ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

ANTONIO CASSA

**Formule di Künneth per la coomologia a valori in un fascio**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 27, nº 4 (1973), p. 905-931

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_905_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# FORMULE DI KÜNNETH PER LA COOMOLOGIA A VALORI IN UN FASCIO

ANTONIO CASSA

## Introduzione.

Questo lavoro (*) generalizza il seguente risultato di L. Kaup che compare in Math. Zeitschz. 97 (1967) (Eine Künnetformel für Fréchetgarben):

Siano $X$ e $Y$ due spazi topologici a base numerabile. Siano $\mathcal{F}$ su $X$ e $\mathcal{G}$ su $Y$ due fasci $n$ Frechet per ogni $n \leq r$ (con $r \in \mathbb{N}$) e sia $\mathcal{F}$ oppure $\mathcal{G}$ nucleare. Allora per ogni $n < r$ esiste un isomorfismo di spazi vettoriali topologici:

$$H^n(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^q(Y, \mathcal{G}).$$

Il mio lavoro dimostra (teorema 3) con delle ipotesi sostanzialmente equivalenti a quelle di Kaup, che anche $H^r(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G})$ è di Hausdorff e

$$H^r(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^p(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^q(Y, \mathcal{G}).$$

Inoltre con la sola ipotesi che gli spazi $H^i(Y, \mathcal{G})$ (con $0 \leq i \leq n$) siano di Hausdorff si ha (teorema 4) per ogni $m \leq n$

$$H^m(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{p+q=m} (\operatorname{sep} H^p(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^q(Y, \mathcal{G}) + R'^{pq})$$

dove ogni $R'^{pq}$ ha la topologia banale e $R'^{pq} = \{0\}$ se e solo se $H^p(X, \mathcal{F})$ è di Hausdorff oppure $H^q(Y, \mathcal{G}) = 0$.

---

Pervenuto alla Redazione il 7 Agosto 1972.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C. N. R.. Nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni.

Infine, dopo un breve studio delle proprietà dei limiti inversi di successioni esatte di spazi vettoriali topologici, do un esempio di un complesso coomologico $K$ di spazi nucleari di Fréchet per cui si ha $H^1(K \tilde{\otimes} K) = 0$ mentre $H^1(K) \neq 0$; questo esempio deriva dalla possibilità di costruire una successione crescente di aperti $\{X_n\}_{n \geq 0}$ che invadono un aperto $X$ di $\mathbb{C}^n$ e un fascio di ideali $\mathcal{J}$ di $\mathcal{O}_X$ con la proprietà che $H^1(X_n, \mathcal{J}|_{X_n}) = 0$ per ogni $n \geq 0$ e $H^1(X, \mathcal{J}) \neq 0$.

## Premesse.

*a) Separazione di s. v. t.*

Per ogni s. v. t. $E$ su $\mathbb{C}$ si definisce:

$$\operatorname{ban} E = \{\bar{0}\} \quad \text{(sottospazio banale di } E\text{)}$$

$$\operatorname{sep} E = E/\operatorname{ban} E \quad \text{(Spazio separato di } E\text{)}$$

poiché per ogni applicazione lineare continua $\varphi : E \longrightarrow F$ si ha $\varphi(\operatorname{ban} E) \subset \subset \operatorname{ban} F$, è definita un'applicazione lineare continua $\operatorname{sep} \varphi : \operatorname{sep} E \longrightarrow \operatorname{sep} F$.

Si può dimostrare (vedi [2]) che sep definisce un funtore della categoria degli s. v. t. nella categoria degli s. v. t. separati, che trasforma somme dirette in somme dirette, ma che non è in generale esatto. Inoltre per ogni s. v. t. $E$ ed ogni sottospazio $F$ si ha:

1) $E \cong \operatorname{sep} E \oplus \operatorname{ban} E$.

2) $\operatorname{sep}(E/F) \cong (\operatorname{sep} E)/(\overline{\operatorname{sep} F})$

3) $\operatorname{ban}(E/F) \cong \bar{F}/F$

*b) Spazi di Fréchet*: ricordo che per gli spazi di Fréchet valgono queste proprietà che ci serviranno in seguito:

1) se $\varphi : E \longrightarrow F$ è lineare continua e $E$, $F$ sono spazi di Fréchet, $\varphi(E)$ è chiuso in $F$ se e solo se $\varphi$ è un omomorfismo topologico (cioè $\varphi : E \longrightarrow \varphi(E)$ manda aperti in aperti).

2) Sia $E$ uno spazio di Fréchet ed $F$ un sottospazio con codimensione finita, allora $F$ è chiuso in $E$ ed ha un complementare topologico $G$ con dimensione uguale alla codimensione di $F$.

3) Se un sottospazio $F$ di uno spazio di Fréchet $E$ ha un complementare algebrico chiuso $G$, allora $E \cong F \oplus G$; cioè $G$ è anche un complementare topologico e $G \cong E/F$, $F \cong E/G$.

4) Se $F$ è un sottospazio proprio denso in $E$ (di Fréchet), $E/F$ è un sottospazio di dimensione infinita con la topologia banale.

c) *Spazi nucleari*: siano $E$ ed $F$ due spazi localmente convessi, su $E \otimes F$ esiste una topologia di s. v. t. localmente convesso che è la più fine tra quelle che rendono continua l'applicazione bilineare canonica:

$$\otimes : E \times F \to E \otimes F$$

(vedi: exp. N. 1 di [4]); lo spazio $E \otimes F$ con questa topologia si indicherà con $E \otimes_\pi F$.

Si dimostra che se $\varphi_1 : E_1 \to F_1$ e $\varphi_2 : E_2 \to F_2$ sono epimorfismi, l'applicazione $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : E_1 \otimes_\pi E_2 \to F_1 \otimes_\pi F_2$ è un epimorfismo (vedi: prop. 4 exp. 1 di [4]).

Siano $E$ ed $F$ due spazi localmente convessi, su $L(E', F)$ (spazio delle applicazioni lineari continue del duale di $E$ in $F$) porremo la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di $E'$, avendo posto su $E'$ la topologia della convergenza sui compatti di $E$.

Lo spazio $E \otimes F$ si immerge in $L(E', F)$; $E \otimes_\varepsilon F$ indicherà $E \otimes F$ con la topologia indotta da $L(E', F)$.

Si può dimostrare che se $\varphi_1 : E_1 \to F_1$ e $\varphi_2 : E_2 \to F_2$ sono monomorfismi, anche l'applicazione $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : E_1 \otimes_\varepsilon E_2 \to F_1 \otimes_\varepsilon F_2$ è un monomorfismo.

In generale $E \otimes_\pi F$ ha una topologia più fine di $E \otimes_\varepsilon F$; si dice *nucleare* uno spazio localmente converso $E$ se per ogni spazio localmente convesso $F$ si ha: $E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$.

Se $E$ è nucleare $E \otimes F$ è denso in $L(E', F)$ e

$$E \tilde{\otimes} F = \widetilde{E \otimes_\pi F} = \widetilde{E \otimes_\varepsilon F} \cong L(E', F).$$

Ogni spazio nucleare è di Schwarts (vedi: Teor. 1 (5b) dell'exp. 17 di [4] e pag. 332 di [5]).

Gli spazi nucleari costituiscono una sottocategoria della categoria degli s. v. t. stabile rispetto al passaggio ai sottospazi, quozienti separati, limiti inversi (in particolare prodotti), limiti diretti numerabili separati (in particolare somme dirette numerabili), prodotti tensoriali e completamento.

Per le proprietà relative alle topologie $\pi$ e $\varepsilon$ se $\varphi : E_1 \to E_2$ è un monomorfismo (epimorfismo) tra spazi di Fréchet ed $F$ è uno spazio Fréchet-nucleare, le applicazioni $\varphi \otimes 1 : E_1 \otimes F \to E_2 \otimes F$ e $\varphi \tilde{\otimes} 1 : E_1 \tilde{\otimes} F \to$ $\to E_2 \tilde{\otimes} F$ sono monomorfismi (epimorfismi).

Da ciò segue che se $\varphi$ è un omomorfismo topologico $\operatorname{Ker}(\varphi \tilde{\otimes} 1) \cong \operatorname{Ker} \varphi \tilde{\otimes} F$ e $\operatorname{im}(\varphi \tilde{\otimes} 1) \cong \operatorname{im} \varphi \tilde{\otimes} F$ e quindi se $E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E \xrightarrow{\varphi_2} E_2$ è una successione esatta di spazi di Fréchet e omomorfismi topologici la successione $E_1 \tilde{\otimes} F \xrightarrow{\varphi_1 \tilde{\otimes} 1} E \tilde{\otimes} F \xrightarrow{\varphi_2 \tilde{\otimes} 1} E_2 \tilde{\otimes} F$ è esatta.

Se $\varphi$ non è un omomorfismo topologico $\operatorname{im}(\varphi \tilde{\otimes} 1)$ è densa in $(\operatorname{im} \varphi) \tilde{\otimes} F$ ma non è chiusa (vedi Lemma 3) cioè $\varphi \tilde{\otimes} 1$ non è un omomorfismo.

Si può però dimostrare che anche in questo caso

$$\operatorname{Ker}(\varphi \tilde{\otimes} 1) = \operatorname{Ker} \varphi \tilde{\otimes} F$$

esattamente :

LEMMA 1 : Siano $E_1$, $E_2$, $F$ degli spazi di Fréchet con $E_1$, $E_2$ nucleari oppure $F$ nucleare e sia $\varphi : E_1 \to E_2$ un'applicazione lineare continua iniettiva, l'applicazione :

$$\varphi \tilde{\otimes} 1 : E_1 \tilde{\otimes} F \to E_2 \tilde{\otimes} F$$

è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE : Le immersioni $\varepsilon_1 : E_1 \otimes F \to L(E_1', F)$ e $\varepsilon_2 : E_2 \otimes F \to L(E_2', F)$ sono topologiche.

Il diagramma commutativo :

$$\begin{tikzcd}
E_1 \otimes F \arrow[r, "\varphi \otimes 1"] \arrow[d, "\varepsilon_1"'] & E_2 \otimes F \arrow[d, "\varepsilon_2"] \\
L(E_1', F) \arrow[r, "\varphi^*"] & L(E_2', F)
\end{tikzcd}$$

(dove $\varphi^* : L(E_1', F) \to L(E_2', F)$ è definita per ogni $\alpha : E_1' \to F$ lineare continua e $l : E_2 \to \mathbb{C}$ lineare continua come $(\varphi^*(\alpha))(l) = (\alpha \circ \varphi')(l)$), completato dà il diagramma commutativo :

$$\begin{tikzcd}
E_1 \tilde{\otimes} F \arrow[r, "\varphi \tilde{\otimes} 1"] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}_1"'] & E_2 \tilde{\otimes} F \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}_2"] \\
L(E_1', F) \arrow[r, "\varphi^*"] & L(E_2', F)
\end{tikzcd}$$

in cui $\tilde{\varepsilon}_1$ e $\tilde{\varepsilon}_2$ sono isomorfismi topologici.

L'iniettività di $\varphi \tilde{\otimes} 1$ segue dall'iniettività di $\varphi^*$.

Sia $\alpha : E_1' \longrightarrow F$ e $\varphi^*(\alpha) = 0$, allora $\alpha(\varphi'(l)) = 0$ per ogni $l \in E_2'$, cioè $\operatorname{Ker} \alpha \supset \operatorname{im} \varphi'$, ma poiché $\varphi$ è iniettiva $\varphi'$ è densa e quindi $\alpha = 0$.

LEMMA 2: Nella ipotesi del Lemma 1 per ogni applicazione lineare continua $\varphi$ si ha:

$$\operatorname{Ker}(\varphi \tilde{\otimes} 1) = \operatorname{Ker} \varphi \tilde{\otimes} F.$$

DIMOSTRAZIONE: Il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1"'] & E_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "1"'] & E_1/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & E_2 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

è esatto nelle righe e nelle colonne, pertanto il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi \tilde{\otimes} F \arrow[r, "i \tilde{\otimes} 1"] \arrow[d, "1"'] & E_1 \tilde{\otimes} F \arrow[r, "\pi \tilde{\otimes} 1"] \arrow[d, "1"'] & (E_1/\operatorname{Ker}\varphi) \tilde{\otimes} F \arrow[r] \arrow[d, "\sigma \tilde{\otimes} 1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi \tilde{\otimes} F \arrow[r, "i \tilde{\otimes} 1"] \arrow[d] & E_1 \tilde{\otimes} F \arrow[r, "\varphi \tilde{\otimes} 1"] \arrow[d] & E_2 \tilde{\otimes} F & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

risulta esatto nella prima riga e nelle colonne, perciò è esatta la seconda riga e quindi:

$$\operatorname{Ker}(\varphi \tilde{\otimes} 1) \cong \operatorname{Ker} \varphi \tilde{\otimes} F.$$

LEMMA 3 : Nelle ipotesi dei lemmi 1 e 2 e se $E_1$, $E_2$ sono riflessivi insieme con i loro sottospazi chiusi; $\varphi \tilde{\otimes} 1$ è un omomorfismo topologico se e solo se $\varphi \tilde{\otimes} 1$ lo è, cioè se e solo se $\operatorname{im}(\varphi \tilde{\otimes} 1) = \operatorname{im} \varphi \tilde{\otimes} F$.

DIMOSTRAZIONE : Una implicazione è già nota, dimostriamo l'altra. Sia $\varphi \tilde{\otimes} 1$ un omomorfismo topologico; possiamo supporre, senza restrizione, che $\varphi$ abbia immagine densa in $E_2$ (basta sostituire $E_2$ con $\overline{\operatorname{im} \varphi}$) e che di conseguenza $\varphi^* : L(E_1', F) \to L(E_2', F)$ sia surgettiva. Sia $j : \mathbb{C} \to F$ una immersione topologica, l'applicazione $j^{-1} : j(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ si estende (per il teorema di Hahn-Banach) ad una applicazione lineare continua $\beta_0 : F \to \mathbb{C}$ (sarà perciò $\beta_0 j = 1_{\mathbb{C}}$).

Le applicazioni continue :

$$\tau_i : L(E_i', F) \to E_i''$$

definita $\tau_i(\alpha) = \beta_0 \alpha$, per $i = 1, 2$ sono surgettive e quindi omomorfismi totopologici; infatti per ogni $l : E_i' \to \mathbb{C}$ lineare continua, posto $\alpha = j\, l$, si ha $\tau_i(\alpha) = \beta_0 j\, l = l$.

Pertanto nel diagramma commutativo :

$$\begin{tikzcd} L(E_1', F) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\tau_1"'] & L(E_2', F) \arrow[d, "\tau_2"] \\ E_1'' \arrow[r, "\varphi''"] & E_2'' \end{tikzcd}$$

le applicazioni $\varphi^*$, $\tau_1$, $\tau_2$ sono aperte, quindi lo è anche $\varphi''$ e per la riflessività di $E_1$ e $E_2$ lo è $\varphi$.

In conclusione possiamo enunciare il seguente

TEOREMA : Siano $E_1$, $E$, $E_2$ tre spazi di Fréchet riflessivi insieme con i loro sottospazi chiusi e $F$ uno spazio di Fréchet non nullo, $E_1$, $E$, $E_2$ nucleari oppure $F$ nucleare; se $\varphi_1 : E_1 \to E$ e $\varphi_2 : E \to E_2$ sono due applicazioni lineari continue, la sequenza :

$$E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E \xrightarrow{\varphi_2} E_2$$

è esatta (debolmente esatta), se e solo se la sequenza

$$E_1 \tilde{\otimes} F \xrightarrow{\varphi_1 \tilde{\otimes} 1} E \tilde{\otimes} F \xrightarrow{\varphi_2 \tilde{\otimes} 1} E_2 \tilde{\otimes} F$$

è esatta (debolmente esatta).

Queste considerazioni sugli spazi nucleari possono riassumersi così: se $F$ è uno spazio Fréchet nucleare il prodotto tensoriale $(\ )\tilde{\otimes} F$ definisce un funtore covariante esatto della categoria degli spazi di Fréchet riflessivi insieme con i loro sottospazi chiusi nella categoria degli spazi di Fréchet; così pure se $F$ è uno spazio di Fréchet, il prodotto tensoriale $(\ )\tilde{\otimes} F$ definisce un funtore esatto sulla categoria degli spazi Fréchet-nucleari.

*d) Successioni spettrali di complessi di spazi vettoriali topologici.*

Le notazioni di questa parte sono tratte da [1].

Sia $A$ uno spazio vettoriale topologico (localmente convesso) e sia $\{F^p A\}_{p \in \mathbf{Z}}$ una filtrazione di $A$, su ogni $F^p A$ poniamo la topologia indotta da $A$ e su $E_0^p(A) = F^p A / F^{p+1} A$ la topologia quoziente.

Sia ora $A$ un complesso e $\{F^p A\}$ una filtrazione compatibile, su $F^r H(A) = \operatorname{im}(H(F^r A) \to H(A))$ consideriamo la topologia indotta da $H(A)$ e su $E_0^p(H(A)) = F^p H(A)/F^{p+1} H(A)$ la topologia quoziente; analogamente per $r = 1, 2, \dots, \infty$, su

$$Z_r^p(A) = \operatorname{im}\{H(F^p A/F^{p+r} A) \to H(F^p A/F^{p+1} A)\}$$

$$B_r^p(A) = \operatorname{im}\{H(F^{p-r+1} A/F^p A) \to H(F^p A/F^{p+1} A)\}$$

consideriamo la topologia indotta da $H(F^p/F^{p+1})$ e su

$$E_r^p(A) = Z_r^p(A)/B_r^p(A) \qquad \text{la topologia quoziente.}$$

Si può osservare facilmente che

$$E_{r+1}^p(A) \cong H(E_r^p)$$

algebricamente e topologicamente, e se la filtrazione è regolare si avrà $E_\infty^p(A) \cong E_r^p(A)$ per tutti gli $r$ da un certo intero in poi.

Va osservato che però l'isomorfismo algebrico tra $H(A)$ e $\bigoplus_p E_\infty^p(A)$ non è in generale topologico o continuo, anche se si suppone che gli spazi $A$, $E_\infty^p(A)$, $H(A)$ siano tutti di Fréchet.

Nel caso graduato si ha un isomorfismo topologico

$$E_{r+1}^{pq}(A) \cong H(E_r^{pq}).$$

Infine se $A = \bigoplus_{r,s} A^{rs}$ è un complesso doppio con la topologia della somma diretta, valgono i seguenti isomorfismi algebrici e topologici:

$$E_0'^{pq} \cong A^{pq}; \qquad E_0''^{pq} \cong A^{qp}$$

$$d_0'^{pq} \cong d''^{pq}; \qquad d_0''^{pq} \cong d'^{qp}$$

$$E_1'^{pq} \cong H''^{q}(A^{p,*}); \qquad E_1''^{pq} \cong H'^{q}(A^{*,p})$$

$$E_2'^{pq} \cong H'^{p}(H''^{q}(A^{**})); \qquad E_2''^{pq} \cong H''^{p}(H'^{q}(A^{**})).$$

Ricordiamo infine il seguente:

LEMMA: Siano $A'$, $A$, $A''$ tre moduli su un anello $R$ con filtrazioni limitate e $\alpha' : A' \to A$, $\alpha'' : A \to A''$ due $R$-omomorfismi che rispettino le filtrazioni con $\alpha''\alpha' = 0$.

Se la successione dei moduli graduati associati:

$$0 \to G(A') \xrightarrow{\widehat{\alpha'}} G(A) \xrightarrow{\widehat{\alpha''}} G(A'') \to 0$$

è esatta, allora è esatta la successione:

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \to 0.$$

## Formule di Künneth per un complesso $K = K' \tilde{\otimes} K''$.

In questa parte generalizzo un risultato di Grothendieck che è enunciato in [4] (exp. N. 24) e che afferma quanto segue:

se $(E, d')$ e $(F, d'')$ sono due complessi con $E$, $F$ spazi di Fréchet, di cui almeno uno è nucleare, lo spazio $E \tilde{\otimes} F$ con l'operatore

$$d = d' \tilde{\otimes} 1_F + \eta \tilde{\otimes} d''$$

è un complesso la cui omologia, se $H(E)$ e $H(F)$ sono di Hausdorff, cioè se $d'$ e $d''$ sono omomorfismi topologici, è isomorfa (algebricamente e topologicamente) a $H(E) \tilde{\otimes} H(F)$, cioè

$$H(E \tilde{\otimes} F) \cong H(E) \tilde{\otimes} H(F).$$

(l'applicazione $\eta : E \to E$ è un isomorfismo con la proprietà $\eta d' + d'\eta = 0$; se $E = \bigoplus_{p \geq 0} E^p$ è un complesso graduato si pone $\eta^p(x) = (-1)^p \cdot x$).

Estendiamo questo risultato ai complessi graduati cercando di abbandonare l'ipotesi che gli operatori di bordo siano degli omomorfismi topologici.

Pertanto consideriamo due complessi limitati:

$$K' : 0 \to K'^0 \xrightarrow{d'^0} K'^1 \xrightarrow{d'^1} K'^2 \xrightarrow{d'^2} \dots K'^u \to 0$$

$$K'' : 0 \to K''^0 \xrightarrow{d''^0} K''^1 \xrightarrow{d''^1} K''^2 \xrightarrow{d''^2} \dots K''^v \to 0$$

il complesso $K = K' \tilde{\otimes} K''$ è definito come il complesso bigraduato

$$K = \bigoplus_{p,q} K^{pq}$$

dove $K^{pq} = K'^p \tilde{\otimes} K''^q$; $d'^{pq} : K^{pq} \to K^{p+1,q}$ è $d'^p \tilde{\otimes} 1_{K''^q}$ e $d''^{pq} : K^{pq} \to K^{p,q+1}$ è $(-1)^p \cdot 1_{K'^p} \tilde{\otimes} d''^q$ e dove naturalmente $K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{pq}$ e $d = d' + d''$.

Studiamo ora i termini $E_1^{pq}$, $E_2^{pq}$ delle due successioni spettrali usuali di $K$, cercando di risalire da $E_2$ a $E_\infty$ e quindi ad $H(K)$.

Per ciò che è stato premesso:

$$E_1'^{pq} \cong H\{K'^p \tilde{\otimes} K''^{q-1} \xrightarrow{(-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1}} K'^p \tilde{\otimes} K''^q \xrightarrow{(-1)^p \tilde{\otimes} d''^q} K'^p \tilde{\otimes} K''^{q+1}\}$$

$$\operatorname{Ker}[(-1)^p \tilde{\otimes} d''^q] = K'^p \tilde{\otimes} (\operatorname{Ker} d''^q) = K'^p \tilde{\otimes} Z''^q$$

$\operatorname{im}(-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1}$ è un sottospazio denso di $K'^p \tilde{\otimes} (\overline{B''^q})$. Perciò:

$$\operatorname{sep} E_1'^{pq} \cong (K'^p \tilde{\otimes} Z''^q)/(K'^p \tilde{\otimes} \overline{B''^q}) \cong K'^p \tilde{\otimes} (Z''^q/\overline{B''^q}) \cong K'^p \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')$$

e

$$\operatorname{ban} E_1'^{pq} \cong (K'^p \tilde{\otimes} \overline{B''^q})/\operatorname{im}[(-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1}].$$

Vale cioè la:

PROPOSIZIONE 1: Il termine di grado 1 della prima successione spettrale di $K$ è dato da:

$$E_1'^{pq} \cong K'^p \otimes \operatorname{sep} H^q(K'') + R'^{pq}$$

dove $R_1'^{pq} = \operatorname{ban} E_1'^{pq}$ ed è 0 se e solo se $d''^{q-1}$ è uno omomorfismo topologico, cioè se e solo se $H^q(K'')$ è di Hausdorff (purché $K'^p \neq \{0\}$).

Naturalmente vale un risultato analogo per la seconda successione spettrale.

Il calcolo di $E_2'^{pq}$ non sarà trattato in generale, tratterò soltanto alcuni casi particolari:

1° *caso: se $H^p(K')$ e $H^q(K'')$ sono di Hausdorff.*

Cioè se $d'^{p-1}$ e $d''^{q-1}$ sono omomorfismi topologici.

In questo caso si ha:

$$E_1'^{rq} \cong K'^r \tilde{\otimes} H^q(K'') \quad \text{per ogni } r \geq 0,$$

e quidi:

$$E_2'^{pq} \cong H\{K'^{p-1} \tilde{\otimes} H^q(K'') \xrightarrow{d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1} K'^p \tilde{\otimes}$$

$$\tilde{\otimes} H^q(K'') \xrightarrow{d'^p \tilde{\otimes} 1} K'^{p+1} \tilde{\otimes} H^q(K'')\} =$$

$$= \operatorname{Ker}(d'^p \tilde{\otimes} 1)/\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1) \cong (Z'^p \tilde{\otimes} H^q(K''))/(B'^p \tilde{\otimes} H^q(K'')) \cong$$

$$\cong (Z'^p/B'^p) \tilde{\otimes} H^q(K'') = H^p(K') \tilde{\otimes} H^q(K'').$$

2° *caso: se $H^q(K'')$ è di Hausdorff.*

$$E_2'^{pq} \cong \operatorname{Ker}(d'^p \tilde{\otimes} 1)/\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1)$$

ora,

$$\operatorname{Ker}(d'^p \tilde{\otimes} 1) = Z'^p \tilde{\otimes} H^q(K'')$$

e $\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1)$ è un sottospazio denso di $(\overline{B'^p}) \tilde{\otimes} H^q(K'')$, perciò

$$\operatorname{sep} E_2'^{pq} \cong (Z'^p \tilde{\otimes} H^q(K''))/((\overline{B'^p}) \tilde{\otimes} H^q(K'') \cong (Z'^p/\overline{B'^p}) \tilde{\otimes} H^q(K'') =$$

$$= (\operatorname{sep} H^p(K')) \tilde{\otimes} H^q(K'')$$

$$\operatorname{ban} E_2'^{pq} = ((\overline{B'^p}) \tilde{\otimes} H^q(K''))/\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1)$$

se poniamo $R_2'^{pq} = \operatorname{ban} E_2'^{pq}$ si ha infine:

$$E_2'^{pq} \cong \operatorname{sep} H^p(K') \tilde{\otimes} H^q(K'') + R_2'^{pq}$$

dove $R_2'^{pq}$ è uno spazio di dimensione infinita (con la topologia banale) a meno che non sia $H^p(K')$ di Hausdorff oppure $H^q(K'') = 0$, in questo caso $R_2'^{pq} = 0$.

Analogamente *se* $H^p(K')$ *è di Hausdorff* si ha che

$$E_2''^{qp} \cong H^p(K') \tilde{\otimes} (\operatorname{sep} H^q(K'')) + R_2''^{qp}$$

dove $R_2''^{qp} = \operatorname{ban} E_2''^{qp}$ è uno spazio di dimensione infinita (con la topologia banale) a meno che non sia $H^q(K'')$ di Hausdorff oppure $H^p(K') = 0$, in questo caso $R_2''^{qp} = 0$.

3° *caso*: *Se* $\overline{B''^q}$ *ha complementare topologico in* $Z''^q$.

(Questo avviene ad esempio se $\dim(\operatorname{sep} H^q(K'')) < +\infty$).

In questo caso si ha che: $Z''^q \cong \overline{B''^q} \oplus \operatorname{sep} H^q(K'')$.

Poiché $E_2'^{pq} = \operatorname{Ker} d_1'^{pq} / \operatorname{im} d_1'^{p-1,q}$, calcoliamo $\operatorname{Ker} d_1'^{pq}$, cioè il nucleo dell'applicazione $\widehat{d'^p \tilde{\otimes} 1}$ nel diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
K'^p \tilde{\otimes} Z''^q \arrow[r, "d'^p \tilde{\otimes} 1"] \arrow[d] & K'^{p+1} \tilde{\otimes} Z''^q \arrow[dr] & \\
(K'^p \tilde{\otimes} Z''^q)/\operatorname{im}((-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1}) \arrow[rr, "\widehat{d'^p \tilde{\otimes} 1}"] & & (K'^{p+1} \tilde{\otimes} Z''^q)/\operatorname{im}((-1)^{p+1} \tilde{\otimes} d''^{q-1})
\end{tikzcd}$$

Ora:

$$\frac{K'^p \tilde{\otimes} Z''^q}{\operatorname{im}((-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1})} \cong \frac{K'^p \tilde{\otimes} (\overline{B''^q}) \oplus K'^p \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')}{\operatorname{im}((-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1})} \cong$$

$$\cong \frac{K'^p \tilde{\otimes} (\overline{B''^q})}{\operatorname{im}((-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1})} \oplus K'^p \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')$$

e:

$$\frac{K'^{p+1} \tilde{\otimes} Z''^q}{\operatorname{im}((-1)^{p+1} \tilde{\otimes} d''^{q-1})} \cong \frac{K'^{p+1} \tilde{\otimes} (\overline{B''^q})}{\operatorname{im}((-1)^{p+1} \tilde{\otimes} d''^{q-1})} \oplus (K'^{p+1} \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')).$$

Con queste identificazioni il diagramma diventa:

$$\begin{tikzcd}
(K'^p \tilde{\otimes} \overline{B''^q}) \oplus (K'^p \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')) \arrow[r, "d'^p \tilde{\otimes} 1|_{\overline{B}} \oplus d'^p \tilde{\otimes} 1_{\operatorname{sep}}"] \arrow[d] & (K'^{p+1} \tilde{\otimes} \overline{B''^q}) \oplus (K'^{p+1} \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')) \arrow[d] \\
\dfrac{K'^p \tilde{\otimes} \overline{B''^q}}{\operatorname{im}((-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1})} \oplus (K'^p \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')) \arrow[r, "d'^p \tilde{\otimes} 1|_{\overline{B}} \oplus d'^p \tilde{\otimes} 1|_{\operatorname{sep}}"] & \dfrac{K'^{p+1} \tilde{\otimes} (\overline{B''^q})}{\operatorname{im}((-1)^{p+1} \tilde{\otimes} d''^{q-1})} + (K'^{p+1} \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K''))
\end{tikzcd}$$

e quindi:

$$\widehat{\operatorname{Ker}(d'^p \tilde{\otimes} 1)} \cong \widehat{\operatorname{Ker}(d'^p \tilde{\otimes} 1|_{\bar{B}})} \oplus Z'^p \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')$$

e con analoghe identificazioni:

$$\operatorname{im} d_1'^{p-1,q} = \widehat{\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1)} = \widehat{\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1|_{\bar{B}})} \oplus$$
$$\oplus (d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1)(K'^{p-1} \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')).$$

Poiché $\operatorname{im}((-1)^p \tilde{\otimes} d''^{q-1})$ è un sottospazio denso di $K'^p \tilde{\otimes} B''^q$, i due spazi: $\widehat{\operatorname{Ker}(d'^p \tilde{\otimes} 1_{\bar{B}})}$ e $\widehat{\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1|_{\bar{B}})}$ hanno la topologia banale. Quindi:

$$E_2'^{pq} \cong \frac{\widehat{\operatorname{Ker}(d'^p \tilde{\otimes} 1|_{\bar{B}})}}{\widehat{\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1|_{\bar{B}})}} \oplus \frac{Z'^p \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')}{(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1)(K'^{p-1} \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K''))}$$

e

$$\operatorname{sep} E_2'^{pq} \cong \frac{Z'^p \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')}{\overline{B'^p} \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')} \cong \operatorname{sep} H^p(K') \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'').$$

Pertanto

$$E_2'^{pq} \cong \operatorname{sep} H^p(K') \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'') + R_2'^{pq} + S_2'^{pq}$$

con

$$R_2'^{pq} \cong \frac{\overline{B'^p} \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'')}{(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1)(K'^{p-1} \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K''))}$$

e

$$S_2'^{pq} \cong \frac{\widehat{\operatorname{Ker}(d'^p \tilde{\otimes} 1|_{\bar{B}})}}{\widehat{\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1|_{\bar{B}})}}.$$

Gli spazi $R_2'^{pq}$ e $S_2'^{pq}$ hanno la topologia banale; $R_2'^{pq}$ ha dimensione infinita a meno che non sia $H^p(K')$ di Hausdorff oppure $H^q(K'') = 0$, in questo caso $R_2'^{pq} = 0$; se $H^p(K')$ è di Hausdorff si ha anche $S_2'^{pq} = 0$.

Analogamente se $\overline{B'^p}$ *ha complementare topologico in* $Z'^p$ si ha:

$$E_2''^{qp} \cong \operatorname{sep} H^p(K') \tilde{\otimes} \operatorname{sep} H^q(K'') + R_2''^{qp} + S_2''^{qp}$$

dove $R_2''^{qp}$ e $S_2''^{qp}$ sono definiti in modo analogo a $R_2'^{pq}$ e $S_2'^{pq}$.

TEOREMA 1: Siano:

$$K': \ 0 \to K'^0 \xrightarrow{d'^0} K'^1 \xrightarrow{d'^1} K'^2 \to \dots \to K'^u \to 0$$

$$K'': \ 0 \to K''^0 \xrightarrow{d''^0} K''^1 \xrightarrow{d''^1} K''^2 \to \dots \to K''^v \to 0$$

due complessi graduati di spazi Fréchet-nucleari e di applicazioni continue.

Se gli spazi $H^p(K')$ e $H^q(K'')$ sono di Hausdorff per $0 \leq p,\ q \leq n$ per ogni $m \leq n$ esiste un isomorfismo topologico:

$$H^m(K' \tilde{\otimes} K'') \cong \bigoplus_{p+q=m} H^p(K') \tilde{\otimes} H^q(K'').$$

e quindi anche $H^m(K' \tilde{\otimes} K'')$ è di Hausdorff.

TEOREMA 2: Siano $H^1(K''), \dots, H^n(K'')$ di Hausdorff per ogni $m \leq n$ esiste un isomorfismo topologico:

$$H^m(K' \tilde{\otimes} K'') \cong \bigoplus_{p+q=m} (\operatorname{sep} H^p(K') \tilde{\otimes} H^q(K'') + R_2'^{pq})$$

dove $R_2'^{pq}$ è uno spazio di dimensione infinita (con la topologia banale) a meno che non sia $H^p(K')$ di Hausdorff oppure $H^q(K'') = 0$, in tal caso $R_2'^{pq} = 0$.

Se gli spazi $H^1(K'), \dots, H^n(K')$ sono di Hausdorff vale un enunciato analogo a quello del teorema 2. Il teorema 1 è un caso particolare del teorema 2, perciò dimostriamo quest'ultimo.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 2: introduciamo i sottocomplessi $Z$ e $S$ di $K$ così definiti: $Z = \bigoplus_{p,q} Z^{pq}$ con $Z^{pq} = Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q$ dove naturalmente $Z'^p = \operatorname{Ker} d'^p$ e $Z''^q = \operatorname{Ker} d''^q$, $S = \bigoplus_{p,q} S^{pq}$ con $S^{pq} = \operatorname{Ker} \sigma^{pq}$ dove $\sigma^{pq}$ è l'applicazione naturale

$$Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q \to [(Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q)/\operatorname{im}((-1)^p \cdot 1_{Z'^p} \tilde{\otimes} d''^{q-1})]/\Pi^{pq}(\operatorname{im}(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1_{Z''^q}))$$

$$(\Pi^{pq}: Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q \to (Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q)/\operatorname{im}((-1)^p \cdot 1_{Z'^p} \tilde{\otimes} d''^{q-1}).$$

Le applicazioni $\sigma^{pq}$ sono degli omomorfismi topologici surgettivi. Su $Z$ e su $S$ si ha $d' = d'' = 0$.

Le immersioni naturali $i: S \to Z$ e $j: Z \to K$ sono omomorfismi topologici che rispettano le filtrazioni e le graduazioni. Poiché per ogni $p, q, r$: $E'_r{}^{pq}(S) \cong S^{pq}$, $E'_r{}^{pq}(Z) \cong Z^{pq}$ l'applicazione $i_r^{pq}$ si identifica con l'immersione di $S^{pq}$ in $Z^{pq}$.

Se $q \leq n$ il 2) caso trattato a proposito del calcolo di $E'_2{}^{pq}(K)$ ci dice che $E'_2{}^{pq}(K)$ si identifica con $(Z'^p \tilde{\otimes} H''^q)/\mathrm{im}\,(d'^{p-1} \tilde{\otimes} 1_{H''^q})$ in questo caso $j_2^{pq}: E'_2{}^{pq}(Z) \to E'_2{}^{pq}(K)$ si identifica con $\sigma^{pq}$ e quindi la successione:

$$0 \to E'_2{}^{pq}(S) \xrightarrow{i_2^{pq}} E'_2{}^{pq}(Z) \xrightarrow{j_2^{pq}} E'_2{}^{pq}(K) \to 0$$

è esatta.

Dimostreremo ora che per $r \geq 2$ e per ogni $p$ e $q$ con $p + q \leq n$ la successione

$$0 \to E'_r{}^{pq}(S) \xrightarrow{i_r^{pq}} E'_r{}^{pq}(Z) \xrightarrow{j_r^{pq}} E'_r{}^{pq}(K) \to 0$$

è esatta; procediamo per induzione: supponiamo di avere già dimostrato questo fatto per $r \leq r_0$ e dimostriamolo per $r = r_0 + 1$. Nel diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E'^{p-r_0,\,q+r_0-1}_{r_0}(S) \arrow[r, "i_{r_0}^{p-r_0,\,q+r_0-1}"] \arrow[d, "0"] & E'^{p-r_0,\,q+r_0-1}_{r_0}(Z) \arrow[r, "j_{r_0}^{p-r_0,\,q+r_0-1}"] \arrow[d, "0"] & E'^{p-r_0,\,q+r_0-1}_{r_0}(K) \arrow[r] \arrow[d, "d'^{p-r_0,\,q+r_0-1}_{r_0}(K)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'^{pq}_{r_0}(S) \arrow[r, "i_{r_0}^{pq}"] \arrow[d, "0"] & E'^{pq}_{r_0}(Z) \arrow[r, "j_{r_0}^{pq}"] \arrow[d, "0"] & E'^{pq}_{r_0}(K) \arrow[r] \arrow[d, "d'^{pq}_{r_0}(K)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'^{p+r_0,\,q-r_0+1}_{r_0}(S) \arrow[r, "i_{r_0}^{p+r_0,\,q-r_0+1}"] & E'^{p+r_0,\,q-r_0+1}_{r_0}(Z) \arrow[r, "j_{r_0}^{p+r_0,\,q-r_0+1}"] & E'^{p+r_0,\,q-r_0+1}_{r_0}(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

le prime due righe sono esatte, quindi $d'^{p-r_0,\,q+r_0-1}_{r_0}(K) = 0$ e $d'^{pq}_{r_0}(K) = 0$.

Questo permette di affermare che la successione

$$0 \longrightarrow E'^{pq}_{r_0+1}(S) \xrightarrow{i^{pq}_{r_0+1}} E'^{pq}_{r_0+1}(Z) \xrightarrow{j^{pq}_{r_0+1}} E'^{pq}_{r_0+1}(K) \longrightarrow 0$$

coincide con quella a livello $r_0$ ed è esatta.

In conclusione, poiché le filtrazioni di $S$, $Z$, $K$ sono limitate ($F^p = 0$ per $p$ abbastanza grande), la successione:

$$0 \longrightarrow E'^{pq}_{\infty}(S) \xrightarrow{i^{pq}_{\infty}} E'^{pq}_{\infty} \xrightarrow{j^{pq}_{\infty}} E'^{pq}_{\infty}(K) \longrightarrow 0$$

è esatta se $p + q \leq n$.

Da questo segue l'esattezza della successione:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=m} E'^{pq}_0 H(S) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=m} E'^{pq}_0 H(Z) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=m} E'^{pq}_0 H(K) \longrightarrow 0$$

se $m \leq n$.

Ora $\bigoplus_{p+q=m} E^{pq}_0 H(A)$ è il gruppo graduato associato a $H^m(A)$ perciò per il lemma enunciato nelle premesse la successione:

$$0 \longrightarrow H^m(S) \xrightarrow{(i^*)^m} H^m(Z) \xrightarrow{(j^*)^m} H^m(K) \longrightarrow 0$$

è esatta se $m \leq n$.

Poiché $H^m(S) \cong \bigoplus_{p+q=m} \operatorname{Ker} \sigma^{pq}$, $H^m(Z) \cong \bigoplus_{p+q=m} (Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q)$ la successione si può identificare con la riga del seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & Z^m(K) \arrow[d, "\pi^m"] \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{p+q=m} \operatorname{Ker} \sigma^{pq} \arrow[r, "i^m"] & \bigoplus_{p+q=m} Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q \arrow[r, "j^{*m}"] \arrow[ur, "j^m"] & H^m(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da questo diagramma si ricava subito che $j^{*m}$ è continua; inoltre dalla surgettività di $j^{*m}$ segue che $(\operatorname{im} j^m) + B^m(K) = Z^m(K)$ e quindi l'applicazione:

$$\tau : \left( \bigoplus_{p+q=m} Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q \right) \times K^{m-1} \longrightarrow Z^m(K)$$

definita $\tau = j^m + d^{m-1}$, è surgettiva ed è perciò un omomorfismo topologico. Il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{p+q=m} (Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q)) \times K^{m-1} & \xrightarrow{\tau} & Z^m(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=m} Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q & \xrightarrow{j^{*m}} & H^m(K) \end{array}$$

mostra perciò che $j^{*m}$ è un omomorfismo topologico.

Pertanto:

$$H^m(K) \cong (\bigoplus_{p+q=m} (Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q))/(\bigoplus_{p+q=m} \operatorname{Ker} \sigma^{pq}) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{p+q=m} (Z'^p \tilde{\otimes} Z''^q/\operatorname{Ker} \sigma^{pq}) \cong \bigoplus_{p+q=m} (Z'^p \tilde{\otimes} H''^q(K''))/\operatorname{im}(d'^p \tilde{\otimes} 1) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{p+q=m} [(\operatorname{sep} H^p(K') \tilde{\otimes} H^q(K'')) + R_2'^{pq}].$$

Dal teorema 2 si ricavano i seguenti corollari:

COROLLARIO 1. Se gli spazi $H^1(K''), \dots, H^n(K'')$ sono di Hausdorff ed in corrispondenza di $H^p(K')$ (con $1 \leq p \leq n$) non di Hausdorff avviene che $H^{n-p}(K'') = 0$, si ha

$$H^n(K) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(K') \tilde{\otimes} H^q(K'')$$

e la stessa formula vale se gli spazi $H^1(K'), \dots, H^n(K')$ sono di Hausdorff ed in corrispondenza di $H^q(K'')$ (con $1 \leq q \leq n$) non di Hausdorff avviene che $H^{n-q}(K') = 0$.

COROLLARIO 2. Se $H^1(K') = H^2(K') = \dots = H^n(K') = 0$ e $H^n(K'') = 0$ allora $H^n(K) = 0$ e così pure se

$$H^1(K'') = H^2(K'') = \dots = H^n(K'') \text{ e } H^n(K') = 0.$$

Dal teorema 1 si ricava, in particolare, che se tutti gli spazi $H^p(K')$ e $H^q(K'')$ (per $1 \leq p, q \leq n$) sono di Hausdorff e $H^n(K) = 0$, allora $H^p(K') = 0$ oppure $H^{n-p}(K'') = 0$ per $0 \leq p \leq n$.

Se però non è noto a priori, che gli spazi $H^p(K')$ e $H^q(K'')$ sono di Hausdorff, questo non è più vero in generale; darò appunto un controesempio (con $K' = K''$) in cui $H^2(K) = 0$ ma $H^1(K') = H^1(K'') \neq 0$.

## Controesempio.

Consideriamo la seguente situazione:
per ogni $n \geq 0$ sia definita una successione esatta (limitata superiormente) di gruppi e di omomorfismi

$$A_n^0 \xrightarrow{\partial_n^0} A_n^1 \xrightarrow{\partial_n^1} A_n^2 \xrightarrow{\partial_n^2} \dots$$

$$\dots \to A_n^{q-2} \xrightarrow{\partial_n^{q-2}} A_n^{q-1} \xrightarrow{\partial_n^{q-1}} A_n^q \xrightarrow{\partial_n^q} A_n^{q+1} \to \dots$$

e per ogni $q$ ed $n$ siano definiti due omomorfismi

$$\varrho_{n+1}^q : A_{n+1}^q \to A_n^q \quad \text{e} \quad j_{n+1}^q : A_n^q \to A_{n+1}^q$$

che commutano con gli omomorfismi $\partial$ e tali che $\varrho_{n+1}^q \circ j_{n+1}^q = 1_{A_n^q}$.

I gruppi $A_n^q$ e gli omomorfismi $\varrho_n^q$, $\partial_n^q$ formano un sistema decrescente di successioni e definiscono perciò una successione limite inverso delle successioni assegnate:

$$A_\infty^0 \xrightarrow{\partial_\infty^0} A_\infty^1 \to \dots \to A_\infty^{q-2} \xrightarrow{\partial_\infty^{q-2}} A_\infty^{q-1} \xrightarrow{\partial_\infty^{q-1}} A_\infty^q \xrightarrow{\partial_\infty^q} A_\infty^{q+1} \to \dots$$

e degli omomorfismi $\sigma_n^q : A_\infty^q \to A_n^q$ che commutano con gli omomorfismi $\varrho$ e $\partial$.

PROPOSIZIONE 2. La successione:

$$A_\infty^0 \xrightarrow{\partial_\infty^0} A_\infty^1 \xrightarrow{\partial_\infty^1} A_\infty^2 \xrightarrow{\partial_\infty^2} \dots \to A_\infty^q \xrightarrow{\partial_\infty^q} \dots$$

è esatta per $q \geq 2$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $f \in A_\infty^q$ $(q \geq 2)$ tale che $\partial_\infty^q f = 0$ e sia $f_n = \sigma_n^q f$ poiché $\partial_n^q(\sigma_n^q f) = \sigma_n^{q+1}\, \partial_\infty^q f = 0$ esiste $g_n \in A_n^{q-1}$ tale che $\partial_n^{q-1} g_n = f_n$.

Dimostriamo che si possono scegliere le $g_i$ $(i \geq 0)$ in modo che $\varrho_{i+1}^q g_{i+1} = g_i$ e $\partial_i^{q-1} g_i = f_i$.

Supponiamo di avere trovato $g_0, g_1, \dots, g_n$ con queste proprietà e sia $g'_{n+1} \in A^{q+1}_{n+1}$ tale che $\partial^{q-1}_{n+1} g'_{n+1} = f_{n+1}$.

Ora

$$g_n - \varrho^{q-1}_{n+1} g'_{n+1} \in A^{q-1}_n \quad \text{e} \quad \partial^{q-1}_n (g_n - \varrho^{q}_{n+1} g'_{n+1}) = \partial^{q-1}_n g_n - \varrho^{q}_{n+1} \partial^{q-1}_{n+1} g'_{n+1} =$$

$$= f_n - \varrho^{q}_{n+1} f_{n+1} = f_n - f_n = 0$$

ed esiste perciò $h_n \in A^{q-2}_n$ tale che $\partial^{q-2}_n h_n = g_n - \varrho^{q-1}_{n+1} g'_{n+1}$.

Se indichiamo con $g_{n+1} = g'_{n+1} + j^{q-1}_{n+1} \partial^{q-2}_n h_n$ otteniamo che:

$$\varrho^{q-1}_{n+1} g_{n+1} = \varrho^{q-1}_{n+1} g'_{n+1} + \partial^{q-2}_n h_n = g_n$$

e

$$\partial^{q-1}_{n+1} g_{n+1} = \partial^{q-1}_{n+1} g'_{n+1} + \partial^{q-1}_{n+1} j^{q-1}_{n+1} \partial^{q-2}_n h_n = f_{n+1} - j^{q}_{n+1} \partial^{q-1}_n \partial^{q-2}_n h_n = f_{n+1}.$$

Si può pertanto costruire una successione $\{g_n\}_{n \geq 0}$ con le proprietà: $\partial^{q-1}_n g_n = f_n$ e $\varrho^{q-1}_{n+1} g_{n+1} = g_n$ per ogni $n \geq 0$, questa successione costituisce perciò un elemento $g$ di $A^{q-1}_\infty$ con la proprietà: $\partial^{q-1}_\infty g = f$.

Se in più gruppi $A^q_n$ sono spazi vettoriali topologici e tutte le applicazioni $\varrho$ e $\partial$ sono continue vale la

PROPOSIZIONE 3. La successione:

$$A^0_\infty \xrightarrow{\partial^0_\infty} A^1_\infty \xrightarrow{\partial^1_\infty} A^2_\infty$$

è debolmente esatta (cioè $\overline{\text{im}\, \partial^0_\infty} = \text{Ker}\, \partial^1_\infty$).

DIMOSTRAZIONE: Sia

$$f \in A^1_\infty \subset \prod_{n \geq 0} A^1_n, \quad f = \{f_n\}_{n \geq 0},$$

se $\partial^1_\infty f = 0$ allora $\partial^1_n f_n = 0$ per ogni $n \geq 0$.

Sia $W$ un intorno aperto di 0 in $\Pi A^1_n$ del tipo:

$$W = (W_{n_1} \times \dots \times W_{n_k}) \times \prod_{\substack{n \neq n_i \\ (1 \leq i \leq k)}} A^1_n;$$

$W$ è individuato da $W_{n_1}, \dots, W_{n_k}$ intorni aperti di 0 in $A^1_{n_1}, \dots, A^1_{n_k}$.

Sia $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, esiste $g_m \in A^0_m$ tale che $\partial^0_m g_m = f_m$. Se definisco ora $g_{m-1} = \varrho^0_m g_m$, $g_{m-2} = \varrho^0_{m-1} g_{m-1}$ eccetera fino a $g_0 = \varrho^0_1 g_1$, e definisco $g_{m+1} = j^0_{m+1} g_m$, $g_{m+2} = j^0_{m+2} g_{m+1}$ eccetera, ottengo una successione $g = \{g_n\} \in A^0_\infty$ tale che $(\partial^0_\infty g - f)_n = 0$ se $n \leq m$.

Si ha allora che $(\partial^0_\infty g - f)_{n_i} = 0 \in W_{n_i}$ per $i = 1, \dots, k$ e quindi che $\partial^0_\infty g - f \in W$. Poiché $f$ e $W$ sono stati scelti senza nessuna condizione, in questo modo si è dimostrato che $\overline{\operatorname{im} d^0_\infty}$ è denso in $\operatorname{Ker} d^1_\infty$ cioè che $\overline{\operatorname{im} d^0_\infty} = \operatorname{Ker} d^1_\infty$.

La successione

$$A^0_\infty \to A^1_\infty \to A^2_\infty$$

non è in generale esatta, come mostra il seguente esempio: sia $X = \mathbb{C}^p - \{0\}$ (con $p \geq 4$) e $Y = \{x_n\}_{n>0}$ una successione di $X$ convergente a 0 (e contenuta tutta in uno degli assi coordinati di $\mathbb{C}^p$). Indichiamo con $\mathcal{J}_Y$ il fascio d'ideali di $\mathcal{O}_X$ relativo a $Y$.

Poniamo $X_n = X - \{x_i\}_{i \geq n+1}$, ogni $X_n$ è un aperto di $X$ e si ha che $X = \bigcup_{n>0} X_n$ e $X_n \subset X_{n+1}$ per ogni $n \geq 0$.

Inoltre $X_n = \mathbb{C}^p - (\{x_i\}_{i \geq n+1} \cup \{0\})$, cioè un $\mathbb{C}^p$ meno un compatto (del tipo $K_1 \times \dots \times K_p$) e quindi $H^1(X_n, \mathcal{O}_{X_n}) = \dots = H^{p-2}(X_n, \mathcal{O}_{X_n}) = 0$ vedi [3]).

Poiché il sottospazio $Y_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $X_n$ ha dimensione 0 si ha che $H^q(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}) = 0$ per $q \geq 1$.

Se indichiamo con $\mathcal{J}_{Y_n}$ il fascio di ideali di $\mathcal{O}_{X_n}$ relativo al sottospazio $Y_n$ si può osservare che $\mathcal{J}_Y|_{X_n} = \mathcal{J}_{Y_n}$.

Dalla successione esatta di coomologia:

$$0 \to H^0(X_n, \mathcal{J}_{Y_n}) \to H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}) \xrightarrow{\text{res}} H^0(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}) \to H^1(X_n, \mathcal{J}_{Y_n}) \to$$

$$\to H^1(X_n, \mathcal{O}_{X_n}) \to \dots \to H^{q-1}(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n}) \to H^q(X_n, \mathcal{J}_{Y_n}) \to H^q(X_n, \mathcal{O}_{X_n}) \to \dots$$

$$\dots \to H^{p-3}(Y_n, \mathcal{O}) \to H^{p-2}(X_n, \mathcal{J}_{Y_n}) \to H^{p-2}(X_n, \mathcal{O}_{X_n}) \to \dots$$

poiché $H^q(X_n, \mathcal{O}) = 0$ per $1 \leq q \leq p-2$, $H^q(Y_n, \mathcal{O}) = 0$ per $q \geq 1$ e res: $H^0(X_n, \mathcal{O}) \to H^0(Y_n, \mathcal{O})$ è surgettiva si ricava che $H^q(X_n, \mathcal{J}_{Y_n}) = 0$ per $1 \leq q \leq p-2$.

Questo vuol dire che se scelgo un ricoprimento aperto numerabile $\mathcal{U}_n$ di $X_n$ formato da aperti di Stein, la successione di spazi di cocatene:

$$C^0(\mathcal{U}_n, \mathcal{J}_{Y_n}) \xrightarrow{\partial^0_n} C^1(\mathcal{U}_n, \mathcal{J}_{Y_n}) \xrightarrow{\partial^1_n} \dots$$

$$\ldots \longrightarrow C^{p-2}(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_{Y_n}) \xrightarrow{\partial_n^{p-2}} C^{p-1}(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_{Y_n})$$

è esatta per ogni $n \geq 0$.

Posso scegliere i ricoprimenti $\mathcal{U}_n$ in modo che $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$ per ogni $n \geq 0$ e porre $\mathcal{U} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto numerabile di $X$ formato da aperti di Stein.

Definiamo le seguenti applicazioni tra lo spazio:

$$C^q(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_{Y_n}) = \prod_{(U_{i_0}, \ldots, U_{i_q}) \in (\mathcal{U}_n)^{q+1}} \Gamma(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{q+1}}; \mathcal{F}_{Y_n})$$

e lo spazio

$$C^q(\mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{F}_{Y_{n+1}}) = \prod_{(U_{i_0}, \ldots, U_{i_q}) \in (\mathcal{U}_{n+1})^{q+1}} \Gamma(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{q+1}}; \mathcal{F}_{Y_{n+1}})$$

$$\varrho_{n+1}^q : C^q(\mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{F}_{Y_{n+1}}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_{Y_n})$$

$$j_{n+1}^q : C^q(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_{Y_n}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{F}_{Y_{n+1}})$$

ponendo per $f \in C^q(\mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{F}_{Y_{n+1}})$

$$(\varrho_{n+1}^q(f))\, U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q} = (f)\, U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q} \quad \text{per ogni } (U_{i_0}, \ldots, U_{i_q}) \in (\mathcal{U}_n)^{q+1}$$

e per $g \in C^q(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_{Y_n})$

$$(j_{n+1}^q(g))_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}} = \begin{cases} (g)_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}} & \text{se} \quad U_{i_k} \in \mathcal{U}_n \ (0 \leq k \leq q). \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le applicazioni $\varrho$ e $j$ sono continue, commutano con le applicazioni $\partial$ e hanno la proprietà:

$$\varrho_n^q \circ j_n^q = 1 \quad \text{per ogni } q \text{ ed ogni } n \geq 0.$$

La successione:

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_Y) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_Y) \longrightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}_Y) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^{p-2}(\mathcal{U}, \mathcal{F}_Y) \longrightarrow C^{p-1}(\mathcal{H}, \mathcal{F}_Y)$$

è il limite inverso delle successioni $\{C^q(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_{Y_n})\}_{0 \leq q \leq p-1}$ rispetto alle applicazioni $\varrho$.

Essa perciò è esatta per $2 \leq q \leq p-2$, cioè $H^q(X, \mathcal{F}_Y) = 0$ per $2 \leq q \leq p-2$ ma non è esatta nel tratto $C^0(\mathcal{H}, \mathcal{F}_Y) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_Y) \longrightarrow$ $\longrightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}_Y)$, perché $H^1(X, \mathcal{F}_Y) \neq 0$; infatti dalla successione esatta di

coomologia:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{J}_Y) \to H^0(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{\text{res}} H^0(Y, \mathcal{O}) \to H^1(X, \mathcal{J}_Y) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to \dots$$

poiché $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ si ricava che $H^1(X, \mathcal{J}_Y) \simeq H^0(Y, \mathcal{O})/\text{im}(\text{res})$ che è perciò $\neq 0$ non essendo res: $H^0(X, \mathcal{O}) \to H^0(Y, \mathcal{O})$ surgettiva.

Il complesso:

$$K': C^0(\mathcal{U}, \mathcal{J}_Y) \xrightarrow{\partial^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{J}_Y) \xrightarrow{\partial^1} \dots \to C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{J}_Y)$$

è un esempio (vedi [7]) di complesso di spazi di Fréchet nucleari per cui si ha che:

$$H^2(K' \tilde{\otimes} K') = 0 \quad \text{ma} \quad H^1(K') \neq 0$$

Infatti $H^2(K' \tilde{\otimes} K') \cong H^2(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, \mathcal{J}_Y \tilde{\otimes} \mathcal{J}_Y)$ (vedi [6] N. 4 pag. 165) che è nullo perché la successione:

$$C^0(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, \mathcal{J}_Y \tilde{\otimes} \mathcal{J}_Y) \xrightarrow{\partial^0} C^1(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, \mathcal{J}_Y \tilde{\otimes}_Y) \xrightarrow{\partial^1}$$

$$\xrightarrow{\partial^1} C^2(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, \mathcal{J}_Y \tilde{\otimes} \mathcal{J}_Y) \xrightarrow{\partial^2} C^3(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, \mathcal{J}_Y \tilde{\otimes} \mathcal{J}_Y) \to \dots$$

è esatta per $2 \leq q \leq p-2$ dato che è il limite inverso delle successioni esatte

$$C^0(\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n, \mathcal{J}_{Y_n} \tilde{\otimes} \mathcal{J}_{Y_n}) \to C^1(\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n, \mathcal{J}_{Y_n} \tilde{\otimes} \mathcal{J}_{Y_n}) \to$$

$$\to C^2(\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n, \mathcal{J}_{Y_n} \tilde{\otimes} \mathcal{J}_{Y_n}) \to C^3(\mathcal{U}_n \times \mathcal{U}_n, \mathcal{J}_{Y_n} \tilde{\otimes} \mathcal{J}_{Y_n}) \to \dots$$

per le quali si possono definire degli omomorfismi $j$, $\varrho$ come nelle proposizioni 2 e 3.

## Formule di Künneth per la coomologia a valori in fasci Fréchet nucleari.

Ricordiamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1. Sia $X$ uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio su $X$ di spazi vettoriali topologici, $\mathcal{F}$ è un *fascio di Fréchet* se, per ogni aperto $U$ di $X$, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ è uno spazio di Fréchet e per ogni coppia di aperti $U$, $V$

di $X$ con $U \subset V$ l'applicazione di restrizione:

$$\varrho_U^V \colon \Gamma(V, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$$

è continua. (Analogamente si definiscono dei fasci Fréchet-nucleari).

Sia $X$ uno spazio a base numerabile e $\mathcal{F}$ un fascio di Fréchet su $X$ se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento numerabile di $X$, sullo spazio

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(U_{i_0}, \dots, U_{i_q}) \in \mathcal{U}^{q+1}} \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}, \mathcal{F}) \quad (q \geq 0)$$

porremo la topologia prodotto; con queste topologie le applicazioni di cobordo:

$$\partial^q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad (q \geq 0)$$

risultano continue.

Su $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})/B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ porremo la topologia quoziente e su $H^q(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la topologia del limite diretto (gli spazi sep $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e sep $H^q(X, \mathcal{F})$ sono di Fréchet).

Definizione 2. Un fascio $\mathcal{F}$ di Fréchet su $X$ si dice *normale* se esiste una base $\mathcal{U}$ di $X$ di Leray per $\mathcal{F}$.

Osservazione: Se $X$ è una varietà complessa, ogni fascio analitico coerente su $X$ è un fascio di Fréchet-nucleare normale.

Per i fasci normali vale la seguente proposizione (Vedi [2] Prop. 4 Paragrafo 4).

Proposizione 4. Se $X$ è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile, $\mathcal{F}$ un fascio di Fréchet normale e $\mathcal{U}$ un ricoprimento di $X$ numerabile di Leray, l'isomorfismo algebrico naturale

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{F})$$

è un isomorfismo topologico.

Se $\mathcal{F}$ è un fascio di Fréchet su $X$ e $\mathcal{G}$ un fascio di Fréchet su $Y$, per ogni aperto $U$ di $X$ e $V$ di $Y$ definiremo lo spazio di Fréchet:

$$(\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G})(U \times V) = \Gamma(U, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} \Gamma(V, \mathcal{G}).$$

In questo modo si viene a definire un prefascio su una base di $X \times Y$, questo prefascio si può estendere in uno ed in solo modo su tutti gli aperti

di $X \times Y$ in modo che ne risulti un fascio di Fréchet. (Che indicheremo con $\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}$).

OSSERVAZIONE. Se $X$ ed $Y$ sono varietà analitiche complesse, $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ sono fasci di Fréchet-nucleari e

$$\mathcal{O}_X \tilde{\otimes} \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_{X \times Y} .$$

Ricordiamo il seguente risultato di [6] pag. 165.

Siano $X$ ed $Y$ due spazi topologici a base numerabile, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci di Fréchet rispettivamente su $X$ e su $Y$, di cui uno sia nucleare, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti numerabili rispettivamente di $X$ e di $Y$.

Se indichiamo con $K'$ il complesso (limitato superiormente)

$$0 \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial^0_{\mathcal{U}}} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial^1_{\mathcal{U}}} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \dots$$

e con $K''$ il complesso:

$$0 \to C^0(\mathcal{V}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\partial^0_{\mathcal{V}}} C^1(\mathcal{V}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\partial^1_{\mathcal{V}}} C^2(\mathcal{V}, \mathcal{G}) \to \dots$$

il complesso $K = K' \tilde{\otimes} K''$ si identifica con il complesso doppio

$$C(\mathcal{U}^*, \mathcal{V}^* ; \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G})$$

così definito per ogni $n \geq 0$

$$C^n(\mathcal{U}^*, \mathcal{V}^*; \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) = \bigoplus_{p+q=n} C^{pq}(\mathcal{U}^*, \mathcal{V}^*; \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}),$$

dove

$$C^{pq}(\mathcal{U}^*, \mathcal{V}^* ; \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) =$$

$$= \prod_{\substack{(U_{i_0}, \dots, U_{i_p}) \in \mathcal{U}^{p+1} \\ (V_{j_0}, \dots, V_{j_q}) \in \mathcal{V}^{q+1}}} \Gamma((U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}) \times (V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_q}), \mathcal{F} \times \mathcal{G})$$

e la coomologia di questo complesso è isomorfa (algebricamente e topologicamente) alla coomologia del complesso di cocatene su $X \times Y$

$$0 \to C^0(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \to C^1(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \to \dots$$

cioè

$$H^n(K' \tilde{\otimes} K'') \cong H^n(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}).$$

LEMMA 1. Siano $X$ e $Y$ due spazi numerabili all'infinito (di Hausdorff, localmente compatti e a base numerabile), $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci di Fréchet-nucleari normali rispettivamente su $X$ e su $Y$ ed $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ due ricoprimenti (rispettivamente di $X$ e di $Y$) di Leray rispetto a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Il ricoprimento $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U_i \times V_j : U_i \in \mathcal{U},\ V_j \in \mathcal{V}\}$ di $X \times Y$ è un ricoprimento di Leray per $\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}$.

DIMOSTRAZIONE: dobbiamo dimostrare che presi degli aperti

$$U_{i_0} \times V_{j_0}, \dots, U_{i_n} \times V_{j_n} \text{ di } \mathcal{U} \times \mathcal{V}$$

$$H^q((U_{i_0} \times V_{j_0}) \cap \dots \cap (U_{i_n} \times V_{j_n}); \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) = 0 \text{ per } q \geq 1.$$

Ora

$$(U_{i_0} \times V_{j_0}) \cap \dots \cap (U_{i_n} \times V_{j_n}) = (U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}) \times (V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_n})$$

quindi ci basta dimostrare che se $U$ e $V$ sono due spazi topologici di Hausdorff, localmente compatti a base numerabile a $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sono due fasci Fréchet-nucleari su $U$ e $V$ e $H^p(U, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $p \geq 1$ e $H^q(V, \mathcal{G}) = 0$ per ogni $q \geq 1$ allora $H^m(U \times V; \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) = 0$ per ogni $m \geq 1$.

Consideriamo un ricoprimento aperto numerabile $\mathcal{U}'$ di Leray di $U$ e un ricoprimento aperto numerabile $\mathcal{V}'$ di Leray di $V$, ricoprimenti di questo tipo esistono senz'altro su $U$ e $V$ dato che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono normali ed anzi per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{W}$ di $U \times V$ si possono trovare $\mathcal{U}'$ e $\mathcal{V}'$ di Leray tali che $\mathcal{U}' \times \mathcal{V}'$ raffini $\mathcal{W}$.

Per i richiami fatti dell'articolo di Kaup e per il teorema 1 si ha che

$$H^m(\mathcal{U}' \times \mathcal{V}'; \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) = 0 \quad \text{per} \quad m \geq 1$$

e poiché i ricoprimenti del tipo $\mathcal{U}' \times \mathcal{V}'$ sono cofinali con tutti i ricoprimenti di $U \times V$ si ottiene che:

$$H^m(U \times V, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) = 0 \quad \text{per} \quad m \geq 1.$$

Per mezzo del lemma 1 si può facilmente dimostrare il

LEMMA 2. Nelle ipotesi del lemma 1 $\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}$ è normale su $X \times Y$.

Possiamo ora dimostrare i teoremi:

TEOREMA 3: Siano $X$ ed $Y$ due spazi topologici di Hausdorff, localmente compatti ed a base numerabile e siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci Fréchet-nucleari normali rispettivamente su $X$ e $Y$.

Se gli spazi $H^p(X, \mathcal{F})$, $H^q(X, \mathcal{G})$ sono di Hausdorff per $0 \leq p,\ q \leq n$ allora per ogni $m \leq n$ esiste un isomorfismo topologico

$$H^m(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{p+q=m} H^p(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^q(Y, \mathcal{G}).$$

DIMOSTRAZIONE: Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti numerabili di Leray di $X$ e $Y$ rispetto a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ è un ricoprimento aperto di Leray di $\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}$ perciò:

$$H^m(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong H^m(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong$$

$$\cong H^m(K) \cong \bigoplus_{p+q=m} H^p(K') \tilde{\otimes} H^q(K'') \cong$$

$$\cong \bigoplus_{p+q=m} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^q(\mathcal{V}, \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{p+q=m} H^p(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^q(Y, \mathcal{G}).$$

Per mezzo del teorema 2 si dimostra il:

TEOREMA 4: Se, nelle ipotesi del teorema 3, è noto soltanto che gli spazi $H^q(Y, \mathcal{G})$ sono di Hausdorff per $0 \leq q \leq n$, per ogni $m \leq n$ esiste un isomorfismo topologico:

$$H^m(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{p+q=m} (\operatorname{sep} H^p(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^q(Y, \mathcal{G}) + R'^{pq})$$

dove ogni $R'^{pq}$ è uno spazio di dimensione infinita (con la topologia banale) a meno che non sia $H^p(X, \mathcal{F})$ di Hausdorff oppure $H^q(Y, \mathcal{G}) = 0$, in tal caso $R'^{pq} = 0$.

Naturalmente vale un enunciato simmetrico dal teorema 4 se è noto invece che gli spazi $H^p(X, \mathcal{F})$ sono di Hausdorff per $0 \leq p \leq n$.

COROLLARIO 1. Nelle ipotesi dei teoremi 1 e 2 se gli spazi $H^1(X, \mathcal{F}), \ldots$ $\ldots, H^n(X, \mathcal{F})$ sono di Hausdorff ed in corrispondenza di ogni $H^q(Y, \mathcal{G})$ (con $1 \leq q \leq n$) non di Hausdorff si ha che $H^{n-q}(X, \mathcal{F}) = 0$, esiste un isomorfismo topologico

$$H^n(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) = \bigoplus_{p+q=m} H^p(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^q(Y, \mathcal{G})$$

e così pure se invece $H^1(Y, \mathcal{G}), \dots, H^n(Y, \mathcal{G})$ sono di Hausdorff ed in corrispondenza di ogni $H^p(X, \mathcal{F})$ $(1 \leq p \leq n)$ non di Hausdorff si ha due $H^{n-p}(Y, \mathcal{G}) = 0$.

COROLLARIO 2. Se

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \dots = H^n(X, \mathcal{F}) = 0$$

e

$$H^n(Y, \mathcal{G}) = 0$$

allora

$$H^n(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) = 0$$

e così pure se

$$H^1(Y, \mathcal{G}) = \dots = H^n(Y, \mathcal{G}) = 0 \quad \text{e} \quad H^n(X, \mathcal{F}) = 0.$$

## BIBLIOGRAFIA


[1] CARTAN, EILENBERG, *Homological Algebra.* Princeton University press (1956).

[2] CASSA, *Coomologia separata sulle varietà analitiche complesse.* Annali Scuola Normale Superiore (1971).

[3] FRENKEL, Bull. Soc. Mat. de France Vol. 85 (1957).

[4] GROTHENDIECK, Seminario Schwarts (1954).

[5] GROTHENDIECK, *Espaces Vectoriels Topologiques.* Societade de matematica de S. Paulo. (1958).

[6] KAUP, *Eine Künnethformel fur Fréchetgarben.* Math. Zeitschr. 97 (1967).

[7] VILLANI, *Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi.* Accademia Nazionale dei Lincei - Rend. sc. Fis. Mat. e Nat. Vol. XLIII - Ferie 1967.