ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JACEK BOCHNAK

Quelques propriétés quantitatives des ensembles semi-algébriques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 2, nº 4 (1975), p. 483-495

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1975_4_2_4_483_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Quelques propriétés quantitatives des ensembles semi-algébriques.

JACEK BOCHNAK (*)

1. – Introduction.

Il semble être intuitivement clair que le nombre des extremums locaux stricts d'un polynôme $f \in \boldsymbol{R}[x_1, \ldots, x_n]$ de degré $\leqslant k$, est borné par un nombre l dépendant uniquement de n et k. La démonstration précise de ce fait n'est pas cependant facile et resulte du théorème suivant dû a Milnor-Thom [1], [4]: Si $V = \bigcap_{i=1}^{s} f_i^{-1}(0)$, où $f_i \in \boldsymbol{R}[x_1, \ldots, x_n]$ sont des polynômes de degré $\leqslant k$, alors la somme des nombres de Betti de l'ensemble algebrique V est $\leqslant k(2k-1)^{n-1}$.

Comme l'ensemble A_f des points où le polynome f de degré $\leqslant k$ atteint un extremum strict est contenu dans l'ensemble de points isolés de $V_f = \bigcap_{i=1}^{n} (\partial f/\partial x_i)^{-1}(0)$, le nombre d'éléments de A_f est donc toujours $\leqslant (k-1)(2k-3)^{n-1}$.

Considérons maintenant le problème suivant un peu plus général: soit $M \subset \boldsymbol{R}^n$ un ensemble semi-algebrique; montrer que le nombre d'extremums stricts de la restriction à l'ensemble M d'un polynôme f de degré $\leqslant k$, ne dépend que de M et k. (Il ne semble pas que l'application directe du théorème de Milnor-Thom puisse donner la solution de ce probléme, comme c'était le cas pour $M = \boldsymbol{R}^n$).

Il y a plusieurs problèmes de ce genre; grosso modo il s'agit de montrer que le nombre de certains objects « de nature semi-algebrique », associés à un ensemble semi-algebrique donné, est majoré par un nombre dépendant

(*) Université de Cracovie, Dept. des Mathématiques - Reymonta, 4 - Cracovie (Pologne).

Pervenuto alla Redazione il 9 Febbraio 1974.

uniquement du nombre et des degrés des polynôms définissant le problème et non pas de leur nature particulière. Il serait utile de connaître aussi des majorations effectives.

Cette question n'est évidemment pas nouvelle; par exemple le théorème classique de Bezout, le théorème de Milnor-Thom en sont la preuve. Il semble cependant que jusqu'a présent on n'a pas formulé de théorèmes généraux concernant ce problème.

L'expérience montre que dans la définition de ces « objects semi-algebriques » apparaissent souvent les projections des ensembles semi-algebriques sur un espace de dimension inférieure. Il serait donc intéressant d'étudier les propriétés numériques des projections des ensembles semi-algebriques.

Rappelons [2], [3] que l'ensemble M est appelé *semi-algebrique*, s'il existe des polynômes f_{ij}, $i=1,\dots,s$, $j=1,\dots,k_i$, de n variables réeles tels que

$$M=\bigcup_{i=1}^{s}\{x\in \boldsymbol{R}^n\colon f_{ij}(x)\in S_{ij},\ j=1,\dots,k_i\},$$

où $S_{ij}=\{0\}$, ou $S_{ij}=R_+=\{t\in \boldsymbol{R}\colon t>0\}$ ou $S_{ij}=R_-=\{t\in \boldsymbol{R}\colon t<0\}$. On dit alors que les polynomes f_{ij} *decrivent* l'ensemble M.

Notons par $A(\boldsymbol{R}^n)$ la famille de tous les ensembles semi-algebriques dans $\boldsymbol{R}^n$.

Cette famille, à côté de celle des variétés différentiables et des ensembles sous-analytique (qui contiennent les ensembles semi-algebriques) est l'une des plus importantes utilisées dans l'analyse et la topologie.

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin il est commode d'introduire la définition suivante:

DÉFINITION. L'ensemble $M\in A(\boldsymbol{R}^n)$ est *de type* $A_n(m,p)$ (ce qu'on notera $M\in A_n(m,p)$) si le nombre d'éléments différents de la famille des polynômes f_{ij} décrivant M est $\leqslant m$ et les degrés de polynômes f_{ij} sont $\leqslant p$.

Evidemment $A(\boldsymbol{R}^n)=\bigcup_{m,p=1}^{\infty} A_n(m,p)$ i $A_n(m,p)\subset A_n(m+k,p+l)$ pour $l,k\geqslant 0$.

Pour des raisons que nous avons signalées ci-dessus il serait utile de formuler « le théorème de Tarski-Seidenberg avec majoration »: la projection d'un ensemble $M\in A_n(m,p)$ sur l'espace $\boldsymbol{R}^k$ $(k<n)$ est un ensemble du type $A_k(m',p')$, ayant au plus q composants connexes, où q, m' et p' ne dependent que de n, k, m et p.

On peut considérer ce théorème comme une sorte de « making theorem machine ». On va illustrer cette observation en démontrant à l'aide de ce théorème quelques corollaires dont l'un concerne le problème des extremums

de polynômes dont nous avons déja parlé et l'autre considère la décomposition « avec majoration » d'un ensemble algébrique en réunion disjointe de sous-variété analytiques, connexés et semi-algébriques.

Les estimations des nombres q, m', p' sont effectives. La démonstration s'appuie d'une façon essentielle sur la description de la structure des ensembles semi-algébriques due à S. Łojasiewicz.

2. – Resultats.

L'application $f: M \to M'$ d'un ensemble $M \in A(\boldsymbol{R}^n)$ dans $M' \in A(\boldsymbol{R}^{n'})$ est dite *semi-algébrique* si son graphe est un ensemble semi-algébrique dans $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n'}$.

Bien sûr, les applications polynômiales sont semi-algébriques. Un autre exemple important d'applications semi-algébriques est donné par les applications de Nash [2], [8]. Les applications semi-algébriques apparaissent d'une façon naturelle dans l'étude des ensembles semi-algébriques. On peut montrer par exemple la finitude des types topologiques semi-algébriques des ensembles semi-algébriques de type $A_n(m, p)$ n, m et p étant fixés, [5], [7] (c'est-à-dire: il existe une famille finie d'ensembles semi-algébriques $M_1, \ldots, M_s$, tels que pour chaque $M \in A_n(m, p)$ il existe un homéomorphisme semi-algébrique $\varphi: (\boldsymbol{R}^n, M) \to (\boldsymbol{R}^n, M_i)$ pour un certain i, $i = 1, \ldots, s$).

THÉORÈME 1 (théorème de Tarski-Seidenberg avec majoration). *Soit $f: M \to M'$ une application semi-algébrique de $M \in A_n(m, p)$ dans $M' \in A_n(m, p)$, telle que le graphe de $f \in A_{n+n'}(m, p)$. Alors l'image $f(M) \in A_{n'}(m', p')$ et possède au plus q composantes connexes, où les nombres q, m' et p' dépendent uniquement de n, n', m et p. Les nombres q, m' et p' peuvent être exprimés explicitement en fonction de n, n', m et p.*

REMARQUE 1. Dans le cas où f est une application identique et M est de la forme particulière $M = \{x \in \boldsymbol{R}^n: f_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, p\}$, l'estimation de q déduite du théorème de Milnor-Thom est meilleure que la nôtre.

REMARQUE 2. La condition graphe $f \in A_{n+n'}(m, p)$, exprime intuitivement la condition « degré de f est $\leqslant p$ ». Notons que si f est un polynôme de n variables de degré $\leqslant p$, alors graph $f \in A_{n+1}(1, p)$.

Nous allons montrer maintenant comment on-peut utiliser ce théorème.

COROLLAIRE 1. *Soit $f: M \to \boldsymbol{R}$ une application semi-algébrique. Supposons, que $M \in A_n(m, p)$ et graphe $f \in A_{n+1}(m, p)$. Alors le nombre d'èléments*

de l'ensemble E des points où f atteint un maximum local stricts est toujours $\leqslant q$, où q est un entier positif dépendant uniquement de n, m et p. Le nombre q s'exprime explicitément en fonction de n, m et p.

DÉMONSTRATION. Posons $A_1 = \{(x, u, y, v) \in (M \times \boldsymbol{R})^2 : (x, u, y, v) \in (\text{graphe } f)^2,\ u - v > 0\}$. Notons par $\pi : (M \times \boldsymbol{R})^2 \to M^2$, $\pi_1 : M^2 \times \boldsymbol{R} \in (x, y, \delta) \to \to (x, \delta) \in M \times \boldsymbol{R}$ et $\pi_M : M \times \boldsymbol{R} \to M$ les projections naturelles. Evidemment

$$\{(x, y) \in M^2 : f(x) - f(y) > 0\} = \pi(A_1) = A_2 .$$

Posons $A = A_2 \times \boldsymbol{R}_+$ et $B = \{(x, y, \delta) \in M^2 \times \boldsymbol{R}_+ : 0 < |x - y| < \delta\}$. Observons que l'ensemble

$$C = \{(x, \delta) \in M \times \boldsymbol{R}_+ : (x, y, \delta) \in B \Rightarrow (x, y, \delta) \in A\},$$

est de la forme $C = M \times \boldsymbol{R}_+ \setminus \pi_1(B \setminus A)$ et que bien sûr $E = \pi_M(C)$. D'après le théorème 1 nous pouvons majorer successivement les types des $\pi(A_1)$, $\pi_1(B \setminus A)$ et $\pi_M(C)$, et par conséquent nous pouvons majorer le nombre de composantes connexes de l'ensemble E (égal au nombre de ses éléments).

DÉFINITION. Un point x appartenant au bord d'un ensemble $M \subset \boldsymbol{R}^n$ est appelé *point extremal*, s'il existe une hypersurface affine $H \subset \boldsymbol{R}^n$, telle que $H \cap \partial M = \{x\}$. Les points extremaux isolés dans ∂M sont appelés *fortement extremaux*.

COROLLAIRE 2. *L'ensemble de points fortement extremaux d'un ensemble $M \in A_n(m, p)$ contient au plus q élements, où q ne dépend que de n, m et p.*

La démonstration de ce corollaire se fait de façon analoque à celle du corollaire precédent.

COROLLAIRE 3 (sur la décomposition avec majoration). *Tout ensemble semi-algébrique $M \in A_n(m, p)$ admet une décomposition $M = \bigcup_i M_i$ en réunion disjointe de sous-variétés analytiques connexes, dont le nombre est $\leqslant q$ et dont chacune est un ensemble semi-algébrique appartenant à $A_n(m', p')$. Les nombres q, m' et p' dépendent uniquement de n, m et p.*

REMARQUE 3. L'énoncé du Corollaire 3 sur la décomposition sans majoration est bien connu [2], [6] et sa démonstration s'appuie sur un raisonnement différent du notre. Nous utilisons le Corollaire 3 sous sa forme généralisée, dans notre étude concernant la classification des fonctions polynômiales (article à paraître).

Les démonstrations du Théorème 1 et du Corollaire 3 sont contenues dans le § 4.

3. – Décomposition en chaîne d'un ensemble semi-algébrique.

A. La description suivante de la structure des ensembles semi-algébriques due à S. Łojasiewicz ([2], lemme 3, page 108-109) joue un rôle essentiel dans notre étude. Nous allons la rappeler ici car le travail original est difficilement accessible.

A1. Soit $M \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ un ensemble semi-algébrique de type $A_{n+1}(m, p)$, décrit par des polynômes $f_1, \ldots, f_m$ des variables $(x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$, $f_j(x, t) = \sum_{i=0}^{p} a_{ij}(x) t^i$, $a_{ij} \in R[x_1, \ldots, x_n]$. Posons $\varphi_{js} = \partial^s f_j / \partial t^s$, $j = 1, \ldots, m$, $s = 0, \ldots, p$ et pour $Q \subset \Omega = \{1, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, p\}$ posons $\psi_Q = \prod_{(j,s) \in Q} \varphi_{js}$: Evidemment $\deg \psi_Q \leqslant u = u(m, p) = \frac{1}{2} mp(p+1)$.

Soit, pour $k = 0, 1, \ldots, u, \infty$,

$M_{Q,k} = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \psi_Q(x, t) = 0$ a exactement k racines complexes différentes$\}$.

Puisque l'ensemble

$B_k^u(\boldsymbol{C}) = \left\{(a_0, \ldots, a_u) \in \boldsymbol{C}^{u+1} : \sum_{i=0}^{u} a_i t_{u-i} = 0 \text{ à exactement } k \text{ racines complexes différentes}\right\}$

est un ensemble constructible de $\boldsymbol{C}^{u+1}$ (c'est-à-dire est une réunion finie d'ensembles de la forme $A \setminus B$, où A et B sont des ensembles algébriques complexes dans $\boldsymbol{C}^{u+1}$), $M_{Q,k}$ est donc ensemble un semi-algébrique, comme image reciproque de l'ensemble $B_k^u(\boldsymbol{C})$ par l'application

$$\boldsymbol{R}^n \in x \to \big(a_0(x), \ldots, a_u(x)\big) \in \boldsymbol{C}^{u+1},$$

où $\psi_Q = \sum_{i=0}^{u} a_i(x) t^{u-i}$.

Pour chaque $Q \subset \Omega$ fixé, la famille $\{M_{Q,k}\}_{k=0,1,\ldots,u,\infty}$ est une décomposition de $\boldsymbol{R}^n$ en ensembles semi-algébriques disjoints. Cela implique que la famille d'intersections $\mathcal{M}_n(M) = \left\{\bigcap_Q M_{Q,k}\right\}_{k=0,1,\ldots,u,\infty}$ est aussi une décomposition de $\boldsymbol{R}^n$ en ensembles semi-algébriques disjoints. On appelle $\mathcal{M}_n(M)$ la décomposition de $\boldsymbol{R}^n$ *associée* à l'ensemble M.

La famille des composantes connexes d'éléments de la decomposition $\mathcal{M}_n(M)$ forme évidement une décomposition plus fine de l'espace $\boldsymbol{R}^n$. Notons cette dernière par $\mathcal{M}_n^*(M)$.

A2. Pour $A \in \mathcal{M}_n^*(M)$ posons $Q = Q_A = \{(j, s) \in \Omega : \varphi_{js} | A \times \boldsymbol{R} \neq 0\}$.

L'ensemble Q peut être vide. Si $Q \neq \emptyset$, il résulte de la construction de $\mathcal{M}_n^*(M)$ que pour chaque $x \in A$, l'équation $\psi_Q(x, t) = 0$ a toujours le même nombre de racines réelles différentes, que nous notons $k_A \leqslant u$.

On sait [2], [7] que dans cette situation il existe des fonctions $\xi_{A,i}\colon A \to \boldsymbol{R}$, $\xi_{A,i}(x) < \xi_{A,i+1}(x)$, $i = 1, \ldots, k_A$, continues, telles que

$$\{(x, t) \in A \times \boldsymbol{R}\colon \psi_Q(x, t) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{k_A} \text{graphe}\, \xi_{A,i}\,.$$

A3. Posons $\xi_{A,0}(x) = -\infty$ et $\xi_{A,k_A+1}(x) = +\infty$. On vérifie que pour chaque $A \in \mathcal{M}_n^*(M)$, tout ensemble de la forme

$$(\mathrm{L}_1) \qquad \{(x, t) \in A \times \boldsymbol{R}\colon \xi_{A,i-1}(x) < t < \xi_{A,i}(x)\}\,, \qquad i = 1, \ldots, k_A + 1\,,$$

ou de la forme

$$(\mathrm{L}_2) \qquad \{(x, t) \in A \times \boldsymbol{R}\colon t = \xi_{A,i}(x)\}\,, \qquad i = 1, \ldots, k_A\,,$$

est un ensemble de la forme $\bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{s=1}^{p} \{(x, t) \in A \times \boldsymbol{R}\colon \varphi_{js}(x) \in S_{js}\}$, où $S_{js} = \{0\}$, ou $S_{js} = \boldsymbol{R}_+$ ou $S_{js} = \boldsymbol{R}_-$. Les ensembles de la forme (L_1) et (L_2) sont donc semi-algébriques, connexes, et forment une décomposition de $\boldsymbol{R}^{n+1}$. On montre [2] que cette décomposition est compatible avec l'ensemble M en ce sens que chaque elément de cette decomposition est ou bien contenu dans une des composantes connexes de M ou bien disjoint de M (on vérifie notamment que sur chaque ensemble de la forme (L_1) ou (L_2), et pour chaque indice j, le polynôme f_j ou bien s'annule identiquement ou bien est strictement positif ou bien strictement négatif).

B. Le lemme suivant a un caractère purement technique:

LEMME 1. (*a*) *Si* $M_i \in A_n(m, p)$, $i = 1, \ldots, s$, *alors* $\bigcap_{i=1}^{s} M_i \in A_n(ms, p)$ *et* $\bigcup_{i=1}^{s} M_i \in A_n(ms, p)$.

(*b*) *Si* $M \in A_n(m, p)$, $f_i \in \boldsymbol{R}[x_1, \ldots, x_s]$, $\deg f_i \leqslant q$, $i = 1, \ldots, n$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ alors $f^{-1}(M) \in A_s(m, pq)$.

(*c*) *Si* $M \in A_n(m, p)$, *alors* $\boldsymbol{R}^n \setminus M \in A_n(m, p)$.

(*d*) *Si* $A \in A_n(m, p)$, $\varphi_i \in \boldsymbol{R}[x_1, \ldots, x_n, t]$, $\deg \varphi_i \leqslant q$, $i = 1, \ldots, s$, *alors*

$$M = \bigcap_{i=1}^{s} \{(x, t) \in A \times \boldsymbol{R}\colon \varphi_i(x, t) \in S_i\} \in A_{n+1}(m + s, \max(p, q))\,;$$

$S_i = \boldsymbol{R}_+$ *ou* $S_i = \boldsymbol{R}_-$ *ou* $S_i = \{0\}$.

(*e*) *Si* $M \in A_1(m, p)$, *alors* M *a au plus* $m(p+1)$ *composantes connexes.*

(*f*) *Soit*

$$B_k^n(\boldsymbol{R}) = \{(c_0, \ldots, c_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} c_i t^{n-1} = 0 \text{ a exactement } k \text{ racines complexes différentes}\}.$$

Alors $B_k^n(\boldsymbol{R}) \in A_{n+1}(4(n+1), 2^{n+1}(n!)^2)$; $k = 0, 1, \ldots, n, \infty$.

(*g*) *Soit* $f_j \in R[x_1, \ldots, x_n, t]$, $\deg f_j \leqslant p$, $j = 1, \ldots, m$, *et* $\varphi_{js} = \partial^s f_j / \partial t^s$, $s = 0, \ldots, p$. *Pour* $Q \subset \Omega = \{1, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, p\}$ *posons* $\psi_Q = \prod_{(j,s) \in Q} \varphi_{js} = \sum_{i=0}^{u} a_i(x) t^{u-i}$, *où* $u = u(m, p) = \frac{1}{2} mp(p+1)$.

Soit $w = (a_0, \ldots, a_u) : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^{u+1}$ *et* $M_{Q,k} = w^{-1}(B_k^u(\boldsymbol{R}))$, $k = 0, 1, \ldots, u, \infty$: *Alors*

(g_1) $M_{Q,k} \in A_n(4(u+1), 2^{u+1} u(u!)^2)$;

(g_2) *Chaque ensemble de la famille* $\left\{\bigcap_{Q \subset \Omega} M_{Q,k_Q}\right\}_{k_Q = 0,1,\ldots,u,\infty}$, *est de type* $A_n(2^{m \cdot p+2}(u+1), 2^{u+1} u(u!)^2)$;

(g_3) *La famille* $\{\bigcap M_{Q,k_Q}\}$ *contient au plus* $(u+2)^{2^{m \cdot p}}$ *elements.*

DÉMONSTRATION. (*a*), (*b*), (*c*) et (*d*) sont triviaux. On démontre (*e*) par recurrence sur m. On deduit (g_1) et (g_2) de (*f*), (*a*) et (*b*) et de la définition de $M_{Q,k}$.

(g_3) est une simple remarque de nature combinatoire. On va démontrer maintenant (*f*) (comp. [7]). Fixons $1 \leqslant k \leqslant n$ (les cas $k = 0$ et $k = \infty$ etant triviaux; $B_\infty^n(\boldsymbol{R}) = \{0\}$). L'ensemble

$$U_k^n = \left\{(c_1, \ldots, c_n) \in \boldsymbol{C}^n : z^n + \sum_{i=1}^{n} c_i z^{n-i} = 0 \text{ a au plus } k \text{ racines complexes différentes}\right\}$$

est l'image de l'ensemble

$$\tilde{U}_k^n = \{x \in \boldsymbol{C}^n : \text{l'ensemble } \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ a au plus } k \text{ elements différents}\}$$

par l'application symètrique $\sigma : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$, où $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$, σ_i étant le i-éme polynôme symetrique fondamental de n variables.

L'ensemble $\tilde{U}_k^n$ peut être décrit de la façon suivant: soit E la famille des systémes de nombres naturels $\{l_1, \ldots, l_k\}$, $1 \leqslant l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_k \leqslant n$, $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$.

La famille E possède au plus 2^n éléments. On associe à un système $T \in E$ l'ensemble $\tilde{U}_T \subset \boldsymbol{C}^n$ defini par $n-k-1$ équations linéaires:

$$\tilde{U}_T = \{x \in \boldsymbol{C}^n : l_{1,T}(x) = 0, \ldots, l_{n-k-1,T}(x) = 0\},$$

où $\{l_{i,T}\}$ est la famille des $n-k-1$ forms lineaires $l_{i,T}(x) = x_j - x_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $j \neq l_1$, $l_1 + l_2, \ldots, l_1 + \ldots + l_k$, $T = (l_1, \ldots, l_k)$.

Pour une permutation $\alpha \in S_n$ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ notons

$$l_{i,\alpha(T)}(x_1, \ldots, x_n) = l_{i,T}(x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(n)})$$

et posons

$$\tilde{U}_{\alpha(T)} = \{x \in \boldsymbol{C}^n : l_{i,\alpha(T)}(x) = 0, \ i = 1, \ldots, n-k-1\}.$$

Evidemment

$$\tilde{U}_k^n = \bigcup_{\substack{\alpha \in S_n \\ T \in E}} \tilde{U}_{\alpha(T)} = \bigcap_{\substack{1 \leqslant i(\alpha,T) \leqslant n-k-1 \\ (\alpha,T) \in S_n \times E}} \Big(\prod_{(\alpha,T) \in S_n \times E} l_{i(\alpha,T),\alpha(T)} \Big)^{-1}(0).$$

Cela implique la relation $\tilde{U}_k^n = \bigcap_{i \in I} g_i^{-1}(0)$, où g_i est un polynôme de n variables de degré $\leqslant n!\, 2^n$, et I est un ensemble fini d'indices. Posons, pour $\alpha \in S_n$, $g_{i,\alpha}(x) = g_i(x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(n)})$ et notons $\tilde{W}_{ji} = \delta_j \circ (g_{i,\alpha_1}, \ldots, g_{i,\alpha_{n!}})$, où $i \in I$, $1 \leqslant j \leqslant n!$ et où δ_j denote le j-éme polynôme symetrique fondamental de $n!$ variables. Les polynômes $\tilde{W}_{ji}$, $j = 1, \ldots, n!$, $i \in I$ sont symétriques, de degré $\leqslant (n!)^2 \cdot 2^n$ et $\tilde{U}_k^n = \bigcap_{i,j} \tilde{W}_{ji}^{-1}(0)$. Soit W_{ji} le polynôme de n variables pour lequel $\tilde{W}_{ji} = W_{ji} \circ \sigma$. Evidemment $U_k^n = \bigcap_{i,j} W_{ji}^{-1}(0)$ et deg $W_{ji} \leqslant (n!)^2 \cdot 2^n$. Cela implique que l'ensemble $U_k^n \cap \boldsymbol{R}^n$ peut être défini comme l'ensemble des zéros d'un polynême réel $\varphi_{n,k}^*$ de degré $\leqslant 2^{n+1} \cdot (n!)^2$.

L'ensemble

$$C_k^n = \{(c_0, \ldots, c_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i} = 0 \text{ a au plus } k \text{ racines complexes différentes}\}$$

est donc réunion d'ensembles de la forme

$$C_k^n = \left\{c \in \boldsymbol{R}^{n+1} : c_0 \neq 0, \ \varphi_{n,k}^* \left(\frac{c_1}{c_0}, \ldots, \frac{c_n}{c_0}\right) = 0\right\} \cup$$
$$\cup \left\{c \in \boldsymbol{R}^{n+1} : c_0 = 0, \ c_1 \neq 0, \ \varphi_{n-1,k}^* \left(\frac{c_2}{c_1}, \ldots, \frac{c_n}{c_1}\right) = 0\right\} \cup \ldots \cup$$
$$\cup \left\{c \in \boldsymbol{R}^{n+1} : c_0 = \ldots = c_{n-k-2} = 0, \ c_{n-k-1} \neq 0, \ \varphi_{k+1,k}^* \left(\frac{c_{n-k}}{c_{n-k-1}}, \ldots, \frac{c_n}{c_{n-k-1}}\right) = 0\right\} \cup$$
$$\cup \{\{c \in \boldsymbol{R}^{n+1} : c_0 = \ldots = c_{n-k-1} = 0\} \cap \{\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}\}.$$

On voit facilement que chaque ensemble de cette réunion est contenu dans $A_{n+1}(n+1, (n!)^2 \cdot 2^{n+1})$ donc $C_k^n \in A_{n+1}(2(n+1), (n!)^2 \cdot 2^{n+1})$.

Il en résulte que $B_k^n = C_k^n \setminus C_{k-1}^n \in A_{n+1}(4(n+1), (n!)^2 \cdot 2^{n+1})$.

C. *Décomposition en chaîne d'un ensemble semi-algebrique.*

Pour des entiers positifs m et p fixés definissons:

$$u = u(m, p) = \tfrac{1}{2} m \cdot p \cdot (p+1), \qquad \alpha_1(m, p) = 2^{m \cdot p + 2}(u+1),$$

$$\beta_1(m, p) = 2^{u+1} u (u!)^2, \qquad \gamma(m, p) = (u+2)^{2^{m \cdot p}}.$$

Définissons maintenant par récurrence les nombres

$$\alpha_k(m, p) = \alpha_1(\alpha_{k-1}(m, p), \beta_{k-1}(m, p)), \qquad \beta_k(m, p) = \beta_1(\alpha_{k-1}(m, p), \beta_{k-1}(m, p)),$$

$$\gamma_2(m, p) = \gamma(m, p), \qquad \gamma_k(m, p) = \gamma_{k-1}(m, p) \cdot \gamma(\alpha_{k-2}(m, p), \beta_{k-2}(m, p)).$$

Dans ce qui suit nous allons noter α_k, β_k, γ_k au lieu de $\alpha_k(m, p)$, etc.

Pour un ensemble $M \in A_{n+1}(m, p)$ prenons la décomposition $\mathcal{M}_n(M)$ de $\boldsymbol{R}^n$ associée à l'ensemble M (comp. 3A). Nous obtenons ainsi (grâce au lemme $1(g_3)$) $\gamma(m, p)$ ensembles disjoints, semi-algébriques $M_1, \ldots, M_{\gamma(m,p)}$ (certains parmi eux peuvent être vides); tout ensemble M_i est du type $A_n(\alpha_1, \beta_1)$ (lemme 1 (g_1)). Pour chaque ensemble $M_i \in \mathcal{M}_n(M)$ nous pouvons prendre la décomposition $\mathcal{M}_{n-1}(M_i)$ de $\boldsymbol{R}^{n-1}$ associée à M_i et nous obtiendrons ainsi γ_2 décompositions $\{\{\mathcal{M}_{ij}\}_{j=1,\ldots,\gamma(\alpha_1,\beta_1)}\}_{i=1,\ldots,\gamma_2}$; il est clair que chaque décompositions $\mathcal{M}_{n-1}(M_i)$ contient au plus $\gamma(\alpha_1, \beta_1)$ ensembles. Tous les ensembles M_{ij} sont du type $A_{n-1}(\alpha_2, \beta_2)$.

On peut continuer ce processus pour les ensembles M_{ij}, etc., en obtenant à chaque étape de nouvelles décompositions des espaces $\boldsymbol{R}^{n-2}$, $\boldsymbol{R}^{n-3}$, $\boldsymbol{R}^{n-k}$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Le nombre des décompositions ainsi que le type des ensembles obtenus peuvent être contrôlés à chaque étape (comp. tableau 1 et figure 1).

Niveau	Nombre des décompositions	Nombre des ensembles dans chaque décomposition	Type d'ensemble
$\boldsymbol{R}^n$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma(m, p)$	$A_n(\alpha_1, \beta_1)$
$\boldsymbol{R}^{n-1}$	γ_2	$\gamma(\alpha_1, \beta_1)$	$A_{n-1}(\alpha_2, \beta_2)$
$\boldsymbol{R}^k$	γ_{n-k+1}	$\gamma(\alpha_{n-k}, \beta_{n-k})$	$A_k(\alpha_{n-k+1}, \beta_{n-k+1})$
$\boldsymbol{R}$	γ_n	$\gamma(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$	$A_1(\alpha_n, \beta_n)$

Décomposition en chaîne d'un ensemble semi-algebrique

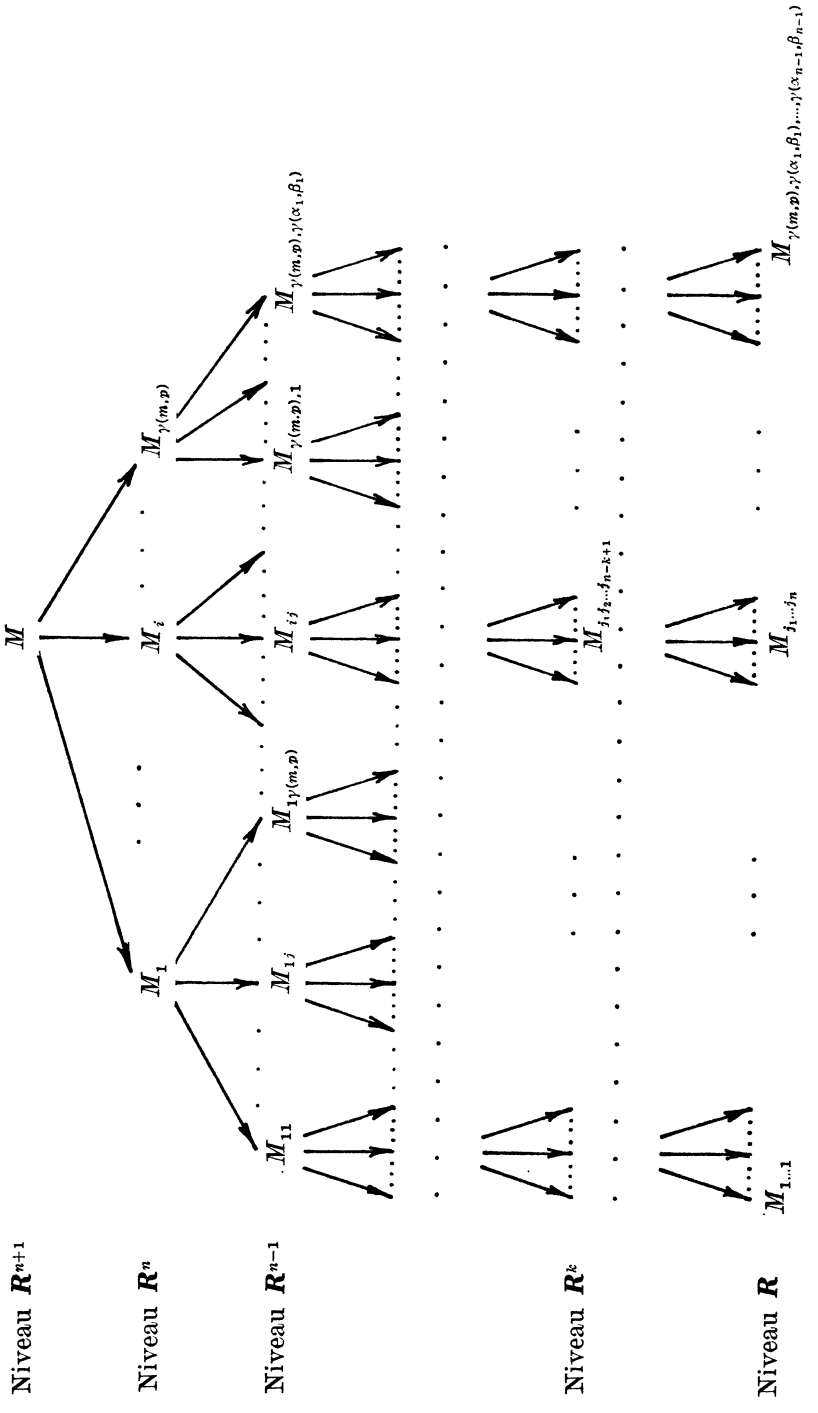

Figure 1.

4. – Démonstrations.

Le lemme suivant est conséquence immédiate du § 3A.

LEMME 2. *Si $M \in A_k(m, p)$ et si la décomposition $\mathcal{M}^*_{k-1}(M)$ associée à M a l éléments, dont chacun est dans $A_{k-1}(m', p')$, alors la décomposition de $\boldsymbol{R}^k$ en ensembles de la forme* (L$_1$) *ou* (L$_2$) *possède au plus $l(p(p+1)\cdot m+1)$ ensembles connexes dont chacun est dans $A_k(m'+mp, \max(p, p'))$.*

Mais l'ensemble M est compatible avec cette décomposition, donc M a au plus $l\cdot p(p+1)\, m$ composantes, dont chacune est dans $A_k((m'+pm)l\cdot \cdot p(p+1)m, \max(p, p')$.

DEMONSTRATION DU TÈORÈME 1. Fixons un ensemble $M \in A_{n+1}(m, p)$. Observons que le lemme 1(e) et le fait que $M_{i_1 \ldots i_n} \in A_1(\alpha_n, \beta_n)$, impliquent que chaque ensemble $M_{i_1 \ldots i_n}$ possède au plus $\varkappa_1 = \varkappa_1(n+1, m, p) = \alpha_n(m, p)\cdot \cdot(\beta_n(m, p)+1) = \alpha_n(\beta_n+1)$ composantes connexes, dont chacune est dans $A_1(a_1, b_1)$, où $a_1 = 2$, $b_1 = 1$.

Lemme 2 et la construction des ensembles $M_{i_1 \ldots i_p}$ impliquent (pour chaque s, $2 \leqslant s \leqslant n+1$) que si chacun des ensembles $A_{i_1 \ldots i_{n-s+2}}$ possède au plus $\varkappa_{s-1}$ composantes connexes, dont chacune est dans $A_{s-1}(a_{s-1}, b_{s-1})$, alors chaque ensemble $A_{i_1 \ldots i_{n-s+1}}$ a au plus $\varkappa_s$ composantes, dont chacune est dans $A_s(a_s, b_s)$, où $\varkappa_s = \varkappa_s(n+1, m, p) = \varkappa_{s-1}\cdot\gamma(\alpha_{n-s+1}, \beta_{n-s+1})\cdot\alpha_{n-s+1}\cdot\beta_{n-s+1}\cdot \cdot(\beta_{n-s+1}+1)$, $a_s = a_s(n+1, m, p) = (a_{s-1}+\alpha_{n-s+1}\cdot\beta_{n-s+1})\cdot\varkappa_s$, $b_s = \max(b_{s-1}, \beta_{n-s+1})$. On voit facilement que $b_1 = 1$ et $\beta_n \geqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$ impliquent $b_s = \beta_n$ pour $s \geqslant 2$.

Enfin, comme l'ensembles $\pi_k^{n+1}(M)$ (où $\pi_k^{n+1}\colon \boldsymbol{R}^{n-k+1} \times \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^k$ est la projection naturelle), est une réunion de certaines des composantes connexes des ensembles $A_{i_1 \ldots i_{n-k+1}}$ on peut affimer que $\pi_k^{n+1}(M) \in A_k(m_k, \beta_n)$ et que le nombre de composantes connexes de $\pi_k^{n+1}(M)$ est $\leqslant q_k$, où les nombres m_k, q_k sont explicitement calculables; notamment

$$m_k = \varkappa_k(n+1, m, p)\cdot a_k(n+1, m, p)\,, \qquad q_k = \varkappa_k(n+1, m, p)\,.$$

Le théorème 1 résulte directement de la dernière observation et de la formule $f(M) = \pi(\text{graphe } f \cap M \times M')$, où $\pi\colon \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n'} \to \boldsymbol{R}^{n'}$ est la projection.

REMARQUE 4. En réalité nous avons démontré que non seulement $f(M)$ mais aussi toutes les composantes connexes sont dans $A_{n'}(m', p')$.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 3 par récurrence sur le nombre n des variables. Le cas d'une variable est trivial. Supposons donc que le théorème soit vrai pour n variables et supposons que $M \in A_{n+1}(m, p)$. En utilisant

la notation du § 3, M est réunion d'ensembles de la forme (L_1) ou (L_2) dont le nombre est connu. Il suffit donc de démontrer que chacun de ces ensembles est une réunion disjointe de q' sous-variétés analytiques au plus, chacune d'entre elles ètant dans $A_{n+1}(m', p')$; les nombres q', m' et p' dépendant uniquement de m, n et p.

La projection $\pi(M)$ de M dans $\boldsymbol{R}^n$ est une réunion disjointe d'ensembles appartenant à $\mathcal{M}_n^*(M)$. En s'appuyant sur la remarque 4 et sur l'hypothèse de recurrence on peut décomposer chaque ensemble $A \in \mathcal{M}_n^*(M)$ en réunion $A = A_1 \cup \ldots \cup A_s$ de sous-varietés analytiques, disjointes et semi-algébriques dans $\boldsymbol{R}^n$. Chaque sous-varieté A_i est dans $A_n(m'', p'')$ et leur nombre est borné par q'', où q'', m'' et p'' dépendent uniquement de n, m et p.

La démonstration sera terminée si nous montrons que la restriction de chaque fonction $\xi_{A,i}$, $i = 1, \ldots, k_A$, à l'ensemble A_j, $j = 1, \ldots, s$, est analytique. Dans ce cas chaque ensemble $\tilde{M}$ de la forme (L_1) ou (L_2) sera une reunion disjointe de sous-varietés analytiques connexes et semi-algebriques $\tilde{M} = \bigcup_{i=1}^{s} (\tilde{M} \cap (A_j \times \boldsymbol{R}))$, dont chacune est dans $A_{n+1}(m', p')$.

Nous allons donc démontrer l'analyticité de $\xi_{A,i}|A_j$: Soit

$$\hat{M}_{Q,k} = \{x \in \boldsymbol{C}^n \colon \psi_Q(x, t) = 0 \text{ a exactement } k \text{ racines complexes différents}\},$$

$k = 0, 1, \ldots, u, \infty$. Les ensembles $\hat{M}_{Q,k}$ sont evidemment constructibles. La famille d'intersections $\hat{\mathcal{M}} = \{\bigcap_Q \hat{M}_{Q,k}\}_{k=0,1,\ldots,u,\infty}$ constitue une décomposition de $\boldsymbol{C}^n$ en ensembles constructibles. Bien sur chaque ensemble $A \in \mathcal{M}_n^*(M)$ est contenu dans un seul ensemble $W \in \hat{\mathcal{M}}$ précis. Notons enfin que le graphe $\xi_{A,i}$ est contenu dans l'ensemble analytique complexe $\psi_Q^{-1}(0)$ et que pour chaque $x \in W$, l'équation $\psi_Q(x, t) = 0$ a toujours le même nombre de racines complexes différentes. L'analycité de $\xi_{A,i}|A_j$ resulte donc du lemme suivant:

LEMME 3. *Soit $a \in A \subset W \subset \boldsymbol{C}^n$, où A est un germe d'une varieté analytique réelle et W un germe d'ensemble constructible. Supposons que $P(x, t) \colon \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ soit un polynôme de $n+1$ variables, tel que le nombre de racines différentes de l'équation $P(x, t) = 0$ est toujours le même pour chaque $x \in W$. Si $\xi \colon A \to \boldsymbol{R}$ est une fonction continue, dont le graphe est contenue dans $P^{-1}(0)$, alors ξ est analytique.*

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité on peut supposer que W est un ensemble analytique complexe. Le germe A^* du complexifié de A est un germe de variété analytique complexe et $A^* \subset W$. Il résulte de l'hypo-

thèse que dans un voisinage de a suffisamment petit, il existe une extention continue $\xi^*: A^* \to \boldsymbol{C}$ de ξ, dont le graphe est également contenu dans $P^{-1}(0)$. Il est alors facile de voir que ξ^* est analytique (en utilisant par exemple le théorème de Riemann sur l'élimination des singularités).

REFERENCES

[1] J. MILNOR, *On the Betti numbers of real varieties*, Proc. A.M.S., **15** (1964), pp. 275-280.

[2] S. ŁOJASIEWICZ, *Ensembles semi-analytiques*, preprint IHES, Bures-sur-Yvette, 1965.

[3] S. ŁOJASIEWICZ, *Sur les ensembles semi-algébriques*, Symposia mathematica, Bologna, 1970.

[4] R. THOM, *Sur l'homologie des variétés algébriques réelles*, Differential and combinatorial topology (Morse symposium), Princeton, University Press, 1965.

[5] WALLACE, *Linear sections of algebraic varieties*, Indiana Univ. Math. J., **20** (12) (1971), pp. 1153-1162.

[6] H. WHITNEY, *Elementary structure of real algebraic varieties*, Ann. of Math., **66** (3) (1957), pp. 545-556.

[7] VARTCHENKO, *Théorème sur equisingularité topologiques ...*, Izviestia, **36** (1972), pp. 957-1019.

[8] F. LAZZERI A. TOGNOLI, *Alcune proprietà degli spazi algebrici*, Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa, **24** (4) (1970), pp. 597-632.