ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FABRIZIO CATANESE

Un teorema di dualita' per i fasci coerenti su uno spazio analitico reale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 4 (1973), p. 845-871

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_845_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN TEOREMA DI DUALITA' PER I FASCI COERENTI SU UNO SPAZIO ANALITICO REALE (*)

di FABRIZIO CATANESE

Introduzione.

Grothendieck ed H. Grauert hanno introdotto una dualità fra la categoria dei fasci coerenti su uno spazio analitico complesso X e la categoria dei fibrati vettoriali su X (non necessariamente localmente banali).

Tale dualità è stata chiarita e perfezionata dai lavori di G. Fischer e D. Prill.

Scopo di questo lavoro è provare che la medesima dualità si ritrova nel caso in cui X sia uno spazio analitico reale coerente.

In particolare si trova un metodo particolarmente semplice di complessificare i fibrati vettoriali non localmente banali.

Nella presente esposizione si sono riportati molti fatti già noti per non obbligare il lettore a continui riferimenti.

0. Generalità.

Indicheremo in seguito con $\mathbb{k}$ un corpo che può essere $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

DEF. 0.1. Si dirà modello locale di spazio analitico, o più brevemente modello locale, una coppia $(\Omega, \mathcal{J})$ costituita da un aperto $\Omega \subset \mathbb{k}^n$, e un fascio coerente di ideali $\mathcal{J}$ del fascio $\mathcal{O}_\Omega$ delle funzioni analitiche in Ω.

Ogni modello locale determina un sottoinsieme analitico V di Ω, $V = \operatorname{supp}. \mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}]$. Se $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}|_V$, e $\mathcal{C}_V$ è il fascio dei germi di funzioni continue su V, esiste un omomorfismo canonico: $\varepsilon : \mathcal{O}_V \to \mathcal{C}_V$ che associa ad

---

Pervenuto alla Redazione il 27 Febbraio 1973.

(*) Lavoro eseguito come perfezionando della Scuola Normale Superiore.

ogni sezione la funzione continua che vale in ogni punto y il residuo del germe modulo l'ideale massimo di $\mathcal{O}_{V,y}$.

DEF. 0.2. Un modello si dice ridotto se ε è iniettivo. Si consideri che $\operatorname{Ker}\varepsilon$ è l'immagine, nel quoziente mod $\mathcal{J}$, del fascio $\mathcal{J}'_V$ di tutti i germi nulli su V, per cui è equivalente richiedere $\operatorname{Ker}\varepsilon = 0$ oppure $\mathcal{J} = \mathcal{J}'_V$.

PROP. 0,1. Un modello è ridotto solo se per ogni $x \in V$ $\mathcal{O}_{V,x}$ non contiene elementi nilpotenti. La condizione è sufficiente per $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, non per $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

DIM. Infatti se V è ridotto, considerando che $\mathcal{C}_{V,x}$ è senza nilpotenti: se g è nilpotente, $\varepsilon(g^k) = 0$, $= (\varepsilon(g))^k = 0 \Longrightarrow \varepsilon(g) = 0 \Longrightarrow g = 0$. Sia ora $\mathbb{k} = \mathbb{C}$: se g è un germe di $\mathcal{O}_x$ nullo su V, $g \in \mathcal{J}_x$, infatti il Nullstellensatz analitico dice che $g^k \in \mathcal{J}_x$, ma $\mathcal{O}_{V,x} = \mathcal{O}_x/\mathcal{J}_x$ è senza nilpotenti, e quindi $k = 1$.

Poniamo $\mathbb{k} = \mathbb{R}$: si consideri il cono $z(x^2 + y^2) - x^3 = 0$: in un punto $(0, 0, z)$ $z \neq 0x$ è un germe $\in \mathcal{J}'_V$, ma ovviamente $x \notin \mathcal{J}$ (se no il suo grado in x, y sarebbe almeno 2), quindi V non è ridotto. Dimostriamo che $\mathcal{O}_V$ non ha nilpotenti: se $x \neq 0$, o $y \neq 0$ allora V è una sottovarietà, inoltre si verifica che nei punti $(0, 0, z) = x_z$, $z(x^2 + y^2) - x^3$ è un elemento irriducibile di $\mathcal{O}_{x_z}$, quindi se g^k è divisibile per $z(x^2 + y^2) - x^3$ lo è anche g.

PROP. 0.2. Se V è un modello locale, $\mathcal{O}_V$ è un fascio coerente di anelli.

DIM. $\mathcal{O}_V$ è generato dalla sezione 1. Sia f un omomorfismo $f: \mathcal{O}^p_{V'} \to \mathcal{O}_{V'}$, con $V' = V \cap U$, U ap. in Ω. Per ogni $y \in V'$ esiste un intorno U_y tale che le $f_i = f(e_i)$, ristrette a $V'' = U_y \cap V$, provengono da $g_1, \dots, g_p$ sezioni di $\mathcal{O}(U_y)$. Sia $\eta^p: \mathcal{O}^p_\Omega \to \mathcal{O}^p_V$ il passaggio al quoziente, allora se $\mathcal{R} = \operatorname{Ker} f$, $(\eta^p)^{-1}\mathcal{R}|_{U_y} = \left\{(l_1, \dots, l_p)\, l_i \text{ germi tali che } \sum_{i=1}^p l_i g_i \in \mathcal{J}_V\right\}$. Ci basta vedere che $(\eta^p)^{-1}\mathcal{R}$ è di tipo finito su $\mathcal{O}_\Omega$, perché allora, essendo η^p surgettivo, si avrà che $\mathcal{R} = \eta^p((\eta^p)^{-1}(\mathcal{R}))$ sarà di tipo finito su $\mathcal{O}_V = \eta(\mathcal{O}_\Omega)$. Ma in un intorno opportuno di y, $\mathcal{J}_V$ è finitamente generato, da $h_1, \dots, h_r$, perciò se $l_1, \dots, l_p \in (\eta^p)^{-1}(\mathcal{R})$, esistono $\mu_1, \dots, \mu_r$ tali che $\sum_{i=1}^p l_i g_i + \sum_{i=1}^r \mu_i h_i = 0$, ma il fascio delle relazioni delle g_i e h_i è di tipo finito su $\mathcal{O}_\Omega$, a fortiori dunque lo sarà $(\eta^p)^{-1}(\mathcal{R})$.

OSS. 1. La condizione non è vuota, se $\mathcal{J} =$ l'ideale dei germi nulli sul sottoinsieme definito da $p = z(x^2 + y^2) - x^3$, $\mathcal{R}(x, y)$ non è di tipo finito

nell'origine, poiché se f, g sono sezioni di $\mathcal{R}(x, y)$ su un intorno dell'origine, $\bar{f} \in \eta^{-1}(f)$, $\bar{g} \in \eta^{-1}(g)$, su un intorno più piccolo saranno sviluppabili in serie, e qui si avrà $\alpha = x\bar{f} + y\bar{g} = hp$ (per quanto già visto). La morale è che $\bar{f}$ e $\bar{g}$ sono divisibili per x o per y per cui nei punti $(0, 0, z)$ f e g sono nulle, mentre poiché x ed $y \in \mathcal{J}$, il fascio delle relazioni è in questi punti tutto $\mathcal{O}_V^2$.

Oss. 2. Si può avere un fascio $\mathcal{J}$ di ideali non coerente, tale che però $\mathcal{H} = \mathcal{O}/\mathcal{J}$ sia coerente su sé stesso, per cui la definizione di coerenza sarà invariante se si richiederà per $\mathcal{H}$ come $\mathcal{O}$-modulo. Per vederlo si consideri il fascio $\mathcal{J}$ di ideali nullo nell'origine ed uguale ad $\mathcal{O}_x$ per $x \neq 0$: non è di tipo finito nell'origine perché delle sezioni di $\mathcal{J}$ su un intorno dello zero sono identicamente nulle e non possono generare $\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_x$ per $x \neq 0$. $\mathcal{H}$ è l'anello delle serie convergenti in una variabile concentrato nella origine, ed è coerente su sé stesso essendo $\mathbb{k}\{x\}$ noetheriano.

Def. 0.3. Un $\mathbb{k}$-spazio anulato sarà uno spazio topologico X munito di un fascio $\mathcal{O}_X$ di $\mathbb{k}$-algebre locali unitarie tale che per ogni $x \in X$ $\mathcal{O}_x/\mathcal{M}_x \sim \mathbb{k}$.

Def. 0.4. Un morfismo di spazi anulati $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sarà costituito da una applicazione continua $f: X \to Y$ e un omomorfismo di fasci di $\mathbb{k}$-algebre $f^{(1)}: f^*(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$.

Def. 0.5. Uno spazio $\mathbb{k}$-analitico sarà uno spazio $\mathbb{k}$-anulato $(X, \mathcal{O}_X)$ godente della seguente proprietà: per ogni $x \in X$ esiste un aperto U_x e un isomorfismo (φ_x, φ_x^1) di $(U_x, \mathcal{O}|_{U_x})$ su un modello locale $(\Omega_x, \mathcal{J}_x, V_x)$.

Lemma 0. Se V è un modello locale in $\Omega \subset \mathbb{k}^n$ e $O \in V$, $\mathcal{M}_{V,0}$ è l'ideale massimo di $\mathcal{O}_{V,0}$, $s = \dim \mathcal{M}_{V,0}/(\mathcal{M}_{V,0})^2$, come spazio vettoriale su $\mathbb{k}$, esiste un isomorfismo di un intorno di O su un modello locale $(\Omega', \mathcal{J}')$, con $\Omega' \subset \mathbb{k}^s$.

Dim. Esistono, per la coerenza di $\mathcal{J}$, un intorno U di O in $\mathbb{k}^n$ e $f_1, \dots, f_t$ analitiche su U che generano $\mathcal{J}$ su U, inoltre siano $g_1, \dots, g_s$ funzioni lineari tali che $\eta(g_1), \dots, \eta(g_s)$ siano una base di $\mathcal{M}_{V,0}/(\mathcal{M}_{V,0})^2 = \mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2 + \mathcal{J}_0$. Si vede immediatamente che se $F_1, \dots, F_t$ sono le parti lineari delle f_i, allora $F_1, \dots, F_t$ hanno rango $n - s$, quindi si può supporre che $g_1, \dots, g_s$, $F_1, \dots, F_{n-s}$ abbiano rango n. Ciò detto, in un intorno di 0, $\Phi = (g_1, \dots, g_s, f_1, \dots, f_{n-s})$ è un isomorfismo: $\mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$, per il teorema del Dini, e lo è anche $\Phi|_V \to \Phi(V)$, ($\Phi(V)$ definito da $f_i \circ \Phi^{-1} = 0$). Se

ψ è la proiezione delle prime s coordinate $\psi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^s$, e V' è definito in $\mathbb{K}^s$ da $f_j \circ \Phi^{-1} \circ i$, $j = n - s + 1, \dots, t$, con $i: \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^n$, $i(z_1, \dots, z_s) = (z_1, \dots, z_s, 0 \dots 0)$, ψ è dunque un isomorfismo: $\Phi(V) \xrightarrow{\psi} V'$, in un intorno dello zero.

DEF. 0.6. Un modello è detto speciale se $\mathcal{J}$ è generato da un numero finito di funzioni analitiche su Ω, un modello è di Zariski per $y \in V$ se $\Omega \subset \mathbb{K}^s$, e $s = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{V,y}/\mathcal{M}^2_{V,y}$.

Citiamo, poiché ci sarà di grande utilità in seguito, il seguente

TEOREMA DI KRULL. Sia A un anello locale Noetheriano, E un modulo finito su A, allora:

a) La topologia $\mathcal{M}$-adica di E è separata,

b) ogni sottomodulo F di E è chiuso in E per tale topologia,

c) la topologia indotta da E su un sottomodulo F è la topologia $\mathcal{M}$ adica di F.

DEF. 0.7. $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio (sottinteso: analitico) complesso di Stein se:

1) $(X, \mathcal{O}_X)$ è olomorficamente convesso, cioè, dato un compatto $K \subset X$, l'inviluppo olomorfo di K, $\widehat{K}$, $\widehat{K} = \{x \in X \mid \text{per ogni } f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \ |\varepsilon(f(x))| \leq \sup_{y \in K} |\varepsilon(f(y))|\}$, è compatto.

2) Per ogni $x \in X$, esistono sezioni $f_1, \dots, f_s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tali che associando ad esse il morfismo canonico $(f, f^{(1)})$ di X in $\mathbb{C}^s$, x è un punto isolato dell'insieme $f^{-1}(0)$.

Cartan e Serre hanno dimostrato i due seguenti teoremi per un fascio $\mathcal{F}\mathcal{O}_X$-coerente su uno spazio di Stein X:

A) Per ogni $x \in X$, $\Gamma(X, \mathcal{F})$ genera $\mathcal{F}_x$ sopra $\mathcal{O}_{X,x}$.

B) Se $p \geq 1$, $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$.

In realtà si può dimostrare che la condizione *B*) caratterizza completamente gli spazi di Stein.

Una facile conseguenza del Teorema *B* è la seguente:

PROP. 0.3. Se A è un sottoinsieme analitico di uno spazio di Stein X, definito dal fascio di ideali $\mathcal{J}$ di $\mathcal{O}_x$, allora l'omomorfismo $i^{(1)}: \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(A, \mathcal{O}_A)$ è surgettivo.

LEMMA I: Se $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ sono due fasci $\mathcal{O}_X|_A$ coerenti su un chiuso A di uno spazio analitico X, e f, g omomorfismi di $\mathcal{O}_X|_A$-moduli: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, allora $\{x \in A \mid f_x = g_x\}$ è aperto in A.

LEMMA II: Se $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ sono fasci analitici coerenti (i. e. $\mathcal{O}_X$-coerenti) su uno spazio analitico X paracompatto (cioè a base numerabile), A è un chiuso di X e $f: \mathcal{F}|_A \to \mathcal{F}'|_A$ un omomorfismo analitico (i. e. di $\mathcal{O}_X|_A$-moduli): esiste un aperto $V \supset A$ e un omomorfismo analitico $g: \mathcal{F}|_V \to \mathcal{F}'|_V$ che prolunga f.

LEMMA III: Se A è un chiuso di uno spazio analitico paracompatto X, e $\mathcal{G}$ un fascio coerente di $\mathcal{O}_X|_A$-moduli, su A, esiste un aperto $U \supset A$ e un fascio $\mathcal{F}\mathcal{O}_X|_U$-coerente, su U, che induce $\mathcal{G}$ su A.

Per la dimostrazione di questi lemmi rimandiamo a Cartan (2).

DEF. 0.8. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio analitico reale, uno spazio complesso $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ si dirà complessificato di $(X, \mathcal{O}_X)$ se esistono:

1) un omeomorfismo $i: X \to \tilde{X}$ di X con la propria immagine $i(X)$, tale che $i(X)$ sia un chiuso di $\tilde{X}$.

2) un isomorfismo $\eta: i^*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \to \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Seguendo un procedimento standard introdotto da Bruhat-Whitney (1), si può dimostrare (noi non lo faremo perché la cosa è nota) il seguente

TEOREMA: Ogni spazio analitico reale paracompatto X ammette un complessificato. Di più, se $\tilde{X}_a$, $\tilde{X}_b$ sono due complessificazioni (con immersioni i_A, i_B, e poniamo $X_b = i_b(X)$, $X_a = i_a(X)$, e siano η_a, η_b gli isomorfismi di fasci) esiste un isomorfismo f_{ab} di un intorno A aperto di X_a su un aperto $B \supset X_b$, tale che $f_{ab}|_{X_a} = i_b \circ i_a^{-1}$, e $f_{ab}^{(1)}$, ristretto a $f_{ab}(\mathcal{O}_{\tilde{X}_b}|_{X_b})$, sia uguale a $(\eta_a)^{-1}(i_a^*)^{-1}\eta_b\, i_a^*$.

PROP. 0.4. Uno spazio analitico reale X ridotto che possieda complessificazioni ammette un complessificato $\tilde{X}$ ridotto.

DIM. Se $\tilde{X}_0$ è una complessificazione di X, supponendo $X \subset \tilde{X}_0$, sia $\mathcal{H}$ il fascio dei germi identicamente nulli, ovvero il nucleo dell'omomorfismo $\varepsilon: \mathcal{O}_{\tilde{X}_0} \to \mathcal{C}_{\tilde{X}_0}(\mathbb{C})$ (associa ad un germe il suo valore, cioè il residuo modulo $\mathcal{M}_x$). Poiché $\varepsilon: \mathcal{O}_X \to \mathcal{C}_X(\mathbb{R})$ è iniettiva, tensorizzando col fascio costante $\mathbb{C}$ si ha $\varepsilon: \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}|_X \to \mathcal{C}_{\tilde{X}_0}(\mathbb{C})|_X$ ancora iniettivo, cioè su X l'omomorfismo

$\mathcal{O}_{\tilde{X}_0} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}/\mathcal{H}$ è un isomorfismo, ma per il teorema di Oka-Cartan $\mathcal{O}_{\tilde{X}_0}/\mathcal{H}$ è $\mathcal{O}_{\tilde{X}_0}$-coerente, quindi φ è un isomorfismo su di un aperto contenente X, che sarà la complessificazione $\tilde{X}$ richiesta.

PROP. 0.5. Se $\tilde{A}$ è un sottoinsieme analitico di $\tilde{X}$, complessificazione di X, supposto contenuto in $\tilde{X}$, e $\tilde{A} \cap X$ è un aperto di X contenente x, allora $\tilde{A}$ contiene un aperto di $\tilde{X}$ a cui appartiene il punto x.

DIM. Se $A = \tilde{A} \cap X$ contiene un intorno di x in X, diciamo U, ciò significa che $\mathcal{J}_A|_U = 0$, quindi a fortiori si ha $\tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{A}}|_U = 0$. Allora per la coerenza di $\tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{A}}$, $\tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{A}}$ è nullo su un aperto $\tilde{U} \ni x$.

TEOREMA. Uno spazio analitico reale paracompatto X ha un sistema fondamentale di intorni aperti di Stein in una sua qualsiasi complessificazione $\tilde{X}$ fissata.

Se ora $\tilde{X}' \supset X$ è una complessificazione di X, $\mathcal{F}$ è un fascio $\mathcal{O}_X$-coerente su X, $\mathcal{F} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ è $\mathcal{O}_X \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$-coerente, ed è quindi indotto (lemma III) da da un fascio $\tilde{\mathcal{F}}$ definito su un aperto $\tilde{X} \supset X$, e $\tilde{\mathcal{F}}$ è $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-coerente. $\tilde{\mathcal{F}}$ si dirà un fascio complessificato del fascio $\mathcal{F}$, e il lemma II chiarisce in che senso è unico, cioè che se $\tilde{\mathcal{F}}_1$ è un complessificato di $\mathcal{F}$ su $\tilde{X}_1 \subset \tilde{X}'$, esiste un aperto A contenente X su cui $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_1$ sono isomorfi.

Ora si ha che $H^q(X, \mathcal{F} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}) = H^q(X, \mathcal{F}) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$, ma $H^q(X, \mathcal{F} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}) = H^q(X, \tilde{\mathcal{F}}) = \varinjlim H^q(U, \tilde{\mathcal{F}})$, e siccome si possono prendere gli U di Stein, $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per $q \geq 1$ e si ha il

TEOREMA B. Se X è uno spazio analitico reale paracompatto e $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su X, $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per $q \geq 1$. Se prendiamo $q = 0$, si ha che $\mathcal{F}_x \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ è generato da $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ per U di Stein, quindi sicuramente da $\Gamma(X, \mathcal{F} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C})$.

TEOREMA A. Nelle stesse ipotesi del teorema B, $\mathcal{F}_x$ è generato da $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

DIM. Se $\mathcal{F}_x \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ è generato dalle $\mu_1, \dots, \mu_n \in \Gamma(X, \mathcal{F} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}, \mu_j = M_j + i N_j, M_j, N_j, \in \Gamma(X, \mathcal{F}))$, $\mathcal{F}_x$ è ovviamente generato dalle M_j, N_j.

1. Fibrati lineari analitici secondo Fischer.

DEF. 1.1. Un fibrato lineare analitico sullo spazio analitico X consiste di un fibrato analitico (L, λ) sopra X e di tre morfismi $+, \cdot, 0$ di fibrati analitici sopra X, addizione, moltiplicazione, sezione nulla

$$+ : L \times_X L \to L, \cdot : \mathbb{K} \times L \to L, 0 : X \to L,$$

che soddisfino a degli assiomi tipo spazio vettoriale, cioè tali che (se $*$ denota x_X, il prodotto fibrato di spazi e morfismi sopra X) commutino i seguenti diagrammi:

1) Associatività della addizione:

$$\begin{tikzcd} L * L * L \arrow[r, "id * +"] \arrow[d, "+ * id"] & L * L \arrow[d, "+"] \\ L * L \arrow[r, "+"] & L \end{tikzcd}$$

2) Commutatività della addizione:

$$\begin{tikzcd} L * L \arrow[rr, "\Xi"] \arrow[dr, "+"'] & & L * L \arrow[dl, "+"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

dove Ξ è lo scambio delle coordinate.

3) Elemento neutro per l'addizione:

Notiamo che $\pi_1 : L * X \to L$ è un isomorfismo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi_1^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "id"'] & L * X \arrow[r, "id * 0"] & L * L \arrow[r, "+"] & L \end{tikzcd}$$

deve allora commutare.

4) Associatività della moltiplicazione:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times L \arrow[r, "\cdot \times id"] \arrow[d, "id \times \cdot"] & \mathbb{K} \times L \arrow[d, "\cdot"] \\ \mathbb{K} \times L \arrow[r, "\cdot"] & L \end{tikzcd}$$

5) Distributività destra e sinistra: si ha un isomorfismo canonico $\varphi: \mathbb{k} \times L * L \longrightarrow (\mathbb{k} \times L) \times_{\mathbb{k} \times X} (\mathbb{k} \times L)$, e a quest'ultimo prodotto fibrato si può restringere $(\cdot * \cdot)$, chiamandola $(\cdot \times_{\mathbb{k} \times X} \cdot)$. Si ha pure un isomorfismo canonico $\psi: \mathbb{k} \times \mathbb{k} \times L \longrightarrow (\mathbb{k} \times L) \times_L (\mathbb{k} \times L)$, a cui si può restsingere $(\cdot * \cdot)$, chiamandola $(\cdot \times_L \cdot)$. Si vuole dunque la

Distributività destra:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{k} \times L * L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "id \times +"'] & (\mathbb{k} \times L) \times_{\mathbb{k} \times X} (\mathbb{k} \times L) \arrow[d, "(\cdot \times_{\mathbb{k} \times X} \cdot)"] \\
\mathbb{k} \times L \arrow[r] & L & L * L \arrow[l, "+"']
\end{tikzcd}$$

distributività sinistra:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{k} \times \mathbb{k} \times L \arrow[rr, "+ \times id"] \arrow[d, "\psi"'] & & \mathbb{k} \times L \arrow[d, "\cdot"] \\
(\mathbb{k} \times L) \times_L (\mathbb{k} \times L) \arrow[r, "(\cdot \times_L \cdot)"'] & L * L \arrow[r, "+"'] & L
\end{tikzcd}$$

PROP. 1.1. O è un isomorfismo di X sul sottoinsieme analitico $O(X)$ di L.

DIM. Chiamiamo $M_c: L \longrightarrow L$, per ogni $c \in \mathbb{k}$, il morfismo composto di $i: L \longrightarrow \{c\} \times L$ e $\cdot|_{\{c\} \times L}: \{c\} \times L \longrightarrow L$, ovvero la moltiplicazione per una costante c fissa. Nel prodotto fibrato $L * L$, la diagonale Δ è $L \times_L L$, dunque un sottoinsieme analitico di $L * L$. Si vede facilmente che $O(X)$ è l'immagine inversa di Δ nel morfismo $L \xrightarrow{M_1 * M_0} L * L$, quindi è un sottoinsieme analitico. Inoltre O è un morfismo di fibrati su X, perciò $\lambda \circ O =$ identità.

OSS. Se prendiamo un punto $p \in X$ e consideriamo $L_p = \lambda^{-1}(p)$, L_p è uno spazio analitico con struttura di spazio vettoriale (con operazioni analitiche $+_p: L_p \times L_p \longrightarrow L_p$, $\cdot_p: \mathbb{k} \times L_p \longrightarrow L_p$ ed il punto O_p). Si vede facilmente (tramite traslazioni ed omotetie) che in ogni punto si hanno anelli locali del fascio di struttura isomorfi, allora sapendo che per il Teorema di Cartier uno schema di gruppo in caratteristica zero è ridotto, si deduce che L_p è una varietà e attraverso una base di L_p come spazio

vettoriale si costruisce un isomorfismo, di spazi analitici e vettoriali, di L_p con $\mathbb{k}^{n(p)}$, $n(p) = \dim\limits_{\mathbb{k}} L_p$.

DEF. 1.2. Un morfismo ξ di fibrati sullo spazio analitico X, $\xi : L \to L'$, con L ed L' fibrati lineari, si dice morfismo di fibrati lineari (o morfismo lineare) se è compatibile con addizione e prodotto, cioè commutino i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd} L * L \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\xi * \xi"'] & L \arrow[d] \\ L' * L' \arrow[r, "+'"] & L' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{k} \times L \arrow[r, "(\cdot)"] \arrow[d, "id \times \zeta"] & L \arrow[d, "\xi"'] \\ \mathbb{k} \times L' \arrow[r, "(\cdot)'"] & L' \end{tikzcd}$$

Analogamente $L \subset L'$ è un sottofibrato lineare di L' quando $i : L \to L'$ è un morfismo di fibrati lineari.

OSSERVAZIONE (importante). Si può notare che se p è un punto di X, $\xi_p = \xi \mid L_p : L_p \to L'_p$ è un omomorfismo di spazi vettoriali se $\xi : L \to L'$ è un morfismo di fibrati lineari L, L' sopra X, ma che questa condizione non è sufficiente, se non sono L ed L' ridotti, perché un morfismo sia un morfismo lineare.

Infatti prendiamo come spazio base X il modello in $\mathbb{k}$ determinato da x^2 (il cosiddetto punto doppio), $L = X \times \mathbb{k}$ e $\xi : X \times \mathbb{k} \to X \times \mathbb{k}$, $\xi = (\xi, \xi^{(1)})$ tale che $\xi^{(1)}(x) = (x)$ e $\xi^{(1)}(s) = s + x s^2$, dove s è la coordinata in $\mathbb{k}$. Ora ξ_0 è il morfismo identico di $\mathbb{k}$ in $\mathbb{k}$ (in quanto $\lambda^{-1}(0)$ ha per fascio $\mathcal{O}\{x, s\}/\mathcal{G}(x^2)/\mathcal{G}(x) = \mathcal{O}_{\{s\}}$), ξ è un morfismo di fibrati perché $\lambda^{(1)}(x) = x = \xi^{(1)} \lambda^{(1)}(x)$.

Ma consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbb{k} \times \mathbb{k} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\xi * \xi"'] & X \times \mathbb{k} \arrow[d] \\ X \times \mathbb{k} \times \mathbb{k} \arrow[r, "+"] & X \times \mathbb{k}. \end{tikzcd}$$

Non si ha commutatività perché $+^{(1)} \xi^{(1)}(s) = +^{(1)}(s + x s^2) = z + t + x(z + t)^2$, dove (x, z, t) sono coordinate in $X \times \mathbb{k} \times \mathbb{k}$, (x, s) in $\mathbb{k} \times \mathbb{k}$, mentre $(\xi * \xi)^{(1)} +^{(1)} s = (\xi * \xi)^{(1)}(z + t) = z + t + xz^2 + x t^2$.

PROP. 2.2. Se L è un fibrato lineare sopra lo spazio analitico X, se L è ridotto si ha che X è ridotto, mentre non vale il viceversa.

DIM. Diamo subito il controesempio: se $X = \{(x, y) \in \mathbb{k}^2 \mid xy = 0\}$, il suo fibrato tangente è $T(X) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{k}^4 \mid xy = 0,\ yt + xz = 0\}$.

Ora X è, tranne che nell'origine, una varietà, inoltre se $f \in \mathbb{k}\{x, y\}$ e $f|_X = 0$, f è divisibibile per xy; $T(X)$ al contrario non è ridotto, perché xz non è una sezione nulla su $T(X)$, ma, considerandone il valore, è nullo se $x = 0$, se poi $x \neq 0$ si ha $y = 0 \Longrightarrow yt = 0 \Longrightarrow xz = 0$.

Supponiamo $f \in \mathcal{O}_X$ identicamente nulla come valori: $f \circ \lambda$ è dunque a valori nulli essa pure, quindi è una sezione nulla essendo L ridotto, ragion per cui $0^{(1)}\, 0^*(f \circ \lambda) = \lambda = 0$, come si voleva dimostrare.

Se è data una trasformazione analitica $\tau : Y \longrightarrow X$ e un fibrato lineare (L, λ) sopra X, il prodotto fibrato $Y \times_X L$ fatto secondo le due applicazioni τ, λ, si indicherà con $\tau^{-1}(L)$ e si dirà il fibrato (su Y, con proiezione $\pi_1|_{Y \times_X L}$) immagine inversa di L. Infatti ($*$ denota come al solito $\times_X$) è definita $id * +$ su $Y * (L * L)$, che è però canonicamente isomorfo a $(Y * L) \times_Y (Y * L)$, così pure $id * \cdot$ è definita su $Y * (\mathbb{k} \times L)$, anche esso canonicamente isomorfo a $\mathbb{k} * (Y * L)$, mentre la sezione nulla $O : Y \longrightarrow Y * L$ è la applicazione $id * (O_X \circ \tau)$; omettiamo la facile verifica che queste operazioni danno una struttura di fibrato lineare a $\tau^{-1}(L)$.

In seguito, quando avremo investigato più a fondo la struttura locale dei fibrati linearl, questa operazione funtoriale sarà descritta in maniera più esplicita e semplice.

Una altra operazione molto interessante è la somma diretta $Y \oplus L$ di due fibrati lineari (Y, ν), (L, λ) sopra uno stesso spazio analitico X. $Y \oplus L$ non è altro che il prodotto fibrato $Y * L$, con proiezione $\nu * \lambda$, e somma $+_Y * +_L$, considerando che $(Y * Y) * (L * L) \backsim (Y * L) * (Y * L)$, con sezione nulla $O_Y * O_L$ e moltiplicazione $\cdot = (\cdot Y * \cdot L) \cdot \mu$, dove $\mu : \mathbb{k} \times (Y * L) \longrightarrow (\mathbb{k} \times Y) * (\mathbb{k} \times L)$ è la composta di $id_{\mathbb{k}} \times id_{\mathbb{k}} \times id_{Y * L}$ per l'isomorfismo canonico fra $(\mathbb{k} \times Y) * (\mathbb{k} \times L)$ e $\mathbb{k} \times \mathbb{k} \times (Y * L)$. Omettiamo anche qui le verifiche, solo tediose, della commutatività dei vari diagrammi: notiamo che questa operazione può servire per decomporre un fibrato lineare.

2. Rappresentabilità di ogni fibrato lineare.

DEF. 2.1. Un fibrato lineare L sopra uno spazio X si dice rappresentabile se per ogni punto x di X esiste un intorno U di x tale che $L_U = \lambda^{-1}(U)$ sia isomorfo ad un sottofibrato lineare di un fibrato prodotto $U \times \mathbb{k}^n$.

DEF. 2.2. Sia L come sopra: diremo che L è un fibrato lineare localmente banale (F. L. L. B.) se per ogni punto x di X esiste un intorno U tale che L_U sia isomorfo ad un fibrato prodotto $U \times \mathbb{k}^n$.

Notiamo che di qui in avanti $B(a, b, \mathbb{k})$ indicherà la palla in $\mathbb{k}$ di centro a e di raggio b, $B(a, b, \mathbb{k}) = \{x \in \mathbb{k} \mid |\times - a| \leq b\}$.

DEF. 2.3. Sia V un modello speciale in un policilindro Ω di centro l'origine in $\mathbb{k}^n$ e siano $k_1, \dots, k_n$ interi positivi; V si dice cono generalizzato (di pesi $k_1, \dots, k_n$) di vertice l'origine se $M(c, z): B(0, 1, \mathbb{k}) \times \Omega \to \Omega$, $M(c, z) = (z_1 c^{k_1}, \dots, z_n c^{k_n})$, ristretta a $B(0, 1, \mathbb{k}) \times V \to \Omega$ sia fattorizzabile in $M': B(0, 1, \mathbb{k}) \times V \to V \xrightarrow{i} \Omega$.

LEMMA 1. Un cono generalizzato V di vertice l'origine e pesi $k_1, \dots, k_n$ è definito intorno all'origine da funzioni $(k_1, \dots, k_n)$ omogenee, ovvero funzioni del tipo $f = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha$, con $f_\alpha \in \mathbb{k}$, $f_\alpha \neq 0$ solo per i multiindici α tali che $\sum_{i=1}^n \alpha_i k_i$ è un intero positivo m fissato, che si dirà l'ordine di omogeneità di f.

DIM. Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ funzioni che definiscono V e $\pi_2: B(0, 1, \mathbb{k}) \times \times V \to V$ la seconda proiezione; se $f = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha$, $f_\alpha \in \mathbb{k}$, è un germe in 0 che appartiene a $\mathcal{J}_0 = \mathcal{G}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$, poiché $M: B(0, 1, \mathbb{k}), \times V \to V$, si ha che $M^{(1)} M^* f \in \mathcal{J}_{M_0}$, $\mathcal{J}_{M_0} = \mathcal{G}(\pi_2^*(\varphi_1), \dots, \pi_2^*(\varphi_r))$. Cioè esistono $g_1, \dots, g_r \in \mathcal{O}_0$ tali che $\sum f_\alpha z^\alpha c^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_i} = \sum_{h=1}^r g_h \varphi_h$, dove abbiamo identificato φ_n con $\pi_2^*(\varphi_n)$. Scrivendo ogni germe $g_h = \sum_{r=0}^\infty g_h^r c^r$, $g_h^r \in \mathcal{O}_{\Omega, 0}$, otteniamo la seguente uguaglianza $\left(A_\nu = \left\{\alpha \,\middle|\, \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i = \nu\right\}\right): \sum_{\nu=0}^\infty c^\nu \left(\sum_{\alpha \in A_\nu} f_\alpha z^\alpha - \sum_{h=1}^r g_h^\nu \varphi_h\right) = 0$.

Fissando z, otteniamo una serie in c identicamente nulla, quindi ogni coefficiente è nullo, il che ci dice che per ogni ν $\sum_{\alpha \in A_\nu} f_\alpha z^\alpha - \sum_{h=1}^r g_h^\nu \varphi_h = 0$, cioè $f_\nu = \sum_{\alpha \in A_\nu} f_\alpha z^\alpha \in \mathcal{J}_0$.

Abbiamo così visto che se $f \in \mathcal{J}_0$ allora le sue componenti (k)-omogenee f_ν appartengono ad $\mathcal{J}_0$, quindi se $\widehat{\mathcal{J}}_0$ è l'ideale in $\mathcal{O}_0$ generato da $\{f_\nu \mid f \in \mathcal{J}_0, \nu \in \mathbb{N}\}$, $\widehat{\mathcal{J}}_0 \subset \mathcal{J}_0$ e $\widehat{\mathcal{J}}_0$, per la Noetherianità di $\mathcal{O}_0$, è generato da un numero finito di funzioni (k)-omogenee $h_1, \dots, h_\mu$. Ma $\mathcal{J}_0$ è la chiusura di $\widehat{\mathcal{J}}_0$ nella topologia $\mathcal{M}$-adica, e il teorema di Krull dice che gli ideali sono chiusi in

tale topologia, quindi $\mathcal{J}_0 = \mathcal{G}(h_1, \dots, h_\mu)$. Ne segue che in un intorno dell'origine, U, $\varphi_i = \sum_{j=1}^{M} \xi_j^i \, h_j$, e così su U, $U \cap V$ è definito dalle $h_1, \dots, h_\mu$.

Il prossimo lemma è valido solo per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ma indirettamente sarà utile anche per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

LEMMA 2. Sia V un modello speciale in $\Omega \subset \mathbb{C}^t$, contenente l'origine e di Zariski per l'origine, $M: B(0, 1, \mathbb{C}) \times V \to V$ sia una applicazione analitica godente delle proprietà di essere moltiplicativa (cioè $M(c \cdot c', x) = M(c, M(c', x))$) e di avere O come punto fisso per ogni moltiplicazione $M_c: V \to V$, $M_c = M \circ i_c$, i_c essendo l'isomorfismo di V in $\{c\} \times V$. Si può supporre, restringendo eventualmente Ω, che $i \circ M$ provenga da una funzione $M'(c, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c^\nu a_\nu(x)$, $M': B(0, 1, \mathbb{C}) \times \Omega \to \Omega$, tale che su $B(0, 1, \mathbb{C}) \times \Omega$ sia sviluppabile in una serie che converga uniformemente; inoltre, essendo 0 punto fisso per ogni M_c, si avrà che $a_\nu(0) = 0$ per ogni ν.

In tali ipotesi esiste un isomorfismo τ di un intorno U di 0 in V, su $\tau(U)$, un altro modello speciale contenente l'origine e di Zariski per essa, in maniera che $\tau \circ M_c = d(M_c)_{(0)} \circ \tau$ per ogni $c \in B(0, 1, \mathbb{C})$. Inoltre, se le $a_\nu(x)$ sono serie a coefficienti reali, allora anche τ è una serie a coefficienti reali.

DIM. Prendiamo

$$\tau'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (dM_{(e^{2\pi i\vartheta})})_{(0)}^{-1} \circ M_{(e^{2\pi i\vartheta})}(x) \, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (dM_{(e^{-2\pi i\vartheta})})_{(0)} \, M_{(e^{2\pi i\vartheta})}(x) \, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-2\pi i\vartheta\nu} (da_\nu)_{(0)} \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} e^{2\pi i\vartheta\mu} a_\mu(x) \right) d\vartheta ;$$

ma poiché le $(da_\nu)_{(0)}$ sono lineari, e le serie convergono uniformemente, si può usare una doppia distributività infinita, cioè

$$\tau'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\mu-\nu=0}^{\infty} e^{2\pi i\vartheta(\mu-\nu)} (da_\nu)_{(0)} \circ a_\mu(x) \, d\vartheta.$$

Possiamo infine, sempre per la convergenza uniforme della serie, scambiare il segno di serie con quello di integrale e con un facile calcolo si ottiene che $\tau'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (da_m)_{(0)} \circ a_m(x)$, quindi τ' è a coefficienti reali se lo sono le $a_\nu(x)$. τ' è un isomorfismo in un intorno di 0 per il teorema del Dini, in quanto $(d\tau')_{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (dM_{(e^{2\pi i\vartheta})})_{(0)}^{-1} \circ (dM_{(e^{2\pi i\vartheta})})_{(0)}\, d\vartheta =$ Identità, sia dunque $\tau = \tau'|_V$. Per mostrare che $\tau \circ M_c = (dM_c)_{(0)} \circ \tau$ per $c \in B(0, 1, \mathbb{C})$, abbiamo bisogno del seguente risultato (vedi Gunning-Rossi (8)).

TEOREMA: Se $F \in \mathcal{O}_U$, ed U è un aperto contenente lo 0, e F è approssimata uniformemente sui compatti da funzioni i cui germi all'origine stanno in un ideale $\mathcal{J}$ di $\mathcal{O}_0$, allora il germe di F in 0 sta nell'ideale $\mathcal{J}$.

Se $c = e^{2\pi i\vartheta_0}$, $\tau' \circ M = (dM_c)_{(0)} \circ \tau' + g$, $g_i \in \mathcal{J}$, $i = 1, \dots t$, perché

$$(dM_{(e^{2\pi i\vartheta_0})})_{(0)} \circ \tau' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (dM_{(e^{2\pi i\vartheta_0})})_{(0)} \circ (dM_{(e^{2\pi i\vartheta})})_{(0)}^{-1} \circ M_{(e^{2\pi i\vartheta})}\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (dM_{(e^{2\pi i(\vartheta-\vartheta_0)})})_{(0)}^{-1} \circ (M_{e^{2\pi i(\vartheta-\vartheta_0)}} \circ M_{e^{2\pi i\vartheta_0}} + f)\, d\vartheta, \text{ e per } i = 1, \dots, t,\ f_i \in \mathcal{J},$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta_0}^{2\pi-\vartheta_0} (dM_{(e^{2\pi i\varphi})})_{(0)}^{-1} \circ M_{(e^{2\pi i\varphi})}\, d\varphi \circ M_{(e^{2\pi i\vartheta_0})} + g = \tau' \circ M_{(e^{2\pi i\vartheta_0})} + g,$$

con

$$g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (dM_{(e^{2\pi i(\vartheta-\vartheta_0)})})_{(0)}^{-1} \circ f\, d\vartheta,\ g \in \mathcal{J}^t$$

perché l'integrale è limite uniforme di elementi di $\mathcal{J}^t$.

La funzione $\tau' \circ M - (d_\Omega M)_{(0)} \circ \tau' : B(0, 1, \mathbb{C}) \times \Omega \to \Omega$, è olomorfa e su $\partial B(0, 1, \mathbb{C}) \times \Omega$ appartiene a $\mathcal{J}^t$ la restrizione a $\pi_1^{-1}(\{c\})$, quindi per il teorema di Cauchy ed il precedente risultato appartiene a $(\pi_2^*(\mathcal{J}))^t$ e dunque $\tau \circ M_c = (dM_c)_{(0)} \circ \tau$.

LEMMA 3. Se L è un fibrato lineare sullo spazio X e $p' \in \mathcal{O}(X)$, p' ha un sistema fondamentale di intorni cerchiati, cioè tali che $c \cdot U' \subset U'$ per ogni $c \in B(0, 1, \mathbb{K})$.

DIM. Sia U un intorno di p', poniamo allora $U_0 = U \cap \lambda^{-1}(\lambda(0(X) \cap U))$. Per la continuità della moltiplicazione esiste $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho > 0$, tale che $B(0, \varrho, \mathbb{k}) \cdot U' \subset U_0$, per un intorno U' conveniente di p'; la relazione continua ovviamente a valere sostituendo a $U' U_0' = U' \cap \lambda^{-1}(\lambda(0(X) \cap U'))$. Infine se $U'' = \varrho U_0'$, U'' è tale che $B(0, 1, \mathbb{k}) U'' \subset U_0$, e quindi $\bar{U} = B(0, 1, \mathbb{k}) U''$ è cerchiato e contenuto in U.

Rimandiamo a Pontryagin (15) per la dimostrazione del seguente

LEMMA 4. Se M è una rappresentazione del gruppo topologico compatto $S^1 = \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$, in $\mathfrak{GL}(n, \mathbb{C})$, cioè $M(1) = Id$ e $M(c \cdot c') = M(c) \circ M(c')$, allora esiste $B \in \mathfrak{GL}(n, \mathbb{C})$ tale che per ogni c di S^1, $B \circ M(c) \circ B^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (c^{k_1} z_1, \dots, c^{k_n} z_n)$ con i k_i interi positivi per $i = 1, \dots, n$.

TEOREMA FONDAMENTALE.

Ogni fibrato lineare L sopra uno spazio analitico X (sia reale che complesso) è rappresentabile.

DIM. Se p è un punto di X, sia $p' = 0(p)$; si ha che per ogni intorno cerchiato U di p', esiste un intorno cerchiato V di p', $V \subset U$, tale che $+(V * V) \subset U$. Prendiamo ora un intorno (cerchiato: d'ora in poi lo supporremo anche senza dirlo esplicitamente) U di p' ed un isomorfismo ψ di U su un modello speciale di Zariski per p', $(\Omega, \bar{A})$, $\Omega \subset \mathbb{k}^n$, e tale che $\psi(p') = 0$. Scegliamo ora V in modo che $(1 + \varepsilon) V \subset U$, $\varepsilon > 0$, e $+(V * V) \subset U$ e sia $\psi(V) = A$. La moltiplicazione, che indicheremo con $\bar{M}: B(0, 1 + \varepsilon, \mathbb{k}) \times V \to U$ induce una moltiplicazione M', $M'(c, x) = \psi[\bar{M}(c, \psi^{-1} x)]$, $M': B(0, 1 + \varepsilon, \mathbb{k}) \times A \to \bar{A}$.

Se $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, applicando i lemmi 2 e 4 si vede che si può scegliere l'immersione nello spazio tangente di Zariski di p', $\psi: U \to \bar{A}$ in maniera che su A $M'(c, (z_1, \dots, z_n)) = (c^{k_1} z_1, \dots, c^{k_n} z_n)$. Un ragionamento che faremo in seguito ci dirà che $k_i = 1$ oppure $k_i = 0$.

Sia ora $\mathbb{k} = \mathbb{R}$: si ha che $M': B(0, 1 + \varepsilon, \mathbb{R}) \times A \to \bar{A}$ si può estendere ad una applicazione olomorfa $\tilde{M}'$ in un intorno di $B(0, 1 + \varepsilon, \mathbb{R}) \times A$ in una complessificazione standard $(B(0, 1 + \varepsilon, \mathbb{C}) \times \tilde{A}''$, $\tilde{A}''$ definito dalle funzioni $f_1, \dots, f_s$ che definiscono $\tilde{A}$); tale intorno dunque conterrà un prodotto del tipo $B(0, \varrho, \mathbb{C}) \times \tilde{A}'$, con $\tilde{A}'$ tale che $\tilde{A}' \cap \mathbb{R}^n = A'$, A' cerchiato, contenuto in A, soddisfacente alla proprietà che $M'_{1/\varrho'}(A') \subset A$, $(\varrho' < \varrho)$ e si potrà ottenere che su $B(0, \varrho, \mathbb{C}) \times \tilde{A}'$, $\tilde{M}'$ sia effettivamente una moltiplicazione $(\tilde{M}'(c \cdot c', x) = \tilde{M}'(c, \tilde{M}'(c', x)))$. Anche la applicazione

analitica $M'_{1/\varrho'} : A' \to A$ si estende ad un aperto della complessificazione, $\widetilde{A}$, che possiamo scegliere contenuto in $\widetilde{A}'$, e in modo da avere $\widetilde{M}'_{1/\varrho'}(\widetilde{A}) \subset \widetilde{A}'$, se $\widetilde{M}'_{1/\varrho'}$ è la complessificazione di $M'_{1/\varrho'}$. Siamo così in grado di definire una moltiplicazione $\widetilde{M} : B(0, 1+\varepsilon, \mathbb{C}) \times \widetilde{A} \to \widetilde{A}'$, $\widetilde{M}(c, x) = \widetilde{M}'(\varrho' c, \widetilde{M}'_{1/\varrho'}(x))$. Possiamo ovviamente supporre che $\widetilde{A}$ sia realizzato in un policilindro P (che è di Stein) di modo che $\widetilde{M}$ si possa pensare indotta da una applicazione su $B(0, 1+\varepsilon, \mathbb{C}) \times P$ sviluppabile ivi in una serie uniformemente convergente $\widetilde{M}(c, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c^\nu a_\nu(x)$. Vogliamo vedere che si possono prendere le $a_\nu(x)$ a coefficienti reali, infatti se $c \in \mathbb{R}$ e $x \in A = \widetilde{A} \cap \mathbb{R}^n$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} c^\nu$ im $a_\nu(x) \in \mathcal{J}$, perciò (è il solito ragionamento del lemma 1) im $a_\nu(x) \in \mathcal{J}$; applicando dunque il lemma 2 ad $\widetilde{A}$ si ha effettivamente che $A \xrightarrow{\tau} \tau(A)$ è un isomorfismo di spazi reali.

Notiamo che $V * V$ è isomorfo ad $A * A$ (se intanto $V = \psi^{-1}(A)$, e in questo caso $*$ è il prodotto fibrato su $\widetilde{M}_0(A)$ con proiezione $\widetilde{M}_0$); $A * A$ ammette per complessificazione $\widetilde{A} \times_B \widetilde{A}$, dove $B = \widetilde{M}_0(\widetilde{A})$, quindi, restringendo eventualmente $\widetilde{A}$, $+ : A * A \to \overline{A}$ si estende a $+ : \widetilde{A} * \widetilde{A} \to \widetilde{A}'$, in maniera che l'operazione sia commutativa ed associativa (se due funzioni coincidono sul germe reale, coincidono su tutto un intorno).

Per quanto riguarda le due distributività, le funzioni la cui uguaglianza dà la commutatività di ogni diagramma coincidono allora su un intorno le prime di $B(0, 1+\varepsilon, \mathbb{R}) \times \widetilde{A} * \widetilde{A}$ ($\widetilde{A}$ va ristretto), le seconde di $B(0, 1+\varepsilon, \mathbb{R}) \times$ $\times B(0, 1+\varepsilon, \mathbb{R}) \times \widetilde{A}$, allora per il principio del prolungamento analitico coincidono le prime su $B(0, 1+\varepsilon, \mathbb{C}) \times \widetilde{A} * \widetilde{A}$ $B(0, 1+\varepsilon, \mathbb{C})$ e si consideri che se una serie è nulla per $c \in \mathbb{R}$, allora i coefficienti stanno nell'ideale di $\widetilde{A} \times \widetilde{A}$, quindi la serie è la funzione nulla), e analogo ragionamento vale per le seconde.

Abbiamo così ora $\widetilde{A}$ con una moltiplicazione ed una addizione, e lo sostituiamo con la sua immagine isomorfa tramite l'isomorfismo lineare B dato dal lemma 4, per cui diventa $\widetilde{M}(c, z) = (c^{k_1} z_1, \dots, c^{k_n} z_n)$. Si ha che $\widetilde{M}_0(\widetilde{A}) = \widetilde{A} \cap \{z \mid z_i = 0$ se $k_i \neq 0\}$ e supponiamo che $k_1 = 0 = \dots = k_\nu$, e $k_{\nu+1}, \dots, k_n > 0$; $\widetilde{A} * \widetilde{A}$ è immerso nel proprio spazio tangente all'origine $\mathbb{C}^{n+t}$ $(t = n - \nu)$, ed ivi $(d(+))_{(0)} = \begin{pmatrix} I_\nu & 0 & 0 \\ 0 & I_t & I_t \end{pmatrix}$, in quanto

$$(d(\widetilde{M}_1 * \widetilde{M}_0))_{(0)} = \begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & I_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (d(\widetilde{M}_0 * \widetilde{M}_1))_{(0)} = \begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix},$$

inoltre

$$(d(+\circ(\widetilde{M}_0 * \widetilde{M}_1)))_{(0)} = (d(id_{\widetilde{A}}))_{(0)} = (d(+\circ(\widetilde{M}_1 * \widetilde{M}_0)))_{(0)} = \begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & I_t \end{pmatrix}$$

(I_n rappresenta l'identità di n coordinate).

Se prendiamo $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{s}}$, s intero > 1, $\widetilde{M}_0(x) = \sum_{m=1}^{s} \widetilde{M}\cdot(\alpha^m, x)$ (la sommatoria è nel senso della operazione $+$), quindi

$$(d\,\widetilde{M}_0)_{(0)} = \begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_\nu & & 0 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \sum_{m=1}^{s} \alpha^{mk_{\nu+1}} & & 0 & \\ & \cdot & & \cdot & & \\ 0 & \cdot & & & \cdot & \\ & \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & 0 & & & \sum_{m=1}^{s} \alpha^{mk_n} \end{bmatrix}.$$

Si ha cioè che $\sum_{m=1}^{s} \alpha^{mk_i} = 0$ per ogni k_i, con $i > \nu$, e qualunque sia $s > 1$, perciò, se $k_i > 1$, prendendo $s = k_i$, si ha $\sum_{m=1}^{k_i} \alpha^{mk_i} = k_i = 0$, assurdo, deve dunque aversi necessariamente $k_i \leq 1$ per ogni i.

Prima di proseguire dobbiamo vedere che anche nel caso reale abbiamo un isomorfismo su un modello speciale di Zariski per p' dove la moltiplicazione sia indotta da quella del fibrato banale $M_0(A) \times \mathbb{R}^t$, che opera linearmente sulle coordinate di $\mathbb{R}^t$. In effetti abbiamo una moltiplicazione complessa $\widetilde{M}$ su $\widetilde{A}$ ed un isomorfismo lineare B di $\mathfrak{GL}(n, \mathbb{C})$, tale che $B \circ \widetilde{M}_c = D_c \circ B$, dove D_c è la applicazione lineare rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} I_\nu & 0 \\ 0 & c\cdot I_t \end{pmatrix}$; ricordiamo che $\widetilde{M}$ è a coefficienti reali, che perciò restringendosi a $B(0, I + i, \mathbb{R}) \times A$, se $B = \beta + i\,\mathcal{B}$, β, $\mathcal{B}$, matrici a coefficienti reali, $\beta \circ M_c = D_c \circ \beta$, $\mathcal{B} \circ M_c = D_c \circ \mathcal{B}$, quindi per ogni λ reale $(\beta + \lambda\mathcal{B}) \circ \circ M_c = D_c \circ (\beta + \lambda\mathcal{B})$, inoltre esiste certo un λ_0 tale che $(\beta + \lambda_0\mathcal{B})$ sia invertibile ($\det(\beta + \lambda\mathcal{B})$ è una funzione olomorfa che su i vale $\neq 0$), dunque prendendo $(\beta + \lambda_0\mathcal{B})$ otteniamo l'isomorfismo richiesto e possiamo riprendere a trattare insieme i due casi in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Abbiamo allora un isomorfismo ψ di $\mathcal{V}$ su A, dove A è un cono generalizzato di pesi $k_i = 0$ per $i = 1, \dots, \nu$ e $k_i = 1$ per $i = \nu + 1, \dots, n$, quindi $\mathcal{J}_A$ è generato da $g_1, \dots, g_s$, funzioni omogenee nelle ultime t variabili, che convergono perciò (se $Q = M_0(P)$, P essendo il policilindro dove è realizzato A) su $Q \times \mathbb{K}^t$, e ivi definiscono un modello $\widehat{A}$, che

possiede una moltiplicazione indotta da quella del fibrato banale $M_0(A) \times \mathbb{K}^t$. Intanto proviamo che $\widehat{V} = \lambda^{-1}(\lambda(V))$ possiede un isomorfismo $\widehat{\psi}$, $\widehat{\psi}: \widehat{V} \longleftrightarrow \widehat{A}$, che conservi la moltiplicazione: infatti preso $x \in \widehat{V}$ c'è un suo intorno U_x ed uno scalare $c_x \in \mathbb{K}$ tale che $M_{c_x} U_x \subset\subset V$, si pone dunque $\widehat{\psi}|_{U_x} = M_{c_x^{-1}} \circ \circ \psi \circ M_{c_x}$, col che è evidente che $\widehat{\psi}$ è un isomorfismo compatibile con M (ed è perciò un isomorfismo di fibrati, ove si identifichino $\lambda(V)$ ed $M_0(A)$ attraverso l'isomorfismo $\psi \circ 0$).

Mediante $\widehat{\psi}$ introduciamo una addizione su A, che denotiamo con P, e vogliamo vedere che coincide con la addizione indotta dal fibrato banale $M_0(A) \times \mathbb{K}^t$, cosa che esaurisce la dimostrazione del teorema. Poiché si ha che $P(x, y, z) = M_{c^{-1}}(P(x, cy, cz))$, basta verificarlo in un intorno della origine, su cui P si può pensare provenire da una funzione P' definita su un intorno di 0 in $\mathbb{K}^{n+t}$, inoltre per quanto visto su $(dP)_{(0)}$, si ha che $P'(x, y, z) = (x, y + z + h(x, y, z))$, h nulla del secondo ordine almeno. Ma la regola di distributività dice che le componenti della funzione $[M_c(P'(x, y, z)) - - P'(x, cy, cz)]$ appartengono all'ideale $\mathcal{J}$ generato dalle $g_i(x, y)$ e $g_i(x, z)$, $i = 1, \dots, s$, ovvero ci appartengono le componenti della funzione $ch(x, y, z) - - h(x, cx, cz)$, su un intorno dell'origine, ma se sviluppiamo h in serie di funzioni h_p omogenee di grado p in y, z, $h = \sum_{p=0}^{\infty} h_p$, si ottiene che $\sum_{p=0}^{\infty} ch_p - h_p c^p \in \mathcal{J}^t$, quindi per il solito ragionamento (lemma 1) $h_p(x, y, z) \in \mathcal{J}^t$ per ogni $p \neq 1$, allora il teorema di Krull dice che $h \in \mathcal{J}^t$, e la dimostrazione è finita, se $h_1 \in \mathcal{J}^t$, $h_1 = h'(x)\, y + h''(x)\, z$. Infatti l'altra distributività dice che $h_1(x, c'y, c''y) \in \overline{\mathcal{J}}^t$, generato dalle $g_i(x, y)$ su un aperto di $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^n$, cioè $c'h'(x)\, y + c''h''(x)\, y = \Sigma\, g_i(x, y) \cdot \sum_{n, m} c'^n c''^m \varphi^i_{nm}(x)$. $\Longrightarrow h'(x)\, y = = \Sigma\, g_i(x, y)\, \varphi^i_{10}(x, y)$, $h''(x)\, y = \Sigma\, g_i(x, y)\, \varphi^i_{01}(x, y) \Longrightarrow h_1 = \Sigma\, g_i(x, y)\, \varphi^i_{10}(x, y) + + \Sigma\, g_i(x, z)\, \varphi^i_{01}(x, y)$. Notiamo in particolare che abbiamo dimostrato qualcosa di più del richiesto, cioè non solo che per ogni punto di X esiste un intorno U tale che L_U sia isomorfo ad un fibrato banale, ma che si può avere un isomorfismo che porta su un sottofibrato lineare di un fibrato prodotto con fascio di ideali generato da funzioni omogenee nelle variabili della fibra.

Nel prossimo paragrafo metteremo a fuoco che queste funzioni si possono scegliere omogenee di grado 0 oppure 1, e che inoltre ogni sottofibrato lineare di un fibrato prodotto ha fascio di ideali generato da funzioni di questo tipo.

3. Forme lineari.

Dato un fibrato lineare L sopra uno spazio X, gli omomorfismi di fibrati lineari fra L e $X * \mathbb{k}$ formano in maniera ovvia un $\mathcal{O}(X)$-modulo ($f + g$ è posto uguale a $+ \circ (f * g)$, se s è una sezione di $\mathcal{O}(X)$, sf è posto $= \cdot (s \times f)$), e così se ad ogni aperto U di X associamo gli omomorfismi fra L_U e $U \times \mathbb{k}$, otteniamo un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli (se $U \supset V$, r_V^U dà la restrizione dell'omomorfismo a L_V), che chiamiamo il fascio delle forme lineari su L, ed indichiamo con $F(L)$. Inoltre se $\xi : L \to L'$ è un omomorfismo, la collezione di omomorfismi $F(\xi)(U) : F(L')(U) \to F(L)(U)$, tale che $F(\xi)(U).(g) = g \circ \xi|_{L_U}$, definisce un omomorfismo di fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli, $F(\xi) : F(L') \to F(L)$, e risulta facilmente che F è un funtore controvariante fra la categoria dei fibrati lineari sullo spazio X, con i loro omomorfismi, e quella dei fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli.

ESEMPIO: se prendiamo come fibrato sullo spazio X il prodotto $X \times \mathbb{k}^n$ vogliamo vedere che $F(X \times \mathbb{k}^n) \sim \mathcal{O}_X^n$, e basta per ciò che $F(X \times \mathbb{k}^n)(U) = \mathcal{O}(U)^n$. Esistono n morfismi di fibrati su X,

$$e_1, \dots, e_n, \quad e_i : X \to X \times \mathbb{k}^n, \quad e_i(x) = (x, 0, \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esimo posto}}}{1} \dots 0).$$

Allora l'isomorfismo si ha associando ad un morfismo f fra $U \times \mathbb{k}^n$ e $U \times \mathbb{k}$ n sezioni di $\mathcal{O}(U)$, $F_i = \pi_2 \circ f \circ e_i|_U$ (π_2: la proiezione $\pi_2 : U \times \mathbb{k} \to \mathbb{k}$), e, l'inverso, associando ad n sezioni $F_1, \dots, F_n$ il morfismo $F : U \times \mathbb{k}^n \to U \times \mathbb{k}$ tale che $F(x, z_1, \dots, z_n) = \left(x, \sum_{i=1}^{n} z_i F_i(x)\right)$. Possiamo così vedere ogni omomorfismo $\varphi : U \times \mathbb{k}^n \to U \times \mathbb{k}$ come un polinomio lineare a coefficienti in $\mathcal{O}(U)$, $\varphi \in \mathcal{O}(U)[e_1, \dots, e_n]$. Analogamente un omomorfismo $\varphi : U \times \mathbb{k}^n \to U \times \mathbb{k}^m$ si può vedere come una matrice $(\varphi_{\mu\nu})$ a coefficienti in $\mathcal{O}(U)$, $m \times n$; se consideriamo la composizione di φ con la proiezione su $\mathbb{k}^m$, possiamo definire un sottofibrato lineare di $U \times \mathbb{k}^n$, $L = \ker \varphi$, $L = (\pi_2 \circ \varphi)^{-1}(0)$. Si può dire equivalentemente che L è generato da m forme lineari.

PROP. 3.1. Se L è un sottofibrato lineare di $X \times \mathbb{k}^n$, per ogni punto x di X esiste un intorno U di x in X ed un numero finito di forme lineari $g_1, \dots, g_m$, $\in O(U)[e_1, \dots, e_n]$ che generano L_U.

DIM. Se si suppone che U', un intorno di x, sia realizzato in $\Omega' \subset \mathbb{k}^r$, e sia $x = 0$, $L_{U'}$ è allora un cono generalizzato in $\Omega' \times \mathbb{k}^n$ di pesi $k_i = 0$ per $i \leq r$, $k_i = 1$ se $i > r$, ed è generato in un intorno dell'origine della forma $\Omega \times Z$ da funzioni omogenee nelle seconde n variabili, $f_1, \dots, f_\varrho \in \mathcal{O}(\Omega)$, e $k_1, \dots, k_p \in \mathcal{O}(\Omega)[e_1, \dots, e_n]$ omogenei: $f_1, \dots, f_\varrho$, $k_1, \dots, k_p$ su $\Omega \times \mathbb{k}^n$ definiscono L_U, dove $U = U' \cap \Omega$, infatti per ogni $(p, z) \in L_U$ esiste un $c \in \mathbb{k}$ tale che $cZ \ni z$, ed allora poiché l'isomorfismo canonico fra $\Omega \times Z$ e $\Omega \times cZ$ dà un isomorfismo fra $L_U \cap (\Omega \times Z)$ e $L_U \cap (\Omega \times cZ)$, l'ideale di L_U in (ϱ, z) è generato dalle f_ϱ e dalle k_i', $k_i'(p, z) = k_i(p, c^{-1}z) = c^{-\mu_i} k_i(p, z)$, se μ_i è il grado di k_i, ragion per cui è generato dalle f_i e k_i. Vogliamo vedere che i k_i di primo grado sono sufficienti a generare l'ideale: infatti supponiamo che k_h sia di grado $d > 1$, d minimo dei gradi > 1 dei k_i. Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} L_U * L_U & \xrightarrow{+} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega \times \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n & \xrightarrow{+} & \Omega \times \mathbb{k}^n \end{array}$$

allora definendo $h^+ = h \circ (+)$, tale cioè che $h^+(x, s', s'') = h(x, s' + s'')$, k_h^+ è contenuto nell'ideale $\mathcal{J}_+$ di $L_U * L_U$, generato da $\{f_i, k_i', k_i''\}$, $(k_i'(x, s', s'') = k_i(x, s')$, $k_i''(x, s', s'') = k_i(x, s''))$. Ponendo $g = k_h^+ - (k_h' + k_h'')$, $g \in \mathcal{J}_+$, perciò $g = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i f_i + \sum_{i=1}^{p} \psi_i' k_i' + \sum_{i=1}^{p} \psi_i'' k_i''$, ma poiché g è di grado $< d$ sia in s' che in s'', si può porre $\psi_j' = \psi_j'' = 0$ per i j tali che il grado di k_j sia > 1. Ma $g(x, s, s) = k_h(x, 2s) - 2k_h(x, s) = (2^d - 2)\, k_h(x, s)$, perciò k_h si esprime come combinazione delle f_ϱ e dei k_i di primo grado.

Una importantissima conseguenza della precedente proposizione è data dal seguente

TEOREMA 1: Se L è un fibrato lineare sullo spazio X, $A_n = \{x \in X \mid \dim_{\mathbb{k}} L_x \geq n\}$ è un sottoinsieme analitico di X.

DIM. per ogni punto x di X, esiste un intorno U tale che $L_U = \ker \alpha$, $\alpha : U \times \mathbb{k}^p \to U \times \mathbb{k}^m$; dunque per ogni $y \in U$ $\dim_{\mathbb{k}} L_y = p - \text{rango}\,(\alpha_{ij}(y))$, quindi A_n è definito dall'ideale generato dai determinati dei minori di ordine $p - n + 1$ della matrice (α_{ij}).

COROLLARIO: se $X \to L^1 \to L^2 \to L^3 \to X$ è una successione di morfismi di fibrati lineari sullo spazio X, e la dimensione della fibra di L^1 non è costante, non si può avere che per ogni punto p di X la successione $0 \to L_p^1 \to L_p^2 \to L_p^3 \to 0$ sia esatta. In tali ipotesi si può però avere che la successione di fasci di $\mathcal{O}_x$-moduli determinata dal funtore forme lineari sia esatta.

DIM. Supponiamo per semplicità X paracompatto e ammettiamo che la tesi non sia verificata; sia allora $d_i = \inf_{p \in X} \{\dim_{\mathbb{k}} L_p^i\}$, $A_n^i = \{p \in X \mid \dim_{\mathbb{k}} L_p^i \geq n\}$. $B = X - A_{d_2+1}^2$ è un aperto denso di X. Ora su B, $(A_{d_2-d_1}^3) \cap B = B \cap \cap (X - A_{d_1+1}^1)$ è un aperto denso che non è però tutto B, il che è assurdo.

Per la seconda affermazione si consideri la seguente successione $\mathbb{k} \xrightarrow{id \times 0} L \xrightarrow{i} \mathbb{k}^2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{k}^2 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{k}$, dove $L = \operatorname{Ker} \alpha$, $\alpha(x, z) = (x, xz)$; la corrispondente successione delle forme lineari è $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{a} \mathcal{O}_{\mathbb{k}} \xrightarrow{a} \mathcal{O}_{\mathbb{k}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{k}/\mathcal{M}_0} \to 0$, con $a(1) = x$, ed è perciò esatta.

OSS. Se $f: L \to L'$ è un morfismo di fibrati lineari si definisce $\ker f = f^{-1}(0(L'))$, e $\ker f$ è un sottofibrato lineare di L, quindi se $g: L'' \to \ker f$ è un isomorfismo possiamo dare un senso all'affermazione che la successione $X \xrightarrow{0} L'' \xrightarrow{i \circ g} L \xrightarrow{f} L'$ è esatta, ma la nozione non è generalizzabile, in quanto che l'esempio che appare nella dimostrazione del precedente corollario ci mostra che non si può definire coerentemente l'immagine di un fibrato lineare attraverso un morfismo.

4. Dualità.

In questo paragrafo vogliamo provare che il funtore F, delle forme lineari, associa ad ogni fibrato lineare su uno spazio X un fascio di $\mathcal{O}_x$-moduli coerente. Di più dimostreremo che esiste un funtore V inverso di F che associa ad un fascio $\mathcal{O}_x$-coerente un fibrato lineare: si ottiene così il seguente teorema di dualità:

TEOREMA. Le categorie dei fibrati lineari sopra uno spazio analitico X e dei fasci $\mathcal{O}_x$-coerenti sono duali.

PROP. 4.1. Per ogni fibrato lineare L, $F(L)$ è un fascio coerente.

DIM. Per i risultati precedenti (prop. 2.5) per ogni x di X esiste un intorno aperto U tale che L_U si immerge isomorficamente nel nucleo di un morfismo $\xi = (\xi_{\mu\nu})$ fra due fibrati banali, si ha cioè una successione esatta del tipo $U \xrightarrow{0} L_U \xrightarrow{j} U \times \mathbb{k}^n \xrightarrow{\xi} U \times \mathbb{k}^r$, ed applicando ad essa il funtore F otteniamo una successione

$$0 \leftarrow F(L)|_U \xleftarrow{F(j)} \mathcal{O}_U^n \xleftarrow{F(\xi)} \mathcal{O}_U^r,$$

dove $F(\xi)$ è rappresentato dalla matrice $(\xi_{\nu\mu})$ a coefficienti in $\mathcal{O}(U)$. Dobbiamo dimostrare che questa seconda successione è esatta, e intanto essa è omologica ($F(j) \circ F(\xi) = 0$ per la funtorialità). Supponiamo che $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, $f_i \in \mathcal{O}(V)$, sia in $\ker F(j)$, e sia x un punto di V, allora f appartiene all'ideale generato da $\xi_1, \dots, \xi_r \left(\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} e_j\right)$, cioè $f = \sum_{i=1}^{r} a_i \xi_i$ intorno a $(x, 0)$, ma scrivendo la serie di ogni a_i in $a_i^{(\nu)}$ omogeneo di grado ν nelle variabili e_j, $a_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_i^{(\nu)}$, si ha che $\sum_{j=1}^{n} f_j e_i = \sum_{i=1}^{r} a_i^{(0)} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} e_j\right)$, su un in-intorno della forma $W \times Z$, ma le funzioni convergono su $W \times \mathbb{k}^n$, e per il principio del prolungamento analitico continua a valore la relazione e allora $f = F(\xi)(a)$, con $a = \sum_{i=1}^{r} a_i^{(0)} t_i$, $a_i^{(0)} \in \mathcal{O}(W)$. Infine $F(j)$ è surgettiva, sia infatti g una forma lineare su L_V: essa è determinata dalla sezione $\widehat{g} \in \mathcal{O}(L_V)$, $\widehat{g} = \pi_2 \circ g$ ($\pi_2 : V \times \mathbb{k} \to \mathbb{k}$). Intorno a $(x, 0)$ sia $h \in \mathcal{O}(W \times Z)$ che la rappresenta ($\widehat{g}$ è l'immagine di h nel quoziente per l'ideale generato da $\xi_1, \dots, \xi_r$). Poiché g è lineare, se $h = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{(\nu)}$ (supponendo la serie convergente in $W \times Z$, con le $h^{(\nu)}$ omogenee di grado ν nelle $e_1, \dots, e_n$), si deve avere che $c \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{(\nu)} - \sum_{\nu=0}^{\infty} c^\nu h^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \xi_i$, con le φ_i appartenti a $\mathcal{O}(B(0, \varrho, \mathbb{k}) \times W \times Z)$, quindi $\varphi_i = \sum_{s=0}^{\infty} c^s \varphi_i^{(s)}$ (eventualmente restringendo W, Z, e scegliendo ϱ opportuno); se ne deduce una eguaglianza fra le parti di primo grado in c, $\sum_{\nu=0}^{\infty} h^{(\nu)} - h^{(1)} = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i^{(1)} \xi_i$, cioè si vede che $h^{(1)}$, lineare nelle $e_1, \dots, e_n$, rappresenta essa pure $\widehat{g}$, ma poiché converge su tutto $W \times \mathbb{k}^n$, e per ogni (x, z) esiste c tale che $W \times cZ \ni (x, z)$, si vede seguendo un ragionamento già fatto che $h^{(1)}$ rappresenta $\widehat{g}$ in ogni punto di L_W, cioè esattamente $h^{(1)}$ è la forma lineare tale che $F(j)(h^{(1)}) = g$.

LEMMA 1. Se $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, sono fasci di $\mathcal{O}$-moduli e le righe sono esatte nel seguente diagramma di omomorfismi di $\mathcal{O}$-moduli

$$\begin{tikzcd}
0 & \mathcal{G} \arrow[l] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{O}^n \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\widehat{\beta}"'] & \mathcal{O}^m \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\varphi"'] \\
0 & \mathcal{G}' \arrow[l] & \mathcal{O}^{n'} \arrow[l, "\varepsilon'"'] & \mathcal{O}^{m'} \arrow[l, "\alpha'"']
\end{tikzcd}$$

allora esistono rialzamenti $\widehat{\beta}$ e φ che fanno commutare il diagramma.

DIM. ε' è surgettivo e $\mathcal{O}^n$ è libero con generatori $e_1, \dots, e_n$, quindi per ogni e_i esiste e_i' di $\mathcal{O}^{n'}$ tale che $\varepsilon'(e_i') = \beta \circ \varepsilon(e_i)$, poniamo dunque $\widehat{\beta}(e_i) = e_i'$; inoltre $\varepsilon' \circ \widehat{\beta} \circ \alpha = \beta \circ \varepsilon \circ \alpha = 0$, allora $\operatorname{Im} \alpha' = \operatorname{Ker} \varepsilon' \supset \operatorname{Im}(\widehat{\beta} \circ \alpha)$, e dati generatori e_i di $\mathcal{O}^m$, $\widehat{\beta} \circ \alpha(e_i) = \alpha'(e_i'')$, con $e_i'' \in \mathcal{O}^m$, che si porranno uguali a $\varphi(e_i)$. Il lemma è generalizzabile ad n rialzamenti purché la riga di sopra contenga sempre tutti fasci liberi.

Ora per fasci liberi e omomorfismi fra essi è facile scoprire quale è il funtore V che inverte F: $V(\mathcal{O}^n) = X \times \mathbb{k}^n$, $V(\xi) = (\xi_{\nu\mu})$, se $\xi = (\xi_{\mu\nu})$, $(\xi_{\mu\nu} \in \mathcal{O}(X))$.

Se $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, β sono come nel lemma 1, poniamo $V(\mathcal{G}) = \ker V(\alpha)$, $V(\mathcal{G}') = \ker V(\alpha')$ e $V(\beta) = V(\widehat{\beta}) \mid V(\mathcal{G}')$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & V(\mathcal{G}) \arrow[r, "V(\varepsilon)"] & X \times \mathbb{k}^n \arrow[r, "V(\alpha)"] & X \times \mathbb{k}^m \\
X \arrow[r] & V(\mathcal{G}') \arrow[u, "V(\beta)"] \arrow[r, "V(\varepsilon')"'] & X \times \mathbb{k}^{n'} \arrow[u, "V(\widehat{\beta})"'] \arrow[r, "V(\alpha')"'] & X \times \mathbb{k}^{m'} \arrow[u, "V(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

$V(\beta)$ è ben posta perché $V(\alpha) \circ V(\widehat{\beta}) \circ V(\varepsilon') = V(\varphi) \circ V(\alpha') \circ V(\varepsilon') = 0$, quindi $V(\widehat{\beta}) \circ V(\varepsilon')$ è fattorizzabile in $V(\varepsilon) \circ V(\beta)$, inoltre se β_1 è un altro rialzamento di β, $\widehat{\beta} - \beta_1$ è un rialzamento dell'omomorfismo nullo, $\operatorname{Im}(\widehat{\beta} - \beta_1) \subset \operatorname{Im} \alpha'$, dunque $\ker V(\widehat{\beta} - \beta_1) \supset \ker V(\alpha')$, allora $V(\widehat{\beta} - \beta_1) = V(\widehat{\beta}) - V(\beta_1) = 0$ su $\ker V(\alpha')$. Dati due omomorfismi $\alpha: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, $\beta: \mathcal{G}' \to \mathcal{F}$, si verifica che $V(\beta \circ \alpha) = V(\alpha) \circ V(\beta)$. Infatti $V(\beta \circ \alpha) = V(\widehat{\beta} \circ \widehat{\alpha})|_{V(\mathcal{F})} = [V(\widehat{\alpha}) \circ V(\widehat{\beta})]|_{V(\mathcal{F})} = V(\widehat{\alpha})|_{V(\mathcal{G}')} \circ V(\widehat{\beta})|_{V(\mathcal{F})} = V(\alpha) \circ V(\beta)$: da cui si deduce che $V(Id) = Id$,

ed allora $V(\mathcal{G})$ non cambia, a meno di un isomorfismo, scegliendo due diverse presentazioni di $\mathcal{G}$ come conucleo di fasci liberi.

Come ultimo gradino consideriamo due fasci coerenti $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, ed un omomorfismo $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$: esiste un ricoprimento aperto (U_i) tale che $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}|_{U_i}$, $\mathcal{G}_i' = \mathcal{G}'|_{U_i}$, siano conuclei di fasci liberi, e se φ_{ij} è l'isomorfismo fra $\mathcal{G}_i|_{U_{ij}}$, e $\mathcal{G}_j|_{U_{ij}}$ (analogamente φ_{ij}'), β_i l'omomorfismo indotto fra $\mathcal{G}_i$ e $\mathcal{G}_i'$, allora $V(\varphi_{ij})$ è un isomorfismo fra $V(\mathcal{G}_i)_{U_{ij}}$ e $V(\mathcal{G}_i)_{U_{ij}}$, e lo stesso dicasi di $V(\varphi_{ij}')$; si definiscono allora per rincollamento dei fibrati $V(\mathcal{G})$ e $V(\mathcal{G}')$, ed un morfismo $V(\beta)$ data la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
V(\mathcal{G}_j)_{U_{ij}} \arrow[r, "V(\varphi_{ij})"] & V(\mathcal{G}_i)_{U_{ij}} \\
V(\mathcal{G}_i')_{U_{ij}} \arrow[u, "V(\beta_j)_{U_{ij}}"] \arrow[r, "V(\varphi_{ij}')"] & V(\mathcal{G}_i')_{U_{ij}} \arrow[u, "V(\beta_i)_{U_{ij}}"']
\end{tikzcd}$$

Si riconosce che $V(\mathcal{G})$ non dipende dal particolare ricoprimento (U_i) perché localmente $V(\mathcal{G})$ non dipende dalla presentazione di $\mathcal{G}$ come conucleo di fasci liberi; inoltre se $\alpha : \mathcal{G}' \to \mathcal{F}$ è un altro omomorfismo, ed è dato un ricoprimento (U_i') su cui $\mathcal{F}$ si presenti come conucleo di fasci liberi, si ha che $V(\alpha \circ \beta) = V(\beta) \circ V(\alpha)$, perché basta prendere un raffinamento (V_i) di (U_i') e di (U_i), e verificare direttamente questa uguaglianza sul ricoprimento (V_i). Risulta dalla costruzione di V che V è il funtore inverso di F.

Oss. Un altro funtore interessante è quello che associa ad un fibrato lineare L il fascio dei germi di sezioni analitiche da X in L, $S(L)(U) = \{s : U \to L,\ s$ analitica e tale che $\lambda \circ s = id_U\}$. S è un funtore covariante, in quanto se $g : L \to L'$ è un morfismo, definiamo $S(g)(U)(s) = g \circ s$, se $s \in S(L)(U)$. Quando L è un F. L. L. B., $S(L)$ è localmente libero in quanto se $L_U \approx U \times \mathbb{k}^n$, $S(L)(U) \approx \mathcal{O}(U)^n$, viceversa ogni fascio localmente libero $\mathcal{F}$ è determinato da un ricoprimento (U_i) e isomorfismi $\varphi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}^{n_i}$, quindi è un isomorfismo $\bar{\varphi}_{ij} : U_{ij} \times \mathbb{k}^{n_j} \to U_{ij} \times \mathbb{k}^{n_i}$ quello determinato dalla matrice che dà l'isomorfismo di fasci $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \mathcal{O}_{U_{ij}}^{n_j} \to \mathcal{O}_{U_{ij}}^{n_i}$, e la collezione $U_i \times \mathbb{k}^{n_i}$, $\bar{\varphi}_{ij}$, determina un F. L. L. B. e non è difficile vedere che S dà un isomorfismo fra le categorie dei F. L. L. B. e dei fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli localmente liberi.

Il funtore S è però troppo grossolano per la categoria dei fibrati lineari, poiché se ad esempio L è $\operatorname{Ker} \alpha$, $\alpha : X \times \mathbb{k}^n \to X \times \mathbb{k}^n$, e $\det(\alpha_{ij})$ non è la sezione nulla, presa una sezione $s : U \to L$, $\pi_2 \circ i \circ s$ è una sezione a

valori in $\mathbb{k}^n$ nulla su un insieme denso, quindi $S(L)(U) = 0$ per ogni aperto U, mentre il fibrato L non è il fibrato nullo, X.

OSSERVAZIONE DI RILIEVO: se L^1, L^2, sono fibrati sopra lo stesso spazio X, un germe di forma lineare ξ su $L^1 \oplus L^2$ determina due germi ξ^1, ξ^2, su L^1, L^2 rispettivamente ($\xi^j = \xi \circ i_j$, i_j essendo l'immersione canonica, ad esempio $L^1 \xrightarrow{i_1} L^1 \oplus O(X)$), viceversa due germi di forme ξ^1, ξ^2, su L^1, L^2, determinano il germe $\xi^1 \oplus \xi^2$ su $L^1 \oplus L^2$, $\xi^1 \oplus \xi^2 = +(\xi_1 \times \xi_2)$. Il funtore V conserva dunque la somma diretta.

PROP. 4.2. Se $\tau : Y \to X$ è una applicazione analitica, (L, λ) un fibrato sopra X, e L intorno a $\tau(y)$ è uguale a ker ξ, $\xi : U_{\tau(y)} \times \mathbb{k}^n \to U_{\tau(y)} \times \mathbb{k}^m$, $\xi = (\xi_{\mu\nu})$, $\tau^{-1}(L)$ è intorno a y uguale a ker ξ_τ, ξ_τ: $U_y \times \mathbb{k}^n \to U_y \times \mathbb{k}^m$, $\xi_\tau = (\xi_{\mu\nu} \circ \tau)$.

DIM. Si può supporre che $\tau^{-1}(L)$ sia realizzato in $\Omega' \times \Omega \times \mathbb{k}^n$ ($\Omega' \subset \mathbb{k}^{s'}$ con coordinate $y_1, \dots, y_{s'}$, $\Omega \subset \mathbb{k}^s$ con coordinate $x_1, \dots, x_s$, e $\mathbb{k}^n$ abbia coordinate $e_1, \dots, e_n$) e abbia fascio di ideali generato da $f_1, \dots, f_s(x)$, $h_1, \dots, h_t(y)$ e $g_1, \dots, g_m$, $g_i = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x) e_j$, e $(x_h - \tau_h(y))$; se F in $\Omega' \times \mathbb{k}^n$ è definito attraverso l'ideale generato dalle $h_1, \dots, h_t(y)$ e $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$, $\bar{g}_i = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} \circ \tau(y) e_j$, F è isomorfo a $\tau^{-1}(L)$, poiche la restrizione ad F dell'immersione T di $\Omega' \times \mathbb{k}^n$ in $\Omega' \times \Omega \times \mathbb{k}^n$ ($T = (id \times \tau) \times id$) ha per inversa $\pi \mid \tau^{-1}(L)$ (se $\pi : \Omega' \times \Omega \times \mathbb{k}^n \to \Omega' \times \mathbb{k}^n$ è la proiezione canonica), come si verifica facilmente.

OSS. Sia $L = \mathbb{k} \times \mathbb{k}$, $f: \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k}$, $f(z_1, z_2) = z_1$; dunque $F(L) = \mathcal{O}_{\mathbb{k}}$, $f^{-1}(L) = \mathbb{k}^2 \times \mathbb{k}$, $F(f^{-1}(L)) = \mathcal{O}_{\mathbb{k}^2}$, mentre l'immagine inversa del fascio $F(L)$, $f^*(F(L)) = \mathcal{O}_{\mathbb{k}^2}/z_1 \mathcal{O}_{\mathbb{k}^2}$; cioè, come ci si poteva aspettare dal fatto che F dà una dualità e non un isomorfismo fra le due categorie, l'operazione di immagine inversa non viene conservata da F. (Si verifica però facilmente dal lemma 4.2 che $F(\tau^{-1}(L)) \approx \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} F(L)$).

5. Complessificazione di un fibrato lineare reale.

Sia L un fibrato lineare sullo spazio analitico reale paracompatto X, di cui $\tilde{X}$ sia una complessificazione: indichiamo con $\mathcal{F}$ il fascio $F(L) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, che è dunque un fascio $\mathcal{O}_{\tilde{X}}|_X$-coerente (si considera $X \subset \tilde{X}$). Applicando il

lemma III di Cartan otteniamo che $\mathcal{F}$ è indotto da un fascio $\mathcal{O}_U$-coerente $\mathcal{H}$ su un aperto U di $\tilde{X}$ contenente X: U è quindi esso pure una complessificazione di X e lo continueremo a chiamare allora $\tilde{X}$. Il fibrato lineare $\tilde{L} = V(\mathcal{H})$ sopra $\tilde{X}$ si dirà complessificato di L, ed è essenzialmente unico, perché se $\mathcal{H}'$ induce $\mathcal{F}$ su X, sappiamo che $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ coincidono su un intorno aperto di X.

Il fibrato $\tilde{L}$ è in maniera naturale una complessificazione (nel senso degli spazi) di L, e le sue operazioni (addizione, moltiplicazione, sezione nulla) sono complessificazioni delle operazioni di L.

Infatti per ogni punto y di X esiste un aperto U_y tale che $U_y \cap X = W_y$, ed L_{W_y} sia isomorfo a $\ker \xi$, $\xi: W_y \times \mathbb{R}^n \to W_y \times \mathbb{R}^m$, dunque $F(L)|_{W_y} = \operatorname{Coker} \mathcal{O}^n_{W_y} \xleftarrow{F(\xi)} \mathcal{O}^m_{W_y}$ se $F(\xi)$ è la matrice trasposta di ξ, $\mathcal{F}|_{W_y} = \operatorname{Coker} \mathcal{O}^n_{W_y} \otimes \mathbb{C} \xleftarrow{F(\xi) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} 1} \mathcal{O}^m_{W_y} \otimes \mathbb{C}$, e quindi $\mathcal{H}|_{U_y} = \operatorname{Coker} \mathcal{O}^n_{U_y} \xleftarrow{F(\xi) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} 1} \mathcal{O}^m_{U_y}$, $\tilde{L}_{U_y} = \operatorname{Ker} U_i \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\xi \underset{\mathbb{R}}{\otimes} 1} U_i \times \mathbb{C}^m$.

Allora se, poniamo, U_y è realizzato in $\Omega \subset \mathbb{C}^p$ e $W_y = U_y \cap \mathbb{R}^p$, $\tilde{L}_{U_y}$ è realizzato in $\Omega \times \mathbb{C}^n$ e $L_{W_y} = \tilde{L}_{U_y} \cap \mathbb{R}^{p+n}$ ed effettivamente $\mathcal{O}_{\tilde{L}_{U_y}}|_{L_{W_y}} = \mathcal{O}_{L_{W_y}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$, inoltre le operazioni sono indotte da quelle del fibrato banale $U_i \times \mathbb{C}^n$, ed è vera la seconda affermazione.

6. Fibrati lineari localmente banali (F. L. L. B.).

Supponiamo in questo paragrafo che lo spazio X in questione sia connesso.

Allora se L è un F. L. L. B., $\dim_{\mathbb{k}} L_x$ è un intero costante uguale ad n per ogni punto x di X, poiché $\dim_{\mathbb{k}} L_x$ è una funzione localmente costante e lo spazio X è connesso.

La condizione che $\dim_{\mathbb{k}} L_x = n$ per ogni x di X, non implica in generale che L sia un F. L. L. B., come prova il seguente facile esempio.

Se X è il punto doppio (X realizzato in $\mathbb{k}$ con ideale generato da x^2), e L è il fibrato $\ker \xi$, $\xi: X \times \mathbb{k} \to X \times \mathbb{k}$, $\xi(x, s) = (x, xs)$, L_0 ha dimensione 1, ma se esistesse un isomorfismo di L su $X \times \mathbb{k}$, gli anelli in $(0, 0)$ dovrebbero essere isomorfi con un isomorfismo indotto dall'identità di $\mathbb{k}^2$, mentre un anello è $\mathcal{O}_{0,2}/\mathcal{G}(x^2)$, l'altro $\mathcal{O}_{0,2}/\mathcal{G}(x^2, xs)$.

PROP. 6.1. Se L è un fibrato sullo spazio reale X, e la dimensione della fibra è costante, allora L possiede un complessificato $\widetilde{L}$ con dimensione di fibra costante (ammesso che lo spazio X sia paracompatto). Se L è un F. L. L. B., possiede un complessificato che è un F. L. L. B.

DIM. Sia $n = \dim\limits_{\mathbb{R}} L_x$ e $\widetilde{L}_0$ una complessificazione del fibrato L, con base $\widetilde{X}_0$ (complessificazione di X). Per il teorema 1 $\widetilde{A}_n = \{x \in \widetilde{X}_0 \mid \dim\limits_{\mathbb{C}} \widetilde{L}_{0_x} \geq n\}$ è un sottoinsieme analitico di $\widetilde{X}_0$, che contiene X, quindi (prop. O. 5.) $\widetilde{A}_n$ contiene un intorno U di X. $\widetilde{A}_{n+1}$ poi è un sottinsieme analitico tale che $X \cap \widetilde{A}_{n+1} = \emptyset$, perciò $U - \widetilde{A}_{n+1}$ è un intorno aperto di X, che sarà allora lo $\widetilde{X}$ richiesto, mentre $\widetilde{L}$ sarà $\widetilde{L}_{0\widetilde{X}}$. La seconda affermazione è immediata vista la descrizione di $\widetilde{L}$ data nel paragrafo 2.

TEOREMA 2. Se L è un fibrato lineare sullo spazio ridotto X, e $\dim\limits_{\mathbb{R}} L_x = n$ per ogni punto x, L è un F. L. L. B..

DIM. Preso un punto x_0 di X, possiamo supporre che L_U sia realizzato in $\Omega \times \mathbb{R}^m$, ($\Omega \subset \mathbb{R}^p$, con coordinate $x_1, \dots, x_p$, mentre $e_1, \dots, e_m$ saranno le coordinate in $\mathbb{R}^m$) con ideale generato da $f_1, \dots, f_s$ funzioni delle x_i e $g_1, \dots, g_p$ forme lineari, $g_i = \sum\limits_{j=1}^{m} g_{ij}(x) e_j$, di cui $g_1, \dots, g_r$ $(r = m - n)$ siano tali che $\det | g_{ij}(x) |$, $i, j = 1, \dots, r$, sia $\neq 0$ per $x = x_0$. Allora, restringendo eventualmente Ω, la applicazione $(x, e) \xrightarrow{\varphi} (x, g_1, \dots, g_r, e_{r+1}, \dots, e_m)$ è un isomorfismo di fibrato di $\Omega \times \mathbb{R}^m$ in sé, e se riusciamo a vedere che l'immagine secondo φ di L_U è con fascio di ideali generato da $f_1, \dots, f_s$ e $e_1, \dots, e_r$, otteniamo l'isomorfismo richiesto con un fibrato $U \times \mathbb{R}^n$. Ma il fibrato definito dall'ideale generato dalle $f_1, \dots, f_s$, $e_1, \dots, e_r$, è uno spazio ridotto e su esso le $g_i \circ \varphi^{-1} = \varrho_i$, $i \geq r + 1$, sono funzioni nulle, in quanto la condizione $\dim\limits_{\mathbb{R}} L_x = n$ dice che per ogni x di X intorno ad x_0 $g_{ij}(x) = \sum\limits_{h=1}^{r} \lambda_h g_{hj}(x)$, per $j = 1, \dots, m$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRUHAT F. - WHITNEY H., *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels,* Comm. Math. Helvetici 33 (pagg. 132-160).

[2] CARTAN H., *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes,* Bull. Soc. Math. France, 85, (1957) (pagg. 77-100).

[3] COEN S., *Teoria elementare delle funzioni analitiche di più variabili complesse,* Università di Pisa (1970).

[4] FISCHER G., *Eine Charakterisierung von holomorphen Vektorraumbündeln,* Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Natur. Kl., S. B. 1966 (1967) (pagg. 101-107).

[5] FISCHER G., *Lineare Faserräume und kohärente Modulgarben über komplexen Räumen,* Arch. Math. 18 (1967) (pagg. 609-617).

[6] GODEMENT R., *Theorie des faisceaux,* Actual. Scient. et Ind. 1252.

[7] GRAUERT H. - REMMERT R., *Komplexe Räume,* Math. Ann. 136 (1958) (pagg. 245-318).

[8] GUNNING R. C. - ROSSI H., *Analytic Functions of Several Complex Variables,* Englewood Cliffs (1965).

[9] HOLMANN H., *Local properties of holomorphic mappings,* Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis (1964) (pagg. 94-109).

[10] KAUP W., *Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume,* Math. Ann. 160 (1965) (pagg. 72-92).

[11] KAUP W., *Reelle Transformationsgruppen und Invariante Metriken auf komplexen Räumen,* Inv. Math. 3 (1967) (pagg. 43-70).

[12] MALGRANGE B., *Ideals of differentiable functions,* Tata Institute of fundamental research in Mathematics.

[13] MALGRANGE B., *Analytic spaces, in Topics in several complex variables,* Enseignement Mathématique, Monographie n^0 17.

[14] NARASIMHAN R., *Introduction to the theory of Analytic Spaces,* Springer-Verlag (1966).

[15] PONTRJAGIN L., *Topological Groups,* Princeton University Press, second edition, (1946) (pagg. 216-225).

[16] PRILL D., *Über lineare Faserräume und schwach negative holomorphe Geradenbündel,* Math. Zeitschr. 105 (1968) (pagg. 313-326).

[17] REMMERT R. - STEIN K., *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen,* Math. Ann. 126 (1963) (pagg. 263-306, exp. Pag. 303).

[18] SERRE J. P., *Faisceaux Algebriques coherents,* Annals of Math. II Ser. 61, (pagg. 197-278).

[19] SERRE J. P., *Prolongement des faisceaux analytiques-coherents,* Ann. Inst. Fourier 16 (1966) (pagg. 363-374).

[20] STEENROD N., *The topology of Fibre Bundles,* Prin. Math. Ser. 14.