

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

F. ACQUISTAPACE

F. BROGLIA

Problemi di Cousin e di Poincaré per spazi di Stein non ridotti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 27, n° 4 (1973), p. 889-904

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_889_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEMI DI COUSIN E DI POINCARÉ PER SPAZI DI STEIN NON RIDOTTI

F. ACQUISTAPACE(*) - F. BROGLIA(*)

Introduzione.

Scopo di questo lavoro è studiare le condizioni sotto le quali è possibile risolvere i problemi di Poincaré e di Cousin per gli spazi di Stein. Più precisamente si dimostrano i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. Sia X uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto): il 2° problema di Cousin è risolubile per X se e solo se $H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$.

Sia X uno spazio ridotto verificante il teorema A: il 2° problema di Cousin è risolubile per X se e solo se $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$.

TEOREMA 2. Sia X uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto): allora il problema di Poincaré è risolubile per X . Se X è uno spazio ridotto è sufficiente che X verifichi il teorema A.

Gli autori ringraziano il prof. O. Stanaşila per aver loro suggerito il problema e i proff. A. Tognoli e F. Lazzeri.

1. Divisori di zero e spazi di Stein.

Sia A un anello commutativo con identità.

Un elemento $x \in A$ si dice **NON DIVISORE DI ZERO** se l'omotetia di rapporto x è iniettiva.

Pervenuto alla Redazione il 18 Ottobre 1972.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S. A.G.A. del C.N.R.

Sarà indicato con A_T l'anello totale di frazioni di A , cioè

$$A_T = S^{-1}A \text{ ove } S = \{x \in A \mid x \text{ è non divisore di zero}\}.$$

OSSERVAZIONE: l'associazione $A \rightsquigarrow A_T$ non è in generale funtoriale. Ad esempio nell'omomorfismo $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(2)$, $\varphi(n) = n \cdot 1$, $\varphi(2) = 0$ divide zero, mentre 2 non divide zero. Tuttavia se $\varphi: A \rightarrow B$ è un morfismo d'annei tale che $\varphi(x)$ non divide zero se x non divide zero, allora φ si prolunga a un unico morfismo

$$\Phi: A_T \rightarrow B_T \text{ definito da } \Phi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}.$$

Inoltre se φ è un monomorfismo anche Φ lo è.

LEMMA 1. Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un omomorfismo piatto d'annei. Se $x \in A$ è non divisore di zero anche $\varphi(x)$ lo è.

DIM: Sia $f_x: A \rightarrow A$ l'omotetia di rapporto x per ipotesi iniettiva. Si ha la successione esatta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f_x} A \rightarrow A/xA \rightarrow 0.$$

Poichè B è piatto su A se ne ottiene la successione esatta

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{f_x \otimes_A \text{id.}} B \rightarrow A/xA \otimes_A B \rightarrow 0$$

ma $A/xA \otimes_A B \simeq B/\varphi(x)B$ e $f_x \otimes_A \text{id.}$ non è altro che l'omotetia di rapporto $\varphi(x)$: da cui la tesi.

DEFINIZIONE. Uno spazio analitico complesso (X, \mathcal{O}_X) separato e a base numerabile si dice SPAZIO DI STEIN se:

(1) è olomorficamente separato: cioè per ogni x in X esiste un naturale n e un morfismo, finito in x , $f: X \rightarrow \mathbb{C}^n$.

(2) è olomorficamente convesso: cioè per ogni compatto $K \subset X$, l'involuppo convesso di K

$$\widehat{K} = \{x \in X \mid \text{per ogni } s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid s(x) \leq \sup_{y \in K} |s(y)|\}$$

è compatto.

La definizione classica, equivalente a questa, è invece: (X, \mathcal{O}_X) è uno SPAZIO DI STEIN se:

(1) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ separa i punti e dà coordinate locali; cioè per ogni x, y in X , $x \neq y$ esiste $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tale che $s(x) \neq s(y)$ e per ogni $x \in X$ esistono $f_1, \dots, f_k \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tali che il morfismo da esse definito $X \rightarrow \mathbb{C}^k$ è un'immersione in x .

(2) è oloedromicamente convesso.

La condizione (2) è equivalente alla

(2') per ogni successione $\{x_n\}$ in X senza punto di accumulazione esiste $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tale che la successione $\{|f(x_n)|\}$ è illimitata in \mathbb{R} .

Queste definizioni hanno senso anche se X non è ridotto e risulta inoltre: (X, \mathcal{O}_X) non ridotto è uno spazio di Stein se e solo se lo spazio ridotto associato $(X, \mathcal{O}_{X, \text{rid}})$ lo è. Per le dimostrazioni di questi fatti si può vedere [2].

LEMMA 2. Sia X uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto). Sia $x \in X$ e U un aperto di Stein relativamente compatto. Allora i morfismi canonici

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_{X, x} \quad \text{e} \quad \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

sono morfismi piatti d'anelli.

Per la dimostrazione vedi [3].

Sia ora \mathcal{F} un fascio coerente qualsiasi su uno spazio di Stein X e sia U un aperto di Stein relativamente compatto in X . Dal lemma 2 e dagli isomorfismi $\mathcal{F}_x \simeq \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{X, x}$, $\Gamma(U, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ (cfr. [3]) si deduce facilmente il

LEMMA 3. I morfismi canonici

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_x \quad \text{e} \quad \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

sono morfismi piatti di $\Gamma(X, \mathcal{F})$ -moduli.

DIM: Se $0 \rightarrow N \rightarrow M$ è una successione esatta di $\Gamma(X, \mathcal{F})$ -moduli, tensorizzando con \mathcal{F}_x si ottiene la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{F})} N \rightarrow \mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{F})} M$$

cioè $0 \rightarrow \mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} N \rightarrow \mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M$ che è esatta per il lemma 2. Analogamente per l'altro morfismo.

Per comprendere meglio il comportamento dei divisori di zero è utile il seguente esempio (tratto da [1]).

Consideriamo in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ una coppia di rette distinte passanti per un punto p fissato; sia A una delle due rette privata di un punto $q \neq p$ e B l'altra. Quindi $A \simeq \mathbb{C}$, $B \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $A \cap B = \{p\}$.

Possiamo supporre che p coincida con l'origine di \mathbb{C} . Sia $X = A \cup B$ lo spazio analitico unione e sia \mathcal{O} il suo fascio.

Poichè le funzioni oloedre su B sono solo le costanti, se $f \in \Gamma(B, \mathcal{O})$ per ogni $x \in B$ $f(x) = f(p)$. Inoltre la restrizione $\Gamma(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{r} \Gamma(A, \mathcal{O})$ è chiaramente un isomorfismo. La funzione z coordinata di \mathbb{C} è non divisore di 0 in $\Gamma(X, \mathcal{O}) \simeq \Gamma(A, \mathcal{O})$, tuttavia $r_B^X(z) = 0$ poichè $z(p) = 0$. Ciò prova che il lemma 2 non è valido senza ipotesi.

2. Il fascio dei germi di funzioni meromorfe.

Considereremo d'ora in poi solo spazi analitici a base numerabile, i quali salvo avviso contrario potranno essere non ridotti e anche non di dimensione finita.

Sia (X, \mathcal{O}_X) uno spazio analitico.

E' possibile definire su X i seguenti due prefasci \mathcal{P}' e \mathcal{P}

(a) Sia $S_U = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid s_x \text{ non divide zero per ogni } x \in X\}$.

Poniamo:

$$\mathcal{P}'(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U}, \quad \rho_V^U = \text{restrizione naturale.}$$

(b) Sia $\mathfrak{U} = \{U \text{ aperti di Stein relativamente compatti in } X\}$. \mathfrak{U} è una base d'aperti. Poniamo

$$\mathcal{P}(U) = \begin{cases} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{T_U} = \text{anello totale di frazioni, se } U \in \mathfrak{U} \\ \lim_{\substack{\leftarrow \\ U_i \subset U \\ U_i \in \mathfrak{U}}} \mathcal{P}(U_i) \text{ se } U \notin \mathfrak{U} \end{cases}$$

$$r_V^U = \text{restrizione naturale.}$$

OSSERVAZIONE. I due prefasci sono in generale differenti: nell'esempio del paragrafo precedente infatti $T_X \neq S_X$.

LEMMA 4. Se U è un aperto di Stein relativamente compatto $S_U = T_U$. Ne segue $\mathcal{P}(U) = \mathcal{P}'(U)$ e quindi \mathcal{P} e \mathcal{P}' hanno lo stesso fascio associato.

DIM: Per il lemma 2 $T_U \subset S_U$. Sia $s \in S_U$. Supponiamo che esista $t \neq 0$ in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ tale che $s \cdot t = 0$. Poichè $t \neq 0$ esiste $z \in U$ con $t_z \neq 0$; ne segue che s_z divide zero e dunque $s \notin S_U$. \mathcal{P} e \mathcal{P}' coincidono su una base d'aperti ed hanno quindi lo stesso fascio associato.

DEFINIZIONE. Il fascio \mathcal{M} associato a \mathcal{P} e a \mathcal{P}' si dice il FASCIO DI GERMI DI FUNZIONI MEROMORFE.

Osserviamo che la definizione data coincide con quella usuale nel caso delle varietà e con quella data in [6] se X è uno spazio ridotto, poichè in tal caso $S_U = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid s \text{ non si annulla identicamente su nessun aperto non vuoto di } U\}$.

LEMMA 5. Sia X uno spazio analitico.

$$(1) \text{ per ogni } x \in X, \mathcal{M}_x \cong (\mathcal{O}_{X,x})_{T_x}$$

$$(2) \mathcal{O}_X \text{ è un sottofascio di } \mathcal{M}.$$

DIM: (1) $\mathcal{M}_x = \mathcal{P}'_x = \lim_{U \ni x} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U}$. Se $x \in U$ è definita l'applicazione

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U} \rightarrow (\mathcal{O}_{X,x})_{T_x}$$

$$f/g \longmapsto f_x/g_x$$

questa induce un morfismo del limite diretto $\varphi_x: \mathcal{M}_x \rightarrow (\mathcal{O}_{X,x})_{T_x}$.

φ_x è iniettiva: infatti se la classe di f/g è tale che $f_x/g_x = 0$ cioè $f_x = 0$, f è nulla su un piccolo intorno di x cioè f/g definisce la classe nulla.

φ_x è surgettiva: sia $f_x/g_x \in (\mathcal{O}_{X,x})_{T_x}$; g_x è non divisore di zero.

f_x e g_x sono i germi di due sezioni $f, g \in \Gamma(W, \mathcal{O}_X)$ dove W è un piccolo intorno di x . Consideriamo l'omotetia di rapporto g tra $\mathcal{O}_X|_W$ e $\mathcal{O}_X|_W$ e sia \mathcal{I} il nucleo di questo morfismo. Naturalmente $\mathcal{I}_x = 0$ e dunque $\mathcal{I}_y = 0$ per ogni y in un piccolo intorno $V \subset W$. Pertanto $g_y \in T_y$ per ogni $y \in V$ cioè $r_V^W g \in S_V$. Ciò prova che $f|_V/g|_V \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)_{S_V}$.

$$(2) \text{ Consideriamo l'applicazione } \mathcal{O} \xrightarrow{i} \mathcal{M} \text{ così definita}$$

$$i(U): \Gamma(U, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{M})$$

$$i(U)(f) = \{f_x\}_{x \in U} \quad (4)$$

i è iniettiva perchè fibra per fibra $i_x: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{M}_x \simeq (\mathcal{O}_{X,x})_{T_x}$ lo è.

OSSERVAZIONE. \mathcal{M} non è un fascio analitico coerente. Ad esempio per $X = \mathbb{C}$, se \mathcal{M} fosse coerente \mathcal{M}_x sarebbe un $\mathcal{O}_{X,x}$ modulo di tipo finito; in altri termini $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{M}_x$ sarebbe un morfismo finito e iniettivo e dunque $\mathcal{O}_{X,x}$ e \mathcal{M}_x avrebbero la stessa dimensione di Krull. Invece \mathcal{M}_x , essendo il corpo di frazioni di $\mathcal{O}_{X,x}$, ha dimensione 0 mentre $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{z\}$ ha dimensione 1.

Tuttavia ogni sotto \mathcal{O}_X -modulo di tipo finito di \mathcal{M} è coerente.

3. La decomposizione primaria degli ideali di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Sia (X, \mathcal{O}_X) uno spazio di Stein. Per l'anello $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ valgono i seguenti risultati (dimostrati da O. Forster in [5]). Sia \mathfrak{a} un ideale di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, chiuso⁽²⁾. In analogia con il caso di un anello noetheriano, \mathfrak{a} ammette una decomposizione primaria numerabile

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i$$

ove \mathfrak{q}_i è un ideale primario chiuso. Inoltre tale decomposizione è irridondante nel senso che nessuno dei \mathfrak{q}_i è contenuto nell'intersezione di alcuni degli altri e gli ideali $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ sono ideali primi chiusi a due a due distinti.

In particolare consideriamo la decomposizione primaria di (0)

$$(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_n, \quad \mathfrak{p}_n = \sqrt{\mathfrak{q}_n}.$$

Come nel caso noetheriano $\{a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid a \text{ divide zero}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n$. Infatti sia a un divisore di zero; esiste allora b con $ab = 0$ e quindi $ab \in \mathfrak{q}_n$

(1) Una sezione $s \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ è per definizione una famiglia di germi $\{s_x\}_{x \in U}$ tale che esiste un ricoprimento $\{U_i\}$ di U ed elementi $s_i \in \mathcal{P}'(U_i)$ tali che $s_{i,z} = s_z$ per ogni $z \in U_i$.

(2) Se X è uno spazio analitico, \mathcal{F} un fascio coerente su X , U un aperto qualunque di X è possibile dare a $\Gamma(U, \mathcal{F})$ una topologia di spazio di Fréchet per la quale le restrizioni sono continue (vedi [8]).

per ogni n . Se $a \notin \mathfrak{p}_n$, allora $b \in \mathfrak{q}_n$ perchè \mathfrak{q}_n è \mathfrak{p}_n -primario. Dunque se $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n$, $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_n$ cioè $b = 0$.

Viceversa sia a elemento, ad esempio, di \mathfrak{p}_1 . Esiste un intero h tale che $a^h \in \mathfrak{q}_1$. Poichè $\bigcap_{i=2}^{\infty} \mathfrak{q}_i \neq (0)$ esiste $b \in \bigcap_{i=2}^{\infty} \mathfrak{q}_i$; ma allora $a^h b \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i$ e dunque $a^h b = 0$. Se ne deduce che esiste un intero s , $1 \leq s \leq h$, tale che $a^s b = 0$ mentre $t = a^{s-1} b \neq 0$ e quindi a divide zero. Osserviamo che se $a \in \mathfrak{p}_1$, abbiamo trovato un elemento $t \notin \mathfrak{q}_1$ con $at = 0$.

Abbiamo visto d'altra parte che (se per X è valido il teorema A) affinché s divida 0 basta che esista $z \in X$ tale che s_z divide 0 in $\mathcal{O}_{X,z}$. Viceversa, essendo X di Stein, per i lemmi 2 e 3 $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ non divide 0 se e solo se s_z non divide 0 per ogni $z \in X$.

Osserviamo infine che per ogni i

$$X_i = \{x \in X \mid f(y) = 0 \text{ per ogni } f \in \mathfrak{p}_i\}$$

è non vuoto in quanto \mathfrak{p}_i è un ideale chiuso in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

4. I problemi di Cousin.

Sia \mathcal{M}^* il sottofascio moltiplicativo di gruppi abeliani di \mathcal{M} formato dai germi di sezioni invertibili. In altri termini per ogni aperto U in X

$$\mathcal{M}^*(U) = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{M}) \mid \text{esiste } t \in \Gamma(U, \mathcal{M}) \text{ con } s \cdot t = t \cdot s = 1\}$$

\mathcal{O}^* risulta naturalmente un sottofascio di \mathcal{M}^* .

Si hanno le seguenti due successioni esatte di gruppi abeliani:

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O} \rightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{O}^*/\mathcal{M}^* \rightarrow 0$$

$\mathcal{M}/\mathcal{O} = \mathcal{R}$ si dice il FASCIO DEI GERMI DI PARTI PRINCIPALI (O RIPARTIZIONI).

$\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* = \text{Div } X$ si dice il FASCIO DEI GERMI DI DIVISORI.

Da (1) e (2) si traggono le successioni esatte:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{R})$$

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X, \text{Div } X)$$

Il 1° e il 2° problema di Cousin consistono nel chiedere sotto quali condizioni per lo spazio X α e β risultano surgettive. Le condizioni sufficienti che seguono sono analoghe a quelle per il caso classico delle varietà; ci proponiamo di studiare la necessità di tali condizioni.

È ben noto il seguente teorema, la cui dimostrazione è identica a quella che si dà per le varietà:

TEOREMA (Cousin) 1. Sia X uno spazio di Stein: allora il 1° problema di Cousin è risolubile per X .

2. Sia X uno spazio di Stein tale che $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$; allora il 2° problema di Cousin è risolubile per X .

Osserviamo subito che la prima condizione è sufficiente, ma non necessaria. Infatti sia $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$: in questo caso $H^1(X, \mathbb{O}) = 0$, quindi α è surgettiva, tuttavia X , essendo compatto, non è Stein.

Per il 2° problema di Cousin vogliamo dimostrare il seguente

TEOREMA 1. (1) Sia X uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto): se il 2° problema di Cousin è risolubile per X allora

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq H^1(X, \mathbb{O}^*) = 0 \text{ (}^3\text{)}$$

(2) Sia X uno spazio ridotto verificante il teorema A: se il 2° problema di Cousin è risolubile per X allora

$$H^1(X, \mathbb{O}^*) = 0.$$

La dimostrazione deriva dai seguenti lemmi.

LEMMA 6. Sia X uno spazio analitico verificante il teorema A e \mathcal{F} un fascio analitico coerente su X . Per ogni $x \in X$ l'applicazione canonica di \mathbb{C} -spazi vettoriali

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\gamma_x} \mathcal{F}_x / \mathbb{M}_x \mathcal{F}_x$$

(³) Come nel caso delle varietà questo isomorfismo deriva dalla successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{O}_X \xrightarrow{\text{exp.}} \mathbb{O}_X^* \rightarrow 0.$$

L'applicazione esponenziale ha senso anche in questo caso: possiamo infatti supporre $\mathbb{O}_X = \mathbb{O}(\mathbb{C}^n)/\mathcal{I}$; se $f \in \Gamma(X, \mathcal{I})$, poichè $\frac{1 - e^{2\pi i} f}{f} = h$ è olomorfa, $1 - e^{2\pi i} f \in \Gamma(X, \mathcal{I})$. Quindi l'applicazione $\text{exp}: \mathbb{O}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{O}^*(\mathbb{C}^n)$ passa al quoziente.

è surgettiva e aperta. Inoltre γ_x è un chiuso a complementare denso per la topologia di Fréchet su $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

DIM: Osserviamo anzitutto che $\mathbb{M}_x \mathcal{F}_x$ è un sottomodulo chiuso di \mathcal{F}_x ; infatti poichè $\mathbb{M}_x \mathcal{F}_x$ è finitamente generato, qualunque sia $U \ni x$ un aperto di Stein relativamente compatto, l'immagine inversa di $\mathbb{M}_x \mathcal{F}_x$ in $\Gamma(U, \mathcal{F})$ è un ideale finitamente generato, poichè \mathcal{F}_x è piatto su $\Gamma(U, \mathcal{F})$; dunque, come ideale finitamente generato in un'algebra di Fréchet, è chiuso. Sia $s_x \in \mathcal{F}_x$. Per il teorema A esistono s_1, \dots, s_r in $\Gamma(X, \mathcal{F})$ e f_1, \dots, f_r in $\mathcal{O}_{X,x}$ tali che

$$s_x = \sum_{i=1}^r f_i s_{ix}.$$

Dà cui

$$s_x = \sum [f_i - f_i(x)] s_{ix} + \sum f_i(x) s_{ix}$$

Poichè

$$[f_i - f_i(x)] s_{ix} \in \mathbb{M}_x \mathcal{F}_x$$

risulta:

$$\text{classe di } s_x \text{ mod. } \mathbb{M}_x \mathcal{F}_x = \text{classe di } \sum f_i(x) s_{ix} = \gamma_x(\sum f_i(x) s_i).$$

e γ_x è surgettiva.

Ora, poichè $\mathcal{F}_x / \mathbb{M}_x \mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_{X,x} / \mathbb{M}_x$ -spazio vettoriale di dimensione finita, si ha che γ_x è \mathbb{C} -lineare, continua e surgettiva tra spazi di Fréchet: dal teorema del grafico chiuso segue che γ_x è aperta.

Se poi U è aperto in $\Gamma(X, \mathcal{F})$, $f(U)$ è aperto in $\mathcal{F}_x / \mathbb{M}_x \mathcal{F}_x \simeq \mathbb{C}^k$. Ne segue che U incontra il complementare di $\ker \gamma_x$ e dunque questo è denso.

LEMMA 7. Sia (X, \mathcal{O}_X) uno spazio di Stein e \mathcal{L} un fascio su X localmente libero di rango 1. Allora esiste $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ tale che s_x non divide 0 in $\mathcal{L}_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}$ per ogni $x \in X$.

DIM: Siano $\{\mathfrak{p}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, gli ideali primi ottenuti dalla decomposizione di (0) in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Sappiamo che per $i = 1, \dots, k, \dots$ l'insieme $X_i = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ per ogni } f \in \mathfrak{p}_i\}$ è non vuoto. Sia $x_i \in X_i$. E' possibile trovare una sezione $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ tale che $s_{x_i} \notin \mathbb{M}_{x_i} \mathcal{L}_{x_i}$ per ogni i . Infatti per il lemma 5 l'intersezione

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_{x_i}^{-1} \in \{0\}$$

è una intersezione di aperti densi, non vuota per il teorema di Baire.

Consideriamo ora il fascio coerente $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Con lo stesso ragionamento è possibile trovare $\Phi \in \Gamma(X, \check{\mathcal{L}})$ tale che per ogni i $\Phi_{x_i} \notin \mathbb{M}_{x_i} \check{\mathcal{L}}_{x_i}$.

Φ è un omomorfismo tra $\Gamma(X, \mathcal{L})$ e $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ lineare. Da quanto precede segue che

$$(\Phi(s))_{x_i} = \Phi_{x_i}(s_{x_i}) \notin \mathfrak{M}_{x_i}.$$

Consideriamo infatti il diagramma commutativo per ogni i

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{L}) & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}_{x_i} & \xrightarrow{\Phi_{x_i}} & \mathcal{O}_{X, x_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} \simeq \mathcal{L}_{x_i} / \mathfrak{M}_{x_i} \mathcal{L}_{x_i} & \xrightarrow{\lambda_i} & \mathcal{O}_{X, x_i} / \mathfrak{M}_{x_i} \simeq \mathbb{C} \end{array}$$

λ_i non è il morfismo nullo poichè $\Phi_{x_i} \notin \mathfrak{M}_{x_i} \mathcal{L}_{x_i}$ e quindi è iniettivo. Poichè $s_{x_i} \notin \mathfrak{M}_{x_i} \mathcal{L}_{x_i}$ si ha la tesi

Mostriamo ora che s non divide 0 in ogni punto. Supponiamo che esista $x \in X$ tale che s_x divide zero. Il sottofascio di \mathcal{O}_X $\text{Ann } s^{(4)}$ è coerente come nucleo del morfismo tra fasci coerenti « moltiplicazione per s »: $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$. Ora $(\text{Ann } s)_x = \text{Ann } s_x \neq 0$ poichè s_x divide 0. Dal teorema A esiste $f \in \Gamma(X, \text{Ann } s)$ con $f \neq 0$ e $f \cdot s = 0$. Si ha allora $f \cdot \Phi(s) = \Phi(f \cdot s) = 0$.

Cioè $\Phi(s)$ divide 0 e dunque $\Phi(s) \in \mathfrak{p}_{i_0}$ per qualche $i_0 \in \mathbb{N}$.

Ne segue $\Phi(s)(x_{i_0}) = 0$ cioè $(\Phi(s))_{x_{i_0}} \in \mathfrak{M}_{x_{i_0}}$ contro quanto avevamo trovato.

DIM. DEL TEOREMA 1. (1) Sia X uno spazio di Stein. E' sufficiente provare che $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$. Poichè β è surgettiva per ipotesi, dalla successione $\Gamma(X, \mathcal{M}^*) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X, \text{Div } X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\lambda} H^1(X, \mathcal{M}^*)$ si ottiene che basta mostrare che λ ha immagine nulla.

Sia $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$: $\xi =$ classe di ξ_{ij} , $\xi_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$, ove $\{U_i\}$ è un ricoprimento di X . ξ definisce un fascio invertibile \mathcal{L} . Per il lemma 6 esiste $s \in \Gamma(X, \Gamma)$ tale che s_x non divide zero per ogni $x \in X$. Per definizione $s = \{s_i\}$ con $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \cap S_{U_i}$ e $s_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_{ij} s_j|_{U_i \cap U_j}$.

(4) $\text{Ann } s(U) = \{t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \text{ tale che } t \cdot s|_U = 0\}$.

Quindi

$$\lambda(\xi) = \text{classe di } s_i s_j^{-1} = 0.$$

(2) Sia X uno spazio ridotto verificante il teorema A e sia β surgettiva. Ancora dobbiamo mostrare che $\mathcal{I}m \lambda = 0$. Sia $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$, $\xi = [\xi_{ij}]$, $\xi_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$, e sia \mathcal{L} il fascio invertibile determinato da ξ . Sia A un insieme numerabile denso in X . Scegliamo $s \in \bigcap_{x \in A} \gamma_x^{-1}(\mathcal{O} \setminus \{0\})$, intersezione certamente non vuota per il teorema di Baire, $s = \{s_i\}$ $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*)$, $s_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_{ij} s_j|_{U_i \cap U_j}$. Ma $s_i(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_i \cap A$ e quindi (cfr. par 2) per ogni i $s_i \in S_{U_i}$. Ancora si conclude $\lambda(\xi) = [s_i s_j^{-1}] = 0$.

COROLLARIO. Sia X uno spazio di Stein: il 2° problema di Cousin è risolubile per X se e solo se $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$.

5. Il problema di Poincaré.

Abbiamo introdotto \mathcal{M} come il fascio associato al prefascio \mathcal{P} . Tra prefascio e fascio associato è definita un'applicazione che in generale non è iniettiva. Tuttavia nel nostro caso $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ lo è. Infatti se U è aperto in X , F è data da

$$F_U: \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U} \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{M})$$

$$F_U(f/g) = \{f_x/g_x\}_{x \in U}$$

e quindi $\{f_x/g_x\} = 0$ se e solo se $f = 0$.

In particolare per ogni spazio analitico X si ha un omomorfismo iniettivo d'anelli

$$F_X: \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{S_X} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}).$$

Il problema di Poincaré consiste nel chiedere per quali spazi X , F_X è surgettiva.

Vogliamo dimostrare la seguente proposizione, analoga al lemma 7.

PROP. 8. Sia X uno spazio di Stein, \mathcal{I} un fascio coerente di ideali di \mathcal{O}_X . Supponiamo che per ogni $x \in X$, la fibra \mathcal{I}_x contenga un non divisore di zero. Allora esiste $s \in \Gamma(X, \mathcal{I})$ tale che s_x non divide zero per ogni $x \in X$.

Sono necessari i seguenti lemmi:

LEMMA 9. Sia T_x l'insieme, supposto non vuoto, dei non divisori di zero in \mathcal{F}_x . T_x è aperto e denso in \mathcal{F}_x per la topologia di Cartan⁽⁵⁾.

DIM: Sia \mathfrak{a} un ideale qualunque in $\mathcal{O}_{X,x}$. \mathfrak{a} è finitamente generato perchè $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello noetheriano. Comunque si scelga un aperto U di Stein relativamente compatto contenente x , poichè $\mathcal{O}_{X,x}$ è piatto su $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, l'immagine inversa di \mathfrak{a} in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ è finitamente generata e dunque chiusa. Ciò prova che \mathfrak{a} è chiuso nella topologia limite diretto di $\mathcal{O}_{X,x}$. Inoltre \mathfrak{a} è un sotto \mathbb{C} -spazio vettoriale di $\mathcal{O}_{X,x}$ e quindi se $\mathfrak{a} \neq \mathcal{O}_{X,x}$, il complementare di \mathfrak{a} è denso in $\mathcal{O}_{X,x}$.

Sia ora $(0) = \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{q}_i$ la decomposizione primaria di (0) nell'anello noetheriano $\mathcal{O}_{X,x}$ e sia $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. \mathfrak{p}_i è chiuso e quindi $\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{F}_x$ è chiuso in \mathcal{F}_x . Inoltre $\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{F}_x$ è un sotto \mathbb{C} -spazio vettoriale di \mathcal{F}_x proprio, poichè altrimenti si avrebbe $T_x = \bigcap_{i=1}^k [\mathcal{F}_x - (\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{F}_x)] = \emptyset$. Pertanto $\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{F}_x$ è a complementare denso e quindi T_x è un aperto denso.

LEMMA 10. Sia $\gamma_x: \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_x$ l'applicazione canonica: $\gamma_x^{-1}(T_x)$ è aperto e denso in $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

DIM. Supponiamo per il momento $\gamma_x^{-1}(T_x)$ non vuoto. Si ha allora per ogni i che $\gamma_x^{-1}(\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{F}_x)$ è un sotto \mathbb{C} -spazio vettoriale chiuso non banale di $\Gamma(X, \mathcal{F})$ e quindi è magro. Ne segue che $\gamma_x^{-1}(T_x)$ è aperto e denso.

Resta solo da provare che $\gamma_x^{-1}(T_x) \neq \emptyset$; ma questa è una conseguenza del più generale

LEMMA 11. Sia A un anello e siano $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideali in A . Sia R un sottoinsieme di A chiuso rispetto alla somma e al prodotto. Se $R \subset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$ allora $R \subset \mathfrak{a}_j$ per qualche j .

DIM: Se per ogni j $R \not\subset \mathfrak{a}_j$, esistono elementi b_1, \dots, b_n tali che $b_j \notin \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \dots, n$. Sotto queste ipotesi il polinomio

(5) La topologia di Cartan sulla fibra di un fascio coerente \mathcal{F} è definita così: una successione $\{g_n\}$ in \mathcal{F}_x converge a g se esiste un aperto $U \ni x$ e una successione $\{f_n\}$ in $\Gamma(U, \mathcal{F})$ convergente ad $f \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ con $f_{n,x} = g_n$ e $f_x = g$.

La topologia di Cartan coincide con la topologia limite diretto.

$$P_n(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i_1 < i_2} b_{i_1} b_{i_2} + \dots + b_1 \cdot b_2 \dots b_n$$

non può essere elemento di nessun \mathfrak{a}_j .

Questo si dimostra per induzione. Per $n = 1$ è banalmente vero. Supponiamo ora, ad esempio, $P_n(b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{a}_1$. Si ha

$$P_n(b_1, \dots, b_n) = b_1 (1 + P_{n-1}(b_2, \dots, b_n)) + P_{n-1}(b_2, \dots, b_n) \in \mathfrak{a}_1.$$

Per ipotesi induttiva $P_{n-1}(b_1, \dots, b_n) \notin \mathfrak{a}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{a}_n$ e dunque, dato che R è chiuso, è elemento di \mathfrak{a}_1 . Se $P_n(b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{a}_1$ si ha $b_1 \in \mathfrak{a}_1$ contro l'ipotesi.

Quindi $P_n(b_1, \dots, b_n) \notin \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$ e dunque R non è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

DIM. DELLA PROP. 8: Sia al solito $(0) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, $X_i = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ per ogni } f \in \mathfrak{p}_i\}$ e x_i un punto qualunque in X_i . Sia $s \in \mathfrak{p}_i$; s è allora divisore di 0 ed esiste quindi $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ con $s \cdot f = 0$.

Abbiamo visto che si può supporre $f \notin \mathfrak{q}_i$.

Sia $M_{x_i} = \{t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid t(x_i) = 0\}$ e sia $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$ il localizzato di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ rispetto al complementare di M_{x_i} .

Mostriamo che s è divisore di zero come elemento di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$: infatti f non è zero in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$, perchè, se lo fosse, esisterebbe $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $t \notin M_{x_i}$ con $f \cdot t = 0$; poichè $M_{x_i} \supset \mathfrak{p}_i$, $t \notin \mathfrak{p}_i$ e dunque poichè $f \cdot t = 0 \in \mathfrak{q}_i$, si avrebbe $f \in \mathfrak{q}_i$ contro l'ipotesi. Dunque $s \cdot f = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$ con $f \neq 0$.

Osserviamo ora che l'applicazione

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x_i}$$

è iniettiva. Infatti se $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ è tale che $f_{x_i} = 0$, la fibra in x_i del fascio $\text{Ann } f$ è \mathcal{O}_{X, x_i} . Poichè $\text{Ann } f$ è un fascio coerente esiste una sezione globale $t \in \Gamma(X, \text{Ann } f)$ tale $t_{x_i} \notin \mathfrak{m}_{x_i}$, cioè $t \notin M_{x_i}$. Poichè $t \cdot f = 0$, f è zero come elemento $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{M_{x_i}}$.

In conclusione abbiamo provato che se $s \in \mathfrak{p}_i$ allora s_{x_i} è divisore di 0.

Per il teorema di Baire l'insieme

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_x^{-1}(T_{x_i})$$

non è vuoto: sia s un suo elemento. Dunque per ogni i s_{x_i} è non divisore di zero: per quanto visto prima $s \notin \mathfrak{p}_i$ per ogni i e dunque s è non divisore di 0 in $\Gamma(X, \mathcal{G})$. Per il lemma 2 s_x non divide 0 per ogni $x \in X$ e quindi risolve il nostro problema.

TEOREMA 2. (1) Se X è uno spazio di Stein (non necessariamente ridotto) il problema di Poincaré è risolubile per X .

(2) Se X è uno spazio ridotto verificante il teorema A, il problema di Poincaré è risolubile per X .

DIM: (1) Sia $m \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ una funzione meromorfa. Per ogni aperto U di X poniamo

$$\mathcal{G}(U) = \{h \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \text{ tali che } h \cdot m|_U \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)\}.$$

E' così definito un fascio coerente di ideali di \mathcal{O}_X in quanto $\mathcal{G} = \text{Ann} \frac{\mathcal{O}_X + m \mathcal{O}_X}{\mathcal{O}_X}$.

Inoltre poichè per ogni x $m_x = f_x/g_x$ con $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, $g_x \in T_x \subset \mathcal{I}_x$, \mathcal{I}_x contiene un non divisore di zero. Secondo la prop. 8 esiste $s \in (X, \mathcal{G})$ tale che $s_x \in T_x$ per ogni x in X . Si ha

$$s \cdot m = f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Poichè $s \in S_X$ si ha $m = f/s$ e il problema di Poincaré è risolto

(2) Nel caso in cui X sia ridotto è sufficiente il teorema A secondo i risultati di [4].

6. Un esempio di varietà non di Stein per cui il problema di Poincaré è risolubile.

Sia X una varietà complessa che sia una « corona completa » nel senso di [7] e in cui la funzione esaustiva φ non raggiunga mai il suo estremo inferiore. Sotto queste ipotesi X non è di Stein perché l'involuppo convesso dei compatti $\{a \leq \varphi \leq b\}$ è dato da $\{\varphi \leq b\}$ e quindi non è compatto.

In [7] pag. 66-68 è provato che se \mathcal{F} è un fascio analitico coerente su X tale che $\text{prof. } \mathcal{F} > 3$ allora X verifica il teorema A relativamente ad \mathcal{F} .

Sia $m \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ una funzione meromorfa su X e sia \mathcal{G} il fascio di ideali definito nel teorema 2: per provare che il problema di Poincaré è risolubile per X basterà dimostrare che $\text{prof } \mathcal{G} > 3$. Questo discende dal fatto che per ogni $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ è fattoriale.

Infatti per ogni $x \in X$ si ha $m_x = \frac{a_x}{b_x}$ con a_x e b_x in $\mathcal{O}_{X,x}$. Per la fattorialità di $\mathcal{O}_{X,x}$ si può supporre che a_x e b_x siano primi fra loro e quindi, se a e b sono le sezioni di \mathcal{O}_X definite da a_x e b_x su un piccolo intorno di x , che a_y e b_y siano primi fra loro per ogni y abbastanza vicino a x .

Sia $h_x \in \mathcal{F}_x$: per definizione $h_x m_x = \frac{h_x a_x}{b_x} \in \mathcal{O}_{X,x}$. Dalla fattorialità di $\mathcal{O}_{X,x}$ segue che b_x divide h_x . Ciò prova che \mathcal{F}_x è generato da b_x e dunque \mathcal{F} è un fascio localmente libero di rango 1 (b_x è non divisore di zero). Pertanto $\text{prof. } \mathcal{F} = \dim X = n > 3$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. ABHYANKAR - *Local analytic geometry*. Acad. Press. 1964.
- [2] C. BĂNICĂ A. DUMA O. STĂNĂSILĂ - *Proprietăți ale spațiilor Stein*, Studi și cercetări matematice. Tom 21, N° 6, pag. 877-907. București 1969.
- [3] C. BĂNICĂ O. STĂNĂSILĂ - *A structure theorem for the analytic coherent sheaves*. Boll. U. M. I. (4) n. 6, pag. 615-621 (1969).
- [4] C. BĂNICĂ O. STĂNĂSILĂ - *Problème de Poincaré pour un espace de Stein*. Ren. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, Vol. XLVII pag. 25-26 (1969).
- [5] O. FORSTER - *Primärzerlegung in Steinschen Algebren*. Math. Annalen 154 pag. 307-329 (1964).
- [6] R. NARASIMHAN - *Introduction to the theory of Analytic spaces*. Lecture notes 25. Springer 1966.
- [7] G. TOMASSINI - *Involuppo d'olomorfia e spazi pseudoconcavi*. Annali di Matematica pura ed applicata (IV) Vol. LXXXVII pag. 59-86.
- [8] Y. SIU G. TRAUTMANN - *Gap sheaves and extension of coherent analytic subsheaves*. Lect. Notes. in Math. 172 (1972).