Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Anna Maria Micheletti

Metrica per famiglie di domini limitati e proprietà generiche degli autovalori

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 26, nº 3 (1972), p. 683-694

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_3_683_0>

METRICA PER FAMIGLIE DI DOMINI LIMITATI E PROPRIETÀ GENERICHE DEGLI AUTOVALORI

di Anna Maria Micheletti

Introduzione.

Nello studiare la continuità dell'n-esimo autovalore dell'operatore di Laplace $-\Delta_\Omega$ relativo ad un aperto limitato Ω con dati di Dirichlet nulli, considerato come funzione dell'aperto Ω, Courant introduce una nozione di vicinanza tra due domini basata su un diffeomorfismo del tipo $I+\psi$ con $\psi \in \mathcal{C}^1(R^m)$, che trasforma l'uno nell'altro.

Lo scopo di questo lavoro è inquadrare questa nozione in un ambito più generale introducendo una distanza vera e propria tra i domini che sarà chiamata «distanza di Courant». Sulla base di questa distanza si riprendono i risultati del lavoro precedente [1] e si arriva a formulare il seguente risultato: preso un aperto campione Ω_0, limitato e introdotta la distanza di Courant nella famiglia degli aperti ad esso diffeomorfi, risulta di prima categoria l'insieme degli aperti Ω per i quali l'operatore di Laplace $-\Delta_\Omega$ non ha autovalori tutti semplici.

§ 1. Data un'applicazione di $\mathbb{R}^m$ in sè, per semplicità di notazione, conviene considerare la sua derivata prima, seconda, ..., r-sima, rispettivamente come un'applicazione lineare, bilineare, ..., r-lineare definita in ciascun punto e introdurre per queste le norme consuete ([1]). Indichiamo con $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$ lo spazio di Banach delle applicazioni di $\mathbb{R}^m$ in sè con derivate prime, seonde, ..., r-esime continue e limitate dotate della norma:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^r} = \sup_x \max\left[\,\|f(x)\|\,,\ \|f^{(1)}(x)\|\,, \dots ,\ \|f^{(r)}(x)\|\,\right].$$

Pervenuto alla Redazione il 12 Luglio 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematiea del C. N. R.

([1]) Partendo dalla segnente norma di $\mathbb{R}^m$: $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

DEFINIZIONE: *Sia $\mathcal{F}^r$ l'insieme delle applicazioni di* $\mathbb{R}^m$ *in sè tali che*

i) *sono del tipo* $I+f$ *dove* $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$ *e inoltre* $\|f(x)\|$ *e* $\|f^{(i)}(x)\|$ *tendono a zero per* $\|x\| \to +\infty$ $(i = 1, \dots, r)$

ii) *sono invertibili come diffeomerfismi di classe* $\mathcal{C}^r$.

Una forma k-lineare su $\mathbb{R}^m$, S, dipendente da x e avente come argomenti $y_1, \dots, y_k$ verrà indicata con la notazione

$$S(x)[y_1][y_2], \dots, [y_k].$$

LEMMA 1. *Siano F e G due applicazioni di $\mathbb{R}^m$ in sè tali che F è differenziabile in un intorno del punto x fino all'ordine r e G è differenziabile in un intorno di $F(x)$ fino all'ordine r. Allora il differenziale r-simo di $G \circ F$ in x è dato dalla somma di un numero finito di applicazioni r-lineari su $\mathbb{R}^m$ del tipo*

$$(h_1, h_2, \dots, h_r) \to G^k(F(x))[F^{(\lambda_1)}(x)[h_1][h_1] \dots [h_{\lambda_1}]] \dots$$
$$\dots [F^{(\lambda_k)}(x)[h_{r-\lambda_k+1}] \dots [h_r]]$$

dove $k = 1, \dots, r$ *e* $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = r$.

Procediamo per induzione su r. La nostra affermazione è banalmente vera per $r = 1$. Vediamo ora che se è vero per $r - 1$ è vero anche per r.

Questa è una ovvia conseguenza dell'osservazione che un'applicazione di $\mathbb{R}^m$ in $\mathcal{L}((\mathbb{R}^m)^{r-1}; \mathbb{R}^m)$ del tipo

$$x \to G^{(k)}(F(x))[F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)]$$

dove $k = 1, \dots, r-1$ e $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = r - 1$, ha come differenziale in x l'applicazione r-lineare su $\mathbb{R}^m$

$$G^{(k+1)}(F(x))[F^{(1)}(x)][F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] +$$

$$+ G^{(k)}(F(x))[F^{(\lambda_1+1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] + \dots + G^{(k)}(F(x)[F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k+1)}(x)].$$

LEMMA 2. *Siano f e g in $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$ e sia $\psi = f \circ (I + g)$.*
Allora si ha per ogni x di $\mathbb{R}^m$

$$\|\psi(x)\| = \|f(x + g(x))\|$$

$$\|\psi^{(1)}(x)\| \le \|f^{(1)}(x + g(x))\| [1 + \|g^{(1)}(x)\|]$$

$$\| \psi^{(i)}(x) \| \leq \| f^{(1)}(x + g(x)) \| \, \| g^{(i)}(x) \| +$$

$$+ \sum_{j=2}^{i} \| f^{(j)}(x + g(x)) \| \, a_j (\| g^{(1)}(x) \|, \dots, \| g^{(i-1)}(x) \|)$$

per $i = 2, \dots, r$ *dove* a_j *è un polinomio.*

Questa affermazione è una ovvia conseguenza del Lemma 1.

TEOREMA. $\mathcal{F}^r$ *è un gruppo.*

Dal lemma 2 segue immediatamente che se F e G sono in $\mathcal{F}^r$ anche $F \circ G$ è in $\mathcal{F}^r$.

Vediamo che se $F = I + f \in \mathcal{F}^r$ anche $I + g = F^{-1} \in \mathcal{F}^r$. Basta vedere che $\| g(y) \|$ e $\| g^{(i)}(y) \|$ tendono a zero per $\| y \| \to +\infty$ $i = 1, \dots, r$.

Procediamo per induzione su r.

Poniamo $y = F(x)$. Dalla relazione $-f(x) = g(y)$ si ha che $\sup\limits_{y \in \mathbb{R}^m} \| g(y) \| < +\infty$. Poiché $\| y \| - \| g(y) \| \leq \| x \|$ si ha che $\| x \| \to +\infty$ per $\| y \| \to +\infty$. Allora da $-f(x) = g(y)$ segue che $\| g(y) \| \to 0$ per $\| y \| \to +\infty$.

Dal lemma 2 si ha

$$\| g^{(1)}(y) \| \leq \| f^{(1)}(x) \| \, [1 + \| g^{(1)}(y) \|]$$

quindi

$$\| g^{(1)}(y) \| \, [1 - \| f^{(1)}(x) \|] \leq \| f^{(1)}(x) \|.$$

Per $\| y \|$ opportunamente grande si ha

$$0 \leq \| g^{(1)}(y) \| \leq \frac{\| f^{(1)}(x) \|}{1 - \| f^{(1)}(x) \|}.$$

Quindi $\| g^{(1)}(y) \| \to 0$ per $\| y \| \to +\infty$.

Allora $\mathcal{F}^0$ e $\mathcal{F}^1$ sono gruppi, inoltre se $\mathcal{F}^{r-1}$ è un gruppo, anche $\mathcal{F}^r$ lo è. Infatti dal lemma 2, per $\| y \|$ opportunamente grande si ha

$$0 \leq \| g^{(r)}(y) \| \leq \frac{\sum_{j=2}^{r} \| f^{(j)}(x) \| \, a_j (\| g^{(1)}(y) \|, \dots, \| g^{(r-1)}(y) \|)}{1 - \| f^{(1)}(x) \|}.$$

LEMMA 3. *Per ogni* $r \in N$ *e per ogni* $s \in N - \{0\}$ *esiste una costante* $k(r, s) \in \mathbb{R}^+$ *che gode della seguente proprietà: se le applicazioni* $f_1, \dots, f_n$ *di* $\mathcal{C}^r(R^m)$ *sono tali che* $\sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_{\mathcal{C}^r} < \alpha$ *con* $0 < \alpha < s$, *allora* $F = (I + f_n) \circ \dots \circ (I + f_1)$ *è tale che* $\| F - I \|_{\mathcal{C}^r} \leq \alpha \, k(r, s)$.

Procediamo per induzione su r. Per semplificare le notazioni poniamo

$$F_i = (I + f_i) \circ \dots \circ (I + f_1) \quad \text{quindi} \quad F_n = F.$$

Dalla definizione di F si ha

$$F - I = f_1 + f_2 \circ (I + f_1) + \dots + f_n \circ (I + f_{n-1}) \circ \dots \circ (I + f_1) = \tag{1}$$

$$= f_1 + f_2 \circ F_1 + \dots + f_n \circ F_{n-1}.$$

Allora $\| F - I \|_{\mathcal{C}^0} \leq \alpha$, quindi $k(0, s) = 1$ per ogni $s \in N - \{0\}$.
Da (1) e dal lemma 2 segue che

$$\sup_x \| (F - I)^{(1)}(x) \| \leq \| f_1 \|_{\mathcal{C}^1} + \| f_2 \|_{\mathcal{C}^1} [1 + \| f_1 \|_{\mathcal{C}^1}] + \dots$$

$$\dots + \| f_n \|_{\mathcal{C}^1} [1 + \| f_{n-1} \|_{\mathcal{C}^1}] \dots [1 + \| f_1 \|_{\mathcal{C}^1}] \leq \alpha\, e^{\alpha}.$$

Allora $\| F - I \|_{\mathcal{C}^1} \leq \alpha\, e^s$, quindi $k(1, s) = e^s$ per ogni $s \in N - \{0\}$.
Dimostriamo che se la nostra proposizione vale per $r - 1$, vale anche per r. Valutiamo $\| (F_n - I)^{(r)}(x) \|$. È ovvio che

$$(F_n - I)^{(r)}(x) = (F_{n-1} - I)^{(r)}(x) + (f_n \circ F_{n-1})^{(r)}(x). \tag{2}$$

Dal lemma 2, dato che $r \geq 2$, si ha che

$$\| (f_n \circ F_{n-1})^{(r)}(x) \| \leq \| f_n^{(1)}(F_{n-1}(x)) \| \, \| (F_{n-1} - I)^{(r)}(x) \| +$$

$$+ \sum_{j=2}^{r} \| f_n^{(j)}(F_{n-1}(x)) \| \, a_j(\| (F_{n-1} - I)^{(1)}(x) \|, \dots, \| (F_{n-1} - I)^{(r-1)}(x) \|).$$

Per l'ipotesi di induzione $\| (F_{n-1} - I)^{(i)}(x) \| \leq \| (F_{n-1} - I) \|_{\mathcal{C}^{r-1}} \leq \leq \alpha\, k(r - 1, s)$ $(i = 1, \dots, r - 1)$ per cui tenendo presente che a_j è un polinomio (dipendente da r) dove $j = 2, \dots, r$ si ha che esiste una costante $L(r, s)$ tale che

$$\| (f_n \circ F_{n-1})^r(x) \| \leq \| f_n^{(1)}(F_{n-1}(x)) \| \, \| (F_{n-1} - I)^{(r)}(x) \| + \tag{3}$$

$$+ L(r, s) \sum_{j=2}^{r} \| f_n^{(j)}(F_{n-1}(x)) \| \leq \| f_n \|_{\mathcal{C}^r} \| (F_{n-1} - I)^{(r)}(x) \| +$$

$$+ (r - 1)\, L(r, s) \| f_n \|_{\mathcal{C}^r}.$$

Poniamo $(r-1) L(r, s) = M(r, s)$. Da (2) e (3) si ha

$$\| (F_n - I)^{(r)}(x) \| \leq [1 + \| f_n \|_{\mathcal{C}^r}] \| (F_{n-1} - I)^{(r)}(x) \| + M(r, s) \| f_n \|_{\mathcal{C}^r} .$$

Dopo aver ripetuto $n-1$ volte questo procedimento si ha

$$\| (F_n - I)^{(r)}(x) \| \leq [1 + \| f_n \|_{\mathcal{C}^r}] \dots [1 + \| f_2 \|_{\mathcal{C}^r}] \| f_1 \|_{\mathcal{C}^r} +$$

$$+ [1 + \| f_n \|_{\mathcal{C}^r}] \dots [1 + \| f_2 \|_{\mathcal{C}^r}] M(r, s) \| f_2 \|_{\mathcal{C}^r} + \dots$$

$$\dots + M(r, s) \| f_n \|_{\mathcal{C}^r} \leq \max [M(r, s), 1] e^{\alpha} \alpha.$$

Quindi $k(r, s) = \max [M(r, s), 1] e^{s}$.

LEMMA 4. *Sia F in $\mathcal{F}^r$. Poniamo $f = F - I$ e $f_\tau = f \circ \tau$ dove con τ si indica la traslazione in $\mathbb{R}^m$ individuata dal vettore τ. Allora se $\| \tau \| \to 0$ $\| f_\tau - f \|_{\mathcal{C}^r} \to 0$.*

Infatti si definisce la funzione $\varrho : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tale che

$$\varrho(x, \tau) = \max [\| f(x + \tau) - f(x) \|, \| f^{(1)}(x + \tau) - f^{(1)}(x) \|, \dots$$
$$\dots, \| f^{(r)}(x + \tau) - f^{(r)}(x) \|].$$

La nostra affermazione è una semplice conseguenza delle seguenti proprietà di ϱ:

i) $\varrho(x, \tau)$ tende a zero per $\| x \| \to + \infty$, uniformemente al variare di τ in un intorno limitato dell'origine.

ii) ϱ è continua e $\varrho(x, 0) = 0$ per ogni x di $\mathbb{R}^m$.

LEMMA 5. *Siano G e F in $\mathcal{F}^r$ e γ in $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$. Se $\| \gamma \|_{\mathcal{C}^r} \to 0$ allora anche $\| G \circ (F + \gamma) - G \circ F \|_{\mathcal{C}^r} \to 0$.*

Procediamo per induzione su r. Per $r = 0$ la nostra affermazione è ovvia, vediamo che se vale per $r-1$, vale anche per r.

Dal lemma 1 sappiamo che la derivata r-sima di $G \circ (F + \gamma) - G \circ F$ è la somma di un numero finito di applicazioni r-lineari del tipo

$$G^k(F(x) + \gamma(x)) [F^{(\lambda_1)}(x) + \gamma^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x) + \gamma^{(\lambda_k)}(x)] -$$

$$- G^k(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] \quad \text{dove } k = 1, \dots, r \text{ e } \lambda_1 + \dots + \lambda_k = r.$$

Tenendo presente che $\| F^{(\lambda_1)}(x) \| \| F^{(\lambda_2)}(x) \| \dots \| F^{(\lambda_k)}(x) \| \leq (\| F - I \|_{\mathcal{C}^r} + 1)^k$, si ha che la norma di un'applicazione di questo tipo si può maggiorare con la seguente espressione.

$$\sup_x \| G^{(k)}(F(x) + \gamma(x)) - G^k(F(x)) \| (\| F - I \|_{\mathcal{C}^r} + 1)^k +$$

$$+ \| \gamma \|_{\mathcal{C}^r} p (\| F - I \|_{\mathcal{C}^r}, \| G - I \|_{\mathcal{C}^r}, \| \gamma \|_{\mathcal{C}^r})$$

dove p è un polinomio. Da questa maggiorazione e dal lemma 4 segue subito la nostra affermazione.

Sia $F \in \mathcal{F}^r$ e siano rispettivamente $(I + f_n) \circ \dots \circ (I + f_1)$ e $(I + g_m) \circ \dots \circ (I + g_1)$ fattorizzazioni in $\mathcal{F}^r$ di F ed F^{-1}.

Poniamo

$$d(I, F) = \inf . \sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_{\mathcal{C}^r} + \inf . \sum_{i=1}^{m} \| g_i \|_{\mathcal{C}^r}$$

dove gli estremi inferiori s'intendono rispettivamente in relazione alle fattorizzazioni di F ed F^{-1} in $\mathcal{F}$. Inoltre definiamo per ogni F e G di $\mathcal{F}^r$

$$d(F, G) = d(I, G \circ F^{-1}).$$

È ovvio che d è invariante a destra, cioè per ogni F, G, H di $\mathcal{F}^r$

$$d(F, G) = d(F \circ H, G \circ H).$$

Verifichiamo che d è una distanza in $\mathcal{F}^r$.

i) $d(F, G) = 0 \Longrightarrow F = G$.

Infatti $d(F, G) = 0$ significa che esiste una successione di fattorizzazioni di $G \circ F^{-1}$ in $\mathcal{F}^r$,

$$G \circ F^{-1} = (I + g_{n, s_n}) \circ \dots \circ (I + g_{n, 1})$$

tali che

$$\delta_{(n)} = \sum_{i=1}^{s_n} \| g_{n, i} \|_{\mathcal{C}^r} \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow + \infty.$$

Dal lemma 3 si ha che per n abbastanza grande (in modo che sia $\delta(n) < 1$) $\| G \circ F^{-1} - I \|_{\mathcal{C}^r} \leq K(r, 1) \delta(n)$ perciò $\| G \circ F^{-1} - I \|_{\mathcal{C}^r} = 0$, quindi $F = G$.

ii) $d(F, G) = d(G, F)$.

È una ovvia conseguenza della definizione

iii) $d(F, G) \leq d(F, H) + d(H, G)$.

Questa affermazione segue dalla relazione;

$$d(I, M \circ N) \leq d(I, M) + d(I, N)$$

valida per ogni M e N di $\mathcal{F}^r$. E questa è una banale conseguenza del fatto che tra le fattorizzazioni di $M \circ N$ in $\mathcal{F}^r$ ci sono quelle ottenute componendo una fattorizzazione di M in $\mathcal{F}^r$ e una fattorizzazione di N in $\mathcal{F}^r$.

TEOREMA 2. *$\mathcal{F}^r$ è un gruppo metrico.*

Vediamo ora che con la metrica precedentcmente definita il gruppo $\mathcal{F}^r$ è topologico.

Per i risultati della teoria dei gruppi topologici [3] basta che sia verificata la seguente condizione: per ogni F di $\mathcal{F}^r$, se $d(I, H) \to 0$ anche $d(I, F^{-1} \circ H \circ F) \to 0$.

Affinché $d(I, F^{-1} \circ H \circ F) \to 0$ è sufficiente che tenda a zero $\| F^{-1} \circ \circ H \circ F - I \|_{\mathcal{C}^r} + \| F^{-1} \circ H^{-1} \circ F - I \|_{\mathcal{C}^r} = \| F^{-1} \circ (F + h \circ F) - I \|_{\mathcal{C}^r} + + \| F^{-1} \circ (F + k \circ F) - I \|_{\mathcal{C}^r}$ dove $h = H - I$ e $k = H^{-1} - I$.

Se $d(I, H) \to 0$, dal lemma 3 segue che $\| h \|_{\mathcal{C}^r}$ e $\| k \|_{\mathcal{C}^r}$ tendono a zero, dal lemma 2 segue che anche $\| h \circ F \|_{\mathcal{C}^r}$ e $\| k \circ F \|_{\mathcal{C}^r}$ tendono a zero, e dal lemma 5 segue la nostra condizione.

COROLLARIO 1. *La topologia indotta nel gruppo topologica $\mathcal{F}^r$ dalla metrica d coincide con la topologia che ha come base d'intorni dell'identità in $\mathcal{F}^r$*

$$E(\varepsilon) = \{F \in \mathcal{F}^r : \| F - I \|_{\mathcal{C}^r} + \| F^{-1} - I \|_{\mathcal{C}^r} < \varepsilon\}.$$

Infatti, sia

$$S(\varepsilon) = \{F \in \mathcal{F}^r : d(I, F) < \varepsilon\}$$

dalla definizione della metrica d e dal lemma 3 si ha, per $\varepsilon < 1$

$$E(\varepsilon) \subset S(\varepsilon) \subset E(2k(r, 1)\varepsilon).$$

TEOREMA 3. *Il gruppo metrico $\mathcal{F}^r$ è completo.*

Sia $\{H_n\}_{n \in N}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{F}^r$, allora $d(I, H_n)$ è limitato, quindi per il lemma 3 esiste L tale che per ogni n

$$\| I - H_n \|_{\mathcal{C}^r} + \| I - H_n^{-1} \|_{\mathcal{C}^r} \leq L.$$

Dal lemma 2 e dalla limitatezza di $\{\| I - H_n \|_{\mathcal{C}^r}\}_{n \in N}$ segue che esiste M tale che per ogni m e n

$$\| H_m - H_n \|_{\mathcal{C}^r} = \| (H_m \circ \overset{-1}{H_n} - I) \circ H_n \|_{\mathcal{C}^r} \leq M \| H_m \circ \overset{-1}{H_n} - I \|_{\mathcal{C}^r} .$$

Allora, dato che $\{H_n\}_{n \in N}$ è di Cauchy in $\mathcal{F}^r$, dal lemma 3 segue che $\{H_n - I\}_{n \in N}$ è di Cauchy in $\mathcal{C}^r(R^m)$, quindi converge in $\mathcal{C}^r(R^m)$ ad un elemento che indichiamo con $H - I$.

È banale che $\| H(x) - x \|$ e $\| (H - I)^{(i)}(x) \|$ tendono a zero per $\| x \| \to + \infty$ per $i = 1, \ldots , r$. Infatti vale la maggiorazione

$$\| H(x) - x \| \leq \| H(x) - H_n(x) \| + \| H_n(x) - x \| \leq \| H - H_n \|_{\mathcal{C}^r} + \| H_n(x) - x \|.$$

Per le derivate si procede nello stesso modo.

Similmente si dimostra che $\overset{-1}{H_n} - I$ converge in $\mathcal{C}^r(R^m)$ ad un elemento che si indica con $G - I$. Vediamo che $G^{-1} = H$. Basta vedere che $\| G \circ H - I \|_{\mathcal{C}^r} = 0$ e $\| H \circ G - I \|_{\mathcal{C}^r} = 0$. Infatti per il lemma 2 si ha

$$\| G \circ H - I \|_{\mathcal{C}^r} \leq \| (G - \overset{-1}{H_n}) \circ H \|_{\mathcal{C}^r} + \| \overset{-1}{H_n} \circ H - I \|_{\mathcal{C}^r} \leq$$

$$\leq c \| G - \overset{-1}{H_n} \|_{\mathcal{C}^r} + \| \overset{-1}{H_n} \circ (H_n + H - H_n) - \overset{-1}{H_n} \circ H_n \|_{\mathcal{C}^r}$$

dove c è una costante dipendente da $\| H - I \|_r$. Dal lemma 5 e dalla convergenza in $\mathcal{C}^r(R^m)$ di $\{\overset{-1}{H_n} - I\}_{n \in N}$ a $G - I$ e di $\{H_n - I\}_{n \in N}$ a $H - I$ segue che il secondo membro di questa maggiorazione tende a zero. Nello stesso modo si ha $\| H \circ G - I \|_{\mathcal{C}^r} = 0$. Quindi $H \in \mathcal{F}^r$.

È ovvio che $\{H_n\}_{n \in N}$ converge ad H in $\mathcal{F}^r$. Infatti si ha

$$d(H_n , H) \leq \| H \circ \overset{-1}{H_n} - I \|_{\mathcal{C}^r} + \| H_n \circ H^{-1} - I \|_{\mathcal{C}^r} \leq \| (H - H_n) \circ \overset{-1}{H_n} \|_{\mathcal{C}^r} +$$

$$+ \| (H_n - H) \circ H^{-1} \|_{\mathcal{C}^r} .$$

Da questa maggiorazione, dal lemma 2 e dalla limitatezza di $\{\| I - \overset{-1}{H_n} \|_{\mathcal{C}^r}\}_{n \in N}$ segue la nostra affermazione.

§ 2. Fissiamo un aperto campione Ω_0 di R^m, limitato connesso, la cui frontiera è una verietà $m - 1$ dimensionale di classe 3.

Definiamo la famiglia di insiemi

$$X(\Omega_0) = \{F(\Omega_0) \quad \mathbb{R}^m : F \in \mathcal{F}^3\}.$$

È ovvio che se $\Omega \in X(\Omega_0)$, è ancora un aperto limitato connesso la cui frontiera è una varietà $m-1$ dimensionale di classe $\mathcal{C}^3$.

Si osservi che vale il seguente:

LEMMA 6. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^m$ e sia*

$$\mathcal{G}(\Omega) = \{F \in \mathcal{F}^r : F(\Omega) = \Omega\}.$$

Allora $\mathcal{G}(\Omega)$ è un sottogruppo chiuso di $\mathcal{F}^r$.

Dimostriamo che se la successione $\{F_n\}_{n \in N} \subset \mathcal{G}(\Omega)$ converge ad F in $\mathcal{F}^r$, allora F è in $\mathcal{G}(\Omega_0)$, il resto è ovvio. Se $\{F_n\}$ converge ad F in $\mathcal{F}^r$, in particolare per il lemma 3 si ha che

$$\| F_n \circ F^{-1} - I \|_{\mathcal{C}^0} + \| F \circ F_n^{-1} - I \|_{\mathcal{C}^0} \longrightarrow 0.$$

Dato che $\| F \circ F_n^{-1} - I \|_{\mathcal{C}^0} \longrightarrow 0$, per ogni $x \in \Omega$ la successione $\{F(F_n^{-1}(x))\}_{n \in N} \subset F(\Omega)$ converge ad $x \in \Omega$, quindi $\Omega \subset \overline{F(\Omega)}$. Dato che $\| F_n \circ F^{-1} - I \|_{\mathcal{C}^0} \longrightarrow 0$, per ogni $x \in \Omega$, la successione $\{F_n(x)\}_{n \in N} \subset \Omega$ converge ad $F(x) \in F(\Omega)$, quindi $F(\Omega) \subset \overline{\Omega}$. Poiché F è un diffeomorfismo, si ha $F(\Omega) = \Omega$.

Per abbreviare le notazioni, poniamo da ora in poi $\mathcal{G}(\Omega_0) = \mathcal{G}$ ed $X(\Omega_0) = X$.

Sia $\Omega \in X$, per come è stato definito X, esiste $F \in \mathcal{F}^3$ tale che $F(\Omega_0) = \Omega$. Indichiamo con $\chi : X \longrightarrow \mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ l'applicazione che ad Ω associa $F \circ \mathcal{G}$. È ovvio che l'applicazione χ è iniettiva e surgettiva.

Questa applicazione χ ci permette di introdurre una metrica in X in modo da poter dimostrare che è di I categoria il sottoinsieme di X costituito dagli Ω, tali che lo spettro dell'operatore di Laplace $-\Delta_\Omega$ relativo ad Ω con dati di Dirichlet nulli, non ha autovalori tutti semplici. Allora conviene osservare che

LEMMA 7. *Lo scarto δ* in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$

$$\delta(F \circ \mathcal{G}, H \circ \mathcal{G}) = \inf_{G, \widetilde{G} \in \mathcal{G}} d(F \circ G, H \circ \widetilde{G})$$

è una metrica. La topologia indotta da δ coincide con la topologia quoziente di $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ e lo spazio metrico $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ è completo.

Dimostriamo la completezza, il resto è banale.

Dobbiamo dimostrare che se $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in N}$ è di Cauchy in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ allora $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in N}$ converge iu $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$. Basta dimostrare che esiste una sottosuccessione di $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in N}$ che converge. Dato che $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in N}$ è di Cauchy, esiste una sua sottosuccessione $\{F_\nu \circ \mathcal{G}\}_{\nu \in N}$ tale che

$$\delta(F_\nu \circ \mathcal{G}, F_{\nu+1} \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2^\nu}.$$

Vediamo ora che esiste una successione $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$ in $\mathcal{F}^3$ tale che

i) $H_\nu \in F_\nu \circ \mathcal{G}$

ii) $d(H_\nu, H_{\nu+1}) < \frac{1}{2^\nu}$.

Procediamo per induzione. Per la definizione di δ dato che $\delta(F_1 \circ \mathcal{G}, F_2 \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2}$ esistono $H_1 \in F_1 \circ \mathcal{G}$ e $H_2 \in F_2 \circ \mathcal{G}$ tali che $d(H_1, H_2) < \frac{1}{2}$. Dato $H_\nu \in F_\nu \circ \mathcal{G}$, vediamo che esiste $H_{\nu+1}$ con le proprietà richieste. Poiché $\delta(F_\nu \circ \mathcal{G}, F_{\nu+1} \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2^\nu}$, esistono G_1 e G_2 in $\mathcal{G}$ tali che $d(F_\nu \circ G_1, F_{\nu+1} \circ G_2) < \frac{1}{2^\nu}$. Sia G_3 tale che $F_\nu \circ G_1 = H_\nu \circ G_3$ allora assumiamo $H_{\nu+1} = F_{\nu+1} \circ G_2 \circ G_3^{-1}$, infatti

$$d(H_\nu, F_{\nu+1} \circ G_2 \circ G_3^{-1}) = d(H_\nu \circ G_3, F_{\nu+1} \circ G_2) = d(F_\nu \circ G_1, F_{\nu+1} \circ G_2).$$

È facile vedere che $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$ è di Cauchy in $\mathcal{F}^3$. Infatti per $i < j$

$$d(H_i, H_j) \leq \sum_{n=i}^{j-1} d(H_n, H_{n+1}) \leq \frac{1}{2^i} + \dots + \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Essendo $\mathcal{F}^3$ completo, si ha che $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$ converge in $\mathcal{F}^3$. Poiché l'applicazione canonica $\pi : \mathcal{F}^3 \longrightarrow \mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ è continua si ha che anche $\pi(H_\nu) = F_\nu \circ \mathcal{G}$ converge in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$.

A questo punto conviene considerare nello spazio X la metrica d indotta dalla bigezione χ di X in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$. Quindi

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \delta(\chi(\Omega_1), \chi(\Omega_2))$$

per mezzo di questa metrica d, che chiameremo « di Courant » X è divenuto uno spazio metrico completo.

TEOREMA 4. *Nello spazio metrico completo X con la « metrica di Courant » δ, è di I categoria il sottoinsieme costituito dagli aperti limitati Ω, tali che lo spettro dell'operatore di Laplace $-\Delta_\Omega$ relativo ad Ω con dati di Dirichlet nulli non ha autovalori tutti semplici.*

Indichiamo con A_n il sottoinsieme di X così definito $A_n = \{\Omega \in X : -\Delta_\Omega$ ha semplici i primi n autovalori$\}$. Indichiamo con A l'insieme degli $\Omega \in X$ tali che $-\Delta_\Omega$ ha autovalori tutti semplici.

È banale che

$$A = \bigcap_{n \in N} A_n \qquad \text{e} \qquad \complement A = \bigcup_{n \in N} \complement A_n.$$

Se dimostriamo che gli A_n sono sottoinsiemi aperti e densi in X, allora $\complement A_n$ sono sottoinsiemi chiusi e privi di punti interni dello spazio metrico completo χ e, quindi $\complement A$ è di 1 categoria.

Dimostriamo che A_n è aperto. Sia $\tilde{\Omega} \in A_n$.

Per un noto risultato di Courant [2] si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che ogni Ω, immagine di $\tilde{\Omega}$ mediante un'applicazione $I + \psi$ di $\mathbb{R}^m$ in sé con $\| \psi \|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$, ha ancora semplici i primi n autovalori. Poniamo

$$B(\tilde{\Omega}, r) = \{\Omega : d(\Omega, \tilde{\Omega}) < r\}.$$

Dalla definizione di d, dalle proprietà di gruppo metrico di $\mathcal{F}^3$ e dal lemma 3, si ha che esiste r tale che ogni Ω di $B(\tilde{\Omega}, r)$ è immagine di $\tilde{\Omega}$ mediante un'applicazione $I + \psi$ con $\| \psi \|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$.

Dimostriamo che A_n è denso in X.

Sia $\tilde{\Omega} \in X$, consideriamo $B(\tilde{\Omega}, r)$ dobbiamo dimostrare che in $B(\tilde{\Omega}, r)$ c'è almeno un elemento Ω di A_n. Da un risultato del mio precedente lavoro [3] si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste Ω, immagine di $\tilde{\Omega}$ mediante un'applicazione $I + \psi$ di $\mathbb{R}^m$ in sé con $\| \psi \|_{\mathcal{C}^3} < \varepsilon$ tale che Ω ha tutti gli autovalori semplici. È chiaro che se $\varepsilon < 1$ si può facilmente scegliere $I + \psi$ in modo che stia in $\mathcal{F}^3$. A questo punto dalla definizione di d, e dalle proprietà di gruppo metrico di $\mathcal{F}^3$ segue che esiste ε tale che il nostro Ω appartenga ad $B(\tilde{\Omega}, r)$.

Pisa, Università.

---

(2) [2] pag. 423.
(3) [1] Teorema C.

BIBLIOGRAFIA

[1] MICHELETTI A. M. « *Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo* ». Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1972. Vol. XXVI, Fasc. I.

[2] COURANT R., HILBERT D. « *Methods of Mathematical Physics* » vol. I Interscience New York, 1953.

[3] KELLEY « *General Topology* » Van Nostrand New York, 1955.