ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. P. RAMIS

Théorèmes de séparation et de finitude pour l'homologie et la cohomologie des espaces (p, q)-convexes-concaves

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 4 (1973), p. 933-997

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_933_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THEOREMES DE SEPARATION ET DE FINITUDE POUR L'HOMOLOGIE ET LA COHOMOLOGIE DES ESPACES (p, q)-CONVEXES-CONCAVES

par J. P. RAMIS

A K. STEIN pour son 60ème anniversaire.

... cintre (rend convexes) les surfaces...

FRANCIS PONGE.

Introduction.

On trouvera démontrés dans cet article les résultats suivants :

THEOREME 1. Soient Y un espace analytique complexe (de dimension finie bornée et dénombrable à l'infini), X un ouvert de Y, *relativement compact* dans Y, et p un entier positif. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module cohèrent. Si X est *fortement p-convexe* dans Y (i.e. fortement p-convexe dans Y en tout point de sa frontière ∂X),

(i) Les espaces $H^k(X; \mathcal{F})$ sont de *dimension finie* pour $p+1 \leq k$.

(ii) Les espaces $H_c^k(X; \mathcal{F})$ sont *séparés* pour $k \leq \operatorname{prof}_{\partial X} \mathcal{F} - p$ et de *dimension finie* pour $k \leq \operatorname{prof}_{\partial X} \mathcal{F} - p - 1$.

La partie (i) de ce théorème est la généralisation (1) d'un résultat établi

---

Pervenuto alla Redazione il 9 Gennaio 1978.

(1) Compte tenu de la définition donnée ci-dessous (tout $a \in \partial X$ possède un voisinage ouvert V tel qu'il existe $\varphi : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et fortement p-convexe en a avec $X \cap V = \{\varphi < (a)\}$), on n'obtient qu'une généralisation *partielle* du résultat de Narasimhan ($p = 0$, mais φ *continue*). Toutefois nous déduirons le théorème 1 des théorèmes 2.1.7. et 2.1.8. (cf. ci-dessous, page 971), et, d'après un résultat de [8], ces théorèmes entraînent l'analogue du théorème 1, en supposant seulement *continues* les fonctions φ, ce qui généralise *complètement* le théorème de Narasimhan. Signalons enfin que si l'on renforce suffisamment l'hypothèse de p-convexité locale du théorème 1 (par un peu plus de convexité aux points singuliers de la frontière), la technique employée par Narasimhan se généralise et on peut alors employer les méthodes de [1] pour obtenir dans ce cas particulier le théorème 1 (cf. [16]).

par R. Narasimhan dans le cas O-convexe [20]. Quand X est une variété, la partie (ii) se déduit d'un résultat de Malgrange [18].

THEOREME 2. Soit X un espace analytique (de dimension finie bornée et dénombrable à l'infini) *fortement* (p,q)*-convexe concave.* Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohèrent. Alors

(i) Les espaces $H^k(X;\mathcal{F})$ sont *séparés* pour $p+1 \leq k \leq \operatorname{prof}_X \mathcal{F} - q - 1$ et de *dimension finie* pour $p+1 \leq k \leq \operatorname{prof}_X \mathcal{F} - q - 2$.

(ii) Les espaces $H_c^k(X;\mathcal{F})$ sont *séparés* pour $q+2 \leq k \leq \operatorname{prof}_X \mathcal{F} - p$ et de *dimension finie* pour $q+2 \leq k \leq \operatorname{prof}_X \mathcal{F} - p - 1$.

L'assertion de finitude de la partie (i) de ce théorème est le résultat fondamental établi dans [1] par A. Andreotti et H. Grauert (le passage des cas p convexe et q concave au cas mixte est facile); on constatera toutefois que la démonstration que nous en donnons est assez différente de celle de [1]. L'assertion de séparation en degré $\operatorname{prof}_X \mathcal{F} - q - 1$ est je pense un résultat nouveau (quand X est une variété sans singularités, il a été obtenu indépendamment par A. Andreotti et A. Kas [3]). L'assertion (ii) généralise (²) un résultat de [2].

THEOREME 3. Soient $f: X \to Y$ un *morphisme fortement* (p,q)*-convexe-concave* d'espaces analytiques (de dimension finie bornée et dénombrables à l'infini) et $\varphi\, X \to \mathbb{R}$ une fonction d'épuisemeut correspondante (continue, fortement p-convexe sur $\{c_0 < \varphi\}$ et q-convexe sur $\{\varphi < d_0\}$, avec $d_0 < c_0$). Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohèrent. Alors

(i) Pour tous $d < d_0 < c_0 < c$, le morphisme de O_Y-modules

$$\mathbf{R}^k f_{c!}^d \mathbf{R}\,\mathcal{H}om(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \mathbf{R}^k f_! \mathbf{R}\,\mathcal{H}om(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \quad \text{est}$$

injectif pour $q+3-\operatorname{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p-n$ et *surjectif* pour $q+2-\operatorname{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p-n-1$.

(ii) Pour tous $d < d_0 < c_0 < c$, le morphisme de O_Y-modules

$$\mathbf{R}^k f_{c!}^d \mathcal{F} \to \mathbf{R}^k f_! \mathcal{F} \quad \text{est } \textit{injectif} \text{ pour } q+3 \leq k \leq \operatorname{prof}_X \mathcal{F} - p - n$$

et *surjectif* pour $q+2 \leq k \leq \operatorname{prof}_X \mathcal{F} - p - n - 1$.

(²) Comme il est indiqué dans [2], on peut démontrer l'assertion de finitude de (ii) en utilisant les techniques de [1] et [2]. La méthode proposée ici est assez voisine pour le cas concave mais très différente dans le cas convexe.

Quand X est un espace analytique avec singularités, le résultat de séparation en degré $\operatorname{prof}_X \mathcal{F} - p$ est nouveau.

(On a noté $n = \dim Y$ et f_c^d la restriction de f à $X_c^d = \{d < \varphi < c\}$).

Voici quelques indications sur nos méthodes de démonstration. On constatera que, outre les techniques classiques dans ces questions de convexité (empruntées à [1], [2], et [18] essentiellement), les outils essentiels employés sont les théorèmes de dualité de [22] et les critères de séparation de [24]. L'idée d'utiliser ces résultats pour redémontrer le théorèmes de finitude de [1] et les complèter par un théorème de séparation est due à B. Malgrange (3); il l'a esquissée au cours de quelques exposés au « Séminaire clandestin de Géométrie Analytique » en mars-avril 1968 à Orsay.

Modulo un théorème de dualité de [22] pour l'assertion (i), le théorème 1 se ramène au

THEOREME 4. Dans les conditions du théorème 1.

(i) Les espaces $\mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ sont *séparés* pour $k \leq -p$ est de *dimension finie* pour $k \leq -p-1$.

(ii) Les espaces $H_c^k(X; \mathcal{F})$ sont *séparés* pour $k \leq \mathrm{prof}_{\partial X} \mathcal{F} - p$ et de *dimension finie* pour $k \leq \mathrm{prof}_{\partial X} \mathcal{F} - p - 1$.

Enfin le théorème 4 résulte, moyennant les théorèmes de séparation de [24] et le théorème d'homomorphisme de L. Schwartz [25] du

THEOREME 5. Dans les conditions du théorème 1 :

(i) *a*) Les limites inductives $\mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) = \varinjlim_K \mathrm{Ext}_K^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ sont *essentiellement injectives* pour $k \leq -p$.

b) Il existe un ouvert *relativement compact* X' de X tel que les appplications

$$\mathrm{Ext}_c^k(X'; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) \qquad \text{soient } \textit{surjectives} \text{ pour}$$

$k \leq -p-1$.

(ii) *a*) Les limites inductives $H_c^k(X; \mathcal{F}) = \varinjlim_K H_K^k(X; \mathcal{F})$ sont *essentiellement injectives* pour $k \leq \mathrm{prof}_{\partial X} \mathcal{F} - p$.

b) Il existe un ouvert *relativement compact* X' de X tel que les applications

$$H_c^k(X'; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F}) \qquad \text{soient } \textit{surjectives} \text{ pour}$$

$k \leq \mathrm{prof}_{\partial X} \mathcal{F} - p - 1$.

(3) On la trouve dans [2] pour le cas des faisceaux localement libres sur une variété.

Une fois traduite la condition de *forte* p-convexité en termes de *stricte-p*-convexité (Cf. ci-dessous, page 943), ce théorème s'obtient en recopiant un argument de B. Malgrange [18].

Modulo un théorème de dualité de [22] pour l'assertion (i), le théorème 2 se déduit du

THEOREME 6. Dans les conditions du théorème 2

(i) Les espaces $\mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ sont *séparés* pour $q+2-\mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p$ et de *dimension finie* pour $q+2-\mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p-1$.

(ii) Les espaces $H_c^k(X; \mathcal{F})$ sont *séparés* pour $q+2 \leq k \leq \mathrm{prof}_X \mathcal{F} - p$ et de *dimension finie* pour $q+2 \leq k \leq \mathrm{prof}_X \mathcal{F} - p - 1$.

Ce théorème résulte lui même, moyennant les théorèmes de séparation de [24] et le théorème d'homomorphisme de Schwartz [25] du

THEOREME 7. Dans les conditions du théorème 2, si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est une fonction d'*épuisement* (continue, *fortement p-convexe* sur $\{c_0 < \varphi\}$ et *q-convexe* sur $\{d_0 < \varphi\}$, avec $d_0 < c_0$)

(i) Pour tous $d < d_0 < c_0 < c$, l'application

$$\mathrm{Ext}_c^k(X_c^d; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) \qquad \text{est } \textit{injective} \text{ pour}$$

$q+3-\mathrm{prof}_X F \leq k \leq -p$ et *surjective* pour $q+2-\mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p-1$.

(ii) Pour tous $d < d_0 < c_0 < c$, l'application

$$H_c^k(X_c^d; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; F) \qquad \text{est } \textit{injective} \text{ pour}$$

$q+3 \leq k \leq \mathrm{prof}_X \mathcal{F} - p$ et *surjective* pour $q+2 \leq k \leq \mathrm{prof}_X \mathcal{F} - p - 1$. (On a posé $X_c^d = \{d < \varphi < c\}$.)

On constante que ce théorème est un cas particulier du théorème 3 énoncé plus haut : Y réduit à un point (et ça ne coûte guère plus cher de prouver le théorème 3). Pour l'établir, on commence à traiter séparèment le cas convexe pur et le cas concave pur. Le cas p-convexe est simple : une fois introduite la notion de stable p-convexité (i.e. stricte p-convexité stable par petites perturbations), on utilise la démonstration du théorème 5 ; il reste un passage à la limite qui est très facile car nous travaillons avec des supports compacts. Le cas concave est un peu plus délicat : n'ayant pas à notre disposition l'analogue du théorème 5, on est obligé de revenir à la méthode de la « bosse glissante » et d'employer un argument voisin de celui de [2], ce qui pourra paraître paradoxal au lecteur de [1] (dans cet article c'est au contraire le cas convexe qui est plus difficile).

Signalons enfin qu'en reprenant un argument de [1] et en utilisant les théorèmes de dualité de [22], on peut prouver que, dans les conditions du théorème 7, l'application $\mathrm{Ext}_c^k(X_c^d\,;\mathcal{F},\mathbf{K}_X^{\cdot}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X\,;\mathcal{F},\mathbf{K}_X^{\cdot})$ est bijective pour $k = q + 2 - \mathrm{prof}_X\,\mathcal{F}$ et que l'application $H_c^k\,(X_c^d\,;\mathcal{F}) \to H_c^k(X\,;\mathcal{F})$ est bijective pour $k = q + 2$. Ce résultat (que je n'utilise pas pour établir la finitude) est le seul point pour lequel un travail direct sur la cohomologie ou les Ext à supports compacts ne suffit pas. J'ignore s'il reste vrai dans le cas relatif.

Les assertions (i) et (ii) des théorèmes 4 et 6 se traduisent en résultats de finitude et de séparation pour l'homologie à supports compacts (cf. [3]), en utilisant la formule $\mathrm{Ext}_\Phi^k(X\,;\mathcal{F},\mathbf{K}_X^{\cdot}) = H_{-k}^{\Phi}(X\,;\mathcal{F}_*)$ (où $\mathcal{F}_*$ est le cofaisceau cohérent dual de $\mathcal{F}$), que l'on trouvera démontrée dans [3] (4). Les assertions (ii) des théorèmes 1 et 2 fournissent, par dualité, des résultats de finitude et de séparation pour l'homologie à supports quelconques (en utilisant la même formule). On obtient les

THEOREME 8. Dans les conditions du théorème 1,

(i) Les espaces $H_{-k}^c(X\,;\mathcal{F}_*)$ sont *séparés* pour $k \leq -p$ et de *dimension finie* pour $k \leq -p-1$.

(ii) Les espaces $H_{-k}(X\,;\mathcal{F}_*)$ sont *séparés* pour $p - \mathrm{prof}_{\partial X}\,\mathcal{F} \leq k$ et de *dimension finie* pour $p + 1 - \mathrm{prof}_{\partial X}\,\mathcal{F} \leq k$.

THEOREME 9. Dans les conditions du théorème 2,

(i) Les espaces $H_{-k}^c(X\,;\mathcal{F}_*)$ sont *séparés* pour $q+2-\mathrm{prof}_X\,\mathcal{F} \leq k \leq -p$ et de *dimension finie* pour $q + 2 - \mathrm{prof}_X\,\mathcal{F} \leq k \leq -p-1$.

(ii) Les espaces $H_{-k}(X\,;\mathcal{F}_*)$ sont *séparés* pour $p - \mathrm{prof}_X\,\mathcal{F} \leq k \leq -q-2$ et de *dimension finie* pour $p + 1 - \mathrm{prof}_X\,\mathcal{F} \leq k \leq -q-2$.

Terminons cette introduction par quelques remarques sur le théorème 3 et ses conséquences. Tout comme le théorème 7 entraîne la *finitude* de certains espaces de cohomologie ou d'homologie à *support compacts* (en utilisant la compacité de certaines applications et le théorème d'homomorphisme de Schwartz), d'où l'on déduit par les théorèmes de dualité de [22] la finitude de certains espaces d'homologie et de cohomologie, le théorème 7 entraîne la *cohérence* de certaines images directes à *supports propres* (en utilisant la nucléarité relative de certaines applications et un théorème de finitude

(4) La démonstration est valable même sans hypothèse de réduction sur X. L'idée de considérer $\mathrm{Ext}_\Phi^k(X\,;\mathcal{F},\mathbf{K}_X^{\cdot})$ comme une homologie est déja dans [14].

d'Houzel qui est l'une des versions relatives du théorème d'homomorphisme de Schwartz), d'où l'on déduit par un théorème de dualité relative de [23] la cohèrence de certaines images directes à supports quelconques. Pour des raisons tenant à la méthode d'Houzel (récurrence descendante) on a moins de chance que dans le cas *absolu* et on n'obtient ainsi des résultats que dans le cas *q-concave relatif* (on trouvera ci dessous deux énoncés : théorème 4.2.2. et conjecture 4.2.3.; le théorème 4.2.2. (5) est prouvé dans [23], la démonstration de la conjecture 4.2.3. est esquissée ici). Pour le cas *p convexe relatif* on est obligé de revenir à un théorème d'épuisement pour les images directes à *supports quelconques* (6) (pour être dans une situation de récurrence descendante et pour une autre raison qui sera exposée plus loin) : c'est la méthode utilisée par Knorr et Siegfried ([17] et [26]); reprenant cette méthode pour d'autres images directes, on peut en déduire un théorème de cohèrence, puis par dualité relative un autre théorème de cohèrence sur les images directes à supports propres (conjecture 5.2.3) : la démonstration est esquissée ci-dessous (7).

Nous avons rassemblé dans un appendice quelques indications sur les résultats de *séparation* que l'on peut obtenir dans une situation de *convexité non stricte*, par exemple le théorème suivant démontré (mais non énoncé...) dans [24] :

THEOREME 10. Si X est un espace analytique *holomorphiquement convexe*, pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohèrent $\mathcal{F}$ et tout entier k, les espaces $H^k(X;\mathcal{F})$, $H_c^k(X;\mathcal{F})$, $H_k(X;\mathcal{F}_*)$, et $H_k^c(X;\mathcal{F}_*)$ sont *séparés*.

Il me reste à remercier ici B. Malgrange à qui sont dues les idées initiales de cet article, J. Frisch qui m'a signalé sa démonstration des critères cohomologiques locaux de p-convexité et q concavité (Cf. [11] et ci-dessous : pages 948 et 952), G. Ruget avec qui j'ai longuement discuté du cas relatif et F. Norguet qui m'a invité à exposer une première version de ce travail à son séminaire [21].

---

(5) C'est à dire à une généralisation de la méthode de [1].

(6) Qui améliore un résultat de Y. T. Sin (cf. [27]).

(7) L'auteur donnera une version détaillée des démonstrations des conjectures 4.2.2. et 5.2.3. dans un prochain article.

TABLE DES MATIERES

0. Les théorèmes de dualité et de séparation.

1⁰. Critères locaux de p-convexité et q concavité.

I. Fonctions fortement p-convexes.

II. Quelques ingrédients.

A. Cohomologie d'une limite projective.

B. Produits tensoriels topologiques.

C. La suite spectrale d'une application.

III. Critères locaux de forte p-convexité et q-concavité.

A. Critères locaux de p-convexité.

B. Critères locaux de q-concavité.

IV. Diverses notions de p-convexité et q-concavité.

A. Une autre version des critères locaux de forte p convexité et q-concavité.

B. La stricte p-convexité.

C. La stable p-convexité et la stable q-concavité.

2⁰. Théorèmes d'épuisement, de séparation et de finitude pour les ouverts strictement p-convexes.

3⁰. Théorèmes d'épuisement, de séparation et de finitude pour les espaces stablement (p, q)-convexes-concaves et les espaces fortement (p, q)-convexes-concaves.

I. Espaces stablement p-convexes.

II. Espaces stablement q-concaves.

III. Espaces stablement (p, q)-convexes-concaves.

IV. Espaces fortement (p, q)-convexes-concaves.

4°. Théorèmes d'épuisement pour les applications fortement (p, q)-convexes-concaves. Théorème et conjecture de cohèrence pour les applications fortement q concaves.

I. Théorèmes d'épuisement.

II. Un théorème et une conjecture de cohèrence.

5°. Théorème et conjectures d'épuisement pour les applications fortement (p, q)-convexes-concaves. Théorème et conjecture de cohèrence pour les applications fortement p-convexes.

I. Théorème et conjectures d'épuisement.

II. Théorème et conjecture de cohèrence.

Appendice.

Séparation et convexité non stricte.

0. Les théorèmes de dualité et de séparation.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ci-dessous les résultats de [22] et [24] que nous utiliserons de manière essentielle dans la suite. Dans cette partie, on désigne par X un espace analytique dénombrable à l'infini, de dimension finie bornée.

Dans [22], on a associé à tout espace analytique X (vérifiant les conditions ci-dessus) un complexe borné $\mathbf{K}_X^{\cdot}$ de $\mathcal{O}_X$-modules, à cohomologie cohérente, et une forme linéaire $T_X : H^0(X; \mathbf{K}_X^{\cdot}) \to \mathbb{C}$, tels que soient vrais les deux théorèmes suivants

THEOREME 0.1. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohèrent $\mathcal{F}$ et pour tout entier p, il existe sur $H^p(X; \mathcal{F})$ une unique structure **QFS** et sur $\mathrm{Ext}_c^{-p}(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ une unique structure **QDFS** telles que la forme T_X induise un accouplement parfait entre les séparés associés de ces deux espaces. De plus, la *séparation* de $H^p(X, \mathcal{F})$ est équivalente à celle de $\mathrm{Ext}_c^{1-p}(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$.

THEOREME. 0.2. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohèrent $\mathcal{F}$ et tout entier p, il existe sur $H_c^p(X; \mathcal{F})$ une unique structure **QDFS** et sur $\mathrm{Ext}^{-p}(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ une unique structure **QFS** telles que la forme T_X induise un accouplement

parfait entre les séparés associés de ces deux espaces. De plus, la *séparation* de $H_c^p(X, \mathcal{F})$ est équivalente à celle de $\mathrm{Ext}^{1-p}(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$.

Les topologies du théorème 0.1. sont obtenues en utilisant un recouvrement localement fini $\mathfrak{U}$ de X par des ouverts de Stein (suffisamment petits). Les $H^p(X, \mathcal{F})$ sont les espaces de cohomologie du complexe d'espaces **FS** (et même **FN**) $C^{\cdot}(\mathfrak{U}; H^0(\mathfrak{U}; \mathcal{F}))$; les $\mathrm{Ext}_c^p(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ sont les espaces d'homologie du complexe d'espaces **DFS** (et même **DFN**) $C_{\cdot}^c(\mathfrak{U}; \mathrm{Ext}^0(U; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}))$.

Les topologies du théorème 0.2. sont obtenues en utilisant un recouvrement localement fini $\mathfrak{K}$ de X par des compacts de Stein (suffisamment petits). Les $H_c^p(X, \mathcal{F})$ sont les espaces de cohomologie du complexe d'espaces **DFS** (et même **DFN**) $C_c^{\cdot}(\mathfrak{K}; H^0(\mathfrak{K}; \mathcal{F}))$; les $\mathrm{Ext}^p(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ sont les espaces d'homologie du complexe d'espaces **FS** (et même **FN**) $C_{\cdot}(\mathfrak{K}; \mathrm{Ext}_{\mathfrak{K}}^0(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}))$.

Rappelons la

DEFINITION. Un système inductif $i \longmapsto G_i$ de groupes est dit

(i) *essentiellement injectif* si, pour tout indice j, il existe un indice j', $j < j'$, tel que tout élèment de G_j donnant O dans la limite inductive $\varinjlim_i G_i$ donne déja O dans $G_{j'}$.

(ii) *essentiellement nul* si, pour tout indice j, il existe un indice j', $j < j'$, tel que tout élèment de G_j donne O dans $G_{j'}$.

Dans [24], on a prouvé les théorèmes suivants:

THEOREMES 0.3. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohèrent. Soit $p \in \mathbf{N}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes

(i) L'espace $H_c^p(X; \mathcal{F})$ *est séparé.*

(ii) Le système inductif K (compact de X) $\longmapsto H_K^p(X; \mathcal{F})$ est *essentiellement injectif.*

THEOREME 0.4. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohèrent. Soit $p \in \mathbf{Z}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) L'espace $\mathrm{Ext}_c^p(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ est *séparé.*

(ii) Le système inductif K (compact de X) $\longmapsto \mathrm{Ext}_K^p(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ est *essentiellement injectif.*

Soient $\mathfrak{K}$ un recouvrement localement fini de X par des compacts de Stein et $\mathfrak{U}$ un recouvrement localement fini de X par des ouverts de Stein.

La démonstration de 0.3 et 0.4 utilise les suites spectrales suivantes [8]

$$E_2^{p,q}(J) = H^p(\mathfrak{K}\,;\mathcal{H}^q_{K_J}) \Longrightarrow H^{p+q}_{K_J}(X\,;\mathcal{F})$$

et

$$E_2^{p,q}(J) = H_p(\mathfrak{U}\,;\mathcal{E}xt^0_c(U_J)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{q-p}_c(U_J\,;F,\mathbf{K}^{\cdot}_X).$$

(Les notations sont celles de [24] : J est un ensemble fini d'indices du recouvrement, $K_J = \bigcup_{j\in J} K_j$, $U_J = \bigcup_{j\in J} U_j$; $\mathcal{H}^q_{K_J}$ et $\mathcal{E}xt^0_c(U_J)$ sont des systèmes de coefficients, par exemple $\mathcal{H}^q_{K_J} : (i_0, \dots, i_p) \longmapsto H^q_{K_J \cap K_{i_0 \dots i_p}}(K_{i_0,\dots,i_p}\,;\mathcal{F})$.)

Pour terminer, nous nous proposons d'établir, à l'aide de ces suites spectrales un « résultat utile » :

PROPOSITION 0.5. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohèrent. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

(i) S'il existe un *compact* K de X tel que l'application $H^p_K(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^p_c(X\,;\mathcal{F})$ soit *surjective*, il existe un *sous-ensemble fini* J d'indices du recouvrement $\mathfrak{K}$ tel que l'application $H^p_J(\mathfrak{K}\,;H^0(\mathfrak{K}\,;\mathcal{F})) \longrightarrow H^p_c(X\,;\mathcal{F})$ soit *surjective*.

(ii) S'il existe un compact K de X tel que l'application $\mathrm{Ext}^p_K(X;\mathcal{F},\mathbf{K}^{\cdot}_X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_c(X;\mathcal{F},\mathbf{K}^{\cdot}_X)$ soit *surjective*, il existe un *sous-ensemble fini* J d'indices du recouvrement $\mathfrak{U}$ tel que l'application $H^J_p(\mathfrak{U}\,;\mathrm{Ext}^0_c(\mathfrak{U}\,;\mathcal{F},\mathbf{K}^{\cdot}_X)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_c(X\,;\mathcal{F},\mathbf{K}^{\cdot}_X)$ soit *surjective*.

Les démonstrations de (i) et (ii) étant voisines, nous nous contenterons d'établir (i) (qui sera d'ailleurs la seule assertion de 0.5. utilisée dans la suite).

(i) Pour tout k, on a une surjection $E_2^{k,0}(J) \longrightarrow E_\infty^{k,0}(J)$. Si $q \neq 0$, le système inductif $J \longmapsto E_\infty^{p,q}(J)$ est essentiellement nul (cf. [24]) et $E^{p,q}(J) = 0$ pour q assez grand (indépendamment de J et p). On en déduit que, J (fini) étant fixé, il existe J' (fini) tel que l'image de $gr.\, H^k_{K_J}(X\,;F) = \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{p,q}(J)$ dans $gr.\, H^k_{K_{J'}}(X\,;\mathcal{F}) = \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{p,q}(J')$ soit l'image de $E_\infty^{k,0}(J)$ dans $E_\infty^{k,0}(J')$, donc l'image de $E_2^{k,0}(J)$ dans $E_\infty^{k,0}(J')$. On en déduit que les applications $H^k_{K_J}(X;\mathcal{F}) \longrightarrow H^k_{K_{J'}}(X\,;\mathcal{F})$ et $E_2^{p,0}(J) = H^k(\mathfrak{K}\,;\mathcal{H}^0_{K_J}) \longrightarrow H^k_{K_{J'}}(X\,;\mathcal{F})$ ont

---

[8] Je profite de l'occasion pour indiquer une petite erreur dans cette démonstration [24] (page 275) : $E_2^{p,q}(J)$ n'est pas en général nul pour $q \neq 0$, mais seulement essentiellement nul ; il faut modifier la démonstration en conséquence, ce qui est élémentaire. Je remercie C. Banica de m'avoir signalé cette erreur.

même image. Supposons maintenant $H_K^p(X;\mathcal{F}) \to H_c^p(X,\mathcal{F})$ surjective. On choisit J tel que $K \subset K_J$, et $H_{K_J}^p(X;\mathcal{F}) \to H_c^p(X,\mathcal{F})$ est surjective. On déduit de ce qui précède que $H^p(\mathbb{k};\mathcal{H}_{K_J}^0) \to H_c^p(X,\mathcal{F})$ est surjective. Il existe J'' (fini) tel que $H^p(\mathbb{k};\mathcal{H}_{K_J}^0) = H_{J''}^p(\mathbb{k};\mathcal{H}_{K_J}^0)$ et l'application $H_{J''}^p(\mathbb{k};\mathcal{H}_{K_{J''}}^0) = H_{J''}^p(\mathbb{k};H^0(\mathbb{k};\mathcal{F})) \to H_c^p(X;\mathcal{F})$ est surjective.

1°. Critères locaux de p-convexité et q-concavité (9).

On désignera par $\mathcal{E}(X)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un espace analytique X.

I. *Fonctions fortement p-convexes.*

Dans tout ce qui suit, on désignera par p un entier ≥ 0.

Soient V un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{C}^n$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose $z = (z_1, \dots, z_n)$. La formule de Taylor à l'ordre deux en a s'écrit

$$\varphi(z) = \varphi(a) + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}(a)(z_i - a_i) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial z_j}(a)(z_i - a_i)(z_j - a_j)\right) +$$

$$+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial \bar{z}_j}(a)(z_i - a_i)(\bar{z}_j - \bar{a}_j) + \varepsilon(z - a); \text{ avec } \varepsilon(z - a) \in 0(\|z - a\|^3).$$

On sait (cf. par exemple [15]) que $\sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial \bar{z}_j}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ est invariante par changement analytique régulier de coordonnées. On pose

$$L_a\varphi(u) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial \bar{z}_j}(a)\, u_i \bar{u}_j,$$

et on désigne par $\partial_a\varphi$ la composante $\mathbb{C}$-linéaire de la dérivée de φ en a.

DEFINITION. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs réelles définie au voisinage de a dans E. On dit que φ est *fortement p-convexe* (resp. *régulièrement p convexe*) en a, s'il existe un

(9) Les parties I, II, et III sont inspirées de [11].

sous-espace vectoriel E'' de E, de *codimension* p dans E, tel que $L_a \varphi_{|E''}$ soit définie positive (resp. que $L_a \varphi_{|E''}$ soit définie positive et $\partial_a \varphi_{|E''}$ non nulle). On dit que φ est fortement p-convexe (resp. régulièrement p-convexe) sur un ouvert V de E, si elle l'est en tout point de cet ouvert.

La notion de fonction fortement p-convexe généralise celle de fonction $\mathcal{C}^\infty$ et fortement plurisousharmonique (fortement O-convexe).

REMARQUE. Soit φ une fonction fortement p-convexe à l'origine de E. Soit E'' comme dans la définition ci-dessus et soit E' un supplémentaire de E'' dans E. Il existe un polydisque ouvert U' de centre O dans E' et un polydisque ouvert U'' de centre O dans E'', tels que, pour tout $z' \in U'$ fixé, la fonction $\varphi(z', z'')$ soit $\mathcal{C}^\infty$ et *fortement plurisousharmonique* sur U''.

LEMME 1.1.1. (i) Soit φ une fonction *régulièrement p-convexe* à l'origine de E ($\dim E = n$). Il existe une bijection analytique d'un voisinage V de O dans E sur un voisinage W de O dans $\mathbb{C}^n$, telle que, modulo cette bijection, φ s'écrive

$$\varphi(t) = \varphi(O) + \operatorname{Re} t_{p+1} + Q(t) + \varepsilon(t), \text{ où } Q(O, \dots, O, t_{p+1}, \dots, t_n)$$

est définie positive et $\varepsilon(t) \in 0(\|t\|^3)$.

(ii) Soit φ une fonction *fortement p-convexe* à l'origine de E. Il existe un voisinage ouvert V de O dans E, un voisinage ouvert W de O dans $E \oplus \mathbb{C}$, un plongement $\pi : V \to W$, et une fonction $\psi : W \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et *règulièrement p-convexe* en $\pi(O)$ tels que $\varphi = \psi \circ \pi$.

(i) Soit E'' comme dans la définition, on choisit un supplémentaire E' de E'' dans E. On prend des coordonnées dans E' et E'' : $(z' = z_1, \dots, z\ )$ et $z'' = (z_{p+1}, \dots, z_n)$ telles que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_{p+1}}(O) \neq 0$. On trouve le changement de carte cherché en posant $t_i = z_i$ pour $i \neq p+1$ et $t_{p+1} = \partial_0 \varphi(z) + H_0 \varphi(z)$ (où l'on a posé $H_0 \varphi =$ partie $\mathbb{C}$-bilinéaire de la dérivée seconde de φ en O).

(ii) Il suffit du poser $W = V \oplus \mathbb{C}$, $\pi(z) = (z, O)$, et

$$\psi(z, t) = \varphi(z) + \operatorname{Re} t + \|t\|^2.$$

DEFINITION. Soient X un espace analytique complexe, $a \in X$, et $\varphi : X \to \mathbb{R}$. On dit que φ est fortement p-convexe en a, s'il existe un voisinage ouvert V de a dans X, un ouvert W de $\mathbb{C}^n$, un plongement $\pi : V \to W$, et une fonction $\psi : W \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et fortement p-convexe en $b = \pi(a)$, tels que $\varphi = \psi \circ \pi$.

On vérifie immédiatement que si X est une variété, cette définition coïncide avec la précèdente. On remarque que la fonction ψ de la définition peut, d'après l'assertion (ii) du lemme précèdent, être choisie *régulièrement* p-convexe.

DEFINITION. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y et $a \in \partial X$. On dit que X est fortement p-convexe en a dans Y (resp. fortement q concave en a dans Y), s'il existe un voisinage ouvert V de a dans Y et une application $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et fortement p-convexe (resp. q-convexe) en a tels que $V \cap X = \{x \in V / \varphi(x) < \varphi(a)\}$ (resp. $V \cap X = \{x \in V / \varphi(a) < \varphi(x)\}$).

DEFINITION. Soient Y un espace analytique et X un ouvert de Y. On dit que X est fortement p-convexe (resp. q-concave) dans Y, s'il l'est en tout point de sa frontière ∂X.

II. *Quelques ingrédients.*

On trouvera dans la partie III une démonstration inspirée de [11] des critères locaux de p-convexité et q-concavité d'Andreotti-Grauert. Le lecteur familier avec [1] peut se dispenser de la lecture de II et III : les théorèmes 1.3.1 et 1.3.6. ci dessous pouvant respectivement être remplacés par la proposition 11 page 217 et la proposition 12 page 222 de [1]. Nous aurions évidemment pu nous contenter d'une réfèrence à [1], mais nous désirions cet article autant que possible « self contained » et la démonstration de [11] nous a parue intéressante. Nous avons rassemblé dans la partie A les quelques ingrédients nécessaires à cette démonstration.

A. *Cohomologie d'une limite projective.*

On rappelle qu'un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$-espaces-vectoriels sur un espace topologique paracompact X est dit « *de Fréchet* », si, pour tout ouvert U de X, l'espace $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U; \mathcal{F})$ est muni d'une structure de *Fréchet*, la restriction $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ étant continue pour tout couple d'ouverts $V \subset U$.

PROPOSITION 1.2.1. Soient X un espace topologique paracompact, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X et $\{X_m\}_{m N}$ une suite exhaustive d'ouverts (ou de fermés) de X, avec $\overline{X}_m \subset \overset{\circ}{X}_{m+1}$ pour tout $m \in N$. On désigne par $r^i : H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_m H(X_m; \mathcal{F})$ l'application naturelle.

(i) Pour tout entier i, l'application r^i est *surjective*.

(ii) Si $\mathcal{F}$ est un faisceau *de Fréchet* admettant une résolution *molle* par des faisceaux *de Fréchet*, et si, pour tout $m \in N$, la restriction

$$H^{i-1}(X_{m+1}; \mathcal{F}) \to H^{i-1}(X_m; \mathcal{F})$$

est d'*image dense*, l'application r^i est *bijective*. (La topologie sur les espaces de cohomologie étant la topologie QF, en général non séparée, provenant de la résolution molle.)

(i) Soit $\mathcal{M}^\cdot$ une résolution molle de $\mathcal{F}$. On a $H^i(X; \mathcal{F}) = H^i(\mathcal{M}^\cdot(X))$. Soit $u \in \varprojlim_m H^i(X_m; \mathcal{F})$; on peut le représenter par une suite $u_m \in Z^i(\mathcal{M}^\cdot(X_m))$, avec $u_{m+1} - u_m = da_m$ sur X_m ($a_m \in \mathcal{M}^{i-1}(X_m)$). On cherche $v \in H^i(X; \mathcal{F})$ tel que $r^i(v) = u$; ceci revient à construire une suite $v_m \in Z^i(\mathcal{M}^\cdot(\overline{X}_m))$ telle que $v_{m+1} = v_m$ sur $\overline{X}_m$ et que $v_m - u_m = db_m$ sur $\overline{X}_m$ ($b_m \in \mathcal{M}^{i-1}(\overline{X}_m)$).

On construit v par récurrence sur m. Supposons v_m construit. On a $u_{m+1} - v_m = d(a_m - b_m)$ sur X_m. Le faisceau $\mathcal{M}^{i-1}$ étant mou, on peut prolonger a_m et b_m en des élèments a'_m et b'_m de $\mathcal{M}^{i-1}(\overline{X}_{m+1})$ et poser $v_{m+1} = u_{m+1} - d(a'_m - b'_m)$.

(ii) Soit $\mathcal{M}^\cdot$ une résolution molle de $\mathcal{F}$ par des faisceaux de Fréchet. Pour tous i et m, on peut choisir une suite croissante $\{\|\cdot\|_{i,m,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de semi-normes sur l'espace $\mathcal{M}^i(X_m)$ définissant la topologie de Fréchet de cet espace, avec

$$\| x_{|X_m} \|_{i,m,k} \leq \| x \|_{i,m,k}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{M}^i(X_m),$$

et

$$\| dx \|_{(i+1),m,k} \leq \| x \|_{i,m,k}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{M}^i(X_m).$$

La suite de semi-normes $x \mapsto \| x_{|X_m} \|_{i,m,k}$ est alors croissante et définit la topologie de $\mathcal{M}^i(X)$.

Supposons maintenant vérifiées les conditions de densité de (ii). Soit $u \in \mathcal{M}^i(X)$. On doit montrer que, si pour tout $m \in N$, il existe $v_m \in \mathcal{M}^{i-1}(\overline{X}_m)$ tel que $u_m = u_{\overline{X}_m} = dv_m$, c'est qu'il existe $w \in \mathcal{M}^{i-1}(X)$ tel que $u = dw$. Il suffit pour cela de construire une suite $w_m \in \mathcal{M}^{i-1}(\overline{X}_m)$ telle que

$$\| w_{m+1} - w_m \|_{(i-1),(m-1),(m-1)} \leq 1/2^{m-1} \text{ et } dw_m = u \text{ sur } \overline{X}_{m-1}.$$

On procède par récurrence sur m. Supposons la suite construite jusqu'à w_m. On a $d(v_{m+1} - w_m) = 0$ sur $\overline{X}_{m-1}$. On en déduit l'existence de $a_{m+1} \in$

$M^{i-1}(\overline{X}_{m+1})$ et $b_{m+1} \in M^{i-2}(\overline{X}_{m+1})$ tels que $da_{m+1} = 0$ et

$$\| v_{m+1} - w_m - a_{m+1} - db_{m+1} \|_{(i-1),(m-1),(m-1)} \leq 1/2^{m-1}.$$

Il suffit alors de poser $w_{m+1} = v_{m+1} - a_m - db_{m+1}$.

B. *Produits tensoriels topologiques.*

PROPOSITION 1.2.2. Si E, E', E'', F sont des espaces de *Fréchet,* avec *E ou F nucléaire,* et si la suite $0 \to E' \to E \to E'' \to E \to 0$ est *exacte* (les applications étant $\mathbb{C}$-linéaires *continues*), la suite

$$0 \to E' \widehat{\otimes} F \to E \widehat{\otimes} F \to E'' \widehat{\otimes} F \to 0 \qquad \text{est également } \textit{exacte.}$$

(Il est inutile de prèciser de quel produit tensoriel topologique il s'agit, puisque dans chaque produit l'un des facteurs est *nucléaire.*)

On trouvera la démonstration dans [13].

PROPOSITION 1.2.3. Soient $E = \varinjlim_i E_i$ et $F = \varinjlim_j F_j$ deux espaces **LFN** (limite inductive dénombrable stricte no de Silva d'espaces **FN**). Alors l'application naturelle

$$\varinjlim_{i,j} E_i \widehat{\otimes} F_j \to E \widehat{\otimes} F$$

est un *isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.* (Il est inutile de préciser le produit tensoriel $E \otimes F$ puisque E et F sont *nucléaires.*)

En considèrant les produits tensoriels comme $\widehat{\otimes}_\varepsilon$, on voit que la topologie induite par $E \widehat{\otimes} F$ sur l'image de $\varinjlim_{i,j} E_i \widehat{\otimes} F_j$ coïncide avec la topologie limite inductive de $\varinjlim_{i,j} E_i \widehat{\otimes} F_j$ (Cf. [12], proposition 14.I., page 76). Par ailleurs $\varinjlim_{i,j} E_i \widehat{\otimes} F_j$ est **LFN** au sens défini ci-dessus, donc *complet,* et, de plus son image dans $E \widehat{\otimes} F$ est *dense.*

C. *La suite spectrale d'une application.*

PROPOSITION 1.2.4. Si X et Y sont des espaces topologiques, $f: X \to Y$ une application continue et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X, on

a une *suite spectrale* (de Leray)

$$E_2^{p,q} = H^p(Y; R^q f_* \mathcal{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X; \mathcal{F}).$$

On trouverà la démonstration par exemple dans [6] (c'est un cas particulier du théorème 6.1.).

PROPOSITION 1.2.5. Dans les conditions de la proposition précèdente, si f est *propre*, on a

$$(R^q f_* \mathcal{F})_y = H^q(f^{-1}(y); \mathcal{F}), \text{ pour tout } y \in Y.$$

On trouvera la démonstration dans [6] (proposition 4.2).

III. *Critères locaux de forte p-convexité et q-concavité.*

A. *Critères locaux de p-convexité.*

Soient Y un espace analytique et X un ouvert de Y. Voici une première manière de traduire la forte p-convexité de X dans Y en $a \in \partial X$. Comme nous l'avons annoncé plus haut ce résultat n'est pas autre chose que la proposition 11 de [1]. Les seules assertions du théorème ci-dessous que nous utiliserons dans la suite sont (i) et la partie de (iii) relative à (i) (l'assertion (ii) intervient dans la méthode d'approximation de [1] que nous évitons ici) (10).

THEOREME 1.3.1. Soient Y un espace analytique, $a \in Y$, $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ une fonction *fortement p-convexe* en a et $X = \{x \in Y / \varphi(x) < \varphi(a)\}$. Il existe un *système fondamental de voisinages ouverts de Stein* $\{V_m\}_{m \in N}$ de a dans Y, tel que, pour tout $m \in N$ et tout $\mathcal{O}_Y$-module *cohèrent* F, on ait

(i) $H^k(V_m \cap X; \mathcal{F}) = 0$ pour $p + 1 \leq k$.

(ii) $H^p(V_m \cap X; \mathcal{F})$ est un espace topologique *grossier* si $1 \leq p$, et l'application $\Gamma(V_m; \mathcal{F}) \to \Gamma(V_m \cap X; \mathcal{F})$ est *d'image dense* si $p = 0$.

(iii) Il existe une semi-norme $\|\cdot\|$ de $\mathcal{E}(Y)$, définie par plongement dans un ouvert d'espace $\mathbb{R}^n$, et un nombre réel $t_0 > 0$ tels que, pour tout $m \in N$ et toute fonction α de $\mathcal{E}(Y)$ vérifiant $\|\alpha\| < t_0$, les assertions (i) et (ii) restent valables si l'on remplace X par $Z_\alpha = \{x \in Y / \varphi(x) + \alpha(x) < \varphi(a)\}$.

---

(10) Cf. toutefois page 974.

Les semi-normes sur $\mathcal{E}(Y)$ définies par plongement sont les semi-normes

$$\|f\|_{K,V,W,\pi,k} = \operatorname*{Inf}_{\left[\substack{\psi \in \mathcal{E}(\pi(K)) \\ \varphi = \psi \circ \pi}\right.} \operatorname*{Sup}_{x \in K} \operatorname*{Sup}_{|i| \leq k} |D^i \psi(\pi(x))|,$$

où K est un compact (d'intèrieur non vide) de Y, V un voisinage ouvert de K dans Y, $\pi : V \to W$ un plongement de V dans un ouvert W de $\mathbb{C}^n$ et k un entier. On verra dans la démonstration que l'on peut prendre $k = 2$ pour la semi-norme de (iii); en d'autres termes (iii) exprime la stabilité des critères cohomologiques (i) et (ii) par petites (au sens $\mathcal{C}^2$) perturbations de φ.

Compte tenu des définitions, il suffit de démontrer le théorème quand Y est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $a = 0$. De plus, il suffit alors de montrer le théorème pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, come le prouve le

LEMME 1.3.2. Dans les conditions du théorème, si Y est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et si le théorème est vrai pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, il est vrai pour tout $\mathcal{O}_Y$-module cohèrent $\mathcal{F}$.

Quitte à restreindre Y, on peut supposer que $\mathcal{F}$ admet une résolution libre

$$0 \to \mathcal{O}_Y^{r_n} \to \dots \mathcal{O}_Y^{r_0} \to \mathcal{F} \to 0.$$

La décomposition en petites suites exactes de cette résolution fournit

$$0 \to \mathcal{Z}^{i+1} \to \mathcal{O}_Y^{r_i} \to \mathcal{Z}^i \to 0.$$

(i) Si $p + 1 \leq k$, on a $H^k(V \cap X; \mathcal{O}_Y^r) = 0$, donc $H^k(V \cap X; \mathcal{Z}^i) = H^{k+1}(V \cap X; \mathcal{Z}^{i+1})$, d'où

$$H^k(V \cap X; \mathcal{F}) = H^k(V \cap X; \mathcal{Z}^0) = \dots = H^{k+n+1}(V \cap X; \mathcal{Z}^{n+1}) = 0.$$

(ii) On a la suite exacte

$$H^p(V \cap X; \mathcal{O}_Y^r) \to H^p(V \cap X; \mathcal{F}) \to H^{p+1}(V \cap X; \mathcal{Z}^1) = 0 \to 0.$$

Ainsi, si $1 \leq p$, $H^p(V \cap X; \mathcal{O}_Y^r)$ est grossier, donc $H^p(V \cap X; \mathcal{F})$ l'est aussi. Si $p = 0$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y^{r_0}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
\mathcal{O}_Y^{r_0}(V \cap X) \arrow[r] & \mathcal{F}(V \cap X) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes et l'application α est dense; il en résulte que l'application β est également dense.

On choisit E'' comme dans la définition de la p-convexité, et un supplémentaire E' de E'' dans E. Il existe alors un polydisque V produit des polydisques V' et V'' de centre O respectivement dans E' et E'' tel que les fonctions $\varphi(z', z'')$ soient fortement O-convexes sur $\overline{V}''$ quand z' est fixé dans $\overline{V}'$.

On désigne par $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ les faisceaux structuraux de E' et E'' respectivement, par $\mathcal{E}'^{0,i}$ le faisceau des formes différentielles de bidegré $(0, i)$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ sur E', par $\mathcal{N}^i = \mathcal{E}'^{0,i} \widehat{\otimes} \mathcal{O}''$ le faisceau des formes différentielles de degré i en les $d\overline{z}_j (j = 1, \dots, p)$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ sur E analytiques en z''. On a une résolution du faisceau structural $\mathcal{O}$ de E

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{N}^0 \to \dots \to \mathcal{N}^p \to 0.$$

Prouvons maintenant que, quand Y est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, le théorème résulte du

LEMME 1.3.3. Avec les notations précèdentes, soit $\{Z_m\}_{m \in N}$ une suite d'ouverts de V tels que, pour tout $m \in N$ et tout $z' \in V'$, $Z_m(z') = \{z'' \in V''/(z', z'') \in Z_m\}$ soit *de Runge* et *de Stein* dans V'', et que $\overline{Z}_m \subset Z_{m+1}$. Si $Z = \bigcup_{m \in N} Z_m$, pour tout polydisque ouvert U de centre O dans E, $U = U' \times U''$ avec $U' \subset V'$ et $U'' \subset V''$, on a

(i) Pour tout $0 \leq i$ et tout $1 \leq k$, $H^k(U \cap Z; \mathcal{N}^i) = 0$.

(ii) Pour tout $0 \leq i$, l'application $\mathcal{N}^i(U) \to \mathcal{N}^i(U \cap Z)$ est d'image dense.

(On vérifie facilement que ce lemme s'applique à $Z = X$ en utilisant le

LEMME 1.3.4. Si W est un *ouvert de Stein* de $\mathbb{C}^m$ et $\psi : W \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et *fortement plurisousharmonique* (ou O-convexe) sur W, l'ouvert $\{\psi < a\}$ est, pour tout $a \in \mathbb{R}$, *de Runge* et *de Stein* dans W.)

On trouvera une démonstration dans [5], par exemple.

L'assertion (i) du théorème 1.3.1. résulte du théorème de De Rham appliqué à la résolution $\mathcal{N}^\cdot$ de O. Si $1 \leq p$, l'assertion (ii) est claire si l'on remarque que dans le diagramme commutatif ci-dessous, où la première ligne est *exacte*, les deux flêches verticales sont *denses*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N}^{p-1}(U) & \to & \mathcal{N}^p(U) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{N}^{p-1}(U \cap X) & \to & \mathcal{N}^p(U \cap X). & & \end{array}$$

La densité de $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U \cap X)$ est évidente si $p = 0$.

Enfin l'assertion (iii) du théorème va de soi si l'on constate qu'en perturbant assez peu φ, au sens de la norme $\mathcal{C}^2$, $\varphi(z', z'')$ reste fortement plurisousharmonique sur $\overline{V}''$, pour tout $z' \in \overline{V}'$.

Il reste à démontrer le lemme 1.3.3. :

Assertion (ii).

Nons n'utiliserons pas les Z_m et supposerons simplement que, pour $z' \in V'$, $Z(z')$ est *de Runge* et *de Stein* dans V''.

Soit $u \in \mathcal{N}^i(U \cap Z)$. Soit K un compact de $U \cap Z$. On recouvre K par une famille finie de polydisques ouverts $W_j = W_j' \times W_j''$, avec W_j'' de Runge dans U'', $W_j \subset U \cap Z$. On a $\mathcal{N}^i(W_j) = \mathcal{E}'^{0,i}(W_j') \widehat{\otimes} \mathcal{O}''(W_j'')$ et $N^i(W_j' \times U'') = E'^{0,i}(W_j') \widehat{\otimes} O''(U'')$. La restriction $\mathcal{O}''(U'') \to \mathcal{O}''(W_j'')$ étant d'image dense, il en est de même de la restriction $\mathcal{N}^i(W_j' \times U'') \to$ $\to N^i(W_j)$ (considèrer $\widehat{\otimes}$ comme $\widehat{\otimes}_\pi$). Soit alors, pour chaque j, une suite v_j^m une suite d'élèments de $\mathcal{N}^i(W_j' \times U'')$ dont les restrictions convergent dans $\mathcal{N}^i(W_j)$ vers $u_{|W_j}$; une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité au voisinage de la projection de K sur U', subordonnée au recouvrement $\{W_j'\}$, permet de construire une suite $\{u^m\}$ d'élèments de $\mathcal{N}^i(U)$ telle que $u^m_{|U \cap Z}$ converge vers u dans $\mathcal{N}^i(K)$.

Assertion (i).

Compte tenu de la proposition 1.2.1., cette assertion résulte du

LEMME 1.3.5. Soit T un fermé de V tel que, pour tout $z' \in V'$, le fermé $T(z')$ soit *de Stein* et *de Runge* dans V''. Alors pour tout polydisque ouvert $U = U' \times U''$, de centre O, tel que $\overline{U} \subset V$, on a $H^k(U \cap T; \mathcal{N}^i) = 0$ pour $0 \leq i$ et $1 \leq k$.

Il n'y a plus qu'à établir ce dernier résultat. Il suffit évidemment de le prouver pour $\mathcal{N}^0 = \mathcal{N}$. Désignons par $\mathcal{E}''^{0,i}$ le faisceau des germes de formes différentielles de bidegré $(0, i)$, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, sur E'', et par $\mathcal{M}^i$ le faisceau des germes de formes différentielles de degré i en les $d\overline{z}_j (j = p+1, \dots, n)$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ sur E.

On a $\mathcal{M}^i = \mathcal{E}''^{0,i} \widehat{\otimes} \mathcal{E}'$. On a une résolution de $\mathcal{N}$:

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{M}^0 \to \dots \to \mathcal{M}^{n-p} \to 0.$$

Désignons par π la projection $\overline{U} \cap T \to \overline{U}'$. On a la suite spectrale de Leray (Cf. 1.2.4.) $E_2^{i,j} = H^i(\overline{U}'; R^j \pi_* \mathcal{N}) \Longrightarrow H^{i+j}(\overline{U} \cap T; \mathcal{N})$. Comme l'ap-

plication π est *propre*, on a (Cf. 1.2.5.)

$$(R^j \pi_* \mathcal{N})_{z'} = H^j(\{z'\} \times T(z'); \mathcal{N}).$$

Calculons $H^j(\{z'\} \times T(z'); \mathcal{N})$. On a $H^j(\{z'\} \times T(z'); \mathcal{N}) = \varinjlim H^j(W' \times \times W''; \mathcal{N})$, où W' décrit un système fondamental de voisinages ouverts de Stein de z' dans E' et W'' un système fondamental de voisinages ouverts de Stein de $T(z')$ dans E''. Mais $H^j(W' \times W''; \mathcal{N}) = H^j(\mathcal{M}^\cdot(W' \times W''))$ (les faisceaux $M^\cdot$ sont fins) et $\mathcal{M}^\cdot(W' \times W'') = \mathcal{E}''^{0,\cdot}(W'') \widehat{\otimes} \mathcal{E}'(W')$. De $H^j(W''; \mathcal{O}'') = H^j(\mathcal{E}''^{0,\cdot}(W'')) = 0$ pour $1 \leq j$, on déduit, en utilisant 1.2.2., que $H^j(W' \times W''; \mathcal{N}) = 0$ pour $1 \leq j$. Ainsi nous avons démontré que $H^j(\{z'\} \times T(z'); \mathcal{N}) = 0$ pour $1 \leq j$; le faisceau $R^j \pi_* \mathcal{N}$ est donc nul pour $1 \leq j$, la suite spectrale de Leray est dégénérée et

$$E_2^{i,0} = E_\infty^{i,0} = H^i(\bar{U}'; \pi_* N) = 0$$

pour $1 \leq i$, car $\pi_* N$ est un faisceau *fin*. Finalement gr. $H^k(\bar{U} \cap T; \mathcal{N}) = \bigoplus_{i+j=k} E_\infty^{i,j} = E_2^{k,0} = 0$ pour $1 \leq k$, ce qui termine la démonstration.

B. *Critères locaux de q-concavité.*

Le théorème suivant fournit une traduction cohomologique de la q-concavité. Comme nous l'avons déjà signalé, ce résultat n'est pas autre chose que la proposition 12 de [1].

THÉORÈME 1.3.6. Soient Y un espace analytique, a Y, et $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction *fortement q-convexe* en a. Soit $X = \{x \in Y / \varphi(a) < \varphi(x)\}$. Il existe un *système fondamental de voisinages ouverts de Stein* $\{V_m\}_{m \in N}$ de a dans Y tel que, pour tout $m \in N$ et tout $\mathcal{O}_Y$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, tel que $\operatorname{prof}_{\bar{V}_m} \mathcal{F} \geq q + 2$, on ait

(i) La restriction $\mathcal{F}(V_m) \to \mathcal{F}(V_m \cap X)$ est un *isomorphisme*.

(ii) $H^k(V_m \cap X; \mathcal{F}) = 0$ pour $1 \leq k \leq \operatorname{prof}_{\bar{V}_m} \mathcal{F} - q - 2$.

(iii) Il existe une semi-norme $\|\cdot\|$ de $\mathcal{E}(Y)$, définie par plongement dans un ouvert d'espace $\mathbb{R}^n$, et un nombre réel $t_0 > 0$ tels que, pour tout $m \in N$ et toute fonction $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$, vérifiant $\|\alpha\| < t_0$, les assertions (i) et (ii) restent valables si l'on remplace X par $Z^\alpha = \{x \in Y / \varphi(a) < \varphi(x) + \alpha(x)\}$.

PROPOSITION 1.3.7. Dans les conditions du théorème précèdent, si $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$ est positive, à support compact dans V_m, et si $\|\alpha\| < t_0$, on a $X \subset Z^\alpha = \{x \in Y / \varphi(a) < \varphi(x) + \alpha(x)\}$ et la restriction

$$H^{\mathrm{prof}_{\bar{X}_m} \mathcal{F} - q - 1}(V_m \cap Z; \mathcal{F}) \to H^{\mathrm{prof}_{\bar{X}_m} F - q - 1}(V_m \cap X; \mathcal{F}) \quad \text{est injective.}$$

Rappelons la cohomologie d'une « *couronne* » *fermée* :

PROPOSITION 1.3.8. Soient U un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^m$ $(m \geq 2)$ et V un ouvert de Stein relativement compact dans U. On a

$$H^k(\bar{U} - V; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}) = \begin{cases} \mathcal{O}(\bar{U}) & \text{si } k = 0. \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq m-2. \\ H_c^m(V; \mathcal{O}) & \text{si } k = m-1. \\ 0 & \text{si } m \leq k. \end{cases}$$

On constate que $\mathcal{O}(\bar{U})$ et $H_c^m(V; \mathcal{O})$ qui est le dual topologique de $\Omega(V)$ sont munis de topologie **DFN** (Cf. [22]). Tous les espaces de cohomologie d'une couronne fermée sont *séparés*.

On a une *suite exacte de cohomologie*

$$\ldots \to H_c^k(V; \mathcal{O}) \to H^k(\bar{U}; \mathcal{O}) \to H^k(\bar{U} - V; \mathcal{O}) \to H_c^{k+1}(V; \mathcal{O}) \to \ldots .$$

Mais $H^k(\bar{U}; \mathcal{O}) = 0$ si $1 \leq k$ et $\mathcal{O}(\bar{U})$ si $k = 0$, et $H_c^k(V; \mathcal{O}) = 0$ si $k \neq m$ et est le dual de $\Omega(V)$ si $k = m$.

Rappelons également la cohomologie d'une « *couronne* » *ouverte* :

PROPOSITION 1.3.9. Soient U un polydisque onvert de $\mathbb{C}^m$ $(m \geq 2)$ et K un compact de Stein de U. On a

$$H^k(U - K; O) = \begin{cases} \mathcal{O}(U) & \text{si } k = 0. \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq m-2. \\ H_K^m(U; \mathcal{O}) & \text{si } k = m-1 \\ 0 & \text{si } m \leq k. \end{cases}$$

On constate que $\mathcal{O}(U)$ et $H_K^m(U;\mathcal{O})$ qui est le dual topologique de $\Omega(K)$ sont munis de topologies FN (Cf. [22]). Tous les espaces de cohomologie d'une couronne ouverte sont *séparés*. La démonstration se fait comme dans le cas précédent. On utilise la suite exacte de cohomologie

$$\ldots \to H_K^k(U;\mathcal{O}) \to H^k(U;\mathcal{O}) \to H^k(U-K;\mathcal{O}) \to H_K^{k+1}(U;\mathcal{O}) \to \ldots .$$

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.3.6. Compte tenu des définitions, il suffit de prouver le théorème quand Y est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $a=0$, et, compte tenu également du lemme 1.1.1. (ii), quand φ est *régulièrement* q-convexe en 0. De plus, il suffit alors de démontrer le théorème pour $\mathcal{F}=\mathcal{O}_Y$ comme le montre le

LEMME 1.3.10. Dans les conditions du théorème, si Y est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et si le théorème est vrai pour $\mathcal{F}=\mathcal{O}_Y$, il est vrai pour tout $\mathcal{O}_Y$-module cohèrent $\mathcal{F}$.

On procède par récurrence descendante sur $\operatorname{prof}_0 \mathcal{F}$. Le théorème est vrai pour $\operatorname{prof}_0 \mathcal{F}=n$. Supposons le vrai pour $\operatorname{prof}_0 \mathcal{F}=p$. Quitte à restreindre Y, on peut supposer que l'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L} \to \mathcal{F} \to 0,$$

où $\mathcal{L}$ est libre de type fini et $\mathcal{N}$ de profondeur $\geq p+1$ sur Y.

(i) On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{N}(V_m) & \to & \mathcal{L}(V_m) & \to & \mathcal{F}(V_m) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{N}(V_m \cap X) & \to & \mathcal{L}(V_m \cap X) & \to & \mathcal{F}(V_m \cap X) & \to & 0.
\end{array}$$

Les deux premières flèches verticales étant des *isomorphismes* et les deux lignes étant *exactes*, la troisième flèche verticale est aussi un *isomorphisme*.

(ii) On a la suite exacte

$$H^k(V_m \cap X;\mathcal{L}) \to H^k(V_m \cap X;\mathcal{F}) \to H^{k+1}(V_m \cap X;\mathcal{N}).$$

Si $1 \leq k \leq p-q-2$, le premier et le dernier termes sont nuls et $H^k(V_m \cap X;\mathcal{F})=0$.

Revenons donc à la démonstration du théorème pour Y ouvert de $\mathbb{C}^n$, $a = 0$, φ régulièrement q-convexe en 0 et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$. Compte tenu du lemme 1.1.1. (i), on peut supposer que l'on a une décomposition $E = E' \oplus E''$ et des coordonnées $z' = (z_1, \dots, z_q)$ et $z'' = (z_{q+1}, \dots, z_n)$ telles que

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} z_{q+1} + Q(z) + \varepsilon(z),$$

où Q est une forme hermitienne dont la restriction à E'' est définie positive et $\varepsilon(z) \in o(\|z\|^3)$.

On pose alors $F' = E' \oplus \mathbb{C}\, e_{q+1}$ et $F'' = \mathbb{C}\, e_{q+2} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\, e_n$, $t' = (z_1, \dots, z_{q+1})$, et $t'' = (z_{q+2}, \dots, z_n)$ (dim $E'' = n - q - 1$).

On pose $Z = Y - X$, $X(t') = \{t'' \in F''/(t', t'') \in X\}$ et $Z(t') = \{t'' \in F''/(t', t'') \in Z\}$, pour $t' \in F'$.

Modulo un raisonnement élémentaire utilisant 1.2.1., tout sera terminé quand nous aurons prouvé le

Lemme 1.3.11. Si V est un polydisque ouvert de centre 0 dans Y, avec $V = V' \times V''$, $V' \subset F'$ et $V'' \subset F''$, vérifiant les conditions

(*a*) $\bar{Z} \cap (\bar{V}' \times F'') \subset \bar{V}' \times V''$,

(*b*) Pour tout $t' \in \bar{V}'$, l'ensemble $Z(t')$ est ouvert *de Stein* et *de Runge* dans V'',

(*c*) $W' = \{t' \in V'/\operatorname{Re} t_{q+1} > 0\}$ est tel que $Z(t') = \varnothing$ si $t' \in W'$,

on a

(i) Si $q + 2 \leq n$, la restriction $\mathcal{O}(\bar{V}) \to \mathcal{O}(\bar{V} \cap \bar{X})$ est un isomorphisme.

(ii) Si $q + 3 \leq n$, $H^k(\bar{V} \cap \bar{X}; \mathcal{O}) = 0$ pour $1 \leq k \leq n - q - 2$.

(i) Cette assertion est facile à établir. On fait un développement en série de Laurent de $f \in \mathcal{O}(\bar{V} \cap \bar{X})$ suivant les puissances de t'' (à coefficients dans $\mathcal{O}(\bar{V}')$) convergent sur un voisinage ouvert de $\bar{V}' \times V''$; la série des puissances positives de t'' de ce développement fournit une fonction g, analytique sur $\bar{V}$ et coïncidant avec f sur l'ouvert $W' \times V''$, donc sur $\bar{V} \cap \bar{X}$. On a ainsi prouvé la *surjectivité* de la restriction $\mathcal{O}(\bar{V}) \to \mathcal{O}(\bar{V} \cap \bar{X})$, qui est *évidemment injective*, donc l'assertion (i).

(ii) Supposons $q + 3 \leq n$. Notons $\pi : \bar{V} \cap \bar{X} \to V'$ la projection. On a la suite spectrale de Leray (cf. 1.2.4)

$$E_2^{i,j} = H^i(\bar{V}; R^j \pi_* \mathcal{O}) \Longrightarrow H^{i+j}(\bar{V} \cap \bar{X}; \mathcal{O}).$$

Et, comme l'application π est *propre*, on a (cf. 1.2.5.)

$$(R^j \pi_* \mathcal{O})_{t'} = H^j(\{t'\} \times (\bar{X}(t') \cap \bar{V}''); \mathcal{O}).$$

On désigne respectivement par $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ les faisceaux structuraux de F' et F''. On a

$$H^j(\{t'\} \times (\bar{X}(t') \cap \bar{V}''); \mathcal{O}) = \varinjlim_{k,1} H^j(U'_k \times U''_1; \mathcal{O}),$$

où U'_k est un polydisque ouvert de centre t' dans F' et décrit un système fondamental *dénombrable* de voisinages de t' dans F', et U''_1 une *couronne ouverte* (au sens de 1.3.9.) et décrit un système fondamental *dénombrable* de voisinages de la *couronne fermée* $\bar{X}(t') \cap \bar{V}''$ dans F''.

L'espace $\mathcal{O}'(U'_k)$ est naturellement muni d'une structure **FN** et les espaces $H^j(U''_1; \mathcal{O}'')$ sont munis de structures **FN** d'après 1.3.9.. La proposition 1.2.2., compte tenu de la nullité des $H^j(U'_k; \mathcal{O}')$ pour $1 \leq j$, permet de montrer que

$$H^j(U'_k \times U''_1; \mathcal{O}) = \mathcal{O}'(U'_k) \hat{\otimes} H^j(U''_1; \mathcal{O}'').$$

D'après la proposition 1.2.3., l'application naturelle

$$H^j(\{t'\} \times (\bar{X}(t') \cap \bar{V}''); \mathcal{O}) =$$

$$= \varinjlim_{k,1} \mathcal{O}'(U'_k) \hat{\otimes} H^j(U''_1; \mathcal{O}'') \to \varinjlim_{k} \mathcal{O}'(U'_k) \hat{\otimes} \varinjlim_{1} H^j(U''_1; \mathcal{O}'')$$

est un *isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques*. Mais

$$\varinjlim_{k} \mathcal{O}'(U'_k) = \mathcal{O}'_{t'}$$

avec sa topologie **DFN** et

$$\varinjlim_{1} H^j(U''_1; \mathcal{O}'') = H^j(\bar{X}(t') \cap \bar{V}''; \mathcal{O}'')$$

avec sa topologie **DFN** (cf. 1.3.8.). Finalement

$$H^j(\{t'\} \times (\overline{X}(t') \cap \overline{V}''); \mathcal{O}) = \mathcal{O}'_{t'} \widehat{\otimes} H^j(\overline{X}(t') \cap \overline{V}''; \mathcal{O})$$

(et est naturellement muni d'une topologie **DFN**). Utilisant les résultats de 1.3.8., on en déduit que

$$(R^j \pi_* \mathcal{O})_{t'} = \begin{cases} \mathcal{O}'_{t'} \widehat{\otimes} \mathcal{O}''(V'') & \text{si } j = 0. \\ 0 & \text{si } 1 \leq j \leq n-q-3. \\ \mathcal{O}'_{t'} \widehat{\otimes} (\Omega''(\overline{Z(t')}))' & \text{si } j = n-q-2. \\ 0 & \text{si } n-q-1 \leq j. \end{cases}$$

Ainsi, de l'application

$$(\Omega''(\overline{Z(t')}))' \longrightarrow (\Omega''(\overline{V}''))'$$

déduite par transposition de la restriction

$$\Omega''(\overline{V}'') \longrightarrow \Omega''(\overline{Z(t')}),$$

on déduit un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}'_{\overline{V}'}$-modules

$$R^{n-q-2}\pi_* \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'_{\overline{V}'} \widehat{\otimes} (\Omega''(\overline{V}''))'$$

(ce dernier faisceau pouvant être considéré ([7]) comme le faisceau des germes de fonctions analytiques sur $\overline{V}'$ à valeurs dans l'espace **FN** $(\Omega''(\overline{V}''))'$). La restriction $\Omega''(\overline{V}'') \longrightarrow \Omega''(\overline{Z(t')})$ est *d'image dense* (condition (*b*) de 1.3.11.), sa *transposée* est donc *injective* et reste injective par tensorisation topologique par $\mathcal{O}'_{t'}$ (considérer $\widehat{\otimes}$ comme $\widehat{\otimes}_\varepsilon$). Ainsi, on peut considérer $R^{n-q-2}\pi_* \mathcal{O}$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{O}'_{\overline{V}'} \widehat{\otimes} (\Omega''(\overline{V}''))'$; d'après la condition (*c*) de 1.3.11., ce sous-faisceau est *nul* sur l'ouvert *non vide* W', et il en résulte que $H^0(\overline{V}'; R^{n-q-2}\pi_* \mathcal{O}) = 0$.

Nous pouvons donc écrire le deuxième étage de la suite spectrale pe Leray

j	0	0
$n-q-2$	0	? ? ? ? ...
	0	0
0	$0(\overline{V})$	0
	0	i

On a alors $E_2^{i,j} = E_\infty^{i,j} = \mathrm{gr}_i\, H^{i+j}(\overline{V} \cap \overline{X}; \mathcal{O})$. Donc

$$\mathrm{gr}.\, H^0(\overline{V} \cap \overline{X}; \mathcal{O}) = \bigoplus_{i+j=0} E_\infty^{i,j}$$

se réduit à $\mathcal{O}(\overline{V})$ et $H^0(\overline{V} \cap \overline{X}; \mathcal{O}) = \mathcal{O}(\overline{V})$, ce qui redonne l'assertion (i). D'autre part

$$\mathrm{gr}.\, H^k(\overline{V} \cap \overline{X}; O) = \bigoplus_{i+j=k} E_\infty^{i,j} = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n-q-2$$

et $H^k(\overline{V} \cap \overline{X}; \mathcal{O}) = 0$ dans les mêmes conditions, ce qui termine la démonstration.

IV. *Diverses notions de p-convexité et de q concavité.*

En travaillant avec la cohomologie (ou les Ext) à *supports quelconques*, les critères locaux de p-convexité et q-concavité d'Andreotti-Grauert (1.3.1. et 1.3.6.) conduisent par globalisation aux théorèmes de finitude ([1]). Nous désirons montrer ces théorèmes en travaillant avec la cohomologie (ou les Ext) à *supports compacts*; il nous faut donc une autre version des critères locaux. C'est l'objet de la partie A, le résultat essentiel étant la proposition 1.4.2. On constatera ci-dessous l'analogie entre les nouveaux critères locaux obtenus et la notion de *stricte-p-convexité* introduite par B. Malgrange dans [18] ([11]). La partie B est consacrée aux rappels et compléments néces-

([11]) On évitera de confondre la stricte p-convexité de Malgrange avec celle de [4].

saires sur la stricte p-convexité. On introduit dans C les notions de « *stable p-convexité* » et « *stable q-concavité* » ; la proposition 1.4.2. se reformule alors ainsi :

en un point frontière d'un ouvert X d'un espace analytique Y,

La *forte p convexité* de $X \Longrightarrow$ La *forte p-concavité* du *complémentaire* de $X \Longrightarrow$ La *stable p convexité* de $X \Longrightarrow$ La *stricte p-convexité* de X, et

La *forte q-concavité* de $X \Longrightarrow$ La *forte q convexité* du *complémentaire* de $X \Longrightarrow$ La *stable q-concavité* de X.

Ce résultat nous permettra de travailler dans le cadre de la *stricte p-convexité* pour établir le théorème 1 et dans celui de la *stable* (p, q)-*convexité-concavité* pour établir le théorème 2.

A. *Une autre version des critères locaux de forte p-convexité et de forte q-concavité.*

LEMME 1.4.1. Soient Y un voisinage ouvert de O dans $\mathbb{C}^n$, $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, $t_0 > 0$ un nombre réel, p et q deux entiers positifs, avec $p + 2 \leq n$. On suppose que $\varphi(O) = 0$; on pose

$$X_\alpha = \{x \in Y / \varphi(x) + \alpha(x) < 0\}$$

et

$$Z_\alpha = \{x \in Y / O < \varphi(x) + \alpha(x)\},$$

et on suppose que

$$\partial Z_\alpha = \partial X_\alpha = \{x \in Y / \varphi(x) + \alpha(x) = 0\}$$

pour $\|\alpha\|_2 < t_0$ ($\|\cdot\|_2$ désigne la « norme » $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{E}(Y)$).

(i) S'il existe un système fondamental $\{V_m\}_{m \in N}$ de voisinages ouverts de Stein de O dans Y, et un nombre réel t_1, $0 < t_1 \leq t_0$, tels que, pour tout m et toute fonction $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$, avec $\|\alpha\|_2 < t_1$, on ait

(a) la restriction $\Gamma(V_m ; \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(V_m \cap Z_\alpha ; \mathcal{O}_Y)$ est un isomorphisme, et

(b) $H^k(V_m \cap Z_\alpha ; \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $1 \leq k \leq n - p - 2$, on a

(c) pour tout voisinage ouvert U de O dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de O dans Y, $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi_\alpha}(U \cap X_\alpha ; \mathcal{O}_Y) \to H^k_{\Phi_\alpha}(U' \cap X_\alpha ; \mathcal{O}_Y)$$

ait une image nulle pour tout $k \leq n - p - 1$ et toute $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$ telle que $\|\alpha\|_2 < t_1$.

(ii) S'il existe un système fondamental $\{V_m\}_{m \in N}$ de voisinages ouverts de Stein de O dans Y, et un nombre réel t_1, $O < t_1 \leq t_0$, tels que, pour tout m et toute fonction $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$, avec $\|\alpha\|_2 < t_1$, on ait

(*a*) $H^k(V_m \cap X_\alpha; \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $q + 1 \leq k$,

on a alors

(*b*) pour tout voisinage ouvert U de O dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de O dans Y, $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Psi_\alpha}(U \cap Z_\alpha; \mathcal{O}_Y) \to H^k_{\Psi_\alpha}(U' \cap Z_\alpha; \mathcal{O}_Y)$$

ait une image nulle pour tout $q + 2 \leq k$ et toute $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$ telle que $\|\alpha\|_2 < t_1$.

Dans ce lemme, on a désigné par Φ_α et Ψ_α les familles suivantes de supports : pour tout ouvert W de Y, $\Phi_\alpha(W)$ est la famille des fermés de W contenus dans $X_\alpha \cap W$ et $\Psi_\alpha(W)$ la famille des fermés de W contenus dans $Z_\alpha \cap W$. Les assertions (i) et (ii) se démontrant de manière analogue, nous nous contenterons d'établir (i).

Soit U un voisinage ouvert de O dans Y. Notons $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}$. On a la suite exacte longue

$$0 \to \Gamma_{\Phi_\alpha}(U; \mathcal{O}) \to \Gamma(U; \mathcal{O}) \to \Gamma(U - X_\alpha; \mathcal{O}) \to H^1_{\Phi_\alpha}(U; \mathcal{O}) \to \dots$$

$$\dots \to H^k(U; \mathcal{O}) \to H^k(U - X; \mathcal{O}) \to H^{k+1}_{\Phi_\alpha}(U; \mathcal{O}) \to H^{k+1}(U; \mathcal{O}) \to \dots .$$

Si l'on suppose U de Stein, on obtient la suite exacte

$$0 \to \Gamma_{\Phi_\alpha}(U; \mathcal{O}) \to \Gamma(U; \mathcal{O}) \to \Gamma(U - X_\alpha; \mathcal{O}) \to H^1_{\Phi_\alpha}(U; \mathcal{O}) \to 0,$$

et les isomorphismes $H^k(U - X_\alpha, \mathcal{O}) \to H^{k+1}_{\Phi_\alpha}(U; O)$ pour $1 \leq k$.

Compte tenu de $U \cap \overline{Z}_\alpha = U - X_\alpha$, l'assertion (i) est alors claire si l'on remarque que les conditions (*a*) et (*b*) entraînent les conditions

(*a'*) pour tout voisinage ouvert U de O dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de O dans Y, $U' \subset U$, tel que l'application

$$\Gamma(U'; O) \to \Gamma(U' - X_\alpha; O) = \Gamma(U \cap \overline{Z}_\alpha; O)$$

soit un isomorphisme, et

(b') pour tout voisinage ouvert U de O dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de O dans Y, $U' \subset U$, tel que l'application

$$H^k(U \cap \overline{Z}_a\,;\, O) \longrightarrow H^k(U' \cap \overline{Z}_a\,;\, O)$$

ait une image nulle pour $1 \leq k \leq n - p - 2$.

Du lemme 1.4.1., on déduit immédiatement la

PROPOSITION 1.4.2. Soient Y un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulièrement p-convexe en $O \in Y$, avec $\varphi(O) = 0$. Il existe un nombre réel $t > 0$, tel que, pour tout veisinage ouvert U de O dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de O dans Y, $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi_a}(U \cap X_a\,;\, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^k_{\Phi_a}(U' \cap X\,;\, \mathcal{O}_Y)$$

ait une image nulle pour tout $1 \leq k \leq n - p - 1$ et toute $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$, avec $\|\alpha\|_2 < t$, et que l'application naturelle

$$H^k_{\Psi_a}(U \cap Z_a\,;\, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^k_{\Psi_a}(U' \cap Z_a\,;\, \mathcal{O}_Y)$$

ait une image nulle pour tout $q + 2 \leq k$ et toute $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$, avec $\|\alpha\|_2 < t$.

Les conditions ainsi trouvées traduisent la forte p-convexité de $X = \{\varphi < 0\}$ en O et la forte p-concavité de $Z = \{0 < \varphi\}$ en O. C'est sous cette forme que nous allons utiliser dorénavant les hypothèses de forte p-convexité ou forte q-concavité [12].

B. *La stricte p-convexité.*

Dans toute la suite, on désignera par (H) les hypothèses suivantes sur X, $\mathcal{O}_X$, $\mathbf{K}^{\cdot}_X$, $\mathcal{F}$, $\operatorname{prof}_x \mathcal{F}$:

(H) X est un espace topologique, $\mathcal{O}_X$ un faisceau d'anneaux (commutatifs unitaires) sur X, $\mathbf{K}^{\cdot}_X$ un complexe localement borné de $\mathcal{O}_X$-modules, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module et $\operatorname{prof}_x \mathcal{F}$ une fonction définie sur X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, *semi-continue supérieurement*, attachée à F: $\mathcal{O}_X$, $\mathbf{K}^{\cdot}_X$ seront des données

---

(12) On peut prouver l'assertion de 1.4.2. relative aux X_a en utilisant le théorème 1.3.1., y compris l'assertion (ii), au lieu du théorème 1.3.6. C'était l'idée de B. Malgrange quand il a introduit la stricte p-convexité [18], [19]. Une amélioration de cette méthode permet d'obtenir le même résultat en supposant seulement la fonction φ *continue* et « *fortement p-convexe* » (en un sens qui va de soi) : cf. [8].

attachées à X et $\mathcal{F}$ un faisceau variable. On désignera par (H') les hypothèses suivantes:

(H') X est un espace analytique, $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural de X, $\mathbf{K}_X^{\cdot}$ est le *complexe dualisant* de X construit dans [22], $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent et $\mathrm{prof}_x \mathcal{F}$ est la profondeur classique de $\mathcal{F}$ en $x \in X$.

Chaque fois que dans la suite nous considèrerons un espace analytique X, nous nous placerons, sauf mention explicite du contraire, dans le cadre des hypothèses (H'). Ce cadre est suffisant pour établir les théorèmes 1 et 2. Le cadre élargi des hypothèses (H) est indispensable pour établir le théorème 3.

DEFINITION. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y, a un point de ∂X et $p \in \mathbb{N}$. On dira que X est strictement p-convexe en a dans Y, s'il existe un voisinage onvert V de a dans Y, un plongement π: $V \to V'$, où V' est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $(\pi(a) = a')$, et un sous-ouvert X' de V', tels que

(i) $\pi(X \cap V) = X' \cap \pi(V)$, et

(ii) pour tout voisinage ouvert U de a' dans V', il existe un voisinage ouvert U' de a', $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi'}(U \cap X; \mathcal{O}_{V'}) \to H^k_{\Phi'}(U' \cap X; \mathcal{O}_{V'})$$

ait une image nulle pour $k \leq n - p - 1$. (On a noté Φ' la famille de fermés définie par $\Phi'(W) =$ fermés de l'ouvert W contenus dans $W \cap X'$).

DEFINITION. Soient Y un espace topologique, X un ouvert de Y, $a \in \partial X$, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module, $p \in \mathbb{N}$. On dira que

(i) X est $\mathcal{F}$-strictement p-convexe en a dans Y, si, pour tout voisinage ouvert U de a dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de a, $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^k_{\Phi}(U \cap X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_Y^{\cdot}) \to \mathrm{Ext}^k_{\Phi}(U' \cap X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_Y^{\cdot})$$

ait une image nulle pour $k \leq -p - 1$.

(ii) X est $\mathcal{F}_c$-strictement p-convexe en a dans Y, si, pour tout voisinage ouvert U de a dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de a,

$U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_\Phi(U \cap X; \mathcal{F}) \to H^k_\Phi(U' \cap X; \mathcal{F})$$

ait une image nulle pour $k \leq \operatorname{prof}_a \mathcal{F} - p - 1$.

(On s'est placé dans le cadre des hypothèses (H) et on a noté Φ la famille de fermés définie par $\Phi(W) =$ fermés de l'ouvert W contenus dans $W \cap X$).

L'intêret de la $\mathcal{F}$ stricte p convexité et de la $\mathcal{F}_c$-stricte p-convexité provient de la

PROPOSITION 1.4.3. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y, $a \in \partial X$, et $p \in \mathbb{N}$. Si X est strictement p-convexe en a dans Y, pour tout $\mathcal{O}_Y$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, X est $\mathcal{F}$-strictement p-convexe et $\mathcal{F}_c$-strictement p-convexe en a dans Y. (On s'est placé dans cet énoncé dans le cadre des hypothèses (H').)

Dans les deux cas on se ramène par plongement au cas lisse. Si l'on a un plongement $\pi: V \to V' \subset \mathbb{C}^n$, où V est un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{C}^n$, avec $\pi(a) = a'$ et $X' \cap \pi(V) = \pi(V \cap X)$, on a

$$H^k_\Phi(\pi^{-1}(U) \cap X; \mathcal{F}) = H^k_{\Phi'}(U \cap X'; \pi_* \mathcal{F})$$

et

$$\operatorname{Ext}^k_\Phi(\pi^{-1}(U) \cap X; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_Y) = \operatorname{Ext}^k_{\Phi'}(U \cap X'; \pi_* \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_{V'})$$

(la dernière égalité provenant de l'isomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{E}xt^i(V; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_V) \to \pi^* \mathcal{E}xt^i(V'; \pi_* \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_{V'})$$

et d'un argument standard de suite spectrale). La question étant locale, on peut donc supposer que Y est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et que $\mathcal{F}$ admet une syzygie sur Y.

Nous nous contenterons de prouver la $\mathcal{F}_c$-stricte p-convexité (la démonstration de la $\mathcal{F}$ stricte p-convexité se recopiant assez aisèment sur celle ci ([13])). On raisonne par récurrence *descentante* sur la profondeur: le résultat est vrai (si l'on a choisi convenablement le plongement π) pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, donc pour $\operatorname{prof}_a \mathcal{F} = n$, d'après l'hypothèse de stricte p-convexité. Supposons le résultat vrai pour $\operatorname{prof}_a \mathcal{F} \geq l + 1$ et prouvons le pour $\operatorname{prof}_a \mathcal{F} = l$:

([13]) On procède par récurrence *ascendante* sur l'entier k de $\operatorname{Ext}^k_\Phi$.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent avec $\operatorname{prof}_a \mathcal{F} = k$. On peut supposer que l'on a une suite exacte de $\mathcal{O}_Y$-modules $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}_Y^m \to \mathcal{F} \to 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour $\mathcal{G}$; soient alors U, U', U'' des voisinages ouverts de a dans Y, $U'' \subset U' \subset U$, tels que les applications naturelles

$$H_\Phi^i(U \cap X; \mathcal{G}) \to H_\Phi^i(U' \cap X; \mathcal{G}) \text{ et } H_\Phi^j(U' \cap X; \mathcal{O}_Y^m) \to H_\Phi^j(U'' \cap X; \mathcal{O}_Y^m)$$

aient une image nulle pour $j \leq n - p - 1$ et $i \leq \operatorname{prof}_a G - p - 1$. On a un diagramme commutatif, dont les lignes sont *exactes*

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots \to & H_\Phi^k(U \cap X; \mathcal{O}_Y^m) & \to & H_\Phi^k(U \cap X; \mathcal{F}) & \to & H_\Phi^{k+1}(U \cap X; \mathcal{G}) & \to \dots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\dots \to & H_\Phi^k(U' \cap X; \mathcal{O}_Y^m) & \to & H_\Phi^k(U' \cap X; \mathcal{F}) & \to & H_\Phi^{k+1}(U' \cap X; \mathcal{G}) & \to \dots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\dots \to & H_\Phi^k(U'' \cap X; \mathcal{O}_Y^m) & \to & H_\Phi^k(U'' \cap X; \mathcal{F}) & \to & H_\Phi^{k+1}(U'' \cap X; \mathcal{F}) & \to \dots
\end{array}$$

On se propose de montrer que pour $k \leq \operatorname{prof}_a F - p - 1 = l - p - 1$, l'application $H_\Phi^k(U \cap X; \mathcal{F}) \to H_\Phi^k(U'' \cap X; \mathcal{F})$ a une image nulle. On désigne par r les applications de restriction de U à U'', par r' les applications de restriction de U à U' et par r'' les applications de restriction de U' à U'': $r = r''r'$.

On a $\operatorname{prof}_a \mathcal{G} = \operatorname{prof}_a \mathcal{F} + 1 = l + 1$. Soit $x \in H_\Phi^k(U \cap X; \mathcal{F})$; on pose $r'(x) = y$; y a une image nulle dans $H_\Phi^{k+1}(U' \cap X; \mathcal{G})$ $(k + 1 \leq l - p = \operatorname{prof}_a \mathcal{G} - p - 1)$ et est donc l'image d'un élément z de $H_\Phi^k(U' \cap X; \mathcal{O}_Y^m)$; ce dernier a une image nulle dans $H_\Phi^k(U'' \cap X; \mathcal{O}_Y^m)$ $(k \leq n - p - 1)$, donc $r''(y) = r(x) = 0$.

REMARQUE. Si Y est *lisse* de dimension n au voisinage de a, X est strictement p-convexe en a si et seulement si, pour tout voisinage ouvert U de a, il existe un voisinage ouvert U' de a, $U' \subset U$, tel que l'application

$$H_\Phi^k(U \cap X; \mathcal{O}_Y) \to H_\Phi^k(U' \cap X; \mathcal{O}_Y)$$

ait une image nulle pour $k \leq n - p - 1$.

DEFINITION. On dira que l'ouvert X est strictement (resp. $\mathcal{F}$-strictement, resp. $\mathcal{F}_c$-strictement) p-convexe dans Y, s'il l'est en tout point de sa frontière.

C. *La stable p convexité et la stable q-concavité.*

DEFINITION. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y, défini par une inéquation $X = \{\varphi < 0\}$, où $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ est une fonction continuue, a un point de ∂X et $p \in \mathbb{N}$. On dira que (X, φ) (i.e. X défini par φ) est *stablement p convexe* en a dans Y, s'il existe un voisinage ouvert V de a dans Y, un plongement $\pi : V \to V'$, où V' est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $(\pi(a) = a')$, une fonction continue $\varphi' : V' \to \mathbb{R}$, et un nombre réel $t > 0$, tels que

(i) $\varphi' \circ \pi = \varphi$, et

(ii) pour tout voisinage ouvert U de a' dans V', il existe un voisinage ouvert U' de a', $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi_a}(U \cap X_a ; \mathcal{O}_{V'}) \to H^k_{\Phi_a}(U' \cap X_a ; \mathcal{O}_{V'})$$

ait une image nulle pour tout $k \leq n - p - 1$ et tout réel α, tel que $|\alpha| < t$. (On a noté $X_\alpha = \{\varphi + \alpha < 0\}$ et Φ_α la famille de fermés définie par $\Phi_\alpha(W) =$ fermés de l'ouvert W contenus dans $W \cap X_\alpha$).

DEFINITION. Soient Y un espace topologique, X un ouvert de Y défini par $X = \{\varphi < 0\}$, où $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, a un point de ∂X, et $p \in \mathbb{N}$. On dira que

(i) (X, φ) est *$\mathcal{F}$-stablement p-convexe* en a dans Y, s'il existe un réel $t > 0$, tel que, pour tout voisinage ouvert U de a dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de a, $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^k_{\Phi_a}(U \cap X_a ; \mathcal{F}, \mathbf{K}^{\cdot}_Y) \to \mathrm{Ext}^k_{\Phi_a}(U' \cap X_a ; \mathcal{F}, \mathbf{K}^{\cdot}_Y)$$

ait une image nulle pour tout $k \leq -p - 1$ et tout réel α, tel que $|\alpha| < t$.

(ii) (X, φ) est *$\mathcal{F}_c$-stablement p-convexe* en a dans Y, s'il existe un réel $t > 0$, tel que, pour tout voisinage ouvert U de a dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de a, $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi_a}(U \cap X_a ; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_a}(U' \cap X_a ; \mathcal{F})$$

ait une image nulle pour tout $k \leq \mathrm{prof}_a F - p - 1$ et tout réel α, tel que $|\alpha| < t$.

Comme pour la stricte p convexité, on prouve la

PROPOSITION 1.4.4. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y défini par $X = \{\varphi < 0\}$, où $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ est une application continue, $a \in \partial X$, et $p \in \mathbb{N}$. Si (X, φ) est *stablement p-convexe* en a dans Y, pour tout $\mathcal{O}_Y$-module *cohèrent* $\mathcal{F}$, (X, φ) est *$\mathcal{F}$-stablement* et *$\mathcal{F}_c$-stablement p-convexe* en a dans Y. (On s'est placé dans cet énoncé dans le cadre des hypothèses (H').)

DEFINITION. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y défini par $X = \{0 < \varphi\}$, où $\varphi : Y \to R$ est une fonction continue, a un point de ∂X, et $q \in \mathbb{N}$. On dira que (X, φ) est *stablement q-concave* en a dans Y, s'il existe un voisinage ouvert V de a dans Y, un plongement $\pi : V \to V'$, où V' est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $(\pi(a) = a')$, une fonction continue $\varphi' : V' \to \mathbb{R}$, et un nombre réel $t > 0$, tels que

(i) $\varphi' \circ \pi = \varphi$, et

(ii) pour tout voisinage ouvert U de a' dans V', il existe un voisinage ouvert U' de a', $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi_a}(U \cap X_a ; \mathcal{O}_{V'}) \to H^k_{\Phi_a}(U' \cap X_a ; \mathcal{O}_{V'})$$

ait une image nulle pour tout $q + 2 \leq k$ et toute fonction $\alpha \in \mathcal{E}(V')$, avec $\|\alpha\|_2 < t$. (On a noté $X_\alpha = \{0 < \varphi + \alpha\}$ et Φ_α la famille de fermés définie par $\Phi_\alpha(W) =$ fermés de l'ouvert W contenus dans $W \cap X_\alpha$).

DEFINITION. Soient Y un espace topologique, X un ouvert de Y défini par $X = \{0 < \varphi\}$, où $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $a \in \partial X$, et $q \in \mathbb{N}$. On dira que

(i) (X, φ) est *$\mathcal{F}$-stablement q-concave* en a dans Y, s'il existe un réel $t > 0$, tel que, pour tout voisinage ouvert U de a dans Y, il existe un voisinage ouvert U' de a, $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^k_{\Phi_a}(U \cap X_a ; \mathcal{F}, \mathbf{K}^{\cdot}_Y) \to \mathrm{Ext}^k_{\Phi_a}(U' \cap X_a ; \mathcal{F}, \mathbf{K}^{\cdot}_Y)$$

ait une image nulle pour tout $q + 2 - \mathrm{prof}_a \mathcal{F} \leq k$ et toute fonction $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$, avec $\|\alpha\|_2 < t$.

(ii) (X, φ) est *$\mathcal{F}_c$ stablement q-concave* en a dans Y, s'il existe un réel $t > 0$, tel que, pour tout voisinage ouvert U de a dans Y, il existe

un voisinage ouvert U' de a, $U' \subset U$, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi_a}(U \cap X_a; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_a}(U' \cap X_a; \mathcal{F})$$

ait une image nulle pour tout $q+2 \leq k$ et toute fonction $\alpha \in \mathcal{E}(Y)$, avec $\|\alpha\|_2 < t$.

Par un argument analogue à celui employé pour la stricte p-convexité, on prouve la

PROPOSITION 1.4.5. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y défini par $X = \{0 < \varphi\}$, où $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $a \in \partial X$, et $q \in \mathbb{N}$. Si (X, φ) est *stablement q-concave* en a dans Y, (X, φ) est *$\mathcal{F}$-stablement* et *$\mathcal{F}_c$-stablement q-concave* en a dans Y. (On s'est placé dans le cadre des hypothèses (H').)

Nous pouvons maintenant traduire la proposition 1.4.2. (en perdant un peu d'information dans le cas fortement p-convexe):

PROPOSITION 1.4.6. Soient Y un espace analytique, $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $p, q \in \mathbb{N}$.

(i) Si φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et *fortement p-convexe* en $a \in Y$, avec $\varphi(a) = 0$, $(X = \{\varphi < 0\}, \varphi)$ est *stablement p-convexe* en a dans Y.

(ii) Si φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et *fortement q-convexe* en $a \in Y$, avec $\varphi(a) = 0$, $(Z = \{0 < \varphi\}, \varphi)$ est *stablement q concave* en a dans Y.

DEFINITION. On dira que (X, φ) est stablement (resp. $\mathcal{F}$stablement, resp. $\mathcal{F}_c$-stablement) p-convexe (resp. q-concave) dans Y, s'il l'est en tout point de sa frontière.

Un ouvert fortement p-convexe (resp. q-concave) est stablement p-convexe (resp. q-concave).

2°. Théorèmes d'épuisement, de séparation et de finitude pour les ouverts strictement p-convexes.

Les deux théorèmes d'épuisement s'énoncent ainsi (cf. les hypothèses (H), page 976).

THEOREME 2.1.1. Soient Y un espace topologique, X un ouvert de Y, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module, et $p \in \mathbb{N}$. Si X est *$\mathcal{F}$-strictement p-convexe* dans Y et si la frontière ∂X est *compacte*

(i) Les limites inductives $\mathrm{Ext}^k_\Phi(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_X) \varinjlim_{K \in \Phi(X)} \mathrm{Ext}^k_K(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_X)$ sont *essentiellement injectives* pour $k \leq -p$.

(ii) Il existe un ouvert X' de X, avec $\overline{X'} \in \Phi(X)$, tel que l'application naturelle $\mathrm{Ext}^k_{\Phi'}(X'; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_{X'}) \to \mathrm{Ext}^k_\Phi(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_X)$ soit *surjective* pour $k \leq -p-1$.

(On a noté $\Phi(X) =$ fermés de Y contenus dans X [14], $\Phi'(X') =$ fermés de $Y \subset X'$).

THEOREME 2.1.2. Soient Y un espace topologique, X un ouvert de Y, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module, et $p \in \mathbb{N}$. Si X est *$\mathcal{F}_c$-strictement p-convexe* dans Y et si la frontière ∂X est *compacte*

(i) Les limites inductives $H^k_c(X; \mathcal{F}) = \varinjlim_{K \in \Phi(X)} H^k_K(X; \mathcal{F})$ sont *essentiellement injectives* pour $k \leq -p + \mathrm{prof}_{\partial X} F$.

(ii) Il existe un ouvert X' de X, avec $\overline{X'} \in \Phi(X)$, tel que l'application naturelle $H^k_{\Phi'}(X'; \mathcal{F}) \to H^k_\Phi(X, \mathcal{F})$ soit *surjective* pour $k \leq -p-1+\mathrm{prof}_{\partial X} \mathcal{F}$.

Nous verrons plus loin que si Y est un espace analytique (cf. hypothèses (H'), page 975), on peut déduire des théorèmes de séparation et finitude des théorèmes d'épuisement. Nous allons d'abord établir ces derniers. On commence pour cela par démontrer les deux lemmes suivants

LEMME 2.1.3. Dans les conditions de 2.1.1., on désigne par U un voisinage arbitraire de $\overline{X}$ dans Y. Pour tout fermé K de $\Phi(X)$, il existe un fermé K' de $\Phi(X)$, $K \subset K'$, tel que l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^k_\Phi(U - K; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_Y) \to \mathrm{Ext}^k_\Phi(U - K'; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_Y)$$

ait une image nulle pour $k \leq -p-1$. (On désigne toujours par Φ la famille de fermés définie par $\Phi(W) =$ fermés de l'ouvert W contenus dans $W \cap X$).

LEMME 2.1.4. Dans les conditions de 2.1.2., on désigne par U un voisinage arbitraire de $\overline{X}$ dans Y. Pour tout fermé $K \in \Phi(X)$, il existe un fermé $K' \in \Phi(X)$, $K \supset K$, tel que l'application naturelle $H^k_\Phi(U - K; \mathcal{F}) \to$ $\to H^k_\Phi(U - K'; \mathcal{F})$ ait une image nulle pour $k \leq -p-1+\mathrm{prof}_{\partial X} F$.

---

[14] Si X est relativement compact dans Y, $\Phi(X) =$ compacts de X.

REMARQUE. Dans les conditions de 2.1.3 et 2.1.4., on peut trouver un entier s, tel que, si $\{U_i^1\}_{i\in I}, \dots, \{U_i^s\}_{i\in I}$ sont des recouvrements ouverts finis de ∂X, avec $U_i^j \subset U_i^{j-1}$ et dans la situation des ouverts U' et U intervenant dans la définition de la $\mathcal{F}$-stricte ou $\mathcal{F}_c$-stricte p-convexité (pour $i \in I$ et $j = 2, \dots, s$), et $K \subset X - \bigcup_{i\in I} U_i^1$, on peut prendre pour K' un fermé contenant $X - \bigcup_{i\in I} U_i^s$.

Les démonstrations des deux lemmes étant pratiquement les mêmes, nous nous contenterons d'établir le premier. Il suffit pour cela de reprendre la méthode de [18].

Désignons par $\mathcal{J}^\cdot$ une *résolution injective* de $\mathbf{K}_Y^\cdot$ ($\mathcal{J}^\cdot$ est localement bornée à gauche), et posons $\mathcal{E}^r = \mathcal{H}om(Y; \mathcal{F}, \mathcal{J}^r)$; les $\mathcal{E}^r$ sont les objects d'un complexe localement borné à gauche évident de $\mathcal{O}_Y$-modules dont on note d^r la différentielle. Les $\mathcal{E}^r$ sont des faisceaux *flasques*, donc *Φ-mous*. On note $\mathcal{E}_\Phi^r$ le faisceau des germes de sections de $\mathcal{E}^r$ à supports dans Φ. Les $\mathcal{E}_\Phi^r$ sont les objets d'un complexe évident dont on note d_Φ^r la différentielle; on désigne par $\mathcal{Z}_\Phi^r$ le sous-faisceau de $\mathcal{E}_\Phi^r$ formé des germes de sections de bord nul.

Si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ sont deux recouvrements ouverts finis de ∂X, $\mathfrak{U}'$ étant plus fin que $\mathfrak{U}$, on désigne par $r_{t,s}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ l'application de restriction

$$r_{t,s} : H^s(\mathfrak{U}; \mathcal{Z}_\Phi^t) \to H^s(\mathfrak{U}'; \mathcal{Z}_\Phi^t).$$

Le lemme 2.1.3 se déduit alors du

LEMME 2.1.5. Etant donné un recouvrement ouvert *fini* $\mathfrak{U}$ de ∂X, il existe un recouvrement ouvert *fini* plus fin $\mathfrak{U}'$ de ∂X, tel que l'application $r_{t,s}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ sont d'image nulle pour $t \leq -p-1$ et $1 \leq s$.

On peut énoncer ce lemme: «Le système inductif $H^{t,s} : \mathfrak{U} \mapsto H^s(\mathfrak{U}; \mathcal{Z}_\Phi^t)$ est *nul* au voisinage de ∂X».

Soit en effet $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de ∂X, avec $U_i \subset U - K$ ($i \in I$), et soit $x \in \mathcal{E}_\Phi^k(U - K)$, $k \leq -p-1$. Quitte à remplacer $\mathfrak{U}$ par un recouvrement plus fin, indépendant de x, on peut supposer que, pour tout $i \in I$, il existe $y_i \in \mathcal{E}_\Phi^{k-1}(U_i)$ tel que $x = d_\Phi^{k-1} y_i$ sur U_i (hypothèse de $\mathcal{F}$-stricte p-convexité). Posons $z_{ij} = y_i - y_j$ sur $U_i \cap U_j$; (z_{ij}) est un 1-cocycle de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{Z}_\Phi^{k-1}$. Utilisant alors 2.1.5., on peut trouver un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}'$ fini de ∂X, plus fin que $\mathfrak{U}$ (indépendant de x) tel que le cocycle (z_{ij}) soit d'image nulle dans $H^1(\mathfrak{U}'; \mathcal{Z}_\Phi^{k-1})$. On a alors $z_{i'j'} = u_{i'} - u_{j'}$, avec $u_{i'} \in \mathcal{Z}_\Phi^{k-1}(U_i')$ et la collection des $v_{i'} = x_{i'} - u_{i'}$ fournit un élèment de $\mathcal{E}_\Phi^{k-1}(\cup U_i')$ dont le bord est la restriction de x. Il suffit de prendre $K' \supset X - \bigcup U_{i'}'$.

Il reste maintenant à établir 2.1.5.. On va procèder par récurrence *descendante* sur t (cette méthode conduit au résultat car les hypothèses de $\mathcal{F}$-stricte ou $\mathcal{F}_c$-stricte p-convexité assurent la nullité d'une application de restriction pour les indices k *inférieurs* à un entier donné ; il est impossible de traiter le cas concave par cette méthode).

Pour des valeurs « assez négatives » de t, le faisceau $\mathcal{Z}^t_\Phi$ est nul. Le lemme 2.1.5. se déduit donc, par récurrence *descendante* sur t, du

LEMME 2.1.6. Soient $t \leq -p-1$ et $0 \leq s$ fixés. Pour tout recouvrement fini ouvert $\mathfrak{U}$ de X, il existe un recouvrement ouvert fini plus fin $\mathfrak{U}'$ de X, et un homomorphisme $d_{t,s}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') : H^s(\mathfrak{U}\,; Z^t_\Phi) \to H^{s+1}(\mathfrak{U}'\,; \mathcal{Z}^{t-1}_\Phi)$, possèdant, si $1 \leq s$, la propriété suivante :

Pour tout recouvrement ouvert fini $\mathfrak{U}''$ de X, plus fin que $\mathfrak{U}'$, si

$$r_{t-1,s}(\mathfrak{U}', \mathfrak{U}'')\, d_{t,s}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') = 0, \quad \text{alors} \quad r_{t,s}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'') = 0.$$

On remarque que si U est un voisinage ouvert de $a \in \partial X$, il existe un voisinage ouvert U' de a, $U' \subset U$, tel que $d^{k-1}_\Phi\, \mathcal{C}^{k-1}_\Phi(U')$ contienne la restriction à U' de $\mathcal{Z}^k_\Phi(U)$, pour $k \leq -p-1$. On construit ensuite $d_{t,s}$ comme un homomorphisme de connection :

Le recouvrement $\mathfrak{U}$ étant donné, on construit $\mathfrak{U}'$ de telle sorte que tout ouvert U' de $\mathfrak{U}'$ soit contenu dans un ouvert U de $\mathfrak{U}$, l'application naturelle $H^k(U\,; \mathcal{C}^\cdot_\Phi) \to H^k(U'\,; \mathcal{C}^\cdot_\Phi)$ étant nulle pour $k \leq -p-1$. Soit alors $x \in C^s(\mathfrak{U}\,; Z^t_\Phi)$; sa restriction $r(x)$ à $C^s(\mathfrak{U}'\,; Z^t_\Phi)$ est l'image d'un élément y de $C^s(\mathfrak{U}'\,; E^{t-1}_\Phi)$. Si x est un cycle ($x \in Z^s(\mathfrak{U}\,; Z^t_\Phi)$), l'image de y dans $C^{s+1}(\mathfrak{U}'\,; \mathcal{C}^{t-1}_\Phi)$ est en fait dans $Z^{s+1}(\mathfrak{U}'\,; Z^{t-1}_\Phi)$. En passant aux espaces de cohomologie, on obtient une application indépendante des représentants choisis qui répond à la question. (On vérifie que $H^s(\mathfrak{U}\,; \mathcal{C}^{t-1}_\Phi) = 0$ pour $1 \leq s$).

Revenons maintenant à la démonstration des théorèmes d'épuisement. Les démonstrations étant analogues dans les deux cas, nous nous contenterons d'établir le théorème 2.1.1..

(i) Il s'agit de prouver que, pour tout fermé $K \in \Phi(X)$, il existe un fermé $K' \in \Phi(X)$, $K \subset K'$, tel que tout $x \in \mathrm{Ext}^k_K(X\,; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_X)$, dont l'image dans $\mathrm{Ext}^k_\Phi(X\,; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_X)$ est nulle, ait déjà une image nulle dans $\mathrm{Ext}^k_{K'}(X\,; \mathcal{F}, \mathbf{K}^\cdot_X)$ (si $k \leq -p$).

On applique le lemme 2.1.3. au fermé K: on obtient une « enveloppe » K'.

On a un diagramme commutatif, dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
\to \mathrm{Ext}_{\Phi}^{k-1}(U-K;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_{K}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_{\Phi}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_{\Phi}^{k}(U-K;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\to \mathrm{Ext}_{\Phi}^{k-1}(U-K';\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{K'}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\Phi}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\Phi}^{k}(U-K';\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Si $x \in \mathrm{Ext}_{K}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$ a une image nulle dans $\mathrm{Ext}_{\Phi}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$, il est l'image d'un élèment y de $\mathrm{Ext}_{\Phi}^{k-1}(U-K;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$. Si $k \leq -p$ $(k-1 \leq -p-1)$, l'image de y dans $\mathrm{Ext}_{\Phi}^{k-1}(U-K';\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$ est nulle, il en est donc de même de l'image de x dans $\mathrm{Ext}_{K'}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$.

(ii) On applique le lemme 2.1.3., avec $K=\varnothing$ $(k \leq -p-1)$. On prend ensuite pour X' un voisinage ouvert d'adhèrence dans $\Phi(X)$ de l'« enveloppe » K' de $\varnothing$. En utilisant la suite exacte écrite plus haut, on constate que l'application $\mathrm{Ext}_{K'}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \mathrm{Ext}_{\Phi}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$ est surjective pour $k \leq -p-1$ (l'application $\mathrm{Ext}_{\Phi}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \mathrm{Ext}_{\Phi}^{k}(U-K';\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$ a une image nulle dans les mêmes conditions).

Passons maintenant à diverses consèquences des théorèmes d'épuisement quand Y est un *espace analytique complexe* et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module *cohérent* (on se place dans le cadre des hypothèses (H')).

THEOREME 2.1.7. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y, $a \in \partial X$, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module *cohérent*, et $p \in \mathbb{N}$. Si X est *$\mathcal{F}$-strictement p-convexe* dans Y (en particulier si X est *strictectement p-convexe* dans Y) et si X est *relativement compact*

(i) Les espaces $\mathrm{Ext}_{c}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$ sont *séparés* pour $k \leq -p$.

(ii) Les espaces $\mathrm{Ext}_{c}^{k}(X;\mathcal{F},\mathbf{K}_{\dot{X}})$ sont de *dimension finie* pour $k \leq -p-1$.

(iii) Les espaces $H^k(X;\mathcal{F})$ sont de *dimension finie* (séparés) pour $p+1 \leq k$.

THEOREME 2.1.8. Soient Y un espace analytique, X un ouvert de Y, $a \in \partial X$, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module *cohérent*, et $p \in \mathbb{N}$. Si X est *$\mathcal{F}_c$-strictement p-convexe* dans Y (en particulier si X est *strictement p-convexe* dans Y) et si X est *relativement compact*

(i) Les espaces $H_c^k(X;\mathcal{F})$ sont *séparés* pour $k \leq \mathrm{prof}_{\partial X}\mathcal{F}-p$.

(ii) Les espaces $H_c^k(X;\mathcal{F})$ sont de *dimension finie* pour $k \leq$ $\leq \mathrm{prof}_{\partial X}F-p-1$.

(iii) Les espaces $\mathrm{Ext}^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ sont *de dimension finie* (séparés) pour $p+1-\mathrm{prof}_{\partial X}\mathcal{F} \leq k$.

En appliquant les théorèmes 0.3 et 0.4 et en tenant compte des assertions (i) de 2.1.1. et 2.1.2., les assertions (i) de 2.1.7. et 2.1.8 sont immédiates ([15]). Pour établir 2.1.7. (ii), on pourrait raisonner comme nous le ferons ci dessous pour 2.1.8 (ii) (en utilisant 0.5. (i)). Nous allons employer un argument plus « élémentaire » inspiré de [1] :

Si $k \leq -p-1$, il existe un ouvert X' relativement compact dans X tel que $\mathrm{Ext}_c^k(X'; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ soit *surjective*. Soient $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ et $\mathfrak{U}' = \{U_i'\}_{i \in I}$ deux recouvrements localement finis de X par des *ouverts de Stein*, avec $U_i' \subset\subset U_i$, pour tout $i \in I$, et $U_i \cap X' \neq \emptyset$ pour un nombre fini d'indices i. Soit $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un recouvrement localement fini de X' par des ouverts de Stein, plus fin que $X' \cap U'$. On choisit une application $\varphi : J \to I$, telle que $V_j \subset U'_{\varphi(j)}$; à cette application on associe l'application naturelle (prolongement par 0) $C_\cdot^c(\mathfrak{V}; \mathrm{Ext}_c^0(\mathfrak{V}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to C_\cdot^c(\mathfrak{U}; \mathrm{Ext}_c^0(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ qui est *compacte* (et même nucléaire) : c'est la transposée de l'application *nucléaire*

$$C^\cdot(\mathfrak{U}; H^0(\mathfrak{U}; F)) \to C^\cdot(\mathfrak{V}; H^0(\mathfrak{V}; F)).$$

On en déduit le diagramme

$$\begin{array}{c} Z_k^c(\mathfrak{V}; \mathrm{Ext}_c^0(\mathfrak{V}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})) \\ \Big\downarrow \beta \\ C_{k+1}^c(\mathfrak{U}; \mathrm{Ext}_c^0(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})) \xrightarrow{\alpha} Z_k^c(\mathfrak{U}; \mathrm{Ext}_c^0(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}), \end{array}$$

où $\mathrm{Im}\,\alpha + \mathrm{Im}\,\beta = Z_k^c(\mathfrak{U}; \mathrm{Ext}_c^0(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}))$

si $k \leq -p-1$. Comme β est *compacte*; on en déduit [25] que α est d'image fermée et de *conoyau* de *dimension finie* (tous les espaces sont **DFN**).

Passons à 2.1.8. (ii).

Soient $\mathfrak{K} = \{K_i\}_{i \in I}$ et $\mathfrak{K}' = \{K_i'\}_{i \in I}$ deux recouvrements localement finis de X par des *compacts de Stein*, avec $K_i' \subset \mathring{K}_i$, pour tout $i \in I$. Si $k \leq -p-1+\mathrm{prof}_{\partial X}\mathcal{F}$, il existe un compact K de X, tel que $H_K^k(X; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F})$ soit surjective. On en déduit (0.5 (i)) qu'il existe un sous-ensemble fini J de I, tel que l'application $H_J^k(\mathfrak{K}; H^0(\mathfrak{K}; \mathcal{F})) \to H_c^k(X; \mathcal{F})$ soit surjective.

([15]) Ici $\Phi(X) =$ *compacts* de X, puisque $\overline{X}$ est *compact* dans Y.

On a donc un diagramme d'espace DFN

$$\begin{array}{c} Z_J^k(\mathbb{k}'; H^0(\mathbb{k}'; \mathcal{F})) \\ \Big\downarrow \beta \\ C_c^{k-1}(\mathbb{k}; H^0(\mathbb{k}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} Z_c^k(\mathbb{k}; H^0(\mathbb{k}; \mathcal{F})), \text{ où } \operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta = Z_c^k(\mathbb{k}; H^0(\mathbb{k}; \mathcal{F})). \end{array}$$

L'application $C_J^k(\mathbb{k}'; H^0(\mathbb{k}'; \mathcal{F})) \to C_c^k(\mathbb{k}; H^0(\mathbb{k}; \mathcal{F}))$ est *nucléaire*, donc *compacte*, et β est *compacte*. On en déduit [25] que α est d'image fermée et de *conoyau* de *dimension finie*.

Pour terminer, prouvons 2.1.7. (iii) (2.1.8. (iii) s'établirait de manière analogue).

D'après 2.1.7. (i) et l'assertion concernant la *séparation* dans 0.1., les espaces $H^k(X; \mathcal{F})$ sont *séparés* pour $p+1 \leq k$. Comme $\operatorname{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ est *séparé* pour $k \leq -p$ (et à fortiori pour $k \leq -p-1$), les espaces $H^k(X; \mathcal{F})$ et $\operatorname{Ext}_c^{-k}(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ sont en dualité pour $p+1 \leq k$; les espaces $\operatorname{Ext}_c^{-k}(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ étant de dimension finie pour $p+1 \leq k$, il en résulte que les espaces $H^k(X; \mathcal{F})$ sont de dimension finie dans les mêmes conditions.

La démonstration des théorèmes 2.1.7. et 2.1.8. est ainsi terminée. Compte tenu de la proposition 1.4.6. (i) (et du fait que la stable p convexité entraîne la stricte p-convexité), on en déduit les théorèmes 1 et 8 annoncés dans l'introduction. En se reportant à [8], on constatera que l'on peut même en déduire une version renforcée de ces théorèmes, qui permet de retrouver et généraliser un résultat de R. Narasimhan (cf. [20] Theorem 1).

3°. Théorèmes d'épuisement, de séparation et de finitude pour les espaces stablement (p, q)-convexes-concaves et les espaces fortement (p, q)-convexes-concaves.

Dans I et II on établit un théorème d'*épuisement* pour les espaces *stablement p convexes* et un théorème d'*épuisement* pour les espaces *stablement q-concaves*. On en déduit facilement, dans III, un théorème d'*épuisement* pour les espaces *stablement* (p, q)*-convexes-concaves*, puis, dans le cadre des hypothèses (H') (page 984), des théorèmes de *séparation* et de *finitude* pour ces espaces. La proposition 1.4.6. permet de passer à des résultats analogues pour les espaces *fortement* (p, q)*-convexes-concaves*, qui sont énoncés dans IV (cf. théorèmes 2 et 9 de l'introduction).

I. *Espaces stablement p-convexes.*

A. *Ouverts stablement p-convexes.*

On se place dans le cadre des hypothèses (H) (cf. page 976).

Si Y est un espace topologique localement compact (resp. analytique), on a défini plus haut la notion d'ouvert $\mathcal{F}$stablement ou $\mathcal{F}_c$-stablement p-convexe (resp. stablement p-convexe) dans Y.

Soient Y un espace topologique, X un ouvert de Y, φ : voisinage ouvert de $\partial X \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que X soit défini dans ce voisinage par $\varphi < 0$. On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $X_\alpha = \{\varphi + \alpha < 0\} \cup X$, et on suppose que φ n'atteint pas de minimum relatif sur $\{0 < \varphi\}$.

Voici les principaux résultats ($\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module et p un entier ≥ 0):

PROPOSITION 3.1.1. Si (X,φ) est *$\mathcal{F}$-stablement p convexe*, et *∂X compact*, on a

(i) Pour tout fermé $K \in \Phi(X)$ et tout entier $k \leq -p$, il existe un réel *strictement négatif* ε, tel que si $x \in \mathrm{Ext}^k_K(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ a une image nulle dans $\mathrm{Ext}^k_{\Phi_\varepsilon}(X_\varepsilon; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}})$ il ait déjà une image nulle dans $\mathrm{Ext}^k_\Phi(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$.

(ii) Pour tout entier $k \leq -p-1$, il existe un réel *strictement négatif* ε, tel que l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^k_\Phi(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \mathrm{Ext}^k_{\Phi_\varepsilon}(X_\varepsilon; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}}) \quad \text{soit } \textit{surjective.}$$

($\Phi(X) =$ fermés de Y contenus dans X, $\Phi_\varepsilon(X_\varepsilon) =$ fermés de Y contenus dans X_ε).

PROPOSITION 3.1.2. Si (X, φ) est *$\mathcal{F}_c$-stablement p-convexe*, et *∂X compact*, on a

(i) Pour tout fermé $K \in \Phi(X)$ et tout entier $k \leq -p + \mathrm{prof}_{\partial X}\mathcal{F}$, il existe un réel *strictement négatif* ε, tel que, si $x \in H^k_K(X; \mathcal{F})$ a une image nulle dans $H^k_{\Phi_\varepsilon}(X_\varepsilon; \mathcal{F})$, il ait déjà une image nulle dans $H^k_\Phi(X; \mathcal{F})$.

(ii) Pour tout entier $k \leq -p-1+\mathrm{prof}_{\partial X}\mathcal{F}$, il existe un réel *strictement négatif* ε, tel que l'application naturelle

$$H^k_\Phi(X; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_\varepsilon}(X_\varepsilon; \mathcal{F}) \quad \text{soit } \textit{surjective.}$$

Les démonstrations des deux propositions étant voisines, nous nous contenterons d'établir la première.

Soient $\mathfrak{U}^1 = \{U_i^1\}_{i \in I}, \dots, \mathfrak{U}^m = \{U_i^m\}_{i \in I}$ des recouvrements ouvert finis de ∂X, avec U_i^j relativement compact, et toute paire d'ouverts (U_i^j, U_i^{j+1}) satisfaisant aux conditions des onverts U et U' intervenant dans la définition de la stable p-convexité : $U_i^{j+1} \subset U_i^j$ et les applications naturelles

$$\mathrm{Ext}^k_{\Phi_\alpha}(U_i^j \cap X_\alpha ; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}}) \to \mathrm{Ext}^k_{\Phi_\alpha}(U_i^{j+1} \cap X_\alpha ; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}})$$

ont une image nulle pour $k \leq -p-1$ et $|\alpha| < t$ $(t > 0)$.

Dans ces conditions $\bigcup_{i \in I} U_i^m$ est un voisinage ouvert de ∂X, et on peut trouver un réel $0 < t_1 < t$ tel que ∂X_α soit compacte et contenue dans ce voisinage ouvert, pour tout α tel que $-t_1 < \alpha < 0$.

(i) Le fermé K étant donné, on peut supposer que les recouvrements ci dessus sont choisis de telle sorte que $K \subset X - \bigcup_{i \in I} U_i^1$. Si m est assez grand, la démonstration du théorème 2.1.1. montre que, si $K' \in \Phi(X)$ et $K' \supset X - \bigcup_{i \in I} U_i^m$, tout élèment $x \in \mathrm{Ext}^k_K(X ; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ qui donne 0 dans $\mathrm{Ext}^k_{\Phi_\varepsilon}(X_\varepsilon ; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}})$ donne déjà 0 dans $\mathrm{Ext}^k_{K'}(X ; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$, donc a fortiori dans $\mathrm{Ext}^k_\Phi(X ; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ (pour $k \leq -p$) : on refait la démonstration de 2.1.1. pour l'ouvert X_ε (avec $-t_1 < \varepsilon < 0$) ; on utilise la remarque page 969.

(ii) Pour des recouvrements comme ci-dessus, avec m assez grand, la démonstration du théorème 2.1.1. appliquée à l'ouvert $X_\varepsilon (-t_1 < \varepsilon < 0)$ montre que, pour $k \leq -p-1$, si X' est un voisinage ouvert de $X - \bigcup_{i \in I} U_i^m$, l'application naturelle $\mathrm{Ext}^k_{\Phi'}(X', \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}}) \to \mathrm{Ext}^k_{\Phi_\varepsilon}(X_\varepsilon ; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}})$ est surjective : on peut prendre $X' = X$.

B. *Espaces stablement p-convexes.*

Notation : si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est une application, on pose, pour $c \in \mathbb{R}$, $X_c = \{x \in X / \varphi(x) < c\}$, et $X^c = \{x \in X / c < \varphi(x)\}$.

DEFINITION. (Hypothèses (H')).

On dira que l'espace analytique X est *stablement p convexe*, s'il existe une fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$, et un réel c_0, tels que

(i) L'ouvert X_c soit *relativement compact* dans X pour tout réel c.

(ii) $(X_c, \varphi - c)$ soit *stablement p-convexe* dans X pour tout $c_0 < c$.

(iii) La restriction de φ à X_0^c n'ait pas de minimum local, ou n'ait que des minimum locaux *isolés*.

(iv) Si a est un minimum *isolé* de φ, avec $c_0 < \varphi(a)$, il existe un voisinage ouvert V de a et un réel $t > 0$ $(U_\varepsilon = V \cap \{\varphi - \varphi(a) < \varepsilon\})$ tels que $\mathrm{Ext}_c^k(U_\varepsilon; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) = 0$ pour $k \leq -p-1$ et $H_c^k(U_\varepsilon; \mathcal{F}) = 0$ pour $k \leq -p-1-\mathrm{prof}_a \mathcal{F}$, pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$ et tout $0 < \varepsilon < t$.

DEFINITION. (Hypothèses (H)).

On dira que l'espace topologique X est *$\mathcal{F}$-stablement* (resp. *$\mathcal{F}_c$-stablement*) *p-convexe*, s'il existe une fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$ et un réel c_0, tels que

(i) et (iii) comme ci-dessus.

(ii) $(X_c, \varphi - c)$ soit $\mathcal{F}$-stablement (resp. $\mathcal{F}_c$-stablement) p-convexe dans X pour $c_0 < c$.

(iv) Si a est un minimum *isolé* de φ, avec $c_0 < \varphi(a)$, il existe un voisinage ouvert V de a et un réel $t > 0$ $(U_\varepsilon = V \cap \{\varphi - (a) < \varepsilon\})$ tels que $\mathrm{Ext}_c^k(U_\varepsilon; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) = 0$ pour $k \leq -p-1$ (resp. $H_c^k(U_\varepsilon; \mathcal{F}) = 0$, pour $k \leq -p-1-\mathrm{prof}_a \mathcal{F}$) et $0 < \varepsilon < t$.

Il est clair que si l'espace analytique X est stablement p-convexe, il est $\mathcal{F}$-stablement et $\mathcal{F}_c$-stablement p-convexe. On verra que si X est fortement p-convexe, il est stablement p-convexe.

On obtient les théorèmes d'épuisement pour les espaces $\mathcal{F}$-stablement ou $\mathcal{F}_c$-stablement p-convexes (qui s'appliquent tous deux aux espaces stablement p-convexes) :

THEOREME 3.1.3. Soit X un espace topologique *$\mathcal{F}$-stablement p convexe.* On a

(i) Pour $c > c_0$ et $k \leq -p$, l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}_c^k(X_c; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$$

est *injective*, et le système inductif K compact de $X \mapsto \mathrm{Ext}_K^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{K}})$ est *essentiellement injectif.*

(ii) Pour $c > c_0$ et $k \leq -p-1$, l'application

$$\mathrm{Ext}_c^k(X_c; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \text{ est } \textit{bijective.}$$

THEOREME 3.1.4. Soit X un espace topologique *$\mathcal{F}_c$-stablement p-convexe.* On a

(i) Pour $c > c_0$ et $k \leq -p + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$, l'application naturelle

$$H_c^k(X_c; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F})$$

est *injective,* et le système inductif K compact de $X \mapsto H_K^k(X; \mathcal{F})$ est *essentiellement injectif.*

(ii) Pour $c > c_0$ et $k \leq -p-1+\operatorname{prof}_X \mathcal{F}$, l'application naturelle

$$H_c^k(X_c; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F}) \text{ est } \textit{bijective.}$$

Les théorèmes 3.1.3. et 3.1.4 résultent respectivement des deux lemmes suivants

LEMME 3.1.5.

(i) Dans les conditions de 3.1.3., pour $c > c_0$, $k \leq -p$, et K compact de X_c fixés, l'ensemble des réels $\varepsilon > 0$, tels que si $x \in \operatorname{Ext}_K^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ a une image nulle dans $\operatorname{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$, il ait déjà une image nulle dans $\operatorname{Ext}_c^k(X_{c+\varepsilon}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$, est la demi-droite $[c, +\infty[$ toute entière.

(ii) Dans les conditions de 3.1.3., pour $c > c_0$, $k \leq -p-1$ fixés, l'ensemble des $\varepsilon > 0$ tels que l'application naturelle

$$\operatorname{Ext}_c^k(X_c; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \operatorname{Ext}_c^k(X_{c+\varepsilon}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$$

soit surjective, est la demi droite $[c, +\infty[$.

Lemme 3.1.6. Dans les conditions de 3.1.4.,

(i) pour $c > c_0$, $k \leq -p + \operatorname{prof}_X \mathcal{F}$, et K compact de X_c fixés, l'ensemble des réels $\varepsilon > 0$, tels que si $x \in H_K^k(X; \mathcal{F})$ a une image nulle dans $H_c^k(X; \mathcal{F})$, il ait déjà une image nulle dans $H_c^k(X_{c+\varepsilon}; \mathcal{F})$, est la demi-droite $[c, +\infty[$.

(ii) pour $c > c_0$, $k \leq -p-1+\operatorname{prof}_X \mathcal{F}$ fixés, l'ensemble des $\varepsilon > 0$ tels que l'application naturelle

$$H_c^k(X_c; \mathcal{F}) \to H_c^k(X_{c+\varepsilon}; \mathcal{F})$$

soit surjective, est la demi-droite $[c, +\infty[$.

Ces deux lemmes s'établissant de manière analogue, nous nous contenterons de prouver le premier. Nous reprenons pour cela l'argument de [1] (page 243), mais nous sommes dans une situation plus simple car nous travaillons avec des supports compacts, au lieu de supports quelconques.

(i) L'ensemble considéré n'est *pas vide* (il contient c), il est fermé (c'est évident puisque l'on travaille avec des supports compacts) et *ouvert*

d'après 3.1.1 (i) (et la condition (iii) de la définition) dans l'espace *connexe* $[c, +\infty[$.

(ii) Argument analogue en constatant que l'ensemble considéré est ouvert d'après 3.1.1. (ii) et la condition (iv) de la définition.

II. *Espaces stablement q-concaves.*

A. *Ouverts stablement q-concaves.*

La méthode employée pour le cas stablement q-concave est différente de celle utilisée pour le cas stablement p-convexe. Cette dernière reposait sur une modification de la technique employée dans le cas strictement convexe, procédé inutilisable dans le cas concave (cf. les remarques page 938). Nous avons donc été obligés d'employer une technique voisine de celle de [2], utilisant la méthode de la « *bosse glissante* » de [1] et [2] (on devrait dire ici du « creux glissant » ...) basée sur le fait qu'on dispose d'hypothèses *globales* sur les frontières des ouverts considérés (nous aurions pu employer cette méthode dans le cas stablement p-convexe mais pas dans le cas strictement p-convexe où l'on ne dispose que d'hypothèses *locales* à la frontière).

Pour les raisons que nous venons d'exposer, nous sommes obligés de modifier un peu nos hypothèses de travail : au lieu des hypothèses (H) (page 976), nous utiliserons les hypothèses

(H'') $Y, \mathcal{O}_Y, \mathbf{K}_Y^{\cdot}, \ldots$ sont astreints à vérifier les hypothèses (H) et, de plus, Y est l'espace topologique sous-jacent à un espace analytique complexe ($(Y, \mathcal{O}_Y)$ n'est pas nécessairement cet espace analytique !) ; il en résulte que l'on a sur Y la notion de fonction $\mathcal{C}^\infty$, et, si U est un ouvert assez petit de Y, que l'on a la notion de « semi-norme » définie par plongement lisse sur $\mathcal{E}(U)$ (cf. page 943 ; avec les notations correspondantes, on dira que c'est une semi-norme $\mathcal{C}^2$ si $k = 2$).

Soient Y un espacé topologique, X un ouvert de Y, φ : voisinage ouvert de $\partial X \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que X soit défini dans ce voisinage par $0 < \varphi$. On pose, pour α de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce voisinage, $X^\alpha = \{0 < \varphi + \alpha\} \cup X$.

On désigne par $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module et par q un entier ≥ 0. On a les résultats suivants :

PROPOSITION 3.2.1. Si (X, φ) est $\mathcal{F}$-stablement q-concave dans Y, et ∂X *compact*, on a

(i) Pour tout fermé $K \in \Phi(X)$ et tout entier $q + 3 - \operatorname{prof}_X \mathcal{F} \leq k$, il existe un réel *strictement positif* ε, tel que si $x \in \operatorname{Ext}_K^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ a une

image nulle dans $\mathrm{Ext}^k_{\Phi_\varepsilon}(X^\varepsilon\,;\,\mathcal{F},\,\mathbf{K}^\cdot_Y)$ il ait déjà une image nulle dans $\mathrm{Ext}^k_{\Phi}(X\,;\,\mathcal{F},\,\mathbf{K}^\cdot_X)$

(ii) Pour tout entier $q+2-\mathrm{prof}_X\,\mathcal{F}\leq k$, il existe un réel *strictement positif* ε, tel que l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^k(X\,;\,\mathcal{F},\,\mathbf{K}^\cdot_X)\longrightarrow \mathrm{Ext}^k_{\Phi_\varepsilon}(X^\varepsilon\,;\,\mathcal{F},\,\mathbf{K}^\cdot_Y)\quad \text{soit } \textit{surjective.}$$

($\Phi(X)=$ fermés de Y contenus dans X, $\Phi_\varepsilon(X^\varepsilon)=$ fermés de Y contenus dans X^ε.)

PROPOSITION 3.2.2. Si (X,φ) est $\mathcal{F}_c$-stablement q-concave dans Y, et ∂X *compact*, on a

(i) Pour tout fermé $K\in\Phi(X)$ et tout entier $q+3\leq k$, il existe un réel *strictement positif* ε, tel que, si $x\in H^k_K(X\,;\,\mathcal{F})$ a une image nulle dans $H^k_{\Phi_\varepsilon}(X^\varepsilon\,;\,\mathcal{F})$, il ait déjà une image nulle dans $H^k(X\,;\,\mathcal{F})$.

(ii) Pour tout entier $q+2\leq k$, il existe un réel *strictement positif* ε, tel que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi}(X\,;\,\mathcal{F})\longrightarrow H^k_{\Phi_\varepsilon}(X^\varepsilon\,;\,\mathcal{F})\quad \text{soit } \textit{surjective.}$$

La démonstration de ces deux propositions repose sur le lemme suivant, dont nous laissons la démonstration au lecteur (cf. [1] et [2]):

LEMME 3.2.3. Pour tout $t>0$ réel, tout recouvrement ouvert fini $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i=1,\dots,m}$ et toute suite $\{\|\cdot\|^i_2\}$ de « semi-normes » de type $\mathcal{C}^2$ définies par plongement de chaque U_i, il existe une suite $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,}$ de fonctions C^∞ sur $\bigcup U_i$, telle que, posant $X_i=X^{\alpha_i}$, $X_0=X$, l'on ait

(i) $0\leq\alpha_i\leq\alpha_{i+1}$, donc $X_i\subset X_{i+1}$ $\qquad(i=0,\dots,m-1)$.

(ii) $\mathrm{Supp}\,(\alpha_i-\alpha_{i-1})\subset U_i$, donc $X_i-X_{i-1}\subset\subset U_i$ $\qquad(i=1,\dots,m)$

(iii) α_m est strictement positive au voisinage de ∂X, donc $\bar{X}\subset X_m$.

(iv) $\|\alpha_i\|^j_2<t$ $\qquad(i,j=1,\dots,m)$.

Les démonstrations de 3.2.1. et 3.2.2. étant voisines nous nous contenterons d'établir 3.2.2., qui résulte du

LEMME 3.2.4. Dans la situation de la proposition 3.2.2.

(i) Pour tout fermé $K \in \Phi(X)$, il existe deux recouvrements ouverts $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $\mathfrak{U}' = \{U_i'\}_{i \in I}$ $(i = 1, \dots, m)$ de ∂X, et une suite de fonctions $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,m}$, tels que l'on ait

(*a*) La suite $\{\alpha_i\}$ satisfait, pour le recouvrement $\mathfrak{U}'$, aux conditions du lemme 3.2.3.

(*b*) Pour $i = 1, \dots, m$, on a $U_i' \subset U_i$, et les applications naturelles

$$H^k_{\Phi_i}(U_i \cap X_i; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_i}(U_i' \cap X_i; \mathcal{F})$$

ont une image nulle pour $q + 2 \leq k$.

(*c*) $$K \subset X - \bigcup_{i=1,\dots,m} U_i.$$

(ii) Dans la situation de (i), si $q + 3 \leq k$, tout élèment $x \in H^k_K(X; \mathcal{F})$ qui a une image nulle dans $H^k_{\Phi_m}(X; \mathcal{F})$ a déjà une image nulle dans $H^k_\Phi(X; \mathcal{F})$.

(iii) Dans la situation de (i), l'application naturelle

$$H^k_\Phi(X; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_m}(X_m; \mathcal{F}) \quad \text{est } \textit{surjective}.$$

La partie (i) est facile en utilisant 3.2.3 et les définitions (nous laissons les détails au lecteur). Les assertions (ii) et (iii) s'établissent par récurrence *descendante* sur i; on démontre

$(\text{ii})_i$ Dans la situation de (i), si $q + 3 \leq k$, tout élèment $x \in H^k_K(X; \mathcal{F})$ qui a une image nulle dans $H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F})$ à déjà une image nulle dans $H^k_{\Phi_{i-1}}(X_{i-1}; \mathcal{F})$.

$(\text{iii})_i$ Dans la situation de (i), si $q + 2 \leq k$, l'application naturelle

$$H^k_{\Phi_{i-1}}(X_{i-1}; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F}) \quad \text{est } \textit{surjective}.$$

Considérons le diagramme commutatif, dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}_{\Phi_i}(X_i - K; \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k_K(X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k_{\Phi_i}(X_i - K; \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}_{\Phi_i}(U_i \cap X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k_{\Phi_i \cap (X_i - U_i)}(X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k_{\Phi_i}(U_i \cap X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}_{\Phi_i}(U_i' \cap X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] & H^k_{\Phi_i \cap (X_i - U_i')}(X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] & H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] & H^k_{\Phi_i}(U_i' \cap X_i; \mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(ii)$_i$ Si $q + 3 \leq k\,(q + 2 \leq k - 1)$, ce diagramme montre que si $x \in H^k_K(X_i; \mathcal{F})$ a une image nulle dans $H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F})$, il a une image nulle dans $H^k_{\Phi_i \cap (X_i - U_i')}(X_i; \mathcal{F})$. Mais, par construction, l'application naturelle

$$H^k_K(X; \mathcal{F}) = H^k_K(X_i; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_{i-1}}(X_{i-1}; \mathcal{F})$$

se factorise par $H^k_{\Phi_i \cap (X_i - U_i')}(X_i; \mathcal{F})$: l'image de x dans $H^k_{\Phi_{i-1}}(X_{i-1}; \mathcal{F})$ est donc nulle. (On a $K \subset \Phi_i(X_i) \cap (X_i - U_i') \subset \Phi_{i-1}(X_{i-1})$.)

(iii)$_i$ Si $q + 2 \leq k$, le diagramme montre que l'application naturelle

$$H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_i}(U_i' \cap X_i; \mathcal{F})$$

a une image nulle, donc l'application $H^k_{\Phi_i \cap (X_i - U_i')}(X_i; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F})$ est surjective et il en est a fortiori de même de l'application $H^k_{\Phi_{i-1}}(X_{i-1}; \mathcal{F}) \to$ $\to H^k_{\Phi_i}(X_i; \mathcal{F})$.

REMARQUE: On constatera plus loin que les assertions (ii) de 3.2.1. et 3.2.2. *suffisent* pour établir les théorèmes de finitude dans le cas q concave (ou (p, q)-convexe concave, compte tenu des résultats sur le cas p-convexe). Nous avons donné quand même les assertions (i) car elles fournissent des résultats d'*injectivité indispensables* pour établir les théorèmes de *cohérence des images directes* dans le cas *relatif*.

B. *Espaces stablement q concaves.*

DEFINITION. (Hypothèse (H').)

On dira que l'espace analytique X est *stablement q-concave*, s'il existe une fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$ et un réel d_0, tels que

(i) L'ouvert X^d soit *relativement compact* dans X pour tout réel d.

(ii) $(X^d, \varphi - d)$ soit *stablement q-concave* dans X pour tout $d < d_0$.

(iii) La restriction de φ à X_{d_0} n'ait *pas* de maximum local,

DEFINITION. (Hypothèses (H'').)

On dira que l'espace topologique X est *$\mathcal{F}$-stablement* (resp. *$\mathcal{F}_c$-stablement*) *q-concave*, s'il existe une fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$ et un réel d_0, tels que

(i) et (iii) comme ci-dessus.

(ii) $(X^d, \varphi - d)$ soit *$\mathcal{F}$-stablement* (resp. *$\mathcal{F}_c$-stablement*) *q-concave* dans X pour tout $d < d_0$.

Il est clair que si l'espace analytique X est *stablement q-concave*, il est *$\mathcal{F}$-stablement* et *$\mathcal{F}_c$-stablement q-concave*. On verra que si X est *fortement q-concave*, il est *stablement q-concave*.

On obtient les théorèmes d'*épuisement* pour les espaces *$\mathcal{F}$-stablement* ou *$\mathcal{F}_c$-stablement q-concaves* (qui s'appliquent tous deux aux espaces *stablement q-concaves*) :

THEOREME 3.2.5. Soit X un espace topologique *$\mathcal{F}$-stablement q-concave*. On a

(i) Pour $d < d_0$ et $q + 3 - \operatorname{prof}_X \mathcal{F} \leq k$, l'application naturelle

$$\operatorname{Ext}_c^k(X^d; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \operatorname{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \text{ est } \textit{bijective.}$$

(ii) Pour $d < d_0$ et $q + 2 - \operatorname{prof}_X \mathcal{F} \leq k$, l'application naturelle

$$\operatorname{Ext}_c^k(X^d; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \operatorname{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \text{ est } \textit{surjective.}$$

THEOREME 3.2.6. Soit X un espace topologique *$\mathcal{F}_c$-stablement q-concave*. On a

(i) Pour $d < d_0$ et $q + 3 \leq k$, l'application naturelle

$$H_c^k(X^d; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F}) \text{ est } \textit{bijective.}$$

(ii) Pour $d < d_0$ et $q + 2 \leq k$, l'application naturelle

$$H_c^k(X^d; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F}) \text{ est } \textit{surjective.}$$

Ces théorèmes se démontrent en procèdant comme dans le cas p-convexe, à partir des propositions 3.2.1 et 3.2.2. (on établit d'abord les lemmes analogues à 3.1.5. et 3.1.6.).

III. *Espaces stablement* (p, q) *convexes concaves.*

On se placera dans cette partie dans le cadre des hypothèses (H'').

A. *Ouverts stablement* q *concaves.*

Soient Y un espace topologique et X un ouvert de Y. On suppose que ∂X est réunion *disjointe* de deux fermés $\partial^1 X$ et $\partial^2 X$. Soit $\varphi : V \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; V étant un voisinage ouvert de X de la forme $V = V_1 \cup V_2$, où V_i est un voisinage ouvert de $\partial^i X$ $(i = 1, 2)$, avec V_1 et V_2 *disjoints.* $(\varphi_i = \varphi_{|V_i})$.

Notation : si α_1 et α_2 sont des nombres réels, on pose

$$X_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \{\varphi_1 + \alpha_1 < 0\} \cup \{0 < \varphi_2 + \alpha_2\} \cup X.$$

DEFINITION. On dira dans ces conditions que (X, φ) est *stablement* (p, q)*-convexe-concave* (resp. $\mathcal{F}$*-stablement*, resp. $\mathcal{F}_c$*-stablement* (p, q)*-convexe-concave*) dans Y, si (X, φ) est stablement p-convexe (resp. $\mathcal{F}$-stablement, resp. $\mathcal{F}_c$-stablement p-convexe) en tout point de $\partial^1 X$ et stablement q-concave (resp. $\mathcal{F}$-stablement, resp. $\mathcal{F}_c$-stablement q-concave) en tout point de $\partial^2 X$.

Des propositions 3.1.1. et 3.2.1, on déduit immédiatement la

PROPOSITION 3.3.1. Si (X, φ) est $\mathcal{F}$*-stablement* (p,q)*-convexe-concave,* et ∂X *compact,* on a

(i) Pour tout fermé $K \in \Phi(X)$ et tout entier $q + 3 - \operatorname{prof}_{\partial X} \mathcal{F} \leq k \leq -p$, il existe un réel *strictement positif* ε, tel que si $x \in \operatorname{Ext}_K^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ a une image nulle dans $\operatorname{Ext}^k_{\Phi^\varepsilon_{-\varepsilon}}(X^\varepsilon_{-\varepsilon}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}})$, il ait déjà une image nulle dans $\operatorname{Ext}^k_\Phi(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$.

(ii) Pour tout entier $q + 2 - \operatorname{prof}_{\partial X} \mathcal{F} \leq k \leq -p - 1$, il existe un réel *strictement positif* ε, tel que l'application naturelle

$$\operatorname{Ext}^k_\Phi(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \operatorname{Ext}^k_{\Phi^\varepsilon_{-\varepsilon}}(X^\varepsilon_{-\varepsilon}; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{Y}}) \quad \text{soit } \textit{surjective.}$$

Des propositions 3.1.2. et 3 2.2., on déduit la

PROPOSITION 3.3.2. Si (X, φ) est $\mathcal{F}_c$-*stablement* (p, q)-*convexe-concave*, et ∂X *compact*, on a

(i) Pour tout fermé $K \in \Phi(X)$ et tout entier $q+3 \leq k \leq -p + \operatorname{prof}_{\partial X} \mathcal{F}$, il existe un réel *strictement positif* ε, tel que si $x \in H_K^k(X; \mathcal{F})$ a une image nulle dans $H^k_{\Phi^\varepsilon_{-\varepsilon}}(X^\varepsilon_{-\varepsilon}; \mathcal{F})$, il ait déjà une image nulle dans $H^k_\Phi(X; \mathcal{F})$.

(ii) Pour tout entier $q + 2 \leq k \leq -p - 1 + \operatorname{prof}_{\partial X} \mathcal{F}$, il existe un réel *strictement positif* ε, tel que l'application naturelle

$$H^k_\Phi(X; \mathcal{F}) \to H^k_{\Phi^\varepsilon_{-\varepsilon}}(X^\varepsilon_{-\varepsilon}; \mathcal{F}) \text{ soit } \textit{surjective}.$$

B. *Espaces stablement* (p, q) *convexes-concaves.*

Notation : si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est une application, on note, pour $c, d \in \mathbb{R}$ avec $d < c$, $X_c^d = \{x \in X / d < \varphi(x) < c\}$.

DEFINITION. (Hypothèses (H').)
On dira que l'espace analytique X est stablement (p, q)-convexe-concave, s'il existe une fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$, et deux réels $d_0 < c_0$, tels que

(i) L'ouvert X_c^d soit *relativement compact* dans X pour tous réels $d < c$.

(ii) $(X_c^d, \varphi - c, \varphi - d)$ soit *stablement* (p, q)-*convexe-concave* dans X pour tous $d < d_0 < c_0 < c$.

(iii) La restriction de φ à X^{c_0} n'ait pas de minimum local (ou n'ait que des minimums locaux *isolés*) et celle de φ à X_{d_0} n'ait pas de maximum local.

(iv) Si a est un minimum local isolé de φ, avec $\varphi(a) > c_0$, il existe un voisinage ouvert V de a et un réel $t > 0$ $(U_\varepsilon = V \cap \{\varphi - \varphi(a) < \varepsilon\})$ tels que $\operatorname{Ext}_c^k(U_\varepsilon; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) = 0$ pour $k \leq -p - 1$ et $H_c^k(U_\varepsilon; \mathcal{F}) = 0$ pour $k \leq$ $\leq -p - 1 + \operatorname{prof}_a F$, pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohèrent $\mathcal{F}$ et tout réel $0 < \varepsilon < t$.

DEFINITION. (Hypothèses (H'').)
On dira que l'espace topologique X est $\mathcal{F}$-*stablement* (resp. $\mathcal{F}_c$-stablement) (p, q)-*convexe-concave*, s'il existe une fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$ et deux réels $d_0 < c_0$, tels que

(i) et (iii) comme dans la définition précédente.

(ii) $(X_c^d, \varphi - c, \varphi - d)$ soit $\mathcal{F}$-*stablement* (resp. $\mathcal{F}_c$-*stablement*) (p, q)-*convexe-concave* dans X pour tous $d < d_0 < c_0 < c$.

(iv) Si a est un minimum *local isolé* de φ, avec $\varphi(a) > c_0$, il existe un voisinage ouvert V de a et un réel $t > 0$ ($U_\varepsilon = V \cap \{\varphi - \varphi(a) < \varepsilon\}$) tels que $\mathrm{Ext}_c^k(U_\varepsilon; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) = 0$ pour $k \leq -p-1$ (resp. $H_c^k(U_\varepsilon; \mathcal{F}) = 0$ pour $k \leq -p-1+\mathrm{prof}_a \mathcal{F}$) et $0 < \varepsilon < t$.

En procèdant comme dans le cas p convexe, on déduit des propositions 3.3.1. et 3.3.2. les théorèmes d'*épuisement* pour les espaces *$\mathcal{F}$-stablement* ou *$\mathcal{F}_c$-stablement* (p, q)*-convexes concaves* (qui s'appliquent tous deux au cas d'un $\mathcal{O}_X$-module *cohèrent* $\mathcal{F}$ sur un espace *stablement* (p, q) *convexe-concave*):

THEOREME 3.3.3. Soit X un espace topologique *$\mathcal{F}$-stablement* (p,q) *convexe-concave*. On a

(i) Pour $d < d_0 < c_0 < c$ et $q + 3 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p$, l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}_c^k(X_c^d; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, H_X^{\cdot}) \quad \text{est } \textit{injective}$$

(ii) Pour $d < d_0 < c_0 < c$ et $q + 2 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p-1$, l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}_c^k(X_c^d; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) \quad \text{est } \textit{surjective.}$$

THEOREME 3.3.4. Soit X un espace topologique *$\mathcal{F}_c$-stablement* (p, q)*-convexe-concave*. On a

(i) Pour $d < d_0 < c_0 < c$ et $q + 3 \leq k \leq -p + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$, l'application naturelle

$$H_c^k(X_c^d; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F}) \quad \text{est injective.}$$

(ii) Pour $d < d_0 < c_0 < c$ et $q + 2 \leq k \leq -p - 1 + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$, l'application

$$H_c^k(X_c^d; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F}) \quad \text{est } \textit{surjective.}$$

Par une méthode analogue à celle utilisée pour déduire les théorèmes 2.1.7. et 2.1.8. des théorèmes 2.1.1. et 2.1.2., on déduit des théorèmes d'*épuisement* 3.3.3. et 3.3.4. les théorèmes de *séparation* et de *finitude*

THEOREME 3.3.5. Soient X un espace analytique, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module *cohérent*, et $p, q \in \mathbb{N}$. Si X est *$\mathcal{F}$-stablement* (p, q)*-convexe-concave* (en particulier si X est *stablement* (p, q)*-convexe-concave*), on a

(i) Les espaces $\mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$ sont *séparés* pour $q + 2 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p$ et de *dimension finie* pour $q + 2 - \mathrm{prof}_X F \leq k \leq p - 1$.

(ii) Les espaces $H^k(X;\mathcal{F})$ sont *séparés* pour $p+1 \leq k \leq -q-1+$ $+\operatorname{prof}_X \mathcal{F}$ et de dimension finie pour $p+1 \leq k \leq -q-2+\operatorname{prof}_X \mathcal{F}$.

THEOREME 3.3.6. Soient X un espace analytique, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ module cohérent, et $p, q \in \mathbb{N}$. Si X est $\mathcal{F}_c$-*stablement* (p, q)-*convexe-concave* (en particulier si X est *stablement* (p, q)-*convexe-concave*), on a

(i) Les espaces $H_c^k(X;\mathcal{F})$ sont *séparés* pour $q+2 \leq k \leq -p+$ $+\operatorname{prof}_X \mathcal{F}$ et de *dimension finie* pour $q+2 \leq k \leq -p-1+\operatorname{prof}_X \mathcal{F}$.

(ii) Les espaces $\operatorname{Ext}^k(X;\mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ sont *séparés* pour $p+1-\operatorname{prof}_X \mathcal{F} \leq$ $\leq k \leq -q-1$ et de *dimension finie* pour $p+1-\operatorname{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -q-2$.

IV. *Espaces fortement* (p, q)-*convexes-concaves.*

Après avoir rappelé la définition des espaces *fortement* (p, q)-*convexes-concaves*, nous constaterons qu'ils sont *stablement* (p, q)-*convexes-concaves*. Les résultats établis dans la partie III fournissent donc un théorème d'*épuisement* et des théorèmes de *séparation* et de *finitude* pour les espaces *fortement* (p, q)-*convexes concaves*. En passant nous signalerons comment une méthode de [1] conduirait, compte tenu d'un théorème de dualité, à un théorème d'épuisement un peu plus précis.

DEFINITION. On dit que l'espace analytique X est fortement (p, q)-convexe-concave, s'il existe une fonction continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$, et deux réels $d_0 < c_0$, tels que

(i) L'ouvert X_c^d soit *relativement compact* dans X, pour tous réels $d < c$.

(ii) La fonction φ soit *fortement p-convexe* sur X_0^c et *fortement q-convexe* sur X_{d_0}.

(iii) La restriction de φ à X_0^c n'ait pas de minimum local ou n'ait que des minimums locaux *isolés*.

LEMME 3.4.1. Un espace analytique *fortement* (p, q)-*convexe-concave* est *stablement* (p, q)-*covexe-concave* (donc $\mathcal{F}$-stablement et $\mathcal{F}_c$-stablement (p, q)-convexe concave pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$).

La seule vérification à faire est (iv) [16] : on applique les théorèmes de *dualité* aux théorèmes 1.3.1 et 1.3.6.

---

[16] On peut se ramener au cas où la condition (iii) sur les maximums est satisfaite : si $q < \dim_x X$, φ ne peut pas atteindre de maximum local en x, et si q est trop grand, la q-convexité est une propriété vide.

Les théorèmes 3.3.3 et 3.3.4. fournissent, compte tenu des théorèmes de dualité, le théorème d'*épuisement*:

THEOREME 3.4.2. Soient X un espace analytique *fortement* (p, q)*-convexe-concave*, φ une fonction d'épuisement pour X de constantes exceptionnelles $d_0 < c_0$. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohèrent $\mathcal{F}$, on a, pour $d < d_0 < c_0 < c$:

(i) L'application naturelle $\mathrm{Ext}_c^k(X_c^d; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to \mathrm{Ext}_c^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ est *injective* pour $q + 3 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p$ et *surjective* pour $q + 2 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq \leq k \leq -p - 1$.

(ii) L'application de restriction $H^k(X; \mathcal{F}) \to H^k(X_c^d; \mathcal{F})$ est d'*image dense* pour $k = p$, *bijective* pour $p + 1 \leq k \leq -q - 3 + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et *injective* pour $k = -q - 2 + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

(iii) L'application naturelle $H_c^k(X_c^d; \mathcal{F}) \to H_c^k(X; \mathcal{F})$ est *injective* pour $q + 3 \leq k \leq -p + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et *surjective* pour $q + 2 \leq k \leq -p - 1 + + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

(iv) L'application de restriction $\mathrm{Ext}^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{H}_{\dot{X}}) \to \mathrm{Ext}^k(X_c^d; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ est d'*image dense* pour $k = p - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$, *bijective* pour $p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq \leq k \leq -q - 3$ et *injective* pour $k = -q - 2$.

REMARQUE. Une méthode de [1] permet de voir que l'*injectivité* de l'application du (ii) en degré $k = -q - 2 + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ entraîne sa *bijectivité* (compte tenu de la surjectivité en degré $k = -q - 3 + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$: cf. [1] page 248), on en déduit par dualité la *bijectivité* de l'application du (i) en degré $q + 2 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$. On vérifie de même que l'application du (iv) est *bijective* en degré $-q - 2$, et on en déduit par dualité que l'application du (iii) est *bijective* en degré $q + 2$.

Les théorèmes 3.3.5. et 3 3.6. fournissent le théorème de *séparation* et *finitude*

THEOREME 3.4.3. Soit X un espace analytique *fortement* (p, q)*-convexe-concave*. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, on a

(i) Les espaces $H^k(X; \mathcal{F})$ sont *séparés* pour $p + 1 \leq k \leq -q - 1 + + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et de *dimension finie* pour $p + 1 \leq k \leq -q - 2 + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$.

(ii) Les espaces $H_c^k(X; \mathcal{F})$ sont *séparés* pour $q + 2 \leq k \leq -p + + \mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et de *dimension finie* pour $q + 2 \leq k \leq -p - 1 + \mathrm{prof}_X F$.

(iii) Les espaces $H_{-k}(X; \mathcal{F}_*) = \mathrm{Ext}^k(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ sont *séparés* pour $p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -q - 1$ et de *dimension finie* pour $p + 1 - - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -q - 2$.

(iv) Les espaces $H^c_{-k}(X; \mathcal{F}_*) = \mathrm{Ext}^k_c(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ sont *séparés* pour $q+2-\mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p$ et de *dimension finie* pour $q+2-\mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq \leq k \leq -p-1$.

Ce théorème contient les théorèmes 2 et 9 de l'introduction.

4. Théorèmes d'épuisement pour les applications fortement (p,q)-convexes-concaves. Théorème et conjecture de coherence pour les applications fortement q-concaves.

1. *Théorèmes d'épuisement.*

DEFINITION. On dit qu'un *morphisme* $f: X \to Y$ d'espaces analytiques est *fortement* (p, q)-convexe-concave, s'il existe une fonction continue $\varphi: X \to \to \mathbb{R}$ et deux réels $d_0 < c_0$, tels que

(i) X_c^d soit *relativement propre* au-dessus de Y, pour tous réels $d < c$.

(ii) La fonction φ soit *fortment* p-convexe sur X_0^c et *fortement* q-convexe sur X_{d_0}.

(iii) La restriction de φ à X_0^c n'ait pas de minimum local ou n'ait que des minimum locaux *isolés*.

Nous allons prouver le théorème d'*épuisement*

THEOREME 4.1.1. Soient $f: X \to Y$ un *morphisme fortement* (p, q)-*convexe. concave* d'espaces analytiques, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ une fonction d'épuisement correspondante de constantes exceptionelles $d_0 < c_0$. Alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, si $d < d_0 < c_0 < c$, on a :

(i) Le morphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules

$$R^k f^d_{c!}\, \mathbf{R}\, \mathcal{H}om\,(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}}) \to R^k f_!\, \mathbf{R}\, \mathcal{H}om\,(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$$

est *surjectif* pour $q+2-\mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p-\dim Y-1$ et *injectif* pour

$$q+3-\mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -p-\dim Y.$$

(ii) Le morphisme de $\mathcal{O}_Y$ modules

$$R^k f^d_{c!}\, \mathcal{F} \to R^k f_!\, \mathcal{F}$$

est surjectif pour $q+2 \leq k \leq -p-\dim Y-1+\mathrm{prof}_X \mathcal{F}$ et injectif pour

$$q+3 \leq k \leq -p-\dim Y+\mathrm{prof}_X \mathcal{F}.$$

(On a noté f^d_c la restriction de f à X^d_c).

La question étant locale, on peut supposer que Y est un polydisque ouvert de centre O dans $\mathbb{C}^n$. On pose alors $Z = f^{-1}(O)$ et on note ψ la restriction de φ à Z; on désigne par $\mathcal{O}_Z$ le faisceau sur Z dont la fibre en $x \in Z$ est $(\mathcal{O}_X)_x$ ($\mathcal{O}_X$ étant le faisceau structural de X): ce n'est pas le faisceau structural de l'espace analytique Z; plus généralement, si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, on désigne par $\mathcal{F}_Z$ le faisceau de $\mathcal{O}_Z$-modules dont la fibre en $x \in Z$ est $\mathcal{F}_x$, et si $\mathbf{K}_X^{\cdot}$ est le complexe dualisant de X, on voit ce que l'on désigne par $\mathbf{K}_Z^{\cdot}$: c'est un complexe de $\mathcal{O}_Z$-modules que l'on ne confondra pas avec le complexe dualisant de l'espace analytique Z. Enfin, si $\mathcal{F}_Z$ provient d'un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, on pose $\operatorname{prof}_x \mathcal{F}_Z = \operatorname{prof}_x \mathcal{F}$ (pour $x \in Z$). Pour $Z, \mathcal{O}_Z, H_Z^{\cdot}$, $\operatorname{prof}_x \mathcal{F}_Z$ on est dans les conditions des hypothèses (H'') (cf. page 982).

Le théoréme 4.1.1. résulte du théorème 3.3.3. et du théorème 3.3.4., une fois que l'on a verifié que pour tout $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$, l'espaco topologique Z est $\mathcal{F}_Z$-stablement $(p+n, q)$-convexe concave et $\mathcal{F}_{Zc}$-stablement $(p+n, q)$-convexe-concave, ce qui résulte du

LEMME 4.1.2. Dans les conditions ci-dessus,

(i) Si $c_0 < c$ et $a \in \partial Z_c$, $(Z_c, \psi - \psi(a))$ est $\mathcal{F}_Z$-stablement $(p+n)$-convexe-concave et $\mathcal{F}_{Zc}$-stablemeut $(p+n)$-convexe-concave en a dans Z.

(ii) Si $d < d_0$ et $a \in \partial Z^d$, $(Z^d, \psi - \psi(a))$ est $\mathcal{F}_Z$ stablement et $\mathcal{F}_{Zc}$-stablement q-concave en a dans Z.

Les assertions (i) et (ii) de ce lemme se déduisent respectivement des lemmes suivants

LEMME 4.1.3. Soit $f: X \to S$ une application analytique (S est un polydisque ouvert de centre O dans $\mathbb{C}^n$). Soit $\varphi: X \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ fortement p-convexe en a $(f(a) = 0)$. On pose, pour $r > 0$ et $\alpha \in \mathcal{E}(X)$, $Y_{r,\alpha} = \{x \in X / \varphi(a) < \varphi(x) + \alpha(x)$ et $\|f(x)\| < r\}$. Dans ces conditions, on peut trouver un système fondamental $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de voisinages ouverts de Stein de a dans X, une « semi-norme » $\| \ \|_2$ de type $\mathcal{C}^2$ définie par plongement d'un voisinage de $\overline{V}_0$ dans X, et deux réels r_0 et t_0 strictement positifs, tels que pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, l'on ait

(i) L'application de restriction $\Gamma(V_m; \mathcal{F}) \to \Gamma(V_m \cap Y_{r,\alpha}; \mathcal{F})$ est surjective pour $0 < r < r_0$ et $\|\alpha\|_2 < t_0$ (et $m \in \mathbb{N}$).

(ii) $H^k(V_m \cap Y_{r,\alpha}; \mathcal{F}) = 0$ pour $1 \leq k \leq \operatorname{prof}_a \mathcal{F} - n - p - 2$, $0 < r < r_0$, $\|\alpha\|_2 < t_0$ et $m \in \mathbb{N}$.

LEMME 4.1.4. Soit $f: X \to S$ une application analytique (S est un polydisque ouvert de centre O dans $\mathbb{C}^n$). Soit $\varphi: X \to \mathbb{R}$ une application de

classe $\mathcal{C}^\infty$ fortement q-convexe en a ($f(a) = 0$). On pose, pour $r > 0$ et $\alpha \in \mathcal{E}(X)$, $T_{r,\alpha} = \{x \in X / \varphi(x) + \alpha(x) < \varphi(a)$ et $\|f(x)\| < r\}$. Dans ces conditions, on peut trouver un système fondamental $\{V_m\}_{m \in \mathfrak{M}}$ de voisinages ouverts de Stein de a dans X, une seminorme $\| \ \|_2$ de type $\mathcal{C}^2$ définie par plongement d'un voisinage de $\overline{V}_0$ dans X, et deux réels r_0 et t_0 strictement positifs, tels que, pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$ l'on ait

$$H^k(V_m \cap Y_{r,\alpha}; \mathcal{H}) = 0 \text{ pour } q + 1 \leq k,\ 0 < r < r_0,\ \|\alpha\|_2 < t_0$$

et $m \in \mathfrak{M}$.

Dans les deux cas, on se ramène par des arguments faciles et la technique employée pour 1.3.1. et 1.3.6. à la situation suivante : $X = D \times S$, où D est un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^s$, $f : D \times S \to S$ est la projection, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Le lemme 4.1.4. est alors évident en reprenant la démonstration de 1.3.1. (si H est un sons-espace affine de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n$, U et U' deux ouverts de Stein de $X \cap H$, avec U' de Runge dans U, alors $f^{-1}(B(O, r)) \cap U$ et $f^{-1}(B(O, r)) \cap U'$ sont encore ouverts de Stein dans $H \cap X$ et le second encore de Runge dans le premier). La démonstration de 4.1.3. est un peu plus délicate : en reprenant la démonstration de 1.3.6., on est ramené à la situation suivante : X est un ouvert de E ($\dim E = \sigma$) contenant O, $E = E' \oplus E''$ ($\dim E' = q$), $\varphi(z) = \operatorname{Re} z_{q+1} + Q(z) + \varepsilon(z)$ et on a une application $f = (f_1, \dots, f_n)$ de X dans S (les f_i étant les restrictions à X de formes linéaires sur E). On pose $X' = X \times S$ et on désigne par M le graphe de f dans X' ; on pose $X'_r = X \times B(O, r)$ ($B(O, r)$ étant une boule ouverte de centre O et de rayon r, contenue dans S) et on désigne par M_r le graphe de la restriction à $X_r = X \cap f^{-1}(B(O, r))$ de f : on a $M_r = M \cap X'_r$ et l'application évidente $\pi_r : X_r \to X'_r$ est un plongement d'image M_r. Si l'on note φ' le prolongement de φ à X' constant sur les $\{x\} \times S$, on constate que φ' est fortement $(q + n)$-convexe sur X' ; reprenant alors la démonstration de 1.3.6. pour X', φ', $E \oplus \mathbb{C}^n = (E' \oplus \mathbb{C}^n) \oplus E''$, on trouve un système fondamental de polydisques ouverts

$$V_m = V'_m \times V''_m \ (V'_m = U'_m \times U''_m,\ U'_m \subset E' \oplus \mathbb{C}\, e_{q+1},\ U''_m \subset \mathbb{C}^n \text{ et } V''_m \subset \mathbb{C}\, e_{q+2} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\, e_s)$$

et deux réels $r_0, t_0 > 0$ ($B(O, r_0) \subset S$), tels que

(i) l'application de restriction

$$\Gamma(U'_m \times (U''_m \cap B(O, r)) \times V''_m; \mathcal{O}_{X'}) \to \Gamma((U'_m \times (U''_m \cap B(O, r)) \times V''_m) \cap \{\varphi'(O) < \varphi' + \alpha\}; \mathcal{O}_{X'})$$

soit surjective pour $r < r_0$ et $\|\alpha\|_2 < t_0$, et que

(ii) $H^k((U'_m \times (U''_m \cap B(O,r)) \times V''_m \cap \{\varphi'(O) < \varphi' + \alpha\}; \mathcal{O}_{X'}) = 0$ pour $1 \leq k \leq (\sigma + n) - (q + n) - 2 = \sigma - q - 2, r < r_0$ et $\|\alpha\|_2 < t_0$. On conclut ensuite facilement en considèrant $\pi_{r*}\mathcal{O}_{X_r}$ comme $\mathcal{O}_{X'_r}$-module cohérent (de profondeur s).

On passe des lemmes 4.1.3. et 4.1.4. aux assertions (i) et (ii) du lemme 4.1.2. en utilisant une technique analogue à celle utilisée pour prouver le lemme 1.4.1. La démonstration du théorème d'épuisement 4.1.1. est ainsi terminée.

II. *Un théorème et une conjecture de cohérence.*

Les techniques introduites par Houzel dans [31] permettent de déduire du théorème d'*épuisement* 4.1.1. (i) le théorème suivant

THEOREME 4.2.1. Soit $f: X \to Y$ un *morphisme fortement q-concave* d'espaces analytiques. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, les *images directes à supports propres* $R^k f_! \mathbf{R}\,\mathcal{H}om(X; \mathcal{F}, \mathbf{K})_{\dot{X}})$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules *cohérents* pour $q + 2 - \operatorname{prof}_X \mathcal{F} \leq k$
(En d'autres termes $Rf_! \mathbf{R}\mathcal{H}om(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_{\dot{X}})$ est $(q + 2 - \operatorname{prof}_X \mathcal{F})$-pseudocohérent).

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [23]. Il est également prouvé dans cet article, à l'aide d'un théorème de dualité relative, que le théorème 4.2.1. entraîne le

THEOREME 4.2.2. Si $f: X \to Y$ est un *morphisme fortement q-concave* d'espaces analytiques, pour tout $\mathcal{O}_X$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, les *images directes* $R^k f_* \mathcal{F}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules *cohérents* pour $k \leq \operatorname{prof}_X \mathcal{F} - q - 2 - \dim Y$(17).

Ce théorème améliore un résultat de *Y. T.* Siu [27] (Y lisse, f plate et cohérence pour $k \leq \operatorname{prof}_X F - q - 2 - 2 \dim Y$) et démontre une conjecture de *Y. T.* Siu [27] (f quelconque $k \leq \operatorname{prof}_X F - q - 2 - \dim Y$).

La conjecture suivante se démontrerait comme le théorème 4.2.1 : en utilisant le théorème d'épuisement 4.1.1. (ii) et les techniques d'Houzel [31]. On rencontre toutefois plus de difficultés pour se placer dans une situation *nucléaire relative* (on comprendra pourquoi en se reportant au cas *absolu* : $Y =$ point réduit, traité plus haut). Comme dans le cas absolu, il faut introduire une *suite spectrale* convenable et travailler un peu.

CONJECTURE 4..2.3. Soit $f: X \to Y$ un *morphisme fortement q-concave* d'espaces analytiques. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, les *images*

(17) Ce qui est le meilleur résultat possible [23].

directes à supports propres

$$R^k f_! \mathcal{F} \text{ sont des } \mathcal{O}_Y\text{-modules cohérents pour } q+2 \leq k.$$

(En d'autres termes le complexe de $\mathcal{O}_Y$-modules $Rf_! F$ est $(q+2)$-pseudocohérent).

Pour terminer, signalons que les techniques d'Houzel employées pour prouver 4.2.1. et 4.2.3. sont basées sur des récurrences *descendantes* et ne donnent rien dans le cas *p-convexe* (et à fortiori dans le cas mixte). Ainsi, contrairement au cas absolu où on peut obtenir, comme nous l'avons vu, tous les résultats de finitude et de séparation en travaillant avec la cohomologie et les Ext à *support compacts,* le cas relatif p convexe nécessite un retour aux *images directes ordinaires* (c'est à dire à des généralisations de la méthode de [1]). En résumé, on a une *récurrence dans le bon sens*

— avec les images directes à supports *propres* pour le cas *concave.*

— avec les images directes *ordinaires* pour le cas *convexe.*

La dernière partie de cet article va être consacrée à une esquisse du cas convexe.

5°. Théorème et conjectures d'épuisement pour les applications fortement (p, q)-convexes-concaves. Théorème et conjecture de cohèrence pour les applications fortement p-convexes.

1. *Théorème et coniectures d'epuisement.*

THEOREME 5.1.1. (K. Knorr, P. Siegfried). Soit $f: X \to Y$ un *morphisme fortement p-convexe* d'cspaces analytiques. Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction d'épuisement correspondante, de constante exceptionnelle c_0. Alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, tout *ouvert de Stein relativament compact* Y' de Y $(X' = f^{-1}(Y'))$ et tout réel $c_0 < c$, on *a* :

(i) $H^k(X'; \mathcal{F})$ est *séparé* pour $p+1 \leq k$.

(ii) L'application de restriction $H^k(X'; \mathcal{F}) \to H^k(X'_c; \mathcal{F})$ est *bjective* pour $p+1 \leq k$.

On trouvera la démonstration de ce théorème dans [26], et la démonstration de la version « $p+2 \leq k$ » de l'assertion (ii) dans [17]. Reprenant ces méthodes et celles de [1], on prouverait sans difficulté la conjecture suivante

CONJECTURE 5.1.2. Soient $f: X \to Y$ un *morphisme fortement* (p, q)-*convexe-concave* d'espaces analytiques, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction d'épuisement

correspondante de constantes exceptionnelles c_0 et d_0 $(d_0 < c_0)$. Alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, tout *ouvert de Stein relativement compact* Y' de Y et tous réels $d < d_0 < c_0 < c$, on a

(i) L'application de restriction

$$H^k(X'; \mathbf{R}\,\mathcal{H}om(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})) \to H^k(X_c'^d; \mathbf{R}\,\mathcal{H}om(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}))$$

est *bijective* pour $p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -q - 2 - \dim Y$.

(ii) L'application de restriction

$$H^k(X'; \mathcal{F}) \to H^k(X_c'^d; F)$$

est *bijective* pour $p + 1 \leq k \leq \mathrm{prof}_X \mathcal{F} - q - 2 - \dim Y$.

COROLLAIRE 5.1.3. Dans les conditions de la conjecture ci-dessus, on a

(i) L'application naturelle

$$R^k f_* \mathbf{R}\,\mathcal{H}om(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot}) \to R^k f_{c*}^d \mathbf{R}\,\mathcal{H}om(X; \mathcal{F}, \mathbf{K}_X^{\cdot})$$

est *bijective* pour $p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k \leq -q - 2 - \dim Y$.

(ii) L'application naturelle

$$R^k f_* \mathcal{F} \to R^k f_{c*}^d \mathcal{F}$$

est *bijective* pour $p + 1 \leq k \leq \mathrm{prof}_X \mathcal{F} - q - 2 - \dim Y$.

REMARQUE 1. Si l'on compare le corollaire 5.1.3. et le théorème 4.1.1., on constate que les renseignements dont on dispose avec les *images directes à supports quelconques* et ceux dont on dispose avec les *images directes à supports propres* sont homologues vis à vis de la correspondance que fournit le théorème de *dualité relative* de [23] (c'est à dire la dualité $\mathcal{H}omtop(Y; ., \mathbf{K}_Y^{\cdot})$).

REMARQUE 2. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des *images directes à supports propres* où les méthodes *bornologiques* d'Houzel permettent de travailler avec un théorème d'*épuisement* sur les *fibres*, le corollaire 5.1.3. ne permet pas de démontrer un théorème de cohèrence.

II. *Théorème et conjecture de cohérence pour les applications fortement p-convexes.*

THEOREME 5.2.1. Soit $f: X \to Y$ un *morphisme fortement p-convexe* d'espaces analytiques.

Pour tout $\mathcal{O}_X$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, les *images directes* $R^k f_* \mathcal{F}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules *cohérents* pour $p + 1 \leq k$.

On trouvera la démonstration de ce théorème dans [26], et la démonstration de la version « $p + 2 \leq k$ » dans [17].

Un argument analogue permettrait de démontrer la conjecture qui suit. Il est toutefois plus délicat de se placer dans une situation *nucléaire relative*: la meilleure méthode semble être d'oublier la structure de complexe dual de $\mathbf{R}\,\mathcal{H}om\,(X; \mathcal{F}, \mathrm{K}_{\dot{X}})$ et, utilisant simplement le fait que c'est un *comlexe borné à cohomologie cohérente*, d'appliquer la technique de [30] pour *topologiser l'hypercohomologie* (il est alors facile de traduire une opération de *restriction*, ce que l'on ne sait pas faire avec la topologie construite par *dualité*).

CONJECTURE 5.2.2. Soit $f: X \to Y$ un *morphisme fortement p-convexe* d'espaces analytiques. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, les *images directes* $R^k f_* \mathbf{R}\,\mathcal{H}om\,(X; \mathcal{F}, K_{\dot{X}})$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules *cohérents* pour $p + 1 - \mathrm{prof}_X \mathcal{F} \leq k$.

Par un théorème de dualité relative de [23] on en déduit (en utilisant par exemple une *suite spectrale* convenable) la

CONJECTURE 5.2.3. Soit $f: X \to Y$ un *morphisme fortement p-convexe* d'espaces analytiques. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, les images directes à supports propres $R^k f_! \mathcal{F}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents pour $k \leq \mathrm{prof}_X \mathcal{F} - p - 1 - \dim Y$.

APPENDICE

Séparation et convexité non stricte.

On peut se demander ce qui se passe si dans la définition de la p-convexité d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on tient compte des valeurs propres *nulles* de $L_a \varphi$ (cf. page 943): si l'on a $\dim E - p$ valeurs propres *positives ou nulles*, on dira que la fonction est *p-convexe*. Si l'on remplace les hypothèses de *forte p-convexité* (ou forte p-concavité) par des hypothèses de *p-convexité* (ou *q-concavité*), les théorèmes de *finitude disparaissent*; on peut toutefois penser qu'ils peuvent être remplacés par des théorèmes de *séparation* (pour les degrés correspondants). Les seuls résultats que je connaisse dans cette

direction sont énoncés dans le théorème et les conjectures qui suivent; on verra qu'ils concernent essentiellement des cas de p-convexité vis à vis des fonctions *holomorphes* (ou au moins holomorphes dans certaines directions): j'ignore ce qui se passe quand il y a seulement convexité (ou concavité) vis à vis des fonctions plurisousharmoniques (par exemple dans le cas des espaces *plats*) [18].

THEOREME A.1. Soit X un espace analytique *holomorphiquement convexe.* Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, les espaces $H^k(X;\mathcal{F})$, $H^k_c(X;\mathcal{F})$, $\mathrm{Ext}^k(X;\mathcal{F},\mathrm{K}_{\dot{X}}) = H_{-k}(X;\mathcal{F}_*)$ et $\mathrm{Ext}^k_c(X;\mathcal{F},\mathrm{K}_{\dot{X}}) = H^c_{-k}(X;\mathcal{F}_*)$ sont séparés (pour tout entier k).

D'après les théorèmes de dualité 0.1. et 0.2., il suffit d'établir l'assertion concernant les $H^k_c(X;\mathcal{F})$ et celle concernant les $\mathrm{Ext}^k_c(X;\mathcal{F},\mathrm{K}_{\dot{X}})$. Compte tenu du fait que si X est *holomorphiquement convexe,* il existe une application *analytique propre* $f: X \to Y$, avec Y de Stein, le théorème A.1. résulte de la

PROPOSITION A.2. Si $f: X \to Y$ est une application *analytique propre,* avec Y *de Stein,* pour tout $\mathcal{O}_X$-module *cohérent* $\mathcal{F}$ et tout entier k, les espaces $H^k_c(X;\mathcal{F})$ et $\mathrm{Ext}^k_c(X;\mathcal{F},\mathrm{K}_{\dot{X}})$ sont *séparés.*

La démonstration de cette proposition utilise les théorèmes de *séparation* 0.3. et 0.4. et deux théorèmes de *dualité* pour des *complexes à cohomologie choérente* sur un *espace de Stein.* On la trouvera dans [24] (proposition 4.8, page 276). A partir du théorème 5.2.1. et de la conjecture 5.2.2., les résultats de [23] permettent de prouver par une méthode analogue la

CONJECTURE A.3. Si $f: X \to Y$ est une application *analytique fortement p-convexe,* pour tout $\mathcal{O}_X$-module *cohérent* $\mathcal{F}$, les espaces $H^k_c(X;\mathcal{F})$ et $\mathrm{Ext}^k_c(X;\mathcal{F},\mathrm{K}_{\dot{X}})$ sont *séparés* respectivement pour $k \leq \mathrm{prof}_X\, \mathcal{F} - p - 1$ et $k \leq -p-1$.

On en déduit le

COROLLAIRE A.4. Dans les mêmes conditions, les espaces $H^k(X;\mathcal{F})$ et $\mathrm{Ext}^k(X;\mathcal{F},\mathrm{K}_{\dot{X}})$ sont *séparés* respectivement pour $p+2 \leq k$ et $p+2-$ $-\mathrm{prof}_X\, \mathcal{F} \leq k$.

Les résultats de [26] (cf. 5.1.1. (i) ci-dessus) permettent de penser que ce résultat *reste vrai* pour les degrés respectifs $k = p+1$ et $k = p+1-$ $-\mathrm{prof}_X\, \mathcal{F}$.

La méthode employée ne s'applique *pas* au cas d'un morphisme *fortement q-concave.*

---

[18] Mai 1974: il peut ne pas y avoir séparation dans les cas d'un esplace plat: cfr. un article à paraitre de R. DE GRAEVE (d'apres une idée de B. MALGRANGE).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI, H. GRAUERT, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,* Bull. Soc. Math. France 90, 193-259 (1962).

[2] A. ANDREOTTI, E. VESENTINI, *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds,* Publ. Math. I.H.E.S. n⁰ 25, 81-130 (1965).

[3] A. ANDREOTTI, A. KAS, *Duality on complex spaces: preprint.* (Cf. un résumé dans Atti Acad. Naz. Lincei, VIII, Sér. Rend., 50. 397-401 (1971): Serre duality on complex analytic spaces).

[4] A. ANDEOTTI, F. NORGUET, *Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, sér. III, vol. XX, Fasc. II, 197-241 (1966).

[5] H. BEHNKE, K. STEIN, *Approximation analytischer Funktionen in vorgegeben Bereichen des Raumes von n komplexen Veranderlichen.* Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttigen; Math.-phys. Kl., 195-202 (1939).

[6] G. E. BREDON, *Sheaf Theory.* Mac Graw Hill, New York, 1967.

[7] L. BUNGART, *Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas.* Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964).

[8] R. DE GRAEVE, *Ouverts strictement p-convexes d'un espace analytique complexe.* Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277 (Série A-243), 30 juillet 1973.

[9] J. DIEUDONNÉ, L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces (F) et (LF),* Ann. Inst. Fourier, t. 1, 61-101 (1949).

[10] W. FISCHER, *Eine Bemerkung zu einem Satz von A. Andreotti und H. Grauert.* Math. Ann. 184, 297-299 (1970).

[11] J. FRISCH, cours à l'Université de Genève (1970).

[12] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Memoirs Amer. Math. Soc., 16 (1955).

[13] A. GROTHENDIECK, *Opérations algèbriques sur les distributions à valeurs vectorielles.* Théorème de Künneth. Sém. L. Schwartz, exposé n⁰ 24 (1953-54).

[14] A. GROTHENDIECK, *The cohomology theory of abstract algebraic varieties.* Int. Cong. of Math. at Edimburgh, 1958, Cambridge Univ. Press (1960), 103-118.

[15] R. C. GUNNING, H. ROSSI, *Analytic Functions of Several Complex Variables.* Prentice Hall ser. in modern An., 1965.

[16] KIYOSAWA, T., *On the Levi s-convex sets in complex spaces.* Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daiyaku, Sect. A, 168-177 (1969).

[17] K. KNORR, *Noch ein Theorem der Analytischen Garbentheorie.* Regensburg 1970.

[18] B. MALGRANGE, *Some Remarks on the Notion of Convexity for Differential Operators. Differential Analysis,* Bombay Colloquium, 1964.

[19] B. MALGRANGE, *Quelques problèmes de convexité pour les opérateurs différentiels à coefficients constants,* Sém. Leray, Collège de France, Paris (1962).

[20] R. NARASIMHAN, *The Levi problem for complex spaces.* Math. Ann., 142, 355-365 (1961).

[21] J. P. RAMIS, *exposé au séminaire F. Norguet* (1972), à paraître chez Springer-Verlag, coll. Lecture Notes.

[22] J. P. RAMIS, RUGET G., *Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe.* Publ. Math. I.H.E.S. n^0 38 (1970).

[23] J. P. RAMIS, RUGET G., preprint Université de Paris VII.

[24] J. P. RAMIS, RUGET G., J. L. VERDIER, *Dualité relative en géométrie analytique complexe.* Inv. Math. 13, 261-283 (1971).

[25] L. SCHWARTZ, *Homomorphismes et applications complètement continues,* C.R.A.S. Paris 236, 2472-2473 (1953).

[26] P. SIEGFRIED, *Un théorème de finitude pour les morphismes q-convexes.* Preprint, Genève 1972.

[27] Y. T. SIU, *A pseudoconcave generalization of Grauert's direct image theorem*: I, II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 24, 278-330, 439-489 (1970).

[28] Y. T. SIU, *Generalizations of Grauert's direct image theorem.* Proc. Conf. Several Complex Variables, Park City, Utah, 1970.

[29] Y. T. SIU, *The 1-Convex generalization of Grauert's direct image theorem.* Math. Ann. 190, 203-214 (1971).

[30] J. L. VERDIER, *Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente.* Bull. Soc. Math. France, 99, 337-343 (1971).

[31] C. HOUZEL, *Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude.* Math. Ann. 205. 13-54 (1973).

[32] R. KIEHL, J. L. VERDIER, *Ein Einfacher Beweis des Kohärenzsatz von Grauert.* Math. Ann. 195 (1971).