

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

MARCO BIROLI

## **Ancora sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 26,*  
n° 3 (1972), p. 625-643

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1972\\_3\\_26\\_3\\_625\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_3_625_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# ANCORA SULLA PERTURBAZIONE DELLE DISEQUAZIONI D'EVOLUZIONE PARABOLICHE

MARCO BIROLI (\*)

## § 1. Introduzione ed enunciati.

Sia  $V$  uno spazio di Banach reale ed uniformemente convesso di norma  $\| \cdot \|$ ,  $V^*$  il duale di  $V$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualità entro  $V$  e  $V^*$  e  $\| \cdot \|_*$  la norma duale su  $V^*$ .

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert reale ed identificato col suo duale per il prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$ .

Supponiamo che  $V$  sia identificato con un sottospazio denso di  $H$  e che la iniezione di  $V$  in  $H$  sia compatta.

Sia poi  $K$  un insieme chiuso e convesso in  $H$  con  $0 \in K$  e  $A: V \rightarrow V^*$  un operatore lineare, limitato e autoaggiunto in  $H$ , tale che

$$(1,1) \quad \langle Av, v \rangle \geq \alpha \|v\|^2 \quad \alpha > 0 \quad \forall v \in V$$

Possiamo allora supporre, senza perdita di generalità, che

$$(1,2) \quad \langle Av, v \rangle = \|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

Supponiamo infine che esista una base ortonormale di  $H$ ,  $\{v_1, \dots, v_n, \dots\}$  formata da autovettori dell'operatore  $A$ , considerato in  $H$ , che sia pure una base di  $V$ .

Diamo ora una definizione:

DEF. I. Sia  $M \in L(C(0, T; V); L^\infty(0, T; H))$  e  $u(t) \in C(0, T; V)$ ; poniamo

$$r_t u(s) \begin{cases} = u(s) & \text{in } [0, t] \\ = 0 & \text{in } ]t, T] \end{cases}$$

---

Pervenuto alla Redazione il 12 Luglio 1971.

(\*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C. N. R. presso l'Università di Parigi.

Si dice che l'operatore  $M$  è di tipo locale se esiste una costante  $\mu$  tale che  $\forall t_0 \in [0, T]$

$$\|r_{t_0} Mu(t)\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq \mu \|r_{t_0} u(t)\|_{L^\infty(0, T; V)}$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$(1,3) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Mu(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ove  $f(t) \in L^2(0, T; H)$ ,  $u_0 \in V$  e  $M \in L(C(0, T; V); L^\infty(0, T; H))$  è di tipo locale.

Artolà, in [1], ha ottenuto il seguente risultato

**TH I.** *Supponiamo  $Au_0 \in H$  e supponiamo che l'operatore  $M$  goda della seguente proprietà:*

*Se*

$$v_n(t) \rightarrow v(t) \text{ in } V \text{ su } [0, T],$$

*allora*

$$Mv_n(t) \rightarrow Mv(t) \text{ q. o. su } [0, T] \text{ in } H.$$

*Esiste allora una ed una sola soluzione di (1,3)*

$$u(t) \in C(0, T; V) \quad \text{con} \quad \frac{du}{dt}(t) \in L^\infty(0, T; H).$$

Supponiamo ora che l'operatore  $M$  sia di tipo locale e si possa estendere allo spazio delle funzioni debolmente continue in  $V$  ed indichiamo, per semplicità, ancora con  $M$  tale estensione; supponiamo infine che se

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* v_n(t) = v(t) \text{ in } V \text{ uniformemente su } [0, T]$$

sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* Mv_n(t) = Mv(t) \text{ in } H \text{ uniformemente su } [0, T].$$

Consideriamo la disequazione d'evoluzione parabolica

$$(1,4) \quad \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \left\langle Au(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle Mu(t), v(t) - u(t) \right\rangle - \left\langle f(t), v(t) - u(t) \right\rangle \right\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u(s)|^2 - |v(0) - u_0|^2 \} \quad \forall s \in [0, T]$$

$$\forall v(t) \in L^2(0, T; V) \quad \text{con} \quad \frac{dv}{dt}(t) \in L^2(0, T; H) \quad v(t) \in K \text{ in } [0, T]$$

$u(t)$  debolmente continua su  $[0, T]$  in  $V$  con

$$u(t) \in K \text{ in } [0, T]$$

$$u(0) = u_0$$

ove

$$f(t) \in L^2(0, T; H) \text{ e } u_0 \in K.$$

Lo scopo di questo lavoro è ottenere un risultato di esistenza ed unicità ed un risultato di dipendenza continua per la soluzione del problema (1,4).

**TH. II.** Sia  $u_0 \in K \cap V$  e supponiamo che esista un operatore  $\beta: H \rightarrow H$  di penalizzazione per  $K$ , tale che  $\beta = u - P_K u$  e

$$\langle Av, \beta v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V, Av \in H$$

Esiste allora una ed una sola soluzione del problema (1,4)  $u(t)$  debolmente continua in  $V$  e tale che  $Au(t) \in L^2(0, T; H)$

**TH III.** Consideriamo il problema

$$(1,4_n) \quad \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle +$$

$$+ \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle - \langle f_n(t), v(t) - u(t) \rangle dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u(s)|^2 - |v(0) - u_{0,n}|^2 \} \quad \forall s \in [0, T]$$

$$\forall v(t) \in L^2(0, T; V) \quad \text{con} \quad \frac{dv}{dt}(t) \in L^2(0, T; H), v(t) \in K \text{ su } [0, T]$$

$u(t)$  debolmente continua in  $V$  su  $[0, T]$ ,  $u(t) \in K$  su  $[0, T]$ ,  $u(0) = u_{0,n} \in K$   
ove

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* f_n(t) = f(t) \text{ in } L^2(0, T; H)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* u_{0,n} = u_0 \text{ in } V$$

Il problema (1,4<sub>n</sub>) ammette una ed una sola soluzione  $u_n(t)$ , tale che

$$\lim_{n \rightarrow 0}^* Au_n(t) = Au(t) \text{ in } L^2(0, T; H)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) \text{ in } L^2(0, T; V)$$

ove  $u(t)$  è la soluzione del problema (1,4).

Nel § 2 si dimostra il Th. II, nel § 3 si dimostra il Th. III ed infine nel § 4 si fornisce un esempio di applicazione dei Th. II e III.

## § 2. Dimostrazione del Th. II.

Consideriamo dapprima il problema

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au(t) + Mu(t) + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u(t)) = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e dimostriamo che esso ammette almeno una soluzione  $u_\varepsilon(t) \in C(0, T; V)$  con  $Au_\varepsilon(t) \in L^2(0, T; H)$ .

Procediamo mediante il metodo di Faedo-Galerkin; indichiamo con  $V_n$  il sottospazio di  $V$  sotteso dai vettori  $v_1, \dots, v_n$  e poniamo

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^n (f(t), v_i) v_i, \quad u_{0,n} \in V_n \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_{0,n} = u_0 \text{ in } V.$$

Consideriamo il problema approssimante

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au(t) + P_n Mu(t) + \frac{1}{\varepsilon} P_n \beta(u(t)) = f_n(t) \\ u(0) = u_{0,n} \end{cases}$$

ove con  $P_n$  si indica la proiezione di  $H$  su  $V_n$ .

Da [1] (Th. 5. III pag. 213) segue che (2.2) ha una ed una sola soluzione  $u_n(t) \in C(0, T; V)$ .

Determiniamo ora delle stime su  $u_n(t)$ .

Moltiplichiamo scalarmente l'equazione per  $Au_n(t)$ ; si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n(t)\|^2 + |Au_n(t)|^2 \leq$$

$$\leq \langle f(t), Au_n(t) \rangle - \langle Mu_n(t), Au_n(t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(u_n(t), Au_n(t)) \rangle \leq \\ \leq |f(t)| |Au_n(t)| + |Mu_n(t)| |Au_n(t)|$$

da cui, integrando

$$\|u_n(t)\|^2 + 2 \int_0^T |Au_n(t)|^2 dt \leq \|u_0\|^2 + 2 \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |Au_n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + 2 \left( \int_0^T |Mu_n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |Au_n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{\delta_1} \int_0^T |f_n(t)|^2 dt + \delta_1 \int_0^T |Au_n(t)|^2 dt + \frac{1}{\delta_2} \int_0^T |Mu_n(t)|^2 dt + \\ + \delta_2 \int_0^T |Au_n(t)|^2 dt \leq \\ \leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{\delta_1} \int_0^T |f_n(t)|^2 dt + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \left( \int_0^T |Au_n(t)|^2 dt \right) + \\ + \frac{\mu^2}{\delta_2} \cdot T \operatorname{Sup}_{t \in [0, T]} \|u_n(t)\|^2 + \frac{\mu^2}{\delta_2}$$

ove  $\delta_1, \delta_2 > 0$  sono fissati.

Fissiamo  $\delta_1$  e  $\delta_2$  in modo che  $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} < \frac{1}{2}$  e supponiamo  $T < \frac{2\delta_2}{\mu^2}$ .

Si ha allora

$$(2.3) \quad \operatorname{Sup}_{t \in [0, T]} \|u_n(t)\|^2 + \int_0^T |Au_n(t)|^2 dt \leq C$$

ove  $C$  è una costante che non dipende né da  $n$  né da  $\varepsilon$ .

Nel caso in cui  $T \geq \frac{2\delta_2}{\mu^2}$  si riottiene (2.3) dividendo  $[0, T]$  in intervalli parziali di ampiezza minore di  $\frac{2\delta_2}{\mu^2}$ .

Da (2.3) e (2.2) si ottiene che

$$(2.4) \quad \int_0^T \left| \frac{du_n}{dt}(t) \right|^2 dt \leq C'$$

ove  $C'$  è una costante indipendente da  $n$ , ma che dipende da  $\varepsilon$ .

Da (2.3) e (2.4) si ottiene che si può estrarre da  $\{u_n(t)\}$  una sottosuccessione che, per semplicità, indichiamo ancora con  $\{u_n(t)\}$ , tale che

$$(2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* \frac{du_n}{dt}(t) = \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) \text{ in } L^2(0, T; H)$$

$$(2.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* Au_n(t) = Au_\varepsilon(t) \text{ in } L^2(0, T; H)$$

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^{**} u_n(t) = u_\varepsilon(t) \text{ in } L^\infty(0, T; V)$$

Da (2.5) e (2.7) si ottiene

$$(2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u_\varepsilon(t) \text{ in } L^2(0, T; H)$$

e quindi

$$\frac{1}{\varepsilon} |\beta(u_n(t))| \leq C''$$

(ove  $C''$  è una costante indipendente da  $n$ , ma dipendente da  $\varepsilon$ )

$$(2.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(u_n(t)), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle = 0$$

$$(2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_n(t)) = X(t) \text{ in } L^2(0, T; H)$$

Da (2.9) e (2.10) si ottiene

$$(2.11) \quad X(t) = \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon(t))$$

In base a (2.4) si ha che le funzioni  $u_n(t)$  sono equicontinue in  $H$  ed in base a (2.3) si ottiene che  $\forall t \in [0, T]$  la successione  $\{u_n(t)\}$  è relativamente compatta in  $H$ ; da ciò per il teorema di Ascoli-Arzelà vettoriale si ottiene che si può estrarre da  $\{u_n(t)\}$  una sottosuccessione che, per semplicità, indichiamo ancora con  $\{u_n(t)\}$ , tale che

$$(2.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u_\varepsilon(t) \text{ in } C(0, T; H)$$

Da (2.12), essendo le  $\{u_n(t)\}$  uniformemente limitate in  $V$ , si ottiene

$$(2.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* u_n(t) = u_\varepsilon(t) \text{ in } V \text{ uniformemente su } [0, T].$$

Da (2.13) segue

$$(2.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* Mu_n(t) = Mu_\varepsilon(t) \text{ in } H \text{ uniformemente su } [0, T].$$

Da (2.5)(2.6)(2.10)(2.11) e (2.14) si deduce che  $u_\varepsilon(t)$  è soluzione del problema (2.1).

Da (2.3) si ottiene poi

$$(2.15) \quad \text{Sup}_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon(t)\|^2 + \int_0^T |Au_\varepsilon(t)|^2 dt \leq C$$

ove  $C$  non dipende da  $\varepsilon$ .

Enunciamo ora il seguente lemma la cui dimostrazione è identica a quella del teorema di Ascoli-Arzelà vettoriale

**LEMMA 1.** *Sia  $\{v_\varepsilon(t)\}$  una successione in  $C(0, T; H)$ ; supponiamo che vi sia una successione  $\{t_m\}$  densa in  $[0, T]$  tale che,  $\forall m, \{v_\varepsilon(t_m)\}$  sia relativamente compatta in  $H$ , e che, fissato  $\sigma > 0$  arbitrario, esistano  $\delta_0$  e  $\varepsilon_0$ , dipendenti da  $\sigma$ , in modo che*

$$|v_\varepsilon(t + \delta) - v_\varepsilon(t)| \leq \sigma \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad t + \delta, t \in [0, T]$$

La successione  $\{v_\varepsilon(t)\}$  è allora relativamente compatta in  $C(0, T; H)$ .

Mostriamo ora, utilizzando il lemma 1, che la successione  $\{u_\varepsilon(t)\}$  è relativamente compatta in  $C(0, T; H)$ .

Moltiplichiamo scalarmente l'equazione (2.1) per  $(u_\varepsilon(t) - u_0)$ ; si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u_\varepsilon(t) - u_0|^2 &\leq 2 \langle f(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle - 2 \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle - \\ &\quad - 2 \langle Mu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle - 2 \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che  $u_0 \in K$  e quindi

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(u_\varepsilon(t)), u_0 - u_\varepsilon(t) \rangle \leq \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta u_0, u_0 - u_\varepsilon(t) \rangle = 0$$

da cui

$$\frac{d}{dt} |u_\varepsilon(t) - u_0|^2 \leq 2 \langle f(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle - 2 \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle -$$



$$\begin{aligned} & -2 \langle Mu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_0 \rangle \leq \\ & \leq K_1 |f(t)| + K_2 |Au(t)| + K_3 \end{aligned}$$

ove  $K_1, K_2, K_3$  sono costanti indipendenti da  $\varepsilon$ .

Integrando si ottiene allora

$$|u_\varepsilon(t) - u_0|^2 \leq K_1 \cdot t^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t |f(s)| ds \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \cdot t^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t |Au_\varepsilon(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + K_3 \cdot t$$

In base a (2.3),  $\forall \sigma > 0$ , è allora possibile determinare  $\delta_0$  tale che

$$|u_\varepsilon(\delta) - u_0| \leq \frac{\sigma}{2} \quad \text{per } 0 \leq \delta \leq \delta_0$$

ove  $\delta_0$  è indipendente da  $u_0$  che varia in un insieme limitato di  $V$ .

Osserviamo ora che si ha

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)) + A(u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)) + Mu_\varepsilon(t + \delta) - Mu_\varepsilon(t) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} (\beta(u_\varepsilon(t + \delta)) - \beta(u_\varepsilon(t))) = f(t + \delta) - f(t) \end{aligned}$$

da cui moltiplicando scalarmente per  $(u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t))$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} |u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)|^2 \leq 2 \langle f(t + \delta) - f(t), u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t) \rangle - \\ & - 2 \langle Mu_\varepsilon(t + \delta) - Mu_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t) \rangle \leq \\ & \leq |f(t + \delta) - f(t)| \cdot K'_1 + K'_2 \end{aligned}$$

ove  $K'_1$  e  $K'_2$  sono costanti indipendenti da  $\varepsilon$ .

Integrando si ottiene allora

$$|u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)|^2 \leq 2 K'_1 t^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + K'_2 \cdot t + \frac{\sigma^2}{4}$$

Da ciò segue che

$$(2.16) \quad |u(t + \delta) - u(t)| \leq \sigma \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0$$

per  $t \leq \varrho$ , ove  $\varrho$  dipende da  $\sigma$ .

Da (2.1), moltiplicando scalarmente per  $u_\varepsilon(t)$ , si ottiene poi

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle dt \leq \frac{1}{2} |u(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_0|^2 + T\mu \left( \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\| \right) \cdot \left( \sup_{t \in [0, T]} |u(t)| \right) + \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sup_{t \in [0, T]} |u(t)| \right)^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{1}{2}} \leq C_1$$

dunque

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T |\beta u_\varepsilon(t)|^2 dt \leq C_1$$

Dalla relazione precedente segue che per quasi ogni  $t \in [0, T]$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} |\beta u_\varepsilon(t)|^2 < +\infty$$

Possiamo pertanto, fissata una successione densa in  $[0, T]$   $\{s_n\}$ , supporre, senza perdita di generalità, che si possa estrarre da  $\{u_\varepsilon(t)\}$  una sottosuccessione, che per semplicità indichiamo ancora con  $\{u_\varepsilon(t)\}$ , tale che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} |\beta u_\varepsilon(s_i)| < +\infty \quad u_\varepsilon(s_i) \in V$$

Suddividiamo l'intervallo  $[0, T]$  in intervalli parziali di ampiezza minore di  $\varrho$  mediante i punti  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  appartenenti a  $\{s_n\}$ ; è allora possibile fissare  $\varepsilon_0$  tale che per  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} |\beta u_\varepsilon(t_i)| &\leq K \\ \|u_\varepsilon(t_i)\| &\leq C \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dimostriamo che, fissato  $\sigma > 0$ , esiste  $\bar{\delta}_0$  tale che per  $0 \leq \delta \leq \bar{\delta}_0$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$|u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)| \leq \sigma$$

per  $t, t + \delta \in [t_i, t_{i+1}] \quad i = 1, \dots, n - 1$ .

È sufficiente dimostrare la tesi per  $i = 1$ ; negli altri casi si procede analogamente.

Si ha

$$\frac{d}{dt} u_\varepsilon(t_1 + s) + Au_\varepsilon(t_1 + s) + Mu_\varepsilon(t_1 + s) = f(t_1 + s)$$

Moltiplichiamo scalarmente per  $u_\varepsilon(t_1 + s) - u_\varepsilon(t_1)$ ; si ha per  $s > 0$  e  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} |u_\varepsilon(t_1 + s) - u_\varepsilon(t_1)|^2 &\leq \int_0^s |f(t_1 + \eta)| |u(t_1 + \eta) - u(t_1)| d\eta + \\
 &+ \int_0^s |A u_\varepsilon(t_1 + \eta)| |u_\varepsilon(t_1)| d\eta + \\
 &+ \int_0^s |M u_\varepsilon(t_1 + \eta)| |u_\varepsilon(t_1 + \eta) - u_\varepsilon(t_1)| d\eta - \\
 &- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \langle \beta u_\varepsilon(t_1 + \eta), u_\varepsilon(t_1 + \eta) - u_\varepsilon(t_1) \rangle d\eta \\
 &\leq K_1 s^{1/2} \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} + K_2 s^{1/2} \left( \int_0^T |A u_\varepsilon(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
 &+ K_3 s - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \langle \beta u_\varepsilon(t_1 + \eta), P_k u_\varepsilon(t_1 + \eta) \\
 &- u_\varepsilon(t_1) \rangle d\eta \leq \\
 &\leq K_1' s^{1/2} + K_3 s - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \langle \beta u_\varepsilon(t_1 + \eta), P_k u_\varepsilon(t_1) - u_\varepsilon(t_1) \rangle d\eta \leq \\
 &\leq K_1'' s^{1/2} + K_3 s + K s^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \int_0^T |\beta u_\varepsilon(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq K_1''' s^{1/2} + K_3 s.
 \end{aligned}$$

Esiste allora  $\bar{\delta}_0$ , che dipende solo da  $K$ , quindi da  $\sigma$ , tale che

$$|u_\varepsilon(t_1 + \delta) - u_\varepsilon(t_1)| \leq \sigma/2$$

per  $0 \leq \delta \leq \bar{\delta}_0$ ,  $t_1 + \delta \in [t_1, t_2]$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

Si dimostra infine, come nella parte precedente, che

$$|u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)| \leq \sigma$$

$0 \leq \delta \leq \bar{\delta}_0$ ,  $t, t + \delta \in [t_1, t_2]$ ,  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

Si può quindi concludere che fissato  $\sigma > 0$  arbitrario è possibile determinare un  $\tilde{\delta}_0$  e un  $\tilde{\varepsilon}_0$ , dipendenti da  $\sigma$ , tali che

$$|u_\varepsilon(t + \delta) - u_\varepsilon(t)| \leq \sigma$$

$$0 \leq \delta \leq \tilde{\delta}_0, \quad t, t + \delta \in [0, T] \quad 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_0$$

In base al lemma 1, possiamo allora asserire che si può estrarre da  $\{u_\varepsilon(t)\}$  una successione che, per semplicità, indichiamo ancora con  $\{u_\varepsilon(t)\}$  tale che

$$(2.17) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \text{in } C(0, T; H)$$

Da (2.15) si ottiene allora

$$(2.18) \quad \lim^*_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = u(t)$$

uniformemente su  $[0, T]$  in  $V$ , da cui

$$(2.19) \quad \lim^*_{\varepsilon \rightarrow 0} Mu_\varepsilon(t) = Mu(t)$$

uniformemente su  $[0, T]$  in  $H$ .

Da (2.15) si ha poi

$$(2.20) \quad \lim^*_{\varepsilon \rightarrow 0} Au_\varepsilon(t) = Au(t) \quad \text{in } L^2(0, T; H)$$

Ricordiamo ora che si ha

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T |\beta u_\varepsilon(t)|^2 dt \leq C_1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle dt \leq C_1$$

dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle dt = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T |\beta u_\varepsilon(t)|^2 dt = 0$$

da cui, essendo  $\beta: H \rightarrow H$  monotono,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta u_\varepsilon(t) = \beta u(t) = 0$$

in  $L^2(0, T; H)$

Si può dunque affermare che

$$(2.21) \quad u(t) \in K \text{ in } [0, T].$$

Sia ora  $v(t) \in L^2(0, T; V)$  con  $\frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; H)$  e  $v(t) \in K$  in  $[0, T]$ .

Da (2.1) si ha

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \right\rangle + \langle Au_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \\ & + \langle Mu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \geq \\ & \geq \left\langle \frac{dv}{dt}(t) - \frac{du_\varepsilon}{dt}(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(v(t)) - \beta(u_\varepsilon(t)), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \frac{1}{dt} |v(t) - u_\varepsilon(t)|^2 \end{aligned}$$

Da cui,  $\forall s \in [0, T]$  integrando da 0 a  $s$ , si ottiene

$$\begin{aligned} (2.22) \quad & \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}, v(t) - u_\varepsilon(t) \right\rangle + \langle Au_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \right. \\ & \left. + \langle Mu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \right\} dt \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u_\varepsilon(s)|^2 - |v(0) - u_0|^2 \} \end{aligned}$$

In base a (2.17) (2.19) e (2.20) si ha

$$(2.23) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \right\rangle dt = \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle dt$$

$$(2.24) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^s \langle Au_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle dt = \int_0^s \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle dt$$

$$(2.25) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^s \langle Mu_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle dt = \int_0^s \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle dt$$

$$(2.26) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^s \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle dt = \int_0^s \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle dt$$

$$(2.27) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |v(s) - u_\varepsilon(s)|^2 = |v(s) - u(s)|^2$$

Da (2.22) si ha allora

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \right. \\ \left. + \langle Mu(t), v(t) - u(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u(s)|^2 - |v(0) - u_0|^2 \}. \end{aligned}$$

La funzione  $u(t)$  è quindi soluzione del problema (1.4).

Passiamo ora a dimostrare che  $u(t)$  è l'unica soluzione del problema (1.4).

Supponiamo che vi sia una seconda soluzione  $u_*$  di (1.4).

Poniamo

$$w(t) = \frac{u(t) + u_*(t)}{2}$$

e definiamo  $w_\eta(t)$  mediante il problema

$$(2.28) \quad \begin{cases} \eta \frac{dw_\eta}{dt}(t) + w_\eta(t) = w(t) \\ w_\eta(0) = w(0) = u_0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che, [3],

$$w_\eta(t) \in L^2(0, T; V) \quad \frac{dw_\eta}{dt}(t) \in L^2(0, T; H)$$

$$w_\eta(t) \in K \text{ in } [0, T]$$

$$(2.29) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} w_\eta(t) = w(t) \text{ in } C(0, T; H)$$

$$(2.30) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} w_\eta(t) = w(t) \text{ in } L^2(0, T; V)$$

Poniamo allora in (1.4)

$$v(t) = w_\eta(t)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} & \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dw_\eta}{dt}(t), w_\eta(t) - u(t) \right\rangle + \langle Au(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle + \right. \\ & \quad \left. + \langle Mu(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle - \langle f(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq \\ & \geq \frac{1}{2} |w_\eta(s) - u(s)|^2 \\ & \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dw_\eta}{dt}(t), w_\eta(t) - u_*(t) \right\rangle + \langle Au_*(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle + \right. \\ & \quad \left. + \langle Mu_*(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle - \langle f(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle \right\} dt \geq \\ & \geq \frac{1}{2} |w_\eta(s) - u_*(s)|^2 \end{aligned}$$

Facendo la semisomma delle due relazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} & \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dw_\eta}{dt}(t), w_\eta(t) - w(t) \right\rangle + \frac{1}{2} \langle Au(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle + \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \langle Au_*(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Mu(t), w_\eta(t) - u(t) \rangle + \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \langle Mu_*(t), w_\eta(t) - u_*(t) \rangle - \langle f(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle \right\} dt \geq \\ & \geq \frac{1}{4} \{ |w_\eta(s) - u(s)|^2 + |w_\eta(s) - u_*(s)|^2 \} \end{aligned}$$

Passando allora al limite per  $\eta \rightarrow 0$  e tenendo conto di (2.29) e (2.30) si ottiene, essendo

$$\left\langle \frac{dw_\eta}{dt}(t), w_\eta(t) - w(t) \right\rangle \leq 0 \quad \text{in} \quad [0, T],$$

$$\begin{aligned} (2.31) \quad & \frac{1}{2} |u(s) - u_*(s)| \leq \int_0^s \langle M(u(s) - u_*(s)), u(s) - u_*(s) \rangle dt \leq \\ & \leq s \cdot \mu \cdot \left( \text{Sup}_{t \in [0, s]} \|u(t) - u_*(t)\| \right) \left( \text{Sup}_{t \in [0, s]} |u(t) - u_*(t)| \right) \\ & \leq s \cdot \mu \cdot \left( \text{Sup}_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_*(t)\| \right) \left( \text{Sup}_{t \in [0, s]} |u(t) - u_*(t)| \right) \end{aligned}$$

Poniamo allora  $q(s) = s\mu \cdot (\text{Sup}_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_*(t)\|)$  e supponiamo che  $s$  sia tale

che  $q(s) < \frac{1}{2}$ .

Da (2.31) si ha allora

$$\left(\frac{1}{2} - q(s)\right) \text{Sup}_{t \in [0, s]} |u(t) - u_*(t)| \leq 0$$

da cui

$$u(t) - u_*(t) = 0 \implies u(t) = u_*(t) \quad \text{in } [0, s]$$

Se allora  $q(T) < \frac{1}{2}$  la tesi è provata. Se  $q(T) \geq \frac{1}{2}$  esiste  $\bar{s}$  tale che  $q(\bar{s}) < \frac{1}{2}$ ; dividendo allora  $[0, T]$  in intervalli parziali di misura inferiore a  $\bar{s}$  non sovrappontesi, si riottiene la tesi.

### § 3. Dimostrazione del Th. III.

In base al Th. II, il problema (1,4<sub>n</sub>) ammette,  $\forall n$ , una soluzione  $u_n(t)$  e si ha

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_n(t) \right\rangle + \langle Au_n(t), v(t) - u_n(t) \rangle + \right. \\ \left. + \langle Mu_n(t), v(t) - u_n(t) \rangle - \langle f_n(t), v(t) - u_n(t) \rangle \right\} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u_n(s)|^2 - |v(0) - u_{0,n}|^2 \} \end{aligned}$$

Procedendo allora come al § precedente si ottiene che è possibile estrarre da  $\{u_n(t)\}$  una sottosuccessione  $\{u_{n'}(t)\}$  tale che

$$(3.1) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} u_{n'}(t) = u(t) \quad \text{in } C(0, T, H)$$

Sempre procedendo come al § precedente si deduce che

$$\int_0^T |Au_n(t)|^2 dt + \|u_n(t)\|^2 \leq C$$

ove  $C$  è una costante indipendente da  $n$ .



Possiamo quindi supporre senza perdita di generalità

$$(3.2) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty}^* u_{n'}(t) = u(t) \text{ in } V \text{ uniformemente su } [0, T]$$

$$(3.3) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty}^* Au_{n'}(t) = Au(t) \text{ in } L^2(0, T; H)$$

e quindi

$$(3.4) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} u_{n'}(t) = u(t) \text{ in } L^2(0, T; V)$$

$$(3.5) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty}^* Mu_{n'}(t) = Mu(t) \text{ in } H \text{ uniformemente su } [0, T]$$

Si ha allora

$$u(t) \in K \text{ in } [0, T]$$

e

$$(3.6) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_{n'}(t) \right\rangle dt = \int_0^s \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle dt$$

$$(3.7) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_0^s \left\langle Au_{n'}(t), v(t) - u_{n'}(t) \right\rangle dt = \int_0^s \left\langle Au(t), v(t) - u(t) \right\rangle dt$$

$$(3.8) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_0^s \left\langle Mu_{n'}(t), v(t) - u_{n'}(t) \right\rangle dt = \int_0^s \left\langle Mu(t), v(t) - u(t) \right\rangle dt$$

$$(3.9) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_0^s \left\langle f_{n'}(t), v(t) - u_{n'}(t) \right\rangle dt = \int_0^s \left\langle f(t), v(t) - u(t) \right\rangle dt$$

Si ha allora da (3.1) (3.6) (3.7) (3.8) (3.9)

$$\begin{aligned} & \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \left\langle Au(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \right. \\ & \quad \left. + \left\langle Mu(t), v(t) - u(t) \right\rangle - \left\langle f(t), v(t) - u(t) \right\rangle \right\} dt \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \{ |v(s) - u(s)|^2 - |v(0) - u_0|^2 \} \end{aligned}$$

Quindi  $u(t)$  è soluzione del problema (1.4); dall'unicità della soluzione di (1.4) e da (3.3) e (3.4) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* Au_n(t) = Au(t) \quad \text{in } L^2(0, T; H)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{in } L^2(0, T; V)$$

#### § 4. Esempi.

Poniamo  $V = H_0^1(\Omega)$   $H = L^2(\Omega)$  e

$$K = \{v(x) \mid v(x) \in L^2(\Omega) \quad v(x) \geq 0 \quad \text{q.o. su } \Omega\}$$

ove  $\Omega$  è un aperto, di frontiera  $\Gamma$ , limitato in  $R^n$ .

Definiamo poi l'operatore  $A: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  attraverso la seguente relazione

$$\langle Av, w \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + a_0(x) v(x) w(x) \right\} dx$$

$\forall v(x), w(x) \in H_0^1(\Omega)$ , ove

$$a_{ij}(x), a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \text{q.o. su } \Omega$$

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$$

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n \quad \text{q.o. in } \Omega \text{ e}$$

$$a_0(x) \geq 0 \quad \text{q.o. in } \Omega$$

Sia ora  $\omega(t)$  una funzione soddisfacente le seguenti proprietà:

(a)  $\omega(t)$  è misurabile su  $[0, T]$

(b) esiste  $t_0 \geq 0$  tale che  $t - \omega(t) \geq 0$ , per  $t \in [t_0, T]$  q.o. e  $t - \omega(t) < 0$  su  $[0, t_0[$  q.o.

Poniamo

$$-\infty < -\tau_0 = \inf_{t \in [0, t_0[} (t - \omega(t)), (t - \omega(t)) \leq T \quad \text{q.o. su } [t_0, T[$$

$$g(t, x) \in L^2(-\tau_0, 0; H_0^1(\Omega))$$

$$u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$$

Siano ora  $b_i(t, x) \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$   $i = 1, \dots, n$  e poniamo

$$Mv(t, x) = \begin{cases} = \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(t - \omega(t), x) & \text{in } [t_0, T] \times \Omega \text{ q.o.} \\ = 0 & \text{in } [0, t_0[ \times \Omega \text{ q.o.} \end{cases}$$

È facile verificare che  $M \in L(C(0, T; H_0^1(\Omega)); L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))$  ed è pseudolocale, [1]; si verifica poi senza difficoltà che se  $\{v_n(t, x)\}$  è tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* v_n(t, \cdot) = v(t, \cdot) \text{ in } H_0^1(\Omega) \text{ uniformemente su } [0, T]$$

si ha pure

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* Mv_n(t, \cdot) = Mv(t, \cdot) \text{ in } L^2(\Omega) \text{ uniformemente su } [0, T]$$

Sia poi

$$f_0(t, x) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e poniamo}$$

$$f(t, x) = \begin{cases} = f_0(t, x) & \text{in } [t_0, T] \times \Omega \text{ q.o.} \\ = f_0(t, x) - \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(t - \omega(t), x) & \text{in } [0, t_0[ \times \Omega \text{ q.o.} \end{cases}$$

Osserviamo che un operatore di penalizzazione per  $K$  è

$$\beta(v) = v^- \quad \forall v(t, x) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

ove

$$v^-(t, x) = \begin{cases} = v(t, x) & \text{q.o. } \{(t, x) \mid v(t, x) \leq 0\} \\ = 0 & \text{q.o. } \{(t, x) \mid v(t, x) > 0\} \end{cases}$$

Possiamo allora concludere che il problema (1.4) ha in questo caso una ed una sola soluzione  $u(t, x)$  in base al Th. II.

Osserviamo che in questo caso la forma esplicita del problema (1.4) è la seguente

$$\int_0^s \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) (v(t, x) - u(t, x)) - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (v(t, x) - u(t, x)) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t - \omega(t), x) (v(t, x) - u(t, x)) \\ & - f_0(t, x) (v(t, x) - u(t, x)) \} dt dx \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \{ \|v(s, \cdot) - u(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|v(0, \cdot) - u_0(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \} \end{aligned}$$

$$\forall v(t, x) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{con} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

e  $v(t, x) \geq 0$  q.o. su  $[0, T] \times \Omega$ ,  $u(t, \cdot)$  continua nella topologia debole di  $H_0^1(\Omega)$  su  $[0, T]$  con  $u(t, x) = g(t, x)$  in  $[-\tau_0, 0] \times \Omega$  q.o. e  $u(t, x) \geq 0$  q.o. in  $[0, T] \times \Omega$ ,  $u(0, x) = u_0(x)$  q.o. in  $\Omega$ .

In base al Th. III la soluzione  $u(t, x)$  di tale problema dipende con continuità in  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  da  $f_0(t, x)$ ,  $u_0(t, x)$  ed  $u_0(x)$  considerati rispettivamente nelle topologie deboli di  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , di  $L^2(-\tau_0, 0; H_0^1(\Omega))$  e di  $H_0^1(\Omega)$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] ARTOLÀ M.: *Sur les perturbations des équations d'évolution. Application à des problèmes de retard.* [Ann. Scient. Ecole Nor. Sup. 4<sup>a</sup> serie. Torno 2<sup>o</sup> (1969) pag. 137-253].
- [2] BIROLI M.: *Sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche.* [Ann. Sc. Nor. Pisa, vol. XXV, fasc. 1 (1971)].
- [3] LIONS J. L.: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* [Coll. études math. Dunod - Gauthier - Villars (1969)].