ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANDRÉ UNTERBERGER

Méthodes de factorisation dans les problèmes de convexité

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 3 (1973), p. 471-490

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_471_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

METHODES DE FACTORISATION DANS LES PROBLEMES DE CONVEXITE

par ANDRÉ UNTERBERGER

Nous nous intéressons ici au problème suivant: étant donnés un opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$ sur $\mathbf{R}^n$, un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ et deux parties compactes K et L de Ω, avec $K \subset L$, est-il vrai que pour toute distribution u à support compact contenu dans Ω telle que le support singulier de $P(D)u$ soit contenu dans K, le support singulier de u est contenu dans L?

Nous donnons une réponse complète à ce problème lorsque $n = 2$: ceci précise les résultats que nous avions obtenus dans (7). La méthode consiste à factoriser l'opérateur $P(D)$ en un produit d'opérateurs pseudo-différentiels du premier ordre.

Nous examinons aussi le cas des opérateurs sur $\mathbf{R}^3$ dont le symbole est homogène et à valeurs réelles; les caractéristiques multiples sont admises, mais nous faisons l'hypothèse qu'en tout point ξ où l'on a $P^{(j)}(\xi) = 0$ pour tout j, la matrice hessienne de P est de rang 2. Cette hypothèse permet encore, du moins localement, de factoriser l'opérateur $P(D)$ de façon satisfaisante.

§ 1. Fonctions partiellement sous-harmoniques.

Nous donnons dans ce paragraphe quattre lemmes: les deux premiers sont de nature purement géométrique et concernent l'existence de fonctions partiellement sous-harmoniques. Les deux derniers sont une généralisation partielle (ou du moins une localisation) du théorème que nous avions donné dans (7), p. 98.

Pervenuto alla Redazione il 24 Febbraio 1972.

LEMME 1.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$, et K et L deux parties compactes de Ω telles que $K \subset L$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) pour tout point $x_0 \in \Omega \setminus L$, il existe une fonction f de classe C^∞ dans Ω, à valeurs réelles, et strictement sous-harmonique (i.e. $\Delta f > 0$), *telle que $f(x_0) > \sup_K f(x)$.*

b) toute composante connexe de $\Omega \setminus K$ relativement compacte dans Ω est contenue dans L.

c) l'homomorphisme d'inclusion $H^n(\Omega, L) \to H^n(\Omega, K)$ (en cohomologie d'Alexander sur les réels) est trivial.

Rappelons (cf. (5), p. 291), que la cohomologie d'Alexander peut se définir comme la limite inductive des cohomologies singulières des voisinages. Vu le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & H^n(\Omega, K) & \leftarrow H^{n-1}(K) & \leftarrow H^{n-1}(\Omega) \\ & & \uparrow & \uparrow & \\ 0 & \to & H^n(\Omega, L) & \leftarrow H^{n-1}(L) & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, la condition *c*) signifie que l'image de l'homomorphisme $H^{n-1}(L) \to H^{n-1}(K)$ est contenue dans celle de l'homomorphisme $H^{n-1}(\Omega) \to H^{n-1}(K)$ ou encore que pour tout voisinage V de L dans Ω et tout $(n-1)$-cocycle v dans V, il existe un $(n-1)$-cocycle ω dans Ω et un voisinage W de K dans Ω, contenu dans V, tels que v et ω soient cohomologues dans W; on peut supposer que W ne dépend que de V, à condition de faire décrire à V un système fondamental de voisinages de L ayant une cohomologie de type fini (prendre par exemple des voisinages ayant le type d'homotopie de polyèdres compacts); par dualité, *c*) revient donc à dire que pour tout élément V d'un certain système fondamental de voisinages de L dans Ω, il existe un voisinage W de K dans Ω, contenu dans V, tel que tout $(n-1)$-cycle dans W homologue à 0 dans Ω le soit aussi dans V: ceci signifie que le noyau de l'homomorphisme $H_{n-1}(W) \to H_{n-1}(\Omega)$ est cootemu dans celui de l'homomorphisme $H_{n-1}(W) \to H_{n-1}(V)$, ou encore que la composition $H_n(\Omega, W) \to H_{n-1}(W) \to H_{n-1}(V)$, identique à la composition $H_n(\Omega, W) \to H_n(\Omega, V) \to H_{n-1}(V)$, est nulle ; comme $H_n(\Omega, V) \to H_{n-1}(V)$ est un homomorphisme injectif, ceci signifie que l'homomorphisme $H_n(\Omega, W) \to H_n(\Omega, V)$ est nul. En utilisant un théorème de dualité d'Alexander généralisé (cf. Spanier, (5), p. 342 et 322), on voit que ceci équivaut à dire que l'homomorphisme $\tilde{H}^0(\Omega^+ \setminus W) \to \tilde{H}^0(\Omega^+ \setminus V)$ est nul, en appelant Ω^+ le compactifié d'Alexandroff de Ω; finalement,

c) équivaut à dire que pour tout élément V d'un certain système fondamental de voisinages de L dans Ω, il existe un voisinage W de K dans Ω, contenu dans V, tel que tout point de $\Omega^+ \setminus V$ appartienne à la composante connexe de $\Omega^+ \setminus W$ contenant le point à l'infini, et cette dernière condition est équivalente à *b*).

Le fait que *a*) implique *b*) résulte du principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques.

Le fait que *b*) implique *a*) est bien connu et peut se prouver, par exemple, comme le théorème de Runge tel qu'il est démontré dans (2), p. 7.

LEMME 1.2. *Soient p et n deux entiers, $1 \leq p \leq n$, et E le sous-espace de $\mathbf{R}^n$ d'équation $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$. Disons qu'une fonction f définie dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$, C^∞ et à valeurs réelles est E-strictement sous-harmonique si elle vérifie la condition $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right) f > 0$. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, K et L deux parties compactes de Ω telles que $K \subset L$. Supposons que pour tout sous espace affine F de $\mathbf{R}^n$ parallèle à E, l'homomorphisme d'inclusion $H^p(F \cap \Omega, F \cap L) \to H^p(F \cap \Omega, F \cap K)$ soit trivial. Alors pour tout point $x_0 \in \Omega\ L$, et toute partie compacte M de Ω contenant $K \cup \{x_0\}$, il existe une fonction f E-strictement sous-harmonique dans un voisinage de M telle que $f(x_0) > \sup_K f(x)$.*

Preuve: posons $x = (x', x'')$, avec $x \in \mathbf{R}^n$, $x \in R^n$, $x'' \in R^{n-p}$. D'après le lemme 1.1, il existe une fonction g strictement sous-harmonique (par rapport à x') dans $F \cap \Omega$ telle que

$$g(x_0', x_0'') > \sup_{F \cap K} g(x', x_0'').$$

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, posons $M_\varepsilon = \{(x', x'') \in M : |x'' - x_0''| \leq \varepsilon\}$ et

$$K_\varepsilon = \{(x', x'') \in K : |x'' - x_0''| \leq \varepsilon\}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la projection de M_ε (resp K_ε) sur F est contenue dans un voisinage arbitraire de M_0 (resp. K_0). Il en résulte que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la fonction $h(x', x'') = g(x', x_0'')$ est bien définie et E strictement sous-harmonique dans un voisinage de M_ε, et par ailleurs la condition $g(x_0', x_0'') > \sup_{K_\varepsilon} h(x', x'')$ est satisfaite. Soit $\varphi(x'')$ une fonction C^∞ à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 au point x_0'' et à support dans la boule $|x'' - x_0''| \leq \varepsilon$. Pour $\varepsilon' > 0$ assez petit, la fonction $f(x', x'') = \varphi(x'') h(x', x'') + \varepsilon' |x'|^2$ répond à la question.

LEMME 1.3. *Soit $K = \Theta[h]$ un opérateur pseudo-différentiel de convolution, dont le symbole h est C^∞ en dehors de O et s'écrit $h = h_1 + h_r$, où h_1 est hemogène d'ordre 1 et où h_r est d'ordre $r < 1$. Soit $\varrho \in \mathcal{S}^\infty(R^n, R)$ (cf. (7) pour la définition et les propriétés de base des espaces $H^{\varrho,k}$). Soient Σ la sphère unité de $\mathbf{R}^n$, W un ouvert de Σ, et Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et supposons que l'on ait $\sum_{j,k} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_j \partial x_k} > 0$ tel que soit $(x, \xi) \in \Omega \times W$.*

Soit $\alpha(\xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, homogène de degré O, et telle que la trace sur Σ du support de α soit une partie compacte de W. Alors pour toute distribution u sur $\mathbf{R}^n$ à support compact contenu dans Ω telle que $\Theta[\alpha] Ku$ appartienne à H^ϱ, $\Theta[\alpha] u$ appartient à $H^{\varrho, \frac{1}{2}}$.

Preuve: Il suffit de prouver que pour tout compact $M \subset \Omega$ et pour tout nombre réel N il existe $C > 0$ telle que, telle que soit $v \in \mathcal{D}_M(\mathbf{R}^n)$, on ait l'inégalité $\| \Theta[\alpha] v \|^2_{\varrho, \frac{1}{2}} \leq C [\| K \Theta[\alpha] v \|^2_\varrho + \| v \|^2_{-N}]$, car on aura alors le résultat par régularisation.

Posons $A^\varrho = \Theta[(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}\varrho(x)}]$ et $B = \Theta[1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]$, et soit L un opérateur pseudo-différentiel tel que $A^\varrho K - LA^\varrho$ soit un opérateur d'ordre $-\infty$. Soit $\gamma(x)$ une fonction C^∞ dans Ω, à support dans une partie compacte M_1 de Ω, et égale à 1 dans un voisinage de M; soit $\beta(x, \xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$, homogène de degré 0 en ξ, dont la trace du support sur $\mathbf{R}^n \times \Sigma$ soit une partie compacte Λ de $\Omega \times W$, et égale à 1 dans un voisinage de $M_1 \times (\Sigma \cap \operatorname{supp}(\alpha))$.

Posons $w = \Theta[\gamma] A^\varrho \Theta[\alpha] v$: il existe $C_1 > 0$ telle que, quelle que soit $v \in \mathcal{D}_M(\mathbf{R}^n)$, on ait $\| \Theta[\alpha] v \|^2_{\varrho, \frac{1}{2}} \leq C_1 [\| w \|^2_{0, \frac{1}{2}} + \| v \|^2_{-N}]$ et $\| K \Theta[\alpha] v \|^2_\varrho \geq$ $\geq C_1 [\| Lw \|^2_0 - \| v \|^2_{-N}]$.

Comme l'opérateur $(1 - \Theta[\beta]) \Theta[\gamma] A^\varrho \Theta[\alpha]$ est d'ordre $-\infty$, on voit que pour prouver le lemme 1.3 il suffit de montrer que pour tout compact $M \subset \Omega$ et tout nombre réel N il existe $C > 0$ telle que, quelle que soit $w \in \mathcal{D}_M(\mathbf{R}^n)$, on ait l'inégalité $\| \Theta[\beta] w \|^2_{0, \frac{1}{2}} \leq C [\| L \Theta[\beta] w \|^2_0 + \| w \|^2_{-N}]$.

On voit aisément, grâce aux formules de composition des opérateurs pseudo-différentiels, que le symbole de L est égal à $h_1(x, \xi) + h_r(x, \xi) -$ $- \frac{1}{4i\pi} \sum_j \frac{\partial \varrho}{\partial x_j} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_j} (1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2))$ à un symbole d'ordre 0 près. L^* étant l'adjoint de L, le symbole de $L^* L - LL^*$ est égal, à un symbole d'ordre 0 près, à $\frac{1}{4\pi^2} \left(\sum_{j,k} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_j \partial x_k} \right) (1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2))$. Comme cette expression

est strictement positive lorsque $(x, \xi) \in \Omega \times W$, il existe un symbole $a(x, \xi)$ homogène d'ordre 0, coïncidant avec $\frac{1}{2\pi}\left[\left(\sum_{j,k} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_j \partial x_k}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ dans un voisinage de Λ, trace sur $\mathbf{R}^n \times \Sigma$ du support de β, et elliptique partout. Il existe alors (cf. (8), lemme 1.1) un symbole $b(x, \xi)$ tel que $b(x, \xi) - a(x, \xi)(1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2))^{\frac{1}{2}}$ soit un symbole d'ordre 0, et tel que le symbole de l'opérateur $\Theta[b]^* \Theta[b]$ coïncide dans un voisinage de Λ avec le symbole de $L^* L - LL^*$, modulo un symbole d'ordre $-2N$.

Posons $L^* L - LL^* = \Theta[b]^* \Theta[b] + R$: $\Theta[\beta]^* R \Theta[\beta]$ est un opérateur d'ordre $-2N$. On a alors

$$\begin{aligned}
\| L \Theta[\beta] w \|^2 &\geq \| L \Theta[\beta] w \|^2 - \| L^* \Theta[\beta] w \|^2 \\
&= (\Theta[\beta]^* (L^* L - LL^*) \Theta[\beta] w, w) \\
&= (\Theta[\beta]^* \Theta[b]^* \Theta[b] \Theta[\beta] w, w) + (\Theta[\beta]^* R \Theta[\beta] w, w) \\
&\geq \| \Theta[b] \Theta[\beta] w \|^2 - C \| w \|^2_{-N} .
\end{aligned}$$

Comme b est elliptique d'ordre $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, on obtient l'inégalité $\| L \Theta[\beta] w \|^2 \geq \geq C_1 \| \Theta[\beta] w \|^2_{0, \frac{1}{2}} - C \| w \|^2_{-N}$, ce qui termine la preuve du lemme 1.3.

LEMME 1.4. *Soit $A = \Theta[h]$ un opérateur pseudo-différentiel de convolution, dont le symbole h est C^∞ en dehors de 0 et s'écrit $h = h_1 + h_r$, où h_1 est homogène d'ordre 1 et où h_r est d'ordre $r < 1$. Soit ξ^0 un point de la spère unité Σ. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ et K et L deux parties compactes de Ω, avec $K \subset L$. Supposons l'une des conditions a), b), et c) vérifiées :*

a) $h_1(\xi^0) \neq 0$

b) $h_1(\xi^0) = 0$, *et le vecteur $dh_1(\xi^0)$ dont les composantes sont $\frac{\partial h_1}{\partial \xi_j}(\xi^0)$ est réel et non nul. De plus, pour toute droite F_1 parallèle à $dh_1(\xi^0)$, l'homomorphisme d'inclusion $H^1(F_1 \cap \Omega), F_1 \cap L) \to H^1(F_1 \cap \Omega, F_1 \cap K)$ est trivial.*

c) $h_1(\xi^0) = 0$, $dh_1(\xi^0) \neq 0$, *et $dh_1(\xi^0) = a + ib$, où a et b sont deux vecteurs réels linéairement iudépendants. De plus, pour tout plan F_2 parallèle au plan engendré par a et b, l'homomorphisme d'inclusion $H^2(F_2 \cap \Omega, F_2 \cap L) \to \to H^2(F_2 \cap \Omega, F_2 \cap K)$ est trivial.*

Pour tout point $x^0 \in \Omega \setminus L$, et tout compact M de Ω contenant $K \cup \{x^0\}$, il existe alors un voisinage W de ξ^0 dans Σ tel que, pour toute fonction $\alpha(\xi)$

homogène de degré 0 *et* C^∞ *pour* $\xi \neq 0$, *vérifiant* $\Sigma \cap \operatorname{supp}(\alpha) \subset W$, *et pour toute distribution* $u \in \mathcal{E}'_M(\Omega)$ *vérifiant* $\operatorname{supp} \operatorname{sing}(\Theta[\alpha] Au) \subset K$, $\Theta[\alpha]\, u$ *soit de classe* C^∞ *dans un voisinage de* x^0.

Preuve: nous nous contenterons de la faire dans le cas *b*); le cas *a*) requiert un simple argument d'ellipticité, et le cas *c*) est tout à fait analogue au cas *b*).

Soit M_1 un voisinage compact de M, et supposons que $\Theta[\alpha] Au$ appartienne à $H^s(\mathbf{R}^n)$ (s réel quelconque). En vertu du lemme 1.2, il existe une fonction ϱ de classe C^∞ dans un voisinage de M_1, vérifiant la condition $\varrho(x^0) > \sup_K \varrho(x)$ et la condition $\sum_{j,k} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_j \partial x_k} > 0$ lorsque $x \in M_1$ et $\xi = \xi^0$. Cette dernière inégalité stricte reste vérifiée lorsque $x \in M_1$ et que ξ appartient à un certain voisinage W de ξ^0 dans Σ. Soit U un voisinage compact de x^0 dans Ω tel que, pour tout $y \in U$, on ait $\varrho(y) > \sup_K \varrho(x)$. Pour tout nombre réel t, il existe $a > 0$ et $b \in \mathbf{R}$ tels que la fonction $\sigma = a\varrho + b$ vérifie $\sup_K \sigma(x) < s$ et $\inf_U \sigma(x) > t$. La première inégalité montre que $\Theta[\alpha] Au \in H^\sigma$: il en est de même de $\Theta[\alpha]\, u$ d'après le lemme 1.3, et ceci termine la preuve du lemme 1.4 puisque t est arbitrairà.

§ 2. Propagation des singularités pour les opérateurs sur $\mathbf{R}^2$.

On précise ici des résultats partiels obtenus dans (7), chap. 3 : pour ne pas recommencer les démonstrations qui s'y trouvent déjà, on se limite ici au cas où $K = L$ (et $\Omega = \mathbf{R}^2$), mais compte tenu des résultats du § 1, il serait facile de lever cette restriction.

Soit $A(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{C}[\xi_1, \xi_2]$ le symbole d'un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^2$, d'ordre m; pour reprendre les notations du chapitre 3 de (7) on introduit aussi le polynôme P tel que l'on ait l'identité $A(\xi_1, \xi_2) = P(\xi_1 - i\xi_2, \xi_1 + i\xi_2)$ pour tout covecteur complexe (ξ_1, ξ_2): en particulier on a $A(D_1, D_2) = P(\partial, \bar{\partial})$.

Si $\xi = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$, on désigne par $[\xi]$ ou bien par $[\xi_1, \xi_2]$ la direction (complexe) définie par ξ.

DEFINITION 2.1. *Une direction de covecteur réelle, soit* η, *sera appelée fortement caractéristique pour l'opeérateur* $A(D)$ *s'il existe une suite* (ξ^n), $\xi^n \in \mathbf{C}^2$, *possédant les propriétés suivantes :*

a) $A(\xi^n) = 0$ *pour tout* n.

b) $|\xi^n| \to \infty$ *mais* $|\operatorname{Im} \xi^n|$ *reste borné lorsque* $n \to \infty$.

c) *la direction complexe* $[\xi^n]$ *tend vers* η.

Une droite réelle d'équation $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = a$ *sera dite fortement caractéristique si la direction du covecteur* (ξ_1, ξ_2) *est fortement caractéristique.*

On sait que les opérateurs hypoelliptiques sont caractérisés par l'absence de directions fortement caractéristiques.

PROPOSITION 2.1. *Toute direction fortement caractéristique est caractéristique. Toute direction caractéristique réelle simple est fortement caractéristique.*

En effet, soit ξ un covecteur réel de norme 1, non caractéristique, soit (ξ^n) une suite de covecteurs réels de norme 1, tendant vers ξ, soit (η^n) une suite bornée de covecteurs réels, et soit enfin (λ_n) une suite de nombres réels telle que $|\lambda_n|$ tende vers $+\infty$. La formule de Taylor

$$A(\lambda_n \xi^n + i\eta^n) = A_m(\lambda_n \xi^n) + 0(|\lambda_n|^{m-1}) = \lambda_n^m A_m(\xi^n) + 0(|\lambda_n|^{m-1}) \sim \lambda_n^m A_m(\xi)$$

montre qu'on ne peut avoir $A(\lambda_n \xi^n + i\eta^n) = 0$ pour tout n.

Pour le second point :

Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ un covecteur caractéristique réel simple. On peut supposer $A_m^1(\xi) \neq 0$.

Posons $\zeta = t\xi + \eta$ avec t réel $\neq 0$ et $\eta = (\eta_1, 0)$, covecteur complexe que l'on déterminera par la suite.

Posons $A = A_m + A_{m-1} + A'_{m-2}$, où A_{m-1} est homogène de degré $m-1$; ξ est fixé dans ce qui suit.

On a $A(\zeta) = t^{m-1}(A_m^1(\xi)\eta_1 + A_{m-1}(\xi)) + R(t, \eta_1)$, où R est un polynôme et t et η_1 dont le degré par rapport à t est au plus $m-2$.

On peut donc écrire

$$t^{1-m} A(\zeta) = g\left(\frac{1}{t}, \eta_1\right),$$

avec

$$g(\theta, \eta_1) = A_m^1(\xi)\eta_1 + A_{m-1}(\xi) + \sum_{\nu=1}^{m-1} \theta^\nu Q_\nu(\eta_1),$$

où les Q_ν sont des polynômes.

Lorsque $\theta = 0$, $\eta_1 = -\dfrac{A_{m-1}(\xi)}{A_m^1(\xi)}$ est solution de $g(\theta, \eta_1) = 0$ et de plus $\dfrac{\partial g}{\partial \eta_1}(0, \eta_1) = A_m^1(\xi) \neq 0$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction holomorphe φ définie pour $|\theta|$ assez petit telle que $g(\theta, \varphi(\theta))$ soit identi-

quement nul. Lorsque $\zeta = t\xi + (\eta_1, 0)$, avec t réel assez grand, et $\eta_1 = \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$, on a alors $A(\zeta) = 0$, ce qui démontre la proposition.

THEOREM 2.1. *Soit K un compact de $\mathbf{R}^2$, tel que toute droite fortement caractéristique par rapport à un polynôme différentiel $A(D)$ coupe K suivant un segment de droite. Alors, pour toute distribution u à support compact dans $\mathbf{R}^2$ satisfaisant* supp sing $Au) \subset K$, *on a* supp. sing $(u) \subset K$.

Remarque : Ce théorème précise ce qui avait été dit dans (7), où l'on avait supposé, pour parvenir à la même conclusion, que toutes les droites caractéristiques coupaient K suivant des segments de droite.

La preuve du théorème 2.1 nécessitera deux lemmes. Comme l'opérateur ∂ est elliptique, il revient au même de prouver le théorème pour l'opérateur de symbole $P(\bar{\zeta}, \zeta)$ ou pour celui de symbole $\bar{\zeta}^m P(\bar{\zeta}, \zeta)$. On supposera donc, désormais, que le degré de P est $2m$ et que $P(\partial, \bar{\partial})$ est divisible pcr ∂^m, et l'on utilise la factorisatiou donnée dans (7), au bas de la page 107, après avoir requarqué que l'on peut supposer p divisible par 4, $p = 4q$ $\left(\text{rappelons que } \frac{s}{p} \leq \frac{1}{2}\right)$:

$$P(\bar{\zeta}, \zeta) = \prod_{j=1}^{2m} \left(\bar{\zeta} - \sum_{n=-2q}^{+\infty} b_n^j |\zeta|^{-n/2q}\right)$$

pour $|\zeta|$ assez grand.

LEMME 2.1. *Soit* $g(\bar{\zeta}, \zeta) = \bar{\zeta} - \alpha|\zeta| - a_1|\zeta|^{1-1/2q} - \ldots - a_k|\zeta|^{1-k/2q} - \ldots$, *série convergente pour $\zeta \in \mathbf{C}$, $|\zeta|$ assez grand.*

Soit G un opérateur pseudo-différentiel de convolution dont le symbole coïncide avec $g(\xi_1 - i\xi_2, \xi_1 + i\xi_2)$ pour $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi|$ assez grand.

Si l'opérateur G n'est pas hypoelliptique, on a $|\alpha| = 1$, $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, et la direction du vecteur $(\sin\theta, \cos\theta)$ *est fortement caractéristique (c'est-à-dire que la direction du covecteur* $(\cos\theta, -\sin\theta)$ *est fortement caractéristique).*

Preuve du théorème 2.1, *moyennant le lemme* 2.1 :

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ tel que toute droite fortement caractéristique par rapport à $P(\partial, \bar{\partial})$ coupe K suivant des segments de droite. Il s'agit de démontrer que pour tout facteur G de $P(\partial, \bar{\partial})$, et pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ satisfaisant supp. sing $(Gu) \subset K$, on a supp. sing $(u) \subset K$. C'est évident si G est hypoelliptique.

Dans le cas contraire, appelons G' l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\bar{\zeta} + \alpha |\zeta|$; si supp. sing $(Gu) \subset K$, on a aussi supp sing $(G' Gu) \subset K$.

Mais le symbole de $G' G$ peut s'écrire $\bar{\zeta}(\bar{\zeta} - \alpha^2 \zeta + R)$, où R est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel de convolution d'ordre au plus $1 - 1/2q$. Soit M l'opérateur de symbole $\bar{\zeta} - \alpha^2 \zeta + R$, et posons $\alpha = \cos\theta + i \sin\theta$; dans (7) (cf. p. 109 et 111), nous avons montré que l'on pouvait déduire l'inclusion supp. sing $u \subset K$ de l'inclusion supp. sing $(Mu) \subset K$, pourvu que K fût coupé suivant des segments de droite par les droites parallèles au vecteur $(\sin\theta, \cos\theta)$: ceci démontre le théorème 2.1.

Début de la preuve du lemme 2.1 :

Il est clair, tout d'abord, qne si $|\alpha| \neq 1$, le symbole g est elliptique. Notons par ailleurs que si un symbole différentiel $g(\xi)$, d'ordre 1, vérifie une inégalité $|g(\xi)| \geq C |\xi|^{\varepsilon}$ pour $|\xi|$ assez grand, pour un couple de constantes strictement positives C et ε, alors l'opérateur associé est hypoelliptique, puisqu'il admet l'opérateur pseudo-différentiel « généralisé » de symbole $\dfrac{1}{g(\xi)}$ comme parametrix (la théorie des opérateurs pseudo-différentiels associés à des symboles pour lesquels on « gagne » moins d'une unité dans l'ordre d'homogénéité en dérivant par rapport à ξ a été faite par M. L. Hörmander : elle est du reste triviale dans le cas des opérateurs de convolution, seul cas qui nous intéresse ici.

LEMME 2.2. *Soit* $h(\bar{\zeta}, \zeta) = \bar{\zeta} - \alpha |\zeta| - a_1 |\zeta|^{1-1/2q} - \ldots - a_{2q-1} |\zeta|^{1/2q}$, *avec des constantes complexes* α, a_j, *et* $|\alpha| = 1$. *Supposons que* $|h(\bar{\zeta}, \zeta)| \to \infty$ *quand* $|\zeta| \to \infty$. *Il exist alors une constante* $C > 0$ *telle que l'on ait, pour* $|\zeta|$ *assez grand :* $|h(\bar{\zeta}, \zeta)| \geq C |\zeta|^{1/2q}$.

Notons que ce genre de lemmes, pour des *polynômes*, est d'un emploi courant dans les question d'hypoellipticité, et résulte alors du théorème de Seidenberg-Tarski : on s'en tire ici par des considérations élémentaires, vu le nombre de variables !

Preuve du lemme 2.2 :

On peut supposer, moyennant une rotation, que $\alpha = 1$. Posons, lorsque θ et σ sont réels, $\sigma > 0$:

$$f(\theta, \sigma) = h(\sigma^{2q} e^{i\theta}, \sigma^{2q} e^{-i\theta})$$

$$= (e^{i\theta} - 1)\, \sigma^{2q} - a_1 \sigma^{2q-1} - \ldots - a_{2q-1} \sigma.$$

Il s'agit de prouver que si $|f(\theta, \sigma)| \to \infty$ losque $\sigma \to \infty$, de façon uniforme par rapport à θ, il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(\theta, \sigma)| \geq C\sigma$ pour σ assez grand.

Pour tout vecteur $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-1}) \in \mathbf{R}^{2q-1}$, on a

$$f\left(\sum_{\nu=0}^{2q-1} \lambda_\nu \sigma^{-\nu}, \sigma\right) = \sigma^{2q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\nu=1}^{2q-1} i\lambda_\nu \sigma^{-\nu}\right)^n - a_1 \sigma^{2q-1} - \dots - a_{2q-1}\sigma.$$

Cette expression est soit identiquement nulle, soit équivalente ($\sigma \to \infty$) à $C\sigma^\mu$, $C \neq 0$, μ entier.

Si le premier cas se produit pour un certain vecteur λ, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, on choisit λ de façon que μ soit le plus petit possible, soit μ_0. On a toujours $\mu_0 \leq 2q - 1$, et l'on peut supposer $\mu_0 \geq 1$, sans quoi il n'y a rien à démontrer.

On peut d'ailleurs modifier λ en $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ avec $r = 2q - (\mu_0 + 1)$: la série considérée restera équivalente à $C\sigma^{\mu_0}$.

Pour prouver le lemme 2.2, il suffit de montrer qu'il ne peut exister de suite (θ_n, σ_n) telle que $\sigma_n \to \infty$ et $f(\theta_n, \sigma_n) = o(\sigma_n^{\mu_0})$: soit donc (θ_n, σ_n) une telle suite ; il est clair que l'on peut supposer que $\theta_n \to 0$. On pose alors $\theta_n = \theta'_n + \varepsilon_n$, avec $\theta'_n = \sum_{\nu=1}^{2q-\mu_0-1} \lambda_\nu \sigma_n^{-\nu}$.

On a $f(\theta_n, \sigma_n) - f(\theta'_n, \sigma_n) = e^{i\theta'_n}(e^{i\varepsilon_n} - 1)\sigma_n^{2q} \sim i\varepsilon_n \sigma_n^{2q}$.

D'une part $f(\theta'_n, \sigma_n) \sim C\sigma_n^{\mu_0}$, et d'autre part $f(\theta_n, \sigma_n) = o(\sigma_n^{\mu_0})$: d'où $\varepsilon_n \sim iC\sigma_n^{\mu_0 - 2q}$, ce qui montre d'ailleurs que C est imaginaire pur.

Considérons alors le vecteur

$$\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-\mu_0-1}, iC, 0, \dots, 0)$$

$$= (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{2q-\mu_0}, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{2q-1}.$$

On a

$$f\left(\sum_{\nu=1}^{2q-\mu_0} \lambda'_\nu \sigma^{-\nu}, \sigma\right) \sim K\sigma^\mu, \text{ avec } K \neq 0 \text{ et } \mu \geq \mu_0.$$

Mais

$$f\left(\sum_{\nu=1}^{2q-\mu_0} \lambda'_\nu \sigma_n^{-\nu}, \sigma_n\right) = f(\theta_n, \sigma_n) + [f(\theta_n - \varepsilon_n + iC\sigma_n^{\mu_0-2q}, \sigma_n) - f(\theta_n, \sigma_n)]$$

$$= f(\theta_n, \sigma_n) + e^{i\theta_n}[\exp(-i(\varepsilon_n - iC\sigma_n^{\mu_0-2q})) - 1]\sigma_n^{2q},$$

et

$$[\exp(-i(\varepsilon_n - iC\,\sigma_n^{\mu_0-2q})) - 1]\,\sigma_n^{2q} \backsim -i\sigma_n^{2q}(\varepsilon_n - iC\,\sigma_n^{\mu_0-2q}) = o(\sigma_n^{\mu_0}),$$

d'où $f\left(\sum_{\nu=1}^{2q-\mu_0} \lambda'_\nu\,\sigma_n^{-\nu}, \sigma_n\right) = o(\sigma_n^{\mu_0})$, ce qui est une contradiction.

Fin de la preuve du lemme 2.1 :

Lorsque $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ est un covecteur *complexe*, on pose $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ et $\tilde{\zeta} = \xi_1 - i\xi_2$.

On peut alors définir

$$g(\tilde{\zeta}, \zeta) = \tilde{\zeta} - \alpha(\zeta\tilde{\zeta})^{1/2} - a_1(\zeta\tilde{\zeta})^{1/2-1/4q} - \ldots - a_k(\zeta\tilde{\zeta})^{1/2-k/4q} - \ldots$$

lorsque la partie réelle de $\zeta\tilde{\zeta}$ est assez grande : $g(\tilde{\zeta}, \zeta)$ est un des facteurs de $P(\tilde{\zeta}, \zeta) = A(\xi_1, \xi_2)$; $h(\tilde{\zeta}, \zeta)$ est défini en tronquant cette série à l'ordre $k = 2q$.

On suppose G non hypoelliptique.

Grâce au lemme 2.2 et au début de la preuve du lemme 2.1, on sait qu'il existe une suite (η^n), $\eta^n \in \mathbf{R}^2$ telle que $|\eta^n| = [|\eta_1^n|^2 + |\eta_2^n|^2]^{1/2} \to \infty$ mais $h(\eta_1^n - i\eta_2^n, \eta_1^n + i_2^n)$ reste borné.

Posons

$$\varrho_n = |\eta^n|, \text{ et } z_n = \alpha\varrho_n + a_1\varrho_n^{1-1/2q} + \ldots + a_k\varrho^{1-\frac{k}{2q}} + \ldots.$$

Le reste de cette série en commençant à $k = 2q$ est borné quand $n \to \infty$, d'où

$$z_n = \eta_1^n - i\eta_2^n + 0(1) \quad \text{et} \quad |z_n| = \varrho_n + 0(1).$$

Définissons la suite (ξ^n) de covecteurs complexes par les équations

$$\xi_1^n - i\xi_2^n = z_n \quad \text{et} \quad \xi_1^n + i\xi_2^n = \frac{\varrho_n^2}{z_n}.$$

Alors $(\xi_1^n - i\xi_2^n)(\xi_1^n + i\xi_2^n) = \varrho_n^2$ est réel et tend vers $+\infty$, et $g(\xi_1^n - i\xi_2^n, \xi_1^n + i\xi_2^n)$ et par suite $A(\xi_1^n, \xi_2^n)$ sont nuls pour tout n. Par ailleurs, comme

$$\xi_1^n = \frac{z_n}{2} + \frac{\varrho_n^2}{2z_n} \text{ et } \xi_2^n = i\left(\frac{z_n}{2} - \frac{\varrho_n^2}{2z_n}\right),$$

on a

$$\operatorname{Im} \xi_1^n = \frac{1}{2} (\operatorname{Im} z_n)\left(1 - \frac{\varrho_n^2}{|z_n|^2}\right) \text{ et } \operatorname{Im} \xi_2^n = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} z_n)\left(1 - \frac{\varrho_n^2}{|z_n|^2}\right).$$

Comme

$$1 - \frac{\varrho_n^2}{|z_n|^2} = \frac{(|z_n| - \varrho_n)(|z_n| + \varrho_n)}{|z_n|^2} = 0\left(\frac{1}{\varrho_n}\right),$$

on voit que $\operatorname{Im} \xi^n$ rest borné quand $n \to \infty$.

Enfin, examinons la limite de la direction de covecteur définie par ξ^n :

$$\frac{1}{\varrho_n} \operatorname{Re} \xi_1^n = \frac{1}{2\varrho_n} (\operatorname{Re} z_n)\left(1 + \frac{\varrho_n^2}{|z_n|^2}\right) \sim \frac{\operatorname{Re} z_n}{\varrho_n} \to \operatorname{Re} \alpha$$

et

$$\frac{1}{\varrho_n} \operatorname{Re} \xi_2^n = -\frac{1}{2\varrho_n} (\operatorname{Im} z_n)\left(1 + \frac{\varrho_n^2}{|z_n|^2}\right) \sim -\frac{\operatorname{Im} z_n}{\varrho_n} \to -\operatorname{Im} \alpha,$$

d'où

$$[\xi_1^n, \xi_2^n] \to [\operatorname{Re} \alpha, -\operatorname{Im} \alpha] = [\cos\theta, -\sin\theta].$$

Ceci prouve que la direction $[\cos\theta, -\sin\theta]$ est fortement caractéristique et termine donc la preuve du lemme 2.1.

On aborde maintenant in preuve de la réciproque du théorème 2.1.

LEMME 2.3. *Soit* $[\cos\theta, -\sin\theta]$ *une direction de covecteur fortement caractéristique pour l'opérateur* $A(D_1, D_2) = P(\partial, \bar{\partial})$. *Il existe un entier* $q \geq 1$, *un nombre réel* $B > 0$ *et deux suites* $(b_k^j)_{k \geq -2q}$ $(j = 1, 2)$ *de nombres complexes vérifiant les propriétés suivantes :*

a) les deux séries $\xi_j(\sigma) = \sum_{k=-2q}^{\infty} b_k^j \sigma^{-k}$ *sont convergentes pour* σ *réel* $\geq B$.

b) $A(\xi_1(\sigma), \xi_2(\sigma)) = 0$ *pour* $\sigma \geq B$

c) $b_{-2q}^1 = \cos\theta$, $b_{-2q}^2 = -\sin\theta$, et $\operatorname{Im} b_k^j = 0$ *pour* $k < 0$.

En effet, l'un des facteurs $g(\tilde{\zeta}, \zeta)$ de $P(\tilde{\zeta}, \zeta)$, soit

$$g(\tilde{\zeta}, \zeta) = \tilde{\zeta} - \alpha(\zeta\tilde{\zeta})^{1/2} - a_1(\zeta\tilde{\zeta})^{1/2 - 1/4q} - \ldots - a_k(\zeta\tilde{\zeta})^{1/2 - k/4q} - \ldots,$$

vérifie la propriété suivante :

il existe une suite (η^n) de covecteurs complexes telle que

$$|\eta^n|^2 = |\eta_1^n|^2 + |\eta_2^n|^2 \to \infty, \qquad g(\eta_1^n - i\eta_2^n, \eta_1^n + i\eta_2^n) = 0$$

pour tout n, $|\operatorname{Im}\eta^n|$ reste borné, et $[\eta^n] \to [\cos\theta, -\sin\theta]$, direction fortement caractéristique donnée.

On a

$$(\eta_1^n - i\eta_2^n)(\eta_1^n + i\eta_2^n) = (\eta_1^n)^2 + (\eta_2^n)^2 \backsim |\eta^n|^2, \quad n \to \infty.$$

D'où

$$\eta_1^n - i\eta_2^n = \alpha\,|\eta^n| + o(|\eta^n|),$$

$$\eta_1^n = |\eta^n| \operatorname{Re}\alpha + o(|\eta^n|), \qquad \eta_2^n = -|\eta^n| \operatorname{Im}\alpha + o(|\eta^n|),$$

ce qui prouve que $[\eta^n] \to [\operatorname{Re}\alpha, -\operatorname{Im}\alpha]$ et par suite que $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$.

Regardons maintenant

$$h(\bar{\zeta}, \zeta) = \bar{\zeta} - \alpha\,|\zeta| - a_1\,|\zeta|^{1-1/2q} - \dots - a_{2q-1}\,|\zeta|^{1/2q},$$

et posons

$$\bar{\zeta}_n = \eta_1^n - i\eta_2^n, \qquad \zeta_n = \overline{\eta_1^n} + i\overline{\eta_2^n}.$$

On va montrer que $h(\bar{\zeta}_n, \zeta_n)$ reste borné quand $n \to \infty$: il en est ainsi de $h(\eta_1^n - i\eta_2^n, \eta_1^n + i\eta_2^n)$, et la différence s'écrit

$$\alpha\,[((\eta_1^n)^2 + (\eta_2^n)^2)^{1/2} - (|\eta_1^n|^2 + |\eta_2^n|^2)^{1/2}]$$

$$+ \sum_{k=1}^{2q-1} a_k\,[((\eta_1^n)^2 + (\eta_2^n)^2)^{1/2-k/4q} - (|\eta_1^n|^2 + |\eta_2^n|^2)^{1/2-k/4q}].$$

En posant $y_n = ((\eta_1^n)^2 + (\eta_2^n)^2)^{1/2}$, on a $y_n^2 = |\eta^n|^2 + 0(|\eta^n|)$, et $r_n = \dfrac{y_n^2}{|\eta^n|^2} - 1 = 0\left(\dfrac{1}{|\eta^n|}\right)$, d'où pour $s \leq \dfrac{1}{2}$:

$$y_n^{2s} - |\eta^n|^{2s} = |\eta^n|^{2s}\,[(1 + r_n)^s - 1] \backsim s\,|\eta^n|^{2s}\,r_n = 0(|\eta^n|^{2s-1}) = 0(1).$$

Ceci prouve que $h(\bar{\zeta}_n, \zeta_n)$ reste borné.

Revenons à la preuve et aux notations du lemme 2.2. On a vu que si l'on avait $\mu_0 \geq 1$, il ne pouvait exister de suite (ζ_n) de nombres complexes telle que $|\zeta_n| \to \infty$ mais $h(\bar{\zeta}_n, \zeta_n)$ soit borné.

Par suite $\mu_0 \leq 0$ et l'on peut choisir un vecteur $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2q-1}) \in \mathbf{R}^{2q-1}$ tel que $f\left(\sum_{\nu=1}^{2q-1} \lambda_\nu \sigma^{-\nu}, \sigma\right) = h\left(\sigma^{2q} \exp\left(i \sum_{\nu=1}^{2q-1} \lambda_\nu \sigma^{-\nu}\right), \sigma^{2q} \exp\left(-i \sum_{\nu=1}^{2q-1} \lambda_\nu \sigma^{-\nu}\right)\right)$ reste borné quand σ réel $\to +\infty$.

Revenons maintenant à la fin de la preuve du lemme 2.1 : définissons les fonctions réelles η_1 et η_2 par

$$\eta_1(\sigma) - i\eta_2(\sigma) = \sigma^{2q} \exp\left(i \sum_{\nu=1}^{2q-1} \lambda_\nu \sigma^{-\nu}\right);$$

prenons

$$\varrho(\sigma) = \sigma^{2q},\ z(\sigma) = \alpha\sigma^{2q} + a_1 \sigma^{2q-1} + \dots + a_k \sigma^{2q-1} + \dots .$$

On a

$$z(\sigma) = \eta_1(\sigma) - i\eta_2(\sigma) + 0(1), \qquad \sigma \to \infty.$$

On définit enfin $\xi = (\xi_1, \xi_2) : [B, +\infty[\to \mathbb{C}^2$ par les formules

$$\xi_1(\sigma) - i\xi_2(\sigma) = z(\sigma) \quad \text{et} \quad \xi_1(\sigma) + i\xi_2(\sigma) = \frac{\sigma^{4q}}{z(\sigma)}.$$

Comme dans la preuvre du lemme 2.1, on voit que l'on a

$$P(\xi_1(\sigma) - i\xi_2(\sigma), \xi_1(\sigma) + i\xi_2(\sigma)) = 0 \qquad \text{pour } \sigma \text{ assez grand,}$$

que $\operatorname{Im} \xi_j(\sigma)$ $(j = 1, 2)$ reste borné quand $\sigma \to +\infty$, que

$$\sigma^{-2q} \operatorname{Re} \xi_1(\sigma) \to \cos\theta \qquad \text{et que } \sigma^{-2q} \operatorname{Re} \xi_2(\sigma) \to -\sin\theta;$$

le lemme 2.3 en découle.

LEMME 2.4. *Soit* $[\cos\theta, -\sin\theta]$ *une direction de covecteur fortement caractéristique par rapport à l'opérateur* $A(D)$. *Soit* $\xi(\sigma) = (\xi_1(\sigma), \xi_2(\sigma))$ *la fonction définie pour* $\sigma \geq B$ *à l'aide du lemme* 2.3. *Soit* Δ *la droite fortement caractéristique d'équation* $x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta = 0$.

Enfin, soit $f(\sigma)$ *une fonction* C^∞ *pour* $\sigma \geq B$ *satisfaisant les estimations* $f^{(n)}(\sigma) = 0(\sigma^{h+n(2q-2)})$, $\sigma \to \infty$, *pour un certain* h *réel* < -1 *indépendant de* n.

Alors la solution u *de l'équation* $A(D)u = 0$ *définie par*

$$u(x) = \int_B^{+\infty} e^{2i\pi\langle x, \xi(\sigma)\rangle} f(\sigma)\, d\sigma$$

est de classe C^∞ *dans le complémentaire de* Δ.

Remarquons d'abord que u est continue et bornée sur $\mathbf{R}^2$ puisque $\operatorname{Im} \xi(\sigma)$ reste borné quand $\sigma \to \infty$.

Si x varie dans K, compact de $\mathbf{R}^2$ ne coupant pas Δ, on a

$$|\langle x, \xi'(\sigma)\rangle| \backsim |2q\,\sigma^{2q-1}(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta)| \geq C\,\sigma^{2q-1}$$

pour σ assez grand, disons pour $\sigma \geq B$, cas auquel on peut se ramener.

Si nous appelons E_h l'espace des fonctions $f(x, \sigma)$ de classe C^∞ sur $K \times [B, +\infty[$ vérifiant les estimations

$$\frac{\partial^n f}{\partial \sigma^n}(x, \sigma) = 0\,(\sigma^{h+n(2q-2)}), \qquad \sigma \to \infty,$$

la formule d'intégration par parties

$$\int_B^\infty e^{2i\pi\langle x, \xi(\sigma)\rangle} f(x, \sigma)\,d\sigma = \int_B^\infty e^{2i\pi\langle x, \xi(\sigma)\rangle} \frac{\langle x, \xi''(\sigma)\rangle}{2i\pi\langle x, \xi'(\sigma)\rangle^2} f(x, \sigma)\,d\sigma$$

$$- f(x, B)\frac{e^{2i\pi\langle x, \xi(A)\rangle}}{2i\pi\langle x, \xi'(A)\rangle} - \int_B^\infty \frac{e^{2i\pi\langle x, \xi(\sigma)\rangle}}{2i\pi\langle x, \xi'(\sigma)\rangle}\frac{\partial f}{\partial \sigma}(x, \sigma)\,d\sigma$$

permet, pour toute $f \in E_h$, d'écrire

$$\int_B^\infty e^{2i\pi\langle x, \xi(\sigma)\rangle} f(x, \sigma)\,d\sigma = v(x) + \int_B^\infty e^{2i\pi\langle x, \xi(\sigma)\rangle} g(x, \sigma)\,d\sigma;$$

où $v \in C^\infty(K)$ et $g \in E_{h-1}$.

Le lemme 2.4 en résulte.

THEOREM 2.2. *Soit K un compact de $\mathbf{R}^2$ coupé suivant une partie non connexe par une droite Δ fortement caractéristique par rapport à un opérateur $A(D)$. Il existe alors une distribution u à support compact dans $\mathbf{R}^2$, telle que* supp. sing $(Au) \subset K$ *mais* supp. sing $(u) \not\subset K$.

On se ramène, par une troncature, au problème suivant (cf. Hörmander, (3)) : construire une fonction continue u solution de l'équation $A(D)\,u = 0$, telle que supp. sing $(u) = \Delta$.

On peut supposer, avec les notations du lemme 2.4, que Δ est définie par l'équation $x_1\cos\theta - x_2\sin\theta = 0$.

Soit x^0 un point de Δ : avec les notations du lemme 2.4, on voit que le développement en série de $\langle x^0, \xi(\sigma)\rangle$ commence par un terme de degré

$2q - 1$ au plus ; en posant

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-2i\pi \langle x^0, \xi(\sigma) \rangle},$$

la fonction $f(\sigma)$ vérifie les hypothèses du lemme 2.4 avec $h = -2$.

On va prouver que la solution continue u de l'équation $A(D)u = 0$ associée à $f(\sigma)$ n'est pas de classe C^1 en x^0.

Posons en effet $L = (\cos\theta) D_1 - (\sin\theta) D_2$, et

$$v_n(x) = n^2 e^{-\pi n^2 |x - x^0|^2}.$$

On a

$$\langle Lu, v_n \rangle = \int_B^\infty \widehat{v_n}(-\xi(\sigma)) [(\cos\theta)\xi_1(\sigma) - (\sin\theta)\xi_2(\sigma)] f(\sigma)\, d\sigma$$

$$= \int_B^\infty \exp\left[-\frac{\pi}{n^2}[(\xi_1(\sigma))^2 + (\xi_2(\sigma))^2 + (\xi_2(\sigma))^2]\right] [(\cos\theta)\xi_1(\sigma) -$$

$$- (\sin\theta)\xi_2(\sigma)] e^{2i\pi \langle x^0, \xi(\sigma) \rangle} f(\sigma)\, d\sigma$$

$$= \int_B^\infty \sigma^{-2} \exp\left[-\frac{\pi}{n^2}[(\xi_1(\sigma))^2 + (\xi_2(\sigma))^2]\right] [(\cos\theta)\xi_1(\sigma) - (\sin\theta)\xi_2(\sigma)]\, d\sigma.$$

En remarquant que $(\xi_1(\sigma))^2 + (\xi_2(\sigma))^2 \backsim \sigma^{4q}$ et que $(\cos\theta)\xi_1(\sigma) - (\sin\theta)\xi_2(\sigma) \backsim \sigma^{2q}$, on voit que

$$\langle Lu, v_n \rangle \backsim n^{\frac{2q-1}{2q}} \int_0^\infty e^{-\pi\tau^{4q}} \tau^{2q-2}\, d\tau \longrightarrow \infty.$$

Comme la suite (v_n) converge dans l'espace des mesures et qu'il est clair par ailleurs que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, égale à 1 dans un voisinage de x^0, $\langle Lu, (1-\varphi) v_n \rangle \longrightarrow 0$, on voit que Lu n'est pas continue en x^0.

Choisissons maintenant une suite $(x^k)_{k \geq 1}$ de points de Δ, partout dense sur cette droite ; pour tout k, soit u_k une solution continue de $A(D)u_k = 0$, C^∞ dans le complémentaire de Δ, qui ne soit pas de classe C^1 en x^k : préférant les espaces de Sobolev, nous dirons que u_k est H^0_{loc} partout, mais H^3_{loc} dans aucun voisinage de x^k.

Soit J un opérateur pseudo-différentiel de convolution par une distribution à support compact dfférant de l'opérateur de symbole $(1 + |\xi|^2)^{-3/2}$

par un opérateur régularisant. Il existe une suite (a_k) de nombres réels strictement positifs telle que, pour toute suite (c_k) de nombres complexes vérifiant $|c_k| \leq a_k$ pour tout k, et pour tout entier positif s, la série $\sum_{k \geq s} c_k J^k u_k$ soit convergent dans $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \Delta) \cap H^{3s}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ (en effet, cet espace est à base dénombrable de semi-normes): la somme u de la série $\sum_{k \geq 1} c_k J^k u_k$ est continue, vérifie $A(D)u = 0$, et il est clair que si c_s est choici assez petit et non nul la somme $\sum_{k \leq s} c_k J^k u_k$ ne peut être de classe H^{3s+3} dans un voisinage de x^s.

Ceci preuve que u est singulière en chaque point x^s, et termine la preuvre du théorème 2.2.

§ 3. Opérateurs homogènes sur $\mathbf{R}^3$.

Soit $P(D)$ un opérateur différentiel è coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$, dont le symbole $P(\xi)$ est homogène de degré $m \geq 2$ et à valeurs réelles. Soit V le cône constitué des ξ tels que l'on ait $P^{(j)}(\xi) = 0$ pour tout j. Soit $H(\xi)$ la matrice hessienne $H(\xi) = (P^{(jk)}(\xi))$.

PROPOSITION 3.1. *Supposons que pour tout $\xi \in S$, $\xi \neq 0$, la matrice $H(\xi)$ soit de rang $n-1$; le cône S est alors la réunion d'un nombre fini de droites, et pour tout point $\xi \in S$, $\xi \neq 0$, la restriction de la forme quadratique $v \longmapsto \langle H(\xi) v, v \rangle$ au sous-espace orthogonal à ξ est non dégénérée.*

Preuve: Soit Σ lo sphère unité de $\mathbf{R}^n$. Plaçons-nous au voisinage d'un point de Σ où $\xi_1 \neq 0$, disons $\xi_1 > 0$, où nous prenons comme coordonnées locales $\xi_2, \ldots, \xi_n$. Pour $j \geq 2$, posons $f_j(\xi_2, \ldots, \xi_n) = P^{(j)}((1 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Pour montrer le premier point de la proposition, il suffit de prouver que les équations $f_j = 0$ sont indépendantes. Pour $k \geq 2$, $j \geq 2$, on a $\frac{\partial f_j}{\partial \xi_k} = \frac{1}{\xi_1}[\xi_1 P^{(jk)} - \xi_k P^{(j1)}]$. Soit $(\alpha_k)_{k \geq 2}$ un vecteur appartenant au noyau de la matrice $\left(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_k}\right)$. Cela signifie que pour tout $j \geq 2$, on a

$$\sum_{k \geq 2} \alpha_k (\xi_1 P^{(jk)} - \xi_k P^{(j1)}) = 0 . \tag{1}$$

En multipliant par ξ_j et en faisant la somme pour $j \geq 2$, cela donne, compte tenu des relations d'Euler:

$$\sum_{k \geq 2} \alpha_k \xi_1 [(m-1) P^{(k)} - \xi_1 P^{(1k)}] - \sum_{h \geq 2} \alpha_k \xi_k [(m-1) P^{(1)} - \xi_1 P^{(11)}] = 0,$$

relation qui, en un point de $S \cap \Sigma$, se réduit à

$$(2) \qquad (\sum_{k\geq 2} \alpha_k \xi_k) P^{(11)} - \xi_1 \sum_{k\geq 2} \alpha_k P^{(1k)} = 0$$

Considérons alors le vecteur $v = (v_1, \dots, v_n)$, avec $v_1 = -\sum_{k\geq 2} \alpha_k \xi_k$ et $v_k = \xi_1 \alpha_k$ pour $k \geq 2$.

On a $H(\xi) v = 0$, comme on le vérifie à l'aide des relations (1) et (2). Il est clair par ailleurs que $\xi \in \operatorname{Ker} H(\xi)$ en vertu des relations d'Euler. Comme $H(\xi)$ est supposée de rang $n-1$, on en déduit l'existence d'un nombre réel λ tel que $-\sum_{k\geq 2} \alpha_k \xi_k = \lambda \xi_1^2$ et $\xi_1 \alpha_k = \lambda \xi_1 \xi_k$ pour $k \geq 2$. Ces relations entraînent $\lambda \xi_1^2 = -\sum_{k\geq 2} \lambda \xi_k^2$, d'où $\lambda = 0$, ce qui prouve la première partie de la proposition 3.1.

Pour montrer la second point, on peut, après changement linéaire ortogonal de coordonnées, supposer que le point ξ donné sur $S \cap \Sigma$ est le point $(1, 0, \dots, 0)$. La restriction au sous espace orthogonal à ξ de la forme quadratique dont la matrice est $H(\xi)$ est déterminée par la matrice $(P^{(jk)})_{j,k\geq 2}$, laquelle est régulière puisque tous les coefficients $(P^{(k1)})_{k\geq 1}$ de la matrice $H(\xi)$ sont nuls et que celle-ci est de rang $n-1$: ceci termine la preuve de la proposition 3.1.

THEOREME 3.1. *Soit $P(\xi)$ un polynôme homogène réel d'ordre $m \geq 3$ sur $\mathbf{R}^3$; soit V son cône caractéristique, et soit S le sous-cône défini par les equations $P^{(j)}(\xi) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$. Supposons qu'en tout point $\xi \in S \setminus \{0\}$, $H(\xi)$ soit de rang 2. Soit S_1 le sous-cône de S engendré par les points de $S \cap \Sigma$ (Σ sphère unité de $\mathbf{R}^3$) isolés dans $V \cap \Sigma$.*

Soit p_1 l'ensemble des direction de droites de $\mathbf{R}^3$ qui sont orthogonales à V en des points réguliers de V (i.e. des points de $V \setminus S$) ; soit p_2 l'ensemble des directions de plans de $\mathbf{R}^3$ qui sont orthogonales à des droites de S_1.

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et K et L deux parties compactes de Ω, avec $K \subset L$. Supposons les deux conditions suivantes satisfaites :

a) pour tout plan E_2 parallèle à un élément de p_2, l'homomorphisme d'inclusion (en cohomologie d'Alexander à coefficients réels) $H^2(E_2 \cap \Omega, E_2 \cap L) \to H^2(E_2 \cap \Omega, E_2 \cap K)$ est trivial.

b) pour toute droite E_1 parallèle à un élément de $\overline{p}_1$ (adhérence de p_1 dans l'espace projectif $P_2(\mathbf{R})$), l'homomorphisme d'inclusion $H^1(E_1 \cap \Omega, E_1 \cap L) \to H^1(E_1 \cap \Omega, E_1 \cap K)$ est trivial.

Alors pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que $P(D)u$ soit C^∞ en dehors de K, u est C^∞ en dehors de L.

Il s'agit de prouver que pour tout point $x^0 \in \Omega \setminus L$, et pour tout point $\xi^0 \in \Sigma$, il existe un voisinage W de ξ^0 dans Σ tel que pour toute fonction

$\alpha(\xi)$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ et homogène de degré 0, vérifiant $\Sigma \cap \operatorname{supp}(\alpha) \subset W$, le distribution $\Theta[\alpha]u$ soit de classe C^∞ dans un voisinage de x^0. Le théorème 3.1 en résultera au moyen d'une partition de l'unité sur Σ.

Nous allons distinguer trois cas, selon que ξ^0 appartient à $\Sigma \setminus (\Sigma \cap V)$, à $\Sigma \cap (V \setminus S)$ ou à $\Sigma \cap S$.

Premier cas : ξ^0 appartient à $\Sigma \setminus (\Sigma \cap V)$:

Cela signifie que $P(\xi^0) \neq 0$; on applique alors le cas *a*) du lemme 1.4 à l'opérateur de symbole $|\xi|^{1-m} P(\xi)$.

Deuxième cas : ξ^0 appartient à $\Sigma \cap (V \setminus S)$:

On a donc $P(\xi^0) = 0$, et $dP(\xi^0) \neq 0$.

En posant $h(\xi) = |\xi|^{1-m} P(\xi)$, on voit que le vecteur $dh(\xi^0)$ est orthogonal à V en un point régulier de V: le cas *b*) du lemme 1.4 permet de conclure.

Troisième cas : ξ^0 appartient à $\Sigma \cap S$:

Soit f la restriction de P à Σ: ξ^0 est un point critique de f, nou dégénéré d'après la deuxième partie de la proposition 3.1. D'après un lemme de Morse (cf. (4)), il existe dans un voisinage de ξ^0 relativement à Σ deux fonctions C^∞ réelles g et h, s'annulant en ξ^0 sans y avoir de point critique, telles que l'on ait, dans U, soit $f = gh$, soit $f = \pm(g^2 + h^2)$. Sans changer g et h dans un certain voisinage U de ξ^0 relativement à Σ, prolongeons-les en des fonctions C^∞ sur Σ, puis en des fonctions homogènes de degré 1 sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$: on a donc $P(\xi) = |\xi|^{m-2} g(\xi) h(\xi)$ ou $\pm |\xi|^{m-2} [(g(\xi))^2 + (h(\xi))^2]$ dans le cône engendré par U.

Dans le premier de ces deux cas, le vecteur $dg(\xi)$ est la limite du vecteur $dg(\xi)$ lorsque ξ tend vers ξ^0 en restant sur le cône d'équation $g(\xi) = 0$: il en résulte que la direction definie par $dg(\xi^0)$ appartient à $\overline{p}_1$, et comme il en est de même pour la direction définie par $dh(\xi^0)$, deux applications du cas *b*) du lemme 1.4 permettent de conclure.

Enfin, lorsque f a en ξ^0 un zéro qui est un extremum local, le point ξ^0 appartient à S_1, et on écrit $P(\xi) = \pm |\xi|^{m-2} (g(\xi) + ih(\xi))(g(\xi) - ih(\xi))$ dans le cône engendré par U. Comme le plan engendré par $dg(\xi^0)$ et $dh(\xi^0)$ est le plan orthogonal à ξ^0, on conclut en appliquant deux fois le cas *c*) du lemme 1.4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. G. ANDERSSON, *Propagation of analyticity of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Arkiv för matematik,* p. 277, 1971.

[2] L. HORMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables,* Van Nostrand, 1966.

[3] L. HORMANDER, *On the singularities of solutions of partial differential equations,* Comm. on Pure and Appl. Math., p. 329, 1970.

[4] J. W. MILNOR, *Morse Theory, Annals of Mathematics Studies,* Princeton Univ. Press, 1968.

[5] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology,* Mc Graw Hill 1966.

[6] F. TREVES, *Linear partial differential equations,* Gordon & Breach 1970.

[7] A. UNTERBERGER, *Résolution d'équations aux dérivées partielles dans des espaces de distributions d'ordre de régularité variable,* Ann. de l'Inst. Fourier, t. 21, fasc. 2, p. 87, 1971.

[8] A. UNTERBERGER, *Ouverts stablement convexes par rapport à un opérateur différentiel, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier* 1972.

[9] A. UNTERBERGER, *Sobolev spaces of variable order and problems of convexity for partial differential operators with constant coefficients,* Coll. sur les équations aux dérivées partielles, Soc. Math. de France, 1973.