

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. CANUTO

J. P. SPEDER

Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 27, n° 3 (1973), p. 405-416

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_405_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN CRITERE D'ECLATEMENT POUR LES CONDITIONS DE WHITNEY

G. CANUTO et J. P. SPEDER

Introduction.

Soient X un espace $\mathbb{C}$ -analytique réduit de dimension pure, X_{sing} le lieu singulier de X , $X_{\text{lisse}} = X - X_{\text{sing}}$, Y un sous espace lisse de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X .

Dans cet article nous donnons un critère permettant de vérifier les conditions de Whitney ([3] p. 540) pour le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ le long de Y .

Plus précisément soient $\tilde{\omega}: \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement normalisé de X le long du produit de l'idéal I de Y par l'idéal jacobien J de X et $\tilde{Y}$ l'espace réduit de support $\tilde{\omega}^{-1}(Y)$.

Nous montrons, d'après une idée d'H. HIRONAKA (voir [1] p. 9 déf. 2) le :

Théorème : Si en tout point d'un ouvert analytique dense de $\tilde{Y}$, la fibre correspondante du morphisme $\tilde{\omega}: \tilde{Y} \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \tilde{Y} - \dim Y$, le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

Dans le cas où il existe une rétraction de X sur Y , il serait utile d'avoir un critère qui soit stable par changement de base (sur Y), c'est ce que nous nous proposons de déterminer dans un prochain travail.

Nous tenons à remercier vivement F. PHAM pour nous avoir amenés à nous intéresser à ces questions et faits profiter de ses idées et de ses conseils.

Ayant identifié $\mathbb{C}^M$ au produit cartésien $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p$ où $(M = s + p, s > 1, p \geq 0)$ à l'aide du système canonique de coordonnées $(z_1, \dots, z_M)$, considérons un sous-ensemble $\mathbb{C}$ -analytique réduit X d'un ouvert de $\mathbb{C}^M$ de codimension r en tout point ($s > r > 0$), défini par des fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_q$ (i.e. $f_1, \dots, f_q$ engendrent l'idéal des fonctions qui s'annulent sur X) et contenant la trace Y de $\{0\} \times \mathbb{C}^p$ sur cet ouvert.

Dans ces conditions, si I est l'idéal de Y dans X et J l'idéal jacobien de X , I est l'idéal engendré par $z_1, \dots, z_s$ et J est l'idéal engendré par les déterminants

$$D(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial z_{i_1}}, \dots, \frac{\partial f_{j_1}}{\partial z_{i_r}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{j_r}}{\partial z_{i_1}}, \dots, \frac{\partial f_{j_r}}{\partial z_{i_r}} \end{vmatrix} \quad \text{où } j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, q\} \\ i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, M\}$$

Notons $\tilde{\omega}: \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement normalisé de X le long de IJ , $\tilde{Y}$ l'espace réduit de support $\tilde{\omega}^{-1}(Y)$ et pour

$$j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, q\} \text{ et } i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, M\}, \quad \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{i_1}, \dots, z_{i_r})$$

la fonction

$$D(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{i_1}, \dots, z_{i_r})_0 \tilde{\omega}$$

Proposition 1: Si en tout point d'un ouvert analytique dense $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{Y}$ la fibre correspondante du morphisme $\tilde{\omega}: \tilde{Y} \rightarrow Y$ est de dimension: $\dim \tilde{Y} - \dim Y$, alors les conditions suivantes sont satisfaites:

CONDITION $\tilde{A}$: Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$, tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$, tout $(r-1)$ -uplet $(i_2, \dots, i_r)$ de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uplet $(j_1, \dots, j_r)$ de $\{1, \dots, q\}$ nous avons

$$\tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{Q}} \in IJ \mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$$

CONDITION $\tilde{B}$: pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$, il existe un entier $\sigma(\tilde{Q}) > 0$ tel que pour tout $(r-1)$ -uplet $(i_2, \dots, i_r)$ de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uplet $(j_1, \dots, j_r)$ de $\{1, \dots, q\}$ nous ayons

$$\left(\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right)_{\tilde{Q}}^{\sigma(\tilde{Q})} \in I^{\sigma(\tilde{Q})+1} J(\tilde{Q}) \mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$$

PREUVE : Elle s'établit de la façon suivante :

Nous montrons la Proposition 1 (qui est trivialement vérifiée en tout point de $\tilde{X} - \tilde{Y}$) en tout point d'un ouvert analytique dense de $\tilde{Y}$ puis, comme $\tilde{X}$ est un espace normal et les idéaux $I\tilde{O}_{\tilde{X}}$ et $J\tilde{O}_{\tilde{X}}$ sont inversibles, nous en déduirons la proposition en tout point.

Plus précisément, soit :

$$\tilde{U} = \tilde{X}_{\text{lisse}} \cap \{\tilde{Q} \in \tilde{Y}_{\text{lisse}} \cap \tilde{\Omega} : \tilde{\omega} : \tilde{Y}_{\text{lisse}} \rightarrow Y \text{ est une submersion en } \tilde{Q}\}.$$

L'ensemble $\tilde{X}_{\text{lisse}} \cap \tilde{Y}$ est dense dans $\tilde{Y}$ parce que $\tilde{X}$ est normal et $\tilde{Y}$ est une hypersurface de $\tilde{X}$.

L'ensemble $\{\tilde{Q} \in \tilde{Y}_{\text{lisse}} \cap \tilde{\Omega} : \tilde{\omega} : \tilde{Y}_{\text{lisse}} \rightarrow Y \text{ est une submersion en } \tilde{Q}\}$ est dense dans $\tilde{Y}_{\text{lisse}} \cap \tilde{\Omega}$, et donc dans $\tilde{Y}$, d'après l'hypothèse et ([3] p. 127. Proposition 1).

Nous en concluons que $\tilde{U}$ est un ouvert analytique dense de $\tilde{Y}$ et que l'espace $\tilde{Y} - \tilde{U}$ est de codimension ≥ 2 dans $\tilde{X}$.

Nous allons commencer par montrer la Proposition 1 en tout point $\tilde{Q} \in \tilde{U}$. Pour cela, il est utile d'avoir à l'esprit le :

LEMME : Soient $\tilde{I}$ l'idéal de $\tilde{O}_{\tilde{X}}$ définissant $\tilde{Y}$ et $\tilde{Y}_{\text{lisse}} = \bigcup_{\alpha} \tilde{Y}_{\alpha}$ la décomposition de $\tilde{Y}_{\text{lisse}}$ en composantes connexes.

Pour tout α il existe un et un seul entier $\sigma_{\alpha} > 0$ tel que pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}_{\text{lisse}} \cap Y_{\alpha}$ nous ayons

$$I\tilde{O}_{\tilde{X}, \tilde{Q}} = \tilde{I}_{\tilde{Q}}^{\sigma_{\alpha}}$$

En effet, comme $I\tilde{O}_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$ est monogène, il existe pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}_{\text{lisse}} \cap \tilde{Y}_{\text{lisse}}$ un entier $\sigma(\tilde{Q}) > 0$ tel que $I\tilde{O}_{\tilde{X}, \tilde{Q}} = \tilde{I}_{\tilde{Q}}^{\sigma(\tilde{Q})}$.

L'application : $\tilde{Q} \rightarrow \sigma(\tilde{Q})$ est localement constante sur $\tilde{X}_{\text{lisse}} \cap \tilde{Y}_{\alpha}$ qui est une variété connexe d'où le lemme.

Prenons alors un point $\tilde{Q} \in \tilde{U}_{\alpha} = \tilde{U} \cap \tilde{Y}_{\alpha}$ et quitte à transporter l'origine des coordonnées dans $\mathbb{C}^M$ au point $\tilde{\omega}(\tilde{Q})$, supposons que $\tilde{\omega}(\tilde{Q}) = 0$.

Il existe un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de $\tilde{Q}$ dans $\tilde{X}_{\text{lisse}}$ et des fonctions

$y, v_1, \dots, v_{s-r-1}$ holomorphes dans $\tilde{V}$ tels que :

$$1) \quad \tilde{V} \cap \tilde{Y} = \tilde{V} \cap \tilde{Y}_{\text{lisse}}$$

$$2) \quad \tilde{V} \cap \tilde{Y} = \{\tilde{p} \in \tilde{V} : y(\tilde{p}) = 0\}$$

$$3) \quad \{\tilde{V} ; (y, v_1, \dots, v_{s-r-1}, z_{s+1} \circ \tilde{\omega}, \dots, z_M \circ \tilde{\omega})\}$$

est une carte de $\tilde{X}_{\text{lisse}}$ au voisinage de $\tilde{Q}$ adaptée à la submersion $\tilde{\omega} : \tilde{Y}_{\text{lisse}} \rightarrow Y$.

Le lemme nous permet d'écrire $IO_{\tilde{X}, \tilde{Q}} = y_{\tilde{Q}}^{\sigma_a} O_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $(z_i \circ \tilde{\omega})_{\tilde{Q}}$ peut donc se mettre sous la forme $(z_i \circ \tilde{\omega})_{\tilde{Q}} = y_{\tilde{Q}}^{\sigma_a} g_{i, \tilde{Q}}$ où $g_{i, \tilde{Q}}$ est un germe de $O_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$ qui est inversible si $(z_i \circ \tilde{\omega})_{\tilde{Q}}$ engendre $IO_{\tilde{X}, \tilde{Q}}$.

DÉMONSTRATION DE LA CONDITION $\tilde{A})$ EN $\tilde{Q}$: Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ notons $\frac{\partial}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})}$ la dérivée partielle définie par la carte $\{\tilde{V} ; (y, v_1, \dots, v_{s-r-1}, z_{s+1} \circ \tilde{\omega}, \dots, z_M \circ \tilde{\omega})\}$.

Considérons alors, pour $j \in \{1, \dots, q\}$, la fonction $\frac{\partial (f_j \circ \tilde{\omega})}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})}$ nous avons

évidemment $\frac{\partial (f_j \circ \tilde{\omega})}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})} = 0$ sur $\tilde{V}$ et de plus

$$\frac{\partial (f_j \circ \tilde{\omega})}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})} = \frac{\partial f_j}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega} \frac{\partial (z_i \circ \tilde{\omega})}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})}.$$

Or

$$\left(\frac{\partial (z_i \circ \tilde{\omega})}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})} \right)_{\tilde{Q}} = y_{\tilde{Q}}^{\sigma_a} \left(-\frac{\partial g_i}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})} \right)_{\tilde{Q}}.$$

D'où

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega} \right)_{\tilde{Q}} = -y_{\tilde{Q}}^{\sigma_a} \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega} \frac{\partial g_i}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})} \right)_{\tilde{Q}}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{Q}} = & -y_{\tilde{Q}}^{\sigma_a} \left[\sum_{i=1}^s \frac{\partial g_i}{\partial (z_{s+k} \circ \tilde{\omega})} \times \right. \\ & \left. \times \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{Q}} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION DE LA CONDITION $\tilde{B}$) EN $\tilde{Q}$: Notons de même $\frac{\partial}{\partial y}$ la dérivée partielle définie par la carte $\{\tilde{V}; (y, v_1, \dots, v_{s-r-1}, z_{s+1} \circ \tilde{\omega}, \dots, z_M \circ \tilde{\omega})$ et, pour $j \in \{1, \dots, q\}$, considérons la fonction $\frac{\partial (f_j \circ \tilde{\omega})}{\partial y}$.

Nous avons encore $\frac{\partial (f_j \circ \tilde{\omega})}{\partial y} = 0$ sur $\tilde{V}$ et

$$\frac{\partial (f_j \circ \tilde{\omega})}{\partial y} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega} \frac{\partial (z_i \circ \tilde{\omega})}{\partial y}.$$

Or

$$y_{\tilde{Q}} \left(\frac{\partial (z_i \circ \tilde{\omega})}{\partial y} \right)_{\tilde{Q}} = \sigma_a(z_i \circ \tilde{\omega})_{\tilde{Q}} + y_{\tilde{Q}}^{\sigma_a+1} \left(\frac{\partial g_i}{\partial y} \right)_{\tilde{Q}}.$$

D'où

$$\left(\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega} \right)_{\tilde{Q}} = -\frac{1}{\sigma_a} y_{\tilde{Q}}^{\sigma_a+1} \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega} \frac{\partial g_i}{\partial y} \right)_{\tilde{Q}}$$

et

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{Q}} = -\frac{1}{\sigma_a} y_{\tilde{Q}}^{\sigma_a+1} \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^s \frac{\partial g_i}{\partial y} \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_i, z_{i_2}, z_{i_r}) \right]_{\tilde{Q}}.$$

Il suffit alors d'élever les deux membres de cette dernière égalité à la puissance σ_a .

Il ne reste plus qu'à étendre les deux démonstrations précédentes aux points de $\tilde{Y} - \tilde{U}$.

Pour la condition $\tilde{A}$), il suffit de remarquer que l'espace $\tilde{Y} - \tilde{U}$ est de codimension ≥ 2 dans $\tilde{X}$ et d'appliquer le théorème d'extension pour les espaces normaux ([3] p. 118, Prop 4).

Regardons la condition $\tilde{B}$):

Pour tout α et tout $\tilde{K} \in \tilde{U}_\alpha$ nous avons montré que

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{K}}^{\sigma_a} \in I^{\sigma_a+1} J^{\sigma_a} \mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{K}}.$$

Soient alors $\tilde{Q} \in \tilde{Y}$ et $\tilde{W}$ un voisinage de $\tilde{Q}$ dans $\tilde{X}$ qui ne coupe qu'un nombre fini de composantes $\tilde{Y}_\alpha$, disons $\tilde{Y}_{\alpha_1}, \dots, \tilde{Y}_{\alpha_l}$.

Posons $\sigma(\tilde{Q}) = \max(\sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_l})$

Pour tout point $\tilde{K} \in \tilde{W} - (\tilde{Y} - \tilde{U})$ nous avons alors

$$\left[\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right]_{\tilde{K}}^{\sigma(\tilde{Q})} \in I^{\sigma(\tilde{Q})+1} J^{\sigma(\tilde{Q})} \mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{K}}$$

et nous concluons de la même manière que pour la condition $\tilde{A}$.

Proposition 2: Soit S un point de Y .

Les conditions a) et b) dewhitney pour le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ en S le long de Y sont équivalentes aux :

CONDITION A) : Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$, tout indice $k \in \{1, \dots, p\}$, tout $(r-1)$ -uple $(i_2, \dots, i_r)$ de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uple $(j_1, \dots, j_r)$ de $\{1, \dots, q\}$:

$$\tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{S}}$$

n'engendre pas $J\mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{S}}$.

CONDITION B) : Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$ tout $(r-1)$ -uple $(i_2, \dots, i_r)$ de $\{1, \dots, M\}$ et tout r -uple $(j_1, \dots, j_r)$ de $\{1, \dots, q\}$:

$$\left(\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right)_{\tilde{S}}$$

n'engendre pas $IJ\mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{S}}$.

PREUVE.

I. Nous allons d'abord montrer que les conditions A) et B) entraînent les conditions a) et b).

Notons $gr(M, M-r)$ la variété grassmannienne des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^M$ de dimension $M-r$.

Soient $L \in \mathbb{P}\mathbb{C}^M$, $\tau \in gr(M, M-r)$ et $(R_m)_m, (S_m)_m$ deux suites de points de X tels que :

1) pour tout m , $R_m \in X_{\text{lisse}} - Y$, $S_m \in Y$

2) $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$

3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{S_m R_m} = L$; $\lim_{m \rightarrow \infty} T_{R_m} X_{\text{lisse}} = \tau$

où $\widehat{S_m R_m}$ désigne la direction définie par les points S_m et R_m et $T_{R_m} X_{\text{lisse}}$ l'espace vectoriel défini par l'espace tangent à X_{lisse} en R_m . Il faut montrer :

$$a) \{0\} \times \mathbb{C}^p = T_S Y \subset \tau$$

$$b) L \subset \tau.$$

Remarquons qu'une fois la condition a) montrée, nous pouvons supposer, pour prouver la condition b), que, pour tout m , S_m est la projection de R_m sur $Y = \{0\} \times \mathbb{C}^p$.

L'espace $X_{\text{lisse}} - Y$ est analytiquement isomorphe à

$$\tilde{X} - \tilde{\omega}^{-1}(X_{\text{sing}} \cup Y),$$

donc, pour tout m , il existe un et un seul point $\tilde{R}_m \in \tilde{X}$ tel que $\tilde{\omega}(\tilde{R}_m) = R_m$.

Comme $\tilde{\omega}$ est propre, nous pouvons supposer qu'il existe $\tilde{S} \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$ tel que $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{R}_m = \tilde{S}$.

D'après la condition A), nous pouvons supposer de plus que l'idéal inversible $J\tilde{O}_{\tilde{X}, \tilde{S}}$ est engendré par $\tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_1, \dots, z_r)_{\tilde{S}}$.

Il en résulte que, pour m suffisamment grand $T_{R_m} X_{\text{lisse}}$ est le noyau du morphisme $\mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^r$ défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(R_m) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_M}(R_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1}(R_m) & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial z_M}(R_m) \end{pmatrix}$$

Notons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_1}(m) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(R_m) \dots \frac{\partial f_1}{\partial z_M}(R_m) \right) \\ &\vdots \\ \overrightarrow{a_r}(m) &= \left(\frac{\partial f_r}{\partial z_1}(R_m) \dots \frac{\partial f_r}{\partial z_M}(R_m) \right) \end{aligned}$$

et $N(m)$ l'espace vectoriel de dimension r engendré par $\overrightarrow{a_1}(m), \dots, \overrightarrow{a_r}(m)$ c'est-à-dire l'espace normal à X_{lisse} en R_m (produit scalaire analytique).

Pour obtenir la condition *a*), il suffit de montrer que, pour tout $\vec{v} \in \{0\} \times \mathbb{C}^p$ et pour toute suite $(\vec{u}_m)_m$ telle que, pour tout m , $\vec{u}_m \in N(m)$ et $\|\vec{u}_m\| = 1$, nous avons :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{v} \cdot \vec{u}_m = 0 \text{ (produit scalaire analytique).}$$

Pour tout m , notons $D(m) = D(f_1, \dots, f_r; z_1, \dots, z_r)(R_m)$ et $D_{ij}(m)$ le déterminant du mineur du coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice définissant $D(m)$.

Si, pour tout m , nous écrivons :

$$\vec{u}_m = (u_{m,1}, \dots, u_{m,M})$$

et

$$\vec{u}_m = \eta_{m,1} \vec{a}_1(m) + \dots + \eta_{m,r} \vec{a}_r(m),$$

nous avons pour $1 \leq h \leq r$:

$$\eta_{m,h} = \frac{(-1)^{h+1}}{D(m)} \left(\sum_{l=1}^r (-1)^{l+1} u_{m,l} D_{h,l}(m) \right)$$

d'où, pour $1 \leq k \leq p$,

$$u_{m,s+k} = \frac{1}{D(m)} \left(\sum_{l=1}^r (-1)^{l+1} u_{m,l} D(f_1, \dots, f_r; z_{s+k}, z_1, \dots, \widehat{z_l}, \dots, z_r)(R_m) \right)$$

Mais, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ et pour tout $l \in \{1, \dots, r\}$, nous avons :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{D(f_1, \dots, f_r; z_{s+k}, z_1, \dots, \widehat{z_l}, \dots, z_r)(R_m)}{D(m)} = 0$$

car

$$\tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_{s+k}, z_1, \dots, \widehat{z_l}, \dots, z_r)_{\tilde{S}}$$

n'engendre pas $J\tilde{O}_{\tilde{X}, \tilde{S}}$ d'où la condition *a*).

Pour obtenir la condition *b*), il suffit de montrer, en conservant les mêmes notations, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\vec{S_m R_m}}{\|\vec{S_m R_m}\|} \cdot \vec{u}_m = 0$$

où, pour tout m , S_m est la projection de R_m sur $Y = \{0\} \times \mathbb{C}^p$.

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{S_m R_m}}{\|\overrightarrow{S_m R_m}\|} \cdot \overrightarrow{u_m} &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq s} |z_i(R_m)|^2}} \left(\sum_{i=1}^s z_i(R_m) \left(\sum_{h=1}^r \eta_{m,h} \frac{\partial f_h}{\partial z_i}(R_m) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq s} |z_i(R_m)|^2} D(m)} \left(\sum_{l=1}^r (-1)^{l+1} u_{m,l} \left(\sum_{i=1}^s z_i(R_m) D(f_1, \dots, f_r; z_i, z_1, \dots, \widehat{z_l}, \dots, z_r)(R_m) \right) \right) \end{aligned}$$

Mais, pour $l \in \{1, \dots, r\}$, nous avons :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^s z_i(R_m) D(f_1, \dots, f_r; z_i, z_1, \dots, \widehat{z_l}, \dots, z_r)(R_m)}{\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq s} |z_i(R_m)|^2} D(m)} = 0$$

car

$$\left(\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_i, z_1, \dots, \widehat{z_l}, \dots, z_r) \right)_{\tilde{S}}$$

n'engendre pas $IJO_{\tilde{X}, \tilde{S}}$, d'où la condition b).

II. Montrons maintenant que les conditions a) et b) entraînent les conditions A) et B).

Soient $\tilde{S}$ un point de $\tilde{\omega}^{-1}(\tilde{S})$, $(i_2, \dots, i_r)$ un $(r-1)$ -uple de $\{1, \dots, M\}$, $(j_1, \dots, j_r)$ un r -uple de $\{1, \dots, q\}$.

Si, pour tout $i_1 \in \{1, \dots, M\}$, $\tilde{D}(f_{j_1}, \dots, f_{j_r}; z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{S}}$ n'engendre pas $JO_{\tilde{X}, \tilde{S}}$, les conditions A) et B) en $\tilde{S}$ pour $(j_1, \dots, j_r)$ et $(i_2, \dots, i_r)$ sont vérifiées de façon évidente.

Nous pouvons donc supposer que $j_1 = 1, \dots, j_r = r$ et $i_2, \dots, i_r$ étant fixés, qu'il existe i_1 tel que $\tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{S}}$ engendre $JO_{\tilde{X}, \tilde{S}}$. Il reste à prouver :

A) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $\tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_{i+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})_{\tilde{S}}$ n'engendre pas $JO_{\tilde{X}, \tilde{S}}$

B) $\left(\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega} \tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r}) \right)_{\tilde{S}}$ n'engendre pas $IJO_{\tilde{X}, \tilde{S}}$.

Montrons d'abord la condition A) en $\tilde{S}$. Soient $k \in \{1, \dots, p\}$ et $(\tilde{R}_m)_m$ une suite de points de $\tilde{X}$ telle que, pour tout m ,

$$\tilde{R}_m \in \tilde{X} - \tilde{\omega}^{-1}(X_{\text{sing}} \cup Y) \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} (\tilde{R}_m) = \tilde{S}.$$

Il suffit de montrer que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})(\tilde{R}_m)}{\tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})(\tilde{R}_m)} = 0$$

Pour tout m , le point $R_m = \tilde{\omega}(\tilde{R}_m)$ appartient à $X_{\text{lisse}} - Y$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = \tilde{\omega}(\tilde{S}) = S$.

Si nous notons S_m la projection de R_m sur Y , nous pouvons supposer que $T_{R_m} X_{\text{lisse}}$ tend vers une limite τ lorsque $m \rightarrow \infty$ et que $\widehat{S_m R_m}$ tend vers une limite L lorsque $m \rightarrow \infty$.

Pour m suffisamment grand, comme :

$$D(m) = D(f_1, \dots, f_r; z_{i_1}, \dots, z_{i_r})(R_m) \neq 0,$$

considérons :

$$E(m) = \frac{|D(m)|}{\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq M} |D(f_1, \dots, f_r; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})(R_m)|^2}}$$

et $\vec{u}_m = (u_{m,1}, \dots, u_{m,M})$ défini par

$$u_{m,i} = \frac{E(m)}{D(m)} (f_1, \dots, f_r; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})(R_m) \quad (i = 1, \dots, M).$$

Nous avons : $\|\vec{u}_m\| = 1$ et, si $D_{ij}(R_m)$ est le déterminant du mineur du coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice définissant $D(m)$,

$$u_{m,i} = \frac{E(m)}{D(m)} \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} D_{j1}(R_m) \frac{\partial f_j}{\partial z_1}(R_m) \quad i = 1, \dots, M.$$

Donc, $\vec{u}_m$ appartient à l'espace normal à $X_{\text{lisse}} - Y$ en R_m et, grâce à la condition a) en S , nous avons pour $k \in \{1, \dots, p\}$, :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{m, s+k} = 0$$

et donc aussi :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_{s+k}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})(\tilde{R}_m)}{\tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})(\tilde{R}_m)} = 0$$

Montrons enfin la condition B) en $\tilde{S}$. En conservant les mêmes notations, nous avons, grâce à la condition b) en S :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^s z_i(R_m) u_{m, i}}{\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq s} |z_i(R_m)|^2}} = 0$$

d'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^s z_i \circ \tilde{\omega}(\tilde{R}_m) \tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_i, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})(\tilde{R}_m)}{\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq s} |z_i \circ \tilde{\omega}(\tilde{R}_m)|^2} \tilde{D}(f_1, \dots, f_r; z_{i_1}, \dots, z_{i_r})(\tilde{R}_m)} = 0$$

et la condition B) en $\tilde{S}$.

Theoreme : Soient X un espace $\mathbb{C}$ -analytique réduit de dimension pure, Y un sous-espace lisse de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de $\tilde{X}$, $\tilde{\omega} : \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement normalisé de X le long du produit de l'idéal I de Y par l'idéal jacobien J de X et $\tilde{Y}$ l'espace réduit de support $\tilde{\omega}^{-1}(Y)$

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de $\tilde{Y}$, la fibre correspondante du morphisme $\tilde{\omega} : \tilde{Y} \rightarrow Y$ est de dimension : $\dim \tilde{Y} - \dim Y$, le couple $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

PREUVE : Ce théorème étant de nature locale, nous sommes ramenés à la situation décrite au début de l'article .

Il suffit alors de remarquer que les conditions $\tilde{A}$) et $\tilde{B}$) de la Proposition 1 entraînent de façon évidente les conditions A) et B) de la Propo-

sition 2. Nous obtenons en fait directement les conditions de Whitney strictes au sens d'Hironaka ([2] p. 135 Définition 5.1). Il est à noter que ce Théorème peut aussi se déduire de l'équivalence de la Proposition 2 à l'aide de ([3] p. 132 Proposition 4 et de ([4] Lemma 19.3).

*Département de Mathématiques
Université de NICE
Parc Valrose
06 - NICE (FRANCE)*

REFERENCES

- [1] H. HIRONAKA, *Equivalences and deformations of isolated singularities*. Woodshole Seminar in algebraic geometry (1964).
- [2] H. HIRONAKA, *Normal cones in analytic Whitney stratifications*. Publications Mathématiques N. 31, I. H. E. S. (1970).
- [3] R. NARASIMHAN, *Introduction to the theory of analytic spaces*. Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics, Vol. 25 (1966).
- [4] H. WHITNEY, *Tangents to analytic variety*. Annals of Mathematics, Vol. 81 (1965).