérifiant

$$(51)\qquad u'(t)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(t)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|^{p-2}\frac{du}{\partial x_i}(t)\right)=f(t) \qquad \text{p.p. dans } R,$$

$$(52)\qquad u\in C(R, L^2(\Omega))\cap L^p_{\text{loc}}(R, W_0^{1,p}(\Omega))\,.$$

DÉMONSTRATION DE L'UNICITÉ DANS LE THÉORÈME 4. Reprenons la démonstration d'unicité du théorème 2; la différence de deux solutions est majorée de façon analogue à (26) par

$$(53)\qquad \frac{d}{dt}|u(t)-u_*(t)|^2+\frac{2}{\gamma^p}a(t)|u(t)-u_*(t)|^p\leqslant 0 \qquad \text{p.p. dans } R\,.$$

(5) Si l'hypothèse (50) n'est pas vérifiée, on démontre par une méthode de compacité qu'il existe encore une solution de (51) et (52), cf. Simon [1], mais il n'y a plus unicité.

Le lemme 2 ci-après montre alors que pour tout θ, t tels que $\theta \leqslant t$, on a

$$|u(t) - u_*(t)|^2 \leqslant \left(\frac{p-2}{\gamma^p}\int_0^t a(\sigma)\,d\sigma\right)^{-2/(p-2)}$$

et en faisant $\theta \to -\infty$ on obtient grâce à l'hypothèse (50),

$$u(t) - u_*(t) = 0\,, \qquad \forall t\,.$$

On généralise de même la démonstration d'existence.

Il nous reste à établir la généralisation suivante du lemme 1:

Lemme 2. *Soit ϕ une fonction réelle, continue, positive, p.p. dérivable sur un segment $I \subset R$, et t.q.*

$$\phi'(t) + c(t)\phi(t)^{p/2} \leqslant k(t) \qquad \text{p.p. dans } I \tag{54}$$

où $p > 2$, $c \geqslant 0$ et k est intégrable sur I; alors pour tout θ, t dans I tels que $\theta \leqslant t$, on a

$$\phi(t) \leqslant \left(\frac{p-2}{2}\int_\theta^t c(\sigma)\,d\sigma\right)^{-2/(p-2)} + \int_\theta^t k(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{55}$$

Le lemme 2 se démontre comme le lemme 1, nous en laissons le soin au lecteur.

6. – Comportement à l'infini des solutions d'une équation à coefficients dépendant du temps.

On se propose de généraliser aux équations à coefficients dépendant du temps les conditions données au § 4 pour qu'une solution soit uniformément bornée ou nulle à l'infini. On ne va faire que l'hypothèse locale suivante sur les coefficients: soient a_i, $i = 1, \dots, n$ des fonctions mesurables dans $\Omega \times)0, \infty($ t.q.

$$0 < a_T \leqslant a_i(x, t) \leqslant b_T < \infty \qquad \text{p.p. dans } \Omega \times)0, T(\text{ pour tout } T \text{ fini}, \tag{56}$$

on note encore

$$a(t) = \inf_{\substack{i=1\dots n \\ x\in\Omega}} a_i(x, t)\,. \tag{57}$$

La généralisation de la proposition 1 pour un opérateur dépendant du temps montre que, étant donnés

$$f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(0, \infty; W^{-1,p'}(\Omega)) \quad \text{et } u_0 \in L^2(\Omega) \tag{58}$$

il existe une et une seule fonction u vérifiant

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(t)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right) = f(t) \qquad \text{p.p. dans })0, \infty(, \tag{59}$$

$$u \in C(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; W^{1,p}_0(\Omega)) , \tag{60}$$

$$u(0) = u_0 . \tag{61}$$

Donnons une condition pour que cette solution soit uniformément bornée:

THÉORÈME 5. *On suppose l'hypothèse* (56) *vérifiée. Si f défini par* (58) *et a défini par* (57) *vérifient*

$$\left\{\begin{array}{l} \text{il existe une suite } \{t_n\},\ n \in N, \text{ croissant vers l'infini avec } n \text{ t.q. ,} \\ \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(\sigma)\, d\sigma \geqslant \text{cte} \qquad \forall n , \\ \displaystyle\int_{n}^{t_{n+1}} \frac{\|f(\sigma)\|_*^{p'}}{a(\sigma)^{p'/p}}\, d\sigma \leqslant \text{cte} \qquad \forall n , \end{array}\right. \tag{62}$$

alors la solution u de (59), (60) *et* (61) *est uniformément borné dans* $L^2(\Omega)$, *i.e.*

$$u \in L^\infty(0, \infty, L^2(\Omega)). \tag{63}$$

REMARQUE 12. L'hypothèse (62) est en particulier réalisée si

$$\int_0^\infty a(\sigma)\, d\sigma = +\infty$$

et si f est localement borné dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ avec $\|f(t)\|_* \leqslant c.a(t)$, $\forall t \geqslant 0$.

REMARQUE 13. On retrouve le résultat rappelé à la remarque 11 en prenant $t_n = n$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5 QUAND $p>2$. Multiplions l'équation (59) par $u(t)$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + a(t)\|u(t)\|^p \leqslant (f(t), u(t))$$

et en majorant le second membre par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \frac{a(t)}{p'}\|u(t)\|^p \leqslant \frac{1}{p'a(t)^{p'/p}}\|f(t)\|_*^{p'}$$

et avec (4)

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \frac{2a(t)}{p'\gamma^p}|u(t)|^p \leqslant \frac{2}{p'}\cdot\frac{\|f(t)\|_*^{p'}}{a(t)^{p'/p}}. \tag{64}$$

Soit $t\in(t_n, t_{n+1})$, $n\geqslant 1$. Le lemme 2 avec $\theta = t_{n-1}$ donne

$$|u(t)|^2 \leqslant \left(\frac{p-2}{p'\gamma^p}\int_{t_{n-1}}^{t} a(\sigma)\,d\sigma\right)^{-2/(p-2)} + \frac{2}{p'}\int_{t_{n-1}}^{t}\frac{\|f(\sigma)\|_*^{p'}}{a(\sigma)^{p'/p}}\,d\sigma\,,$$

$$|u(t)|^2 \leqslant \left(\frac{p-2}{p'\gamma^p}\int_{t_{n-1}}^{t_n} a(\sigma)\,d\sigma\right)^{-2/(p-2)} + \frac{2}{p'}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\|f(\sigma)\|_*^{p'}}{a(\sigma)^{p'/p}}\,d\sigma\,, \tag{65}$$

et l'hypothèse (62) montre donc que $|u(t)|$ est borné indépendemment de n ce qui établit (63).

REMARQUE 14. Quand $\int_0^\infty a(\sigma)\,d\sigma<\infty$ l'hypothèse (62) ne peut pas être verifiée par une suite infinie $\{t_n\}$, mais il suffit qu'elle soit vérifiée par la suite $\{t_1 = 0, t_2 = \infty\}$ i.e. que

$$\int_0^\infty \frac{\|f(\sigma)\|_*^{p'}}{a(\sigma)^{p'/p}}\,d\sigma < \infty\,.$$

On va donner maintenant une condition pour que la solution u soit nulle à l'infini.

THÉORÈME 6. *On suppose l'hypothèse* (56) *vérifiée. Si f défini par* (58) *et a défini par* (57) *vérifient*

$$(66)\quad \begin{cases} \text{il existe une suite } \{t_n\},\ n\in N, \text{ croissant vers l'infini avec } n \text{ t.q.}, \\ \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(\sigma)d\sigma \to \infty \qquad \text{quand } n\to\infty, \\ \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\|f(\sigma)\|_*^{p'}}{a(\sigma)^{p'/p}}\, d\sigma \to 0 \qquad \text{quand } n\to\infty, \end{cases}$$

alors la solution $u(t)$ de (59), (60) *et* (61) *tend vers* 0 *dans $L^2(\Omega)$ quand t tend vers l'infini.*

REMARQUE 15. L'hypothèse (66) est en particulier réalisée si

$$\int_0^\infty a(\sigma)\,d\sigma = +\infty$$

et si f est localement borné dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ avec $\|f(t)\|_*/a(t) \to 0$ quant $t\to\infty$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6 QUAND $p>2$. L'hypothèse (66) montre que le second membre de (65) tend vers 0 quand $n\to\infty$, i.e.

$$\operatorname*{Sup}_{t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}} |u(t)|^2 \to 0 \qquad \text{quand } n\to\infty$$

ce qui établit le th. puisque $t_n\to\infty$ avec n.

PRINCIPE DES DÉMONSTRATIONS QUAND $1<p\leqslant 2$. Quand $p=2$ l'inégalité (64) entraine que u est majoré par

$$|u(t)|^2 \leqslant |u_0|^2 \exp\left(-\frac{1}{\gamma^2}\int_0^t a(\sigma)\,d\sigma\right) + \int_0^t \frac{\|f(s)\|_*^2}{a(s)} \exp\left(-\frac{1}{\gamma^2}\int_0^t a(\sigma)\,d\sigma\right) ds$$

majoration qui permet d'établir les résultats annoncés au théorème 5 et 6. Quand $1<p<2$, il nous faut d'abord une majoration analogue au lemme 2.

LEMME 3. *Soit ϕ une fonction réelle, continue, positive, p.p. dérivable sur un segment $I\subset R$, et telle que*

$$\phi'(t) + c(t)\phi(t)^{p/2} \leqslant k(t) \qquad \text{p.p. dans } I$$

où $1 < p \leqslant 2$, $c \geqslant 0$ *et* k *est intégrable sur* I.

Alors pour tout θ, t *dans* I *tels que* $\theta \leqslant t$ *on a*

$$\phi(t) \leqslant \operatorname{Sup}\left\{\phi(\theta) - \left(\frac{2-p}{2}\int_\theta^t c(\sigma)\,d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad \left(\frac{p-2}{2}\int_\theta^t c(\sigma)\,d\sigma\right)^{-1/p}\right\} + \int_\theta^t k(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Démonstration du lemme 3. On démontre de façon analogue à la majoration (20) du lemme 1 que

$$\phi(t) \leqslant \operatorname{Sup}\left\{0; \phi(\theta)^{(2-p)/p} - \frac{2-p}{2}\int_\theta^t c(\sigma)\,d\sigma\right\}^{2/(2-p)} + \int_\theta^t k(\sigma)\,d\sigma$$

on pose $x = ((2-p)/2)\int_\theta^t c(\sigma)\,d\sigma$ et on majore, pour $0 \leqslant x \leqslant \phi(\theta)^{(2-p)/2}$,

$$\left(\phi(\theta)^{(2-p)/p} - x\right)^{2/(2-p)} \leqslant \phi(\theta) - \phi(\theta)^{1-2/(2-p)}x$$

car le premier membre est convexe en x, et on le majore finalement par

$$= \phi(\theta) - \phi(\theta)^{p/2}x \leqslant \begin{cases} \phi(\theta) - x^{\frac{1}{2}} & \text{si } \phi(\theta)^{p/2}x \geqslant x^{\frac{1}{2}} \\ \phi(\theta) \leqslant x^{-1/p} & \text{si } \phi(\theta)^{p/2}x \leqslant x^{\frac{1}{2}}\,. \end{cases}$$

Démonstration des théorèmes 5 et 6 quand $1 < p < 2$. Comme quand $p > 2$ on a, cf. (64)

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \frac{2a(t)}{p'\gamma^p}|u(t)|^p \leqslant \frac{2}{p'}\frac{\|f(t)\|_*^{p'}}{a(t)^{p'/p}}\,. \tag{67}$$

Le lemme 3 avec $\theta = t_n$ et $t = t_{n+1}$ montre que

$$|u(t_{n+1})|^2 \leqslant \operatorname{Sup}\{|u(t_n)|^2 - \alpha_n^{\frac{1}{2}}; \alpha_n^{-1/p}\} + \varphi_n \tag{68}$$

où

$$\alpha_n = \frac{2-p}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(\sigma)\,d\sigma\,,$$

$$\varphi_n = \frac{2}{p'}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\|f(\sigma)\|_*^{p'}}{a(\sigma)^{p'/p}}\,d\sigma$$

et pour établir les théorèmes 5 et 6 il ne reste au lecteur qu'à montrer que

— si $\alpha_n \geqslant \alpha > 0$ et $\varphi_n \leqslant \varphi < \infty$, $\forall n$, alors toute suite vérifiant (68) est bornée;

— si $\alpha_n \to +\infty$ et $\varphi_n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors toute suite vérifiant (68) tend vers 0 quand $n \to \infty$.

et à utiliser la majoration (67) pour estimer $|u(t)|^2$ sur (t_n, t_{n+1}).

7. – Extension des résultats.

7.1. *Equations monotones.*

Les résultats de ce travail s'étendent aux solutions d'équations paraboliques fortement monotones d'ordre p, i.e. aux équations du type

$$u'(t) + Mu(t) = f(t) \tag{69}$$

où M est un opérateur, ou une somme d'opérateurs, tel que dans un espace convenable on ait

$$(Mv - Mu, v - u) \geqslant c|v-u|^p \quad \text{avec } c > 0$$

et où f est dans un espace convenable X.

En effet la différence de deux solutions u et u_* relatives à f et f_* vérifie alors une majoration du type

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - u_*(t)|^2 + c|u(t) - u_*(t)|^p \leqslant c'|f(t) - f_*(t)|^q, \tag{70}$$

majoration à partir de laquelle on a établi les résultats de ce travail (pour certain résultats on considère le cas $f_* = 0$ et $u_* = 0$).

On peut ainsi étendre ces résultats aux solutions d'une variante non linéaire des équations de Schrödinger étudiée dans Lions [1],

$$u'(t) - i\Delta u(t) + |u(t)|^p u(t) = f(t)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

équations à valeurs complexes où $i = \sqrt{-1}$ et où p est réel positif.

On peut également étendre les résultats de ce travail aux solutions de l'équation

$$u'(t) - \operatorname{div}\left(|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)\right) = 1 \qquad \text{dans } \Omega\,,$$

$$|\nabla u(t)|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}(t) = f \qquad \text{sur } \partial\Omega\,,$$

où $\nabla v = (\partial v/\partial x_1, \ldots, \partial v/\partial x_n)$, et f assez régulier, équation dont le modèle stationnaire est introduit par M. C. Pelissier et L. Reynaud [1] pour l'étude de l'écoulement des glaciers.

7.2. *Equations coercives.*

La plupart des résultats s'étendent également aux solutions d'équations paraboliques coercives d'ordre p, i.e. aux équations du type (69) où M est un opérateur ou une somme d'opérateurs, tel que dans un espace convenable on ait

$$(Mv, v) \geqslant c|v|^p \qquad \text{avec } c > 0$$

et où f est donné dans un espace convenable X.

En effet toute solution de (69) vérifie alors une majoration du type

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + c|u(t)|^p \leqslant c'|f(t)|_X^q \tag{71}$$

majoration à partir de laquelle on a établi les résultats de bornage et d'explosion du § 2 et les résultats sur les solutions bornées ou nulles à l'infini du § 6.

On peut également étendre les résultats d'existence d'une solution sur R des § 3 et 5 (mais il ny a plus unicité) moyennant certaines hypothèses de compacité (cf. Simon [1]) qui permettent le passage à la limite dans l'équation approchée analogue à (28), l'inégalité (71) ne permettant pas de montrer que les solutions approchées u_n forment une suite de Cauchy mais seulement qu'ils forment une suite bornée.

Les seuls résultats qu'on ne sache pas étendre sont ceux de convergence à l'infini du § 4.

On obtient par exemple des résultats pour la variante suivante des équations de Navier-Stokes étudiée dans Lions [1] (Chap. 3, § 5), équations en $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et q:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} u_i\frac{\partial u}{\partial x_i} = f - \operatorname{grad} q \qquad \text{dans } \Omega\times I\,,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \qquad \text{dans } \Omega\times I\,,$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega\times I\,,$$

où

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 .$$

7.3. *Inequations avec contraintes.*

Les résultats des chapitres précédents s'étendent aux solutions des problèmes unilatéraux, avec contrainte du type $u(t) \in K$, associés aux équations étudiées. En effet ces solutions vérifient les même majorations que les solutions des équations correspondantes.

Ainsi étant donné K un convexe fermé de $W_0^{1,p}(\Omega)$ contenant 0 on a, cf. Simon [1], le résultat suivant:

Etant donné

$$f \in L^{p'}_{\text{loc}}(R, W^{-1\,p'}(\Omega))$$

il existe une et une seule fonction u vérifiant

$$u \in C(R; L^2(\Omega)) \cap L^p_{\text{loc}}(R, W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$u(t) \in K \qquad \text{p.p. dans } R$$

$$\int_T^{T'} \left(v'(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \right) - f(t), v(t) - u(t) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \left(|v(T') - u(T')|^2 - |v(T) - u(T)|^2 \right)$$

pour tout intervalle borné (T, T') et pour tout v vérifiant

$$v \in L^p_{\text{loc}}(R, W_0^{1,p}(\Omega)) , \qquad v' \in L^{p'}_{\text{loc}}(R; W^{-1,p'}(\Omega)) \qquad \text{et} \qquad v(t) \in K \text{ p.p.}.$$

Les autres résultats s'étendent de façon analogue.

BIBLIOGRAPHIE

S. Agmon - L. Nirenberg:

[1] *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), pp. 121-239.

L. Amerio - G. Prouse:

[1] *Abstract almost periodic functions and functional analysis*, Van Nostrand, New York (1970).

C. BARDOS - L. TARTAR:

[1] *Sur l'unicité rétrograde des équations d'évolution*, C. R. Acad. Sc. Paris, **273** (1971), pp. 1239-1241.

[2] *About backward uniqueness for evolution equations and some related questions.*

M. BIROLI:

[1] *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques*, Ann. Mat. Pura Appl., **88** (1971), pp. 51-70.

F. E. BROWDER:

[1] *Existence of periodic solutions for nonlinear parabolic equations of evolution*, Proc. Nat. Acad. Sc., **53** (1965), pp. 1100-1103.

[2] *Periodic solution of nonlinear equation of evolution in infinite dimensional spaces*, Lecture Series in Diff. Equat. Univ. of Maryland (1966).

A. FRIEDMAN:

[1] *Convergence of solutions of parabolic equations to a steady state*, J. Math. Mech., **8** (1959), pp. 57-76.

[2] *Generalised heat transfer between solids and gases under nonlinear boundary conditions*, J. Math. Mech., $\mathbf{8}^2$ (1959), pp. 161-183.

[3] *Asymptotic behaviour of solutions of parabolic equations*, J. Math. Mech., 8^3 (1959), pp. 387-392.

[4] *Asymptotic behaviour of solutions of parabolic equations of any order*, Acta Mat., **106** (1961), pp. 1-43.

[5] *Remarks on nonlinear parabolic equations*, Proc. Sym. Appl. Math., **17** (1965), pp. 3-49.

[6] *Partial differential equations*, part 2, Holt, Reinehard and Winston Inc. (1969).

H. FUJITA:

[1] *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **13** (1966), pp. 109-124.

[2] *On the nonlinear equations* $\Delta u + e^u = 0$ *and* $\partial v/\partial t = \Delta v + e^v$, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), pp. 132-135.

S. ITÔ:

[1] *On the blowing up of solutions of semilinear parabolic equations*, Bull. Math. Soc. Japan (Sûgaku), $\mathbf{18}^1$ (1966), pp. 44-47.

S. KAPLAN:

[1] *On the growth of quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), pp. 305-330.

H. A. LEVINE:

[1] *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rational Mech. Anal., **51** (5) (1973), pp. 371-385.

J. L. LIONS:

[1] *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod, Paris (1969).

O. A. OLEINIK:

[1] *On the existence, uniqueness, stability and approximation of solutions of Prandtl's system for the nonstationary boundary layer*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **41** (1966), pp. 32-40.

M. C. PELLISIER - L. REYNAUD:

[1] *Ecoulement d'un glacier de vallée avec une loi de frottement solide*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, à paraitre 1974.

G. PRODI:

[1] *Soluzioni periodiche di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico e non lineari*, Riv. Mat. Univ. Parma, **3** (1952), pp. 265-290.

[2] *Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili-soluzioni periodiche*, Rend. Sem. Mat. Padova, **23** (1954), pp. 25-85.

G. PROUSE:

[1] *Periodic or almost periodic solutions of a nonlinear functional equation*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **43** (1967), pp. 161-167, 281-287, 448-452; **44** (1968), pp. 3-10.

J.-P. PUEL:

[1] *Existence, comportement à l'infini et stabilité dans certains problèmes quasi linéaires elliptiques et paraboliques d'ordre* 2, Univ. Paris VI, Analyse Numérique L.A., 189 Place Jussieu, Paris 5ème, 1974.

D. H. SATTINGER:

[1] *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., $\mathbf{21}^2$ (1972), pp. 979-1000.

J. SIMON:

[1] *Existence et unicité de solutions d'équations et d'inéquations d'évolution sur* $)-\infty, +\infty($, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 274 (1972), pp. 1045-1047.

[2] *Une majoration et quelques résultats sur le comportement à l'infini de solutions d'équations fortement non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 279 (1974), pp. 421-424.

L. TARTAR:

[1] Communication personnelle.