

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LUDGER KAUP

Zur Homologie projektiv algebraischer Varietäten

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 26, n° 2 (1972), p. 479-513

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_2_479_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ZUR HOMOLOGIE PROJEKTIV ALGEBRAISCHER VARIETÄTEN (*)

LUDGER KAUP

Kernn Karl Stein zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung.

Zwischen der Homologie Steinscher komplexer Mannigfaltigkeiten und der Homologie singularitätenfreier projektiv algebraischer Varietäten besteht ein enger Zusammenhang: Der affine Teil Y einer projektiv algebraischen Varietät X ist Steinsch und sein Komplement $A = X \setminus Y$ ist seinerseits projektiv algebraisch. Auf die Mannigfaltigkeiten kann man den Dualitätssatz von Alexander-Poincaré anwenden, der einen Isomorphismus von $H^*(X \setminus A)$ auf $H_*(X, A)$ liefert; damit kann man in vielen Fällen die Homologiegruppen berechnen oder unter gewissen allgemeineren Voraussetzungen ihr Verschwinden nachweisen. Ein analoges Hilfsmittel ist die Poincaré Dualität: Sie beschreibt einen Isomorphismus von $H^*(X)$ auf $H_*(X)$, mit dessen Hilfe man aus den niederdimensionalen Homologiegruppen die höherdimensionalen bestimmen kann und umgekehrt.

Für singuläres $X \setminus A$ ist die Situation viel komplizierter. Beschränken wir uns in der Einleitung auf den Fall, dass $X \setminus A$ normal ist, von reiner komplexer Dimension n und nur isolierte Singularitäten hat. Dann existiert noch immer für alle j ein « Poincaré Homomorphismus »

$$P_j: H^j(X \setminus A) \rightarrow H_{2n-j}(X, A),$$

der jedoch im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist. Sind alle P_j in der Theorie mit ganzzahligen Koeffizienten Isomorphismen, dann ist $X \setminus A$ eine Homologiemannigfaltigkeit (und damit für $n \geq 3$ wegen der Richtigkeit der Poincaré Vermutung in den höheren Dimensionen eine topologische

Pervenuto alla Redazione il 27 Gennaio 1971.

(*) partially supported by OAS No. 101001000F4.

Mannigfaltigkeit). Die vorliegende Arbeit, die einen Teil von § 1 aus [13] systematisch darstellt (**), untersucht die Eigenschaften der P_j und wendet sie dann zur Berechnung konkreter Homologiegruppen an.

Injektivität und Surjektivität von P_j hängen von der lokalen Homologie $\mathcal{H}_*(X \setminus A)$ ab. Da die Singularitäten nach Voraussetzung isoliert sind, treten alle P_j in einer langen exakten Sequenz auf:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_{2n-j+1}(X \setminus A)) \rightarrow H^j(X \setminus A) \rightarrow \\ \rightarrow H_{2n-j}(X \setminus A) \rightarrow H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_{2n-j}(X \setminus A)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Wenn in den Singularitäten von $X \setminus A$ die Abweichung vom vollständigen Durchschnitt die Zahl d nicht übersteigt, so gilt für die lokale Homologie: $\mathcal{H}_j(X \setminus A) = 0$ falls $j \neq 2n$, $j < n - d$ oder $j > n + d + 1$. Dies ergibt sich mit einem Dualitätssatz der lokalen Homologie isolierter Singularitäten, der für rationale Koeffizienten die Gestalt hat:

$$\mathcal{H}_{n-k}(X)_y = \mathcal{H}_{n+k+1}(X)_y \quad \text{für } 0 \leq k \leq n - 2.$$

Für lokal vollständige Durchschnitte ist die Situation also fast so einfach wie für Mannigfaltigkeiten.

Dies wirkt sich etwa im Lefschetztheorem für Hyperflächenschnitte aus. Wie für Mannigfaltigkeiten, so gilt auch hier: Ist A Hyperflächenschnitt der n -dimensionalen projektiv algebraischen Varietät X und ist $X \setminus A$ lokal vollständiger Durchschnitt, dann ist der natürliche Homomorphismus $H^i(X) \rightarrow H^i(A)$ ein Isomorphismus für $i < n - 1$ und injektiv für $i = n - 1$. In den Beweis dieses Satzes geht auch noch das vanishing theorem der Kohomologie Steinscher Räume wesentlich ein. Eine allgemeine Version des Lefschetztheorems für nicht lokal vollständige Durchschnitte und für nicht isolierte Singularitäten findet sich in Korollar 2.2.

Anders als im Fall von singularitätenfreien Hyperflächenschnitten gilt für singuläre projektiv algebraische Varietäten kein Lefschetztheorem in den oberen Dimensionen. Es werden daher in der vorliegenden Arbeit gewisse Typen von Hyperflächen in projektiven Räumen genauer untersucht. Ein Beispiel: Es seien $0 \leq r \leq n - 4$ und $0 \leq p$ ganze Zahlen, ferner seien $S, T, Q \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n, z, w]$ und für $0 \leq i \leq r$ a_i komplexe Zahlen $\neq 0$ mit

$$T = wS + zQ + \sum_{i=0}^r a_i z_i^p \quad \text{homogen.}$$

(**) Darüber wurde erstmals am 9 September 1968 in Oberwohlfach berichtet.

Dann bezeichne Y die von T im komplex projektiven Raum $\mathbb{P}^{n+2}$ definierte Hyperfläche, X den durch $w = 0$ in Y definierten Hyperebenenschnitt und A den in X durch $z = 0$ definierten Hyperebenenschnitt. Sind $Y \setminus X$ und $X \setminus A$ zusammenziehbar und haben sie nur isolierte Singularitäten, so gilt:

- i) $H^j(Y) = H^j(\mathbb{P}^{n+1})$ falls $j \neq n+1, n+2, 2n-r-1$.
- ii) $H^{2n-r-1}(Y)$ ist frei mit Erzeugendenzahl

$$b_{r+1}(\mathbb{P}^{n-1}) + (-1)^r \sum_{i=1}^r (1-p)^i.$$

iii) $H^{n+1}(Y)$ und $H^{n+2}(Y)$ lassen sich aus der lokalen Homologie der Singularitäten von $Y \setminus X$ und $X \setminus A$ berechnen (vgl § 3).

Die Homologie dieser Hyperflächen setzt sich damit aus drei sich überlagernden Komponenten zusammen: Erstens überträgt sich die Homologie des $\mathbb{P}^{n+2}$, was in den unteren Dimensionen dem Satz von Lefschetz entspricht. Zweitens bringen die isolierten Singularitäten von $Y \setminus X$ und $X \setminus A$ Störungen in den Gruppen der mittleren Dimensionen. Drittens wirken sich die Singularitäten des unendlich fernen Teiles A über X in $H^{2n-r-1}(Y)$ aus.

Es lassen sich ebenfalls Aussagen über die Homologie affin algebraischer Varietäten gewinnen: X sei ein Hyperebenenschnitt der Hyperfläche Y im $\mathbb{P}^{n+2}$. Wenn X und Y nur isolierte Singularitäten haben, dann ist $H^j(Y \setminus X) = 0$ falls $j \neq 0, n, n+1$. Für die Euler Poincaré Charakteristik erhält man:

$$\chi(Y \setminus X) = 1 + (-1)^{n+1} [b_{n+1}(Y) - b_{n+2}(Y) + b_n(X) - b_{n+1}(X)].$$

Grundlegend für die Berechnung der Euler Poincaré Charakteristik in allen vorliegenden Beispielen ist dabei, dass für einen zusammenhängenden normalen kompakten komplexen Raum X und eine analytische Teilmenge A von X gilt, falls $X \setminus A$ nur isolierte Singularitäten hat:

$$\chi(X \setminus A) = \chi(X) - \chi(A).$$

Die Dualitätssätze für singuläre komplexe Räume haben auch andere Konsequenzen. So gilt ein Theorem B für die Homologie mit abgeschlossenen Trägern auf einem normalen Steinschen Raum X mit Werten in kohärenten analytischen Garben auf X genau dann, wenn X eine komplexe Homologiemannigfaltigkeit ist. Es folgt ein allgemeiner Jordan-Brouwerscher Separationssatz und damit ein Satz über die « Invarianz der Gebiete ». Es ergeben sich topologische Bedingungen auf die Frage, wann ein komplexer Raum nicht durch Hinzufügen einer semianalytischen Menge kompaktifiziert werden kann. Darauf wird in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen.

Die vorliegende Fassung dieser Arbeit entspricht weitgehend dem funktionentheoretischen Teil einer Vortragsreihe, die ich von August bis Oktober 1969 an der Universidad Nacional de La Plata gehalten habe (vgl. [14a]). Für das Zustandekommen dieses Vortragszyklus sowie für wertvolle Anregungen bin ich besonders Miguel Herrera verpflichtet.

§ 1. Dualitätssätze für komplexe Räume.

Im vorliegenden Paragraphen werden einige Ergebnisse aus [14], im folgenden stets mit I zitiert, auf komplexe Räume spezialisiert. Da wir an topologischen Fragen interessiert sind, beschränken wir uns auf reduzierte komplexe Räume X , wie sie in [10] definiert werden. Jede offene Teilmenge von X mit abzählbarer Topologie ist triangulierbar; die Triangulierung kann so gewählt werden, dass eine vorgegebene lokal endliche Familie analytischer Teilmengen von X einen Unterkomplex bildet. ([9]). Die topologische Singularitätenmenge bildet einen Unterkomplex.

Bezüglich der verwendeten Kohomologie, Borel-Moore Homologie und der lokalen Homologie $\mathcal{H}_*(X, \mathcal{F})$ von X mit Koeffizienten in einer Garbe $\mathcal{F}$ von Moduln über einem Hauptidealring L sei wie in I auf [4] verwiesen. M bezeichne stets einen endlich erzeugten, N einen beliebigen L -Modul; die Koeffizienten L werden im allgemeinen nicht in die Bezeichnung der Kohomologie usw. aufgenommen.

n bezeichne stets die komplexe Dimension von X . Damit gilt:

$$\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) = 0 \text{ falls } j < 0 \text{ oder } j > 2n.$$

$$\mathcal{H}_{2n}(X, \mathcal{F}) = \mathcal{H}_{2n}(X) \otimes_L \mathcal{F}.$$

$\mathcal{H}_{2n}(X, N)$ ist auf der Teilmenge aller topologischen Mannigfaltigkeitspunkte von X die konstante Garbe N .

$\mathcal{H}_{2n}(X, N)_x$ ist eine endliche direkte Summe von Exemplaren von N mit einem Summanden für jede irreduzible Komponente aus dem Raukeim X_x .

$\mathcal{H}_{2n-1}(X)_x$ ist frei.

$\mathcal{H}_0(X, N)_x \neq 0$ genau dann, wenn x isolierter Punkt.

$\mathcal{H}_1(X, N)_x \neq 0$ genau dann, wenn $X \setminus x$ unzusammenhängend. Ist X in einer Umgebung von x lokal irreduzibel, so ist $\mathcal{H}_1(X, \mathcal{F})_x = 0$ (I Kor. 2.6).

Bezeichnet $\tilde{X}$ die Normalisierung von X (die bekanntlich stets existiert), ferner $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ die Normalisierungsabbildung, dann ist $(\tilde{X}, \pi, X)$ eine to

pologische $L - 2n$ Normalisierung im Sinne von I , Def. 1.1. $\mathcal{H}_{2n}(\tilde{X}, N)$ ist auf der Vereinigung der n -dimensionalen Zusammenhangskomponenten von $\tilde{X}$ die konstante Garbe N . Unter Verwendung der nullten Bildgarbe existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\pi_0 \mathcal{H}_{2n}(\tilde{X}) = \mathcal{H}_{2n}(X).$$

Ist φ eine Trägerfamilie auf X , $\tilde{\varphi} = \pi^{-1} \varphi$ ihr Urbild unter π auf $\tilde{X}$ und $\tilde{\mathcal{F}}$ die topologische Urbildgarbe auf $\tilde{X}$ bezüglich π der Garbe von L -Moduln $\mathcal{F}$ auf X , dann existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$H_{\varphi}^*(X, \mathcal{H}_{2n}(X, \mathcal{F})) = H_{\tilde{\varphi}}^*(\tilde{X}, \mathcal{H}_{2n}(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})).$$

In der vorliegenden Arbeit spielen nur topologische Singularitäten eine Rolle, nicht aber die rein analytischen. Daher bezeichnen wir mit $S(X) := S(X, L)$ die Menge aller Punkte aus X , in denen X keine $2n$ -dimensionale L Homologiemannigfaltigkeit ist, d. h. $S(X, L) := \{x \in X; \mathcal{H}_{2n}(X)_x \neq L \text{ oder es existiert ein } j < 2n \text{ mit } \mathcal{H}_j(X)_x \neq 0\}$. Ist $\dim_{\varphi}^t \bar{S}(X) = s$ (es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass wir je nach Zusammenhang Dimension sowohl für die komplexe als auch für die topologische Dimension verwenden; falls Missverständnisse möglich sind, verwenden wir auch $\dim^t$ für die topologische Dimension), so ist der von π induzierte Homomorphismus

$$\pi^j: H_{\varphi}^j(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\tilde{\varphi}}^j(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$$

surjektiv für $j > s$ und injektiv für $j > s + 1$. Hat X keine irreduziblen Komponenten der Dimension $p < n$, dann gilt für die Träger der lokalen Homologie: $\dim \operatorname{Tr} \mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) < 2p$ für alle $j \leq 2p$. Stets gilt $\dim \operatorname{Tr} \cdot H_{2p+1}(X, \mathcal{F}) < 2p + 1$.

GENERELLE VORAUSSETZUNGEN: Die Teilmenge A von X sei φ -taut. Es gelte $\dim_{\varphi|X \setminus A} X < \infty$ (dies ist etwa dann erfüllt, wenn X abzählbare Topologie hat oder wenn $\varphi|X \setminus A$ parakompaktifizierend). $\tilde{X}_{2n}$ ist der komplexe Unterraum von $\tilde{X}$, der aus der Vereinigung der n dimensional Komponenten von $\tilde{X}$ besteht. $\tilde{A}_{2n} := \pi^{-1}(A) \cap \tilde{X}_{2n}$ sei $\tilde{\varphi}| \tilde{X}_{2n} -$ taut (Dies gilt etwa dann, wenn X reindimensional ist, oder wenn φ parakompaktifizierend und X mit abzählbarer Topologie ist). Die Garbe von L -Moduln $\mathcal{F}$ kann beliebig gewählt werden, wenn A abgeschlossen und φ parakompaktifizierend ist. In allen anderen Fällen sei sie die konstante Garbe M .

Nach I Theorem 2.1 existieren natürliche Poincaré Homomorphismen für alle j :

$$P_j(X, A; \mathcal{F}): H_{\varphi|_{\tilde{X}_{2n}}}^j(\tilde{X}_{2n}, \tilde{A}_{2n}; \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H_{2n-j}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F})$$

$$Q_j(A, \mathcal{F}): H_{\varphi|_{\tilde{A}_{2n}}}^j(\tilde{A}_{2n}, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H_{2n-j}^{\varphi}(X, X \setminus A; \mathcal{F}).$$

Kern und Kokern von P_j und Q_j lassen sich unter speziellen Voraussetzungen bestimmen, vgl. I Satz 2.2, 2.3, 2.4a, 2.4b. Beispielsweise gilt:

SATZ 1.1. *Wenn im Träger von φ nur isolierte Punkte von $S(X) \setminus A$ liegen, dann treten alle $P_j(X, A; \mathcal{F})$ in einer langen exakten Sequenz auf:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\varphi|_{\tilde{X}_{2n}}}^1(\tilde{X}_{2n}, \tilde{A}_{2n}; \tilde{\mathcal{F}}) &\rightarrow H_{2n-1}^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\varphi|_{X \setminus A}}^0(X, \mathcal{H}_{2n-1}(X, \mathcal{F})) \\ &\rightarrow H_{\varphi|_{\tilde{X}_{2n}}}^2(\tilde{X}_{2n}, \tilde{A}_{2n}; \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow \dots \rightarrow H_0^{\varphi|_{X \setminus A}}(X \setminus A, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\varphi|_{X \setminus A}}^0(X, \mathcal{H}_0(X, \mathcal{F})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Der Beweis ergibt sich aus I Korollar 2.4a; eine analoge Aussage für $Q_j(A, \mathcal{F})$ erhält man mit I Korollar 2.4b.

KOROLLAR 1.2. *(Dualitätssatz der lokalen Homologie für isolierte Singularitäten): x sei isolierte Singularität des reindimensionalen Raumes X . Dann existiert für alle k mit $2 \leq k \leq 2n - 1$ ein Isomorphismus*

$$\mathcal{H}_k(X, M)_x = \bigoplus_{y \in \tilde{x}} [\text{Hom}(\mathcal{H}_{2n-k+1}(\tilde{X})_y, M) \oplus \text{Ext}(\mathcal{H}_{2n-k}(\tilde{X})_y, M)].$$

Beweis: Nach Satz 1.1 existiert mit $A = X \setminus x$ und Koeffizienten M eine exakte Sequenz $0 = H_k(x) \rightarrow H_x^0(X, \mathcal{H}_k(X)) \rightarrow H^{2n-k+1}(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{x}) \rightarrow \dots \rightarrow H_{k-1}(s) = 0$. Nun gilt $H^*(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{x}) = \bigoplus_{y \in \tilde{x}} H^*(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus y)$ (vgl. I Beweis zu Satz 2.5). Aus dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie folgt dann die Behauptung.

KOROLLAR 1.3. *x sei isolierte Singularität des reindimensionalen Raumes X ; es gelte $\mathcal{H}_k(X)_x = 0$ für alle $k < n - d$. Dann ist $\mathcal{H}_{n+d+1}(X)_x$ frei und $\mathcal{H}_{n+d+k+1}(X, \mathcal{F})_x = 0$ für $n + d < n + d + k < 2n - 1$.*

Beweis: Da x isolierte Singularität und $\mathcal{H}_1(X)_x = 0$, ist X in einer Umgebung von x irreduzibel. Daher darf topologisch X mit der Normalisie-

rung identifiziert werden. Aus Korollar 1.2 folgt dann zunächst für $\mathcal{F} = L$, dass für $k \geq 0$ $\mathcal{H}_{n+d+k}(X)_x$ torsionsfrei und für $n + d < n + d + k < 2n$ $\mathcal{H}_{n+d+k}(X)_x$ ohne freien Bestandteil ist. Aus dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie folgt dann die Behauptung für allgemeines $\mathcal{F}$: $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F})_x = \mathcal{H}_j(X)_x \otimes \mathcal{F}_x \oplus \text{Tor}(\mathcal{H}_{j-1}(X)_x, \mathcal{F}_x)$.

Aussagen ähnlicher Art für gewisse nicht isolierte Singularitäten finden sich in I, Korollar 2.9 und 2.8.

DEFINITION 1.1. Die topologische Abweichung $\text{tab}_x(X)$ des Raumkeimes X_x von X in x wird definiert als

$\text{tab}_x(X) = -1$, falls X in x Homologiemannigfaltigkeit.

$\text{tab}_x(X) = \min \{d; X_x \text{ ist homöomorph zu einem analytischen Mengenkeim } Y_0 \text{ in } \mathbb{C}_0^p, \text{ der sich durch } p - \dim_x X + d \text{ holomorphe Funktionskeime beschreiben lässt}\}$. X heisst in x topologisch vollständiger Durchschnitt, wenn $\text{tab}_x(X) \leq 0$. X heisst topologisch lokal vollständiger Durchschnitt, wenn mit $\text{tab}(X) := \max_{x \in X} (\dim X - \dim_x X + \text{tab}_x(X))$ gilt $\text{tab}(X) \leq 0$.

SATZ 1.4. Für $j < \dim_x X - \text{tab}_x(X)$ gilt $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F})_x = 0$.

Beweis: Es sei $d := \text{tab}_x(X)$. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen $\dim_x X = n$, sowie X ist analytische Menge in einer offenen Hyperkugel B^p im $\mathbb{C}^p$, wobei X durch $p - n + d$ holomorphe Funktionen beschrieben wird. Bezeichnet für diese Funktionen f_j

$$Nf_j = \{x \in B^p, f_j(x) = 0\},$$

so ist bekanntlich $B^p \setminus Nf_j$ Steinsch. Insbesondere ist $H^q(B^p \setminus Nf_j) = 0$ für alle $q > p$, woraus sich mit Hilfe der Mayer Vietorissequenz ergibt: $H^q(B^p \setminus X) = H^q(\bigcup_j B^p \setminus Nf_j) = 0$ für $q > 2p - n + d - 1$.

Da B^p zusammenziehbar, liefert die exakte Kohomologiesequenz $0 \rightarrow \rightarrow H^{2p-j-1}(B^p \setminus X) \rightarrow H^{2p-j}(B^p, B^p \setminus X) \rightarrow 0$, dass $H^{2p-j}(B^p, B^p \setminus X) = 0$ für $j < n - d$. Da B^p eine Mannigfaltigkeit ist, ist $P_*(B^p, B^p \setminus X)$ ein Isomorphismus, so dass mit $H_j(X) = 0$ auch $\mathcal{H}_j(X)_x = \lim_{X \rightarrow x} H_j(X) = 0$ für $j < n - d$. Aus dem Universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie folgt dann die Behauptung für allgemeines $\mathcal{F}$.

KOROLLAR 1.5. Ist x isolierte Singularität und X in x topologisch vollständiger Durchschnitt, so ist $\mathcal{H}_{n+1}(X)_x$ frei und $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F})_x = 0$ für alle $j \neq n, n + 1, 2n$.

KOROLLAR 1.6. X sei reindimensional und lokal irreduzibel, $L = \mathbb{C}$ und $\mathcal{G}$ eine analytische Garbe auf X . Für abgeschlossenes A und für φ mit $A \varphi$ -taut gilt:

- i) $H_{2n}^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A, \mathcal{G}) = H_{\varphi}^0(X, A; \mathcal{G})$.
 ii) Ist φ parakompaktifizierend, so ist $H_j^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A, \mathcal{G}) = 0$ für alle $j < n - \text{tab}(X) - \dim_{\varphi} S(X)$.
 iii) Ist X Steinsch, $S(X \setminus A)$ diskret und $\mathcal{G}$ kohärent, so gilt für eine analytische Teilmenge A :

$$H_j^{\text{old}(X)|X \setminus A}(X \setminus A, \mathcal{G}) = \begin{cases} 0, & n + 1 + \text{tab}(X) < j < 2n \\ \prod_{x \in S(X \setminus A)} \mathcal{H}_j(X)_x \otimes \mathcal{G}_x; & n - \text{tab}(X) \leq j \leq n + 1 + \text{tab}(X). \end{cases}$$

Beweis: ad i) Nach I Satz 3.1 ist $P_0(X, A; \mathcal{G})$ ein Isomorphismus. ad ii) In [16] wird gezeigt, dass für parakompaktifizierendes φ gilt: $H_{\varphi}^q(X, \mathcal{G}) = 0$ für $q > n$. Dann sieht man leicht, dass die Voraussetzungen von I Satz 2.2 und Satz 7.3 erfüllt sind, woraus ii) folgt. ad iii) Nach Theorem B sind die fraglichen Homologiegruppen isomorph zu Schnittvektorräumen in den lokalen Homologiegarnen, wie sich aus Satz 1.1 ergibt. $\mathbb{C}$ ist ein Körper, somit ist $\mathcal{H}_*(X, \mathcal{G}) = \mathcal{H}_*(X) \otimes \mathcal{G}$. Da $S(X \setminus A)$ diskret liegt, gilt $H^0(X, \mathcal{H}_j(X) \otimes \mathcal{G}) = \prod_{x \in S(X \setminus A)} \mathcal{H}_j(X)_x \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{G}_x$. Korollar 1.3 liefert schliesslich die Behauptung.

BEMERKUNG 1.7. iii) zeigt insbesondere, dass ein Analogon des Theorem B für die Homologie $H_*(X, \mathcal{G})$ eines lokal irreduziblen Steinschen Raumes X genau dann gilt, wenn X eine komplexe Homologiemannigfaltigkeit ist; ist nämlich $x \in S(X)$ und gilt Theorem B, so bezeichne $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von X und $\mathcal{I}$ die Idealgarbe von x , dann ist mit $\mathcal{G} = \mathcal{O}/\mathcal{I}$ $\text{Tr } \mathcal{G} = \{x\}$ und $H^q(X, \mathcal{H}_j(X, \mathcal{G})) = 0$ für $q > 0$. Daher ergibt sich eine exakte Sequenz wie in Satz 1.1 und daraus mit Theorem B: $0 = H^0(X, \mathcal{H}_j(X, \mathcal{G})) = \mathcal{H}_j(X)_x \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{G}_x$ und damit $\mathcal{H}_j(X)_x = 0$ für $j < 2n$, d. h. $x \notin S(X)$.

THEOREM 1.8. (Dualitätssatz) i) Es gilt für jede abgeschlossene Teilmenge B von A :

$$P_j^{\varphi}(X, A; \mathcal{F}) \text{ ist } \begin{cases} \text{isomorph, } j > n + \text{tab}(X \setminus B) + \dim_{\varphi|X \setminus A} \overline{S(X)} + 1 \\ \text{surjektiv, } j = n + \text{tab}(X \setminus B) + \dim_{\varphi|X \setminus A} \overline{S(X)} + 1 \end{cases}$$

ii) Ferner gilt:

$$Q_j^{\varphi}(A, \mathcal{F}) \text{ ist } \begin{cases} \text{isomorph, } j > n + \max_{x \in A} \text{tab}_x(X) + \dim_{\varphi \cap A \cap \overline{S(X)}} A \cap \overline{S(X)} + 1 \\ \text{surjektiv, } j = n + \max_{x \in A} \text{tab}_x(X) + \dim_{\varphi \cap A \cap \overline{S(X)}} A \cap \overline{S(X)} + 1 \end{cases}$$

Beweis: Die Zulässigkeit einer abgeschlossenen Teilmenge B von A in i) ergibt sich wie im Beweis von I Korollar 2.4a. Im übrigen folgt die Behauptung durch Spezialisierung aus I Theorem 4.1.

KOROLLAR 1.9. X sei Steinsch und G eine abelsche Gruppe. Dann ist $H_c^j(X, G) = 0$ für $j < n - \text{tab}(X) - \dim S(X)$; ferner ist $H_c^{j+1}(X, L)$ frei über L .

Beweis: Nach Theorem 1.8 ist für die angegebenen j $P_{2n-j}(X; N)$ surjektiv für alle N . Da die Normalisierung von X Steinsch ist (und nur isolierte Singularitäten hat, wenn X nur isolierte Singularitäten hat), folgt aus dem Satz über das Verschwinden der Kohomologie Steinscher Räume [11], dass $H_j(X, N) = 0$. Nach dem universellen Koeffiziententheorem für die Kohomologie mit kompakten Trägern folgt daher $\text{Hom}(H_c^j(X), N) = 0 = \text{Ext}(H_c^{j+1}(X), N)$. Aus der zweiten Gleichung folgt bekanntlich, dass $H_c^{j+1}(X)$ frei ist; aus der ersten zusätzlich, dass $H_c^j(X)$ keinen freien direkten Summanden hat. Damit gilt $H_c^j(X) = 0$. Dies gilt insbesondere für $L = \mathbb{Z}$, so dass aus der exakten Koeffizientensequenz $0 \rightarrow H_c^j(X) \otimes G \rightarrow H_c^j(X, G) \rightarrow \text{Tor}(H_c^{j+1}(X), G) \rightarrow 0$ die Behauptung für allgemeines G sich ergibt.

BEMERKUNG 1.10. Ist $\text{tab}(X) + \dim S(X) > 1$ (bzw. > 0 falls $H_n^c(X)$ frei ist), dann gilt $H^{n-\text{tab}(X)+\dim S(X)}(X) = H^{\dim S(X)}(X, \mathcal{H}_{n-\text{tab}(X)}(X))$.

BEMERKUNG 1.11. Ist X Steinsch und $\text{tab}(\tilde{X}) + \dim S(\tilde{X}) < n - 2$, dann ist $H_c^0(X, \mathcal{H}_{2n-1}(X, G)) = 0$.

Beweis: Aus Korollar 1.9 ergibt sich $H_c^1(\tilde{X}, G) = H_c^2(\tilde{X}, G) = 0$. Dann folgt aus I Theorem 3.5 die Behauptung.

BEMERKUNG 1.12. Die Poincaré Dualität kann nicht verschärft werden ohne zusätzliche Voraussetzungen, wie das folgende Beispiel zeigt: X werde im $\mathbb{P}^{n+1}$ durch die Gleichung $\sum_{i=0}^n z_i^2 = 0$ definiert. Dann ist X vollständiger Durchschnitt und ausserhalb eines Punktes Mannigfaltigkeit. Ist n ungerade, so gilt nach Beispiel 3.1: $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^{n+1}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

BEMERKUNG 1.13. Ist X in x topologisch vollständiger Durchschnitt, so ist X_x reindimensional; ist $\dim^t S(X_x) < 2n - 2$, dann ist X in x lokal irreduzibel ([3] 45.16). Ist $S(X)$ isoliert und $\text{tab}_x(X) \leq n - 2$, dann ist X in x lokal irreduzibel.

§ 2. Das Lefschetztheorem.

Eine analytische Teilmenge eines komplex projektiven Raumes $\mathbb{P}^r$ heisst projektiv algebraische Varietät. Nach dem Satz von Chow kann sie durch homogene Polynome beschrieben werden. Ist H eine Hyperfläche des $\mathbb{P}^r$ und X die projektiv algebraische Varietät, so besagt das Theorem von Lefschetz, dass die niederdimensionale Homologie von $H \cap X$ mit der von X übereinstimmt, falls $X \setminus H \cap X$ eine Homologiemannigfaltigkeit ist. Über die lange Geschichte dieses Satzes informiert etwa die in [1] oder [12] angegebene Literatur. Im vorliegenden Paragraphen wird untersucht, was daraus für singuläres $X \setminus X \cap H$ wird.

THEOREM 2.1. *A sei abgeschlossene Teilmenge von X und*

$$H_{\varphi \cap (X \setminus A)_{2n}}^j((X \setminus A)_{2n}, M) = 0$$

für alle $j > n + \text{tab}(X \setminus A) + \dim_{\varphi \cap (X \setminus A) \cap \overline{S(X)}}(X \setminus A) \cap \overline{S(X)}$. Dann ist die zur Inklusion $A \subset X$ gehörige Abbildung

$$\varrho_i: H_i^{\varphi \uparrow A}(A, M) \rightarrow H_i^{\varphi}(X, M)$$

surjektiv für $i < n - c$ und isomorph für $i < n - c - 1$ mit $c = \text{tab}(X \setminus A) + \dim_{\varphi \cap (X \setminus A) \cap \overline{S(X)}}(X \setminus A) \cap \overline{S(X)}$.

Beweis: Die natürliche Abbildung $\pi^s: H_{\varphi \cap (X \setminus A)_{2n}}^s((X \setminus A)_{2n}, M) \rightarrow H_{\varphi \cap (X \setminus A)}^s((X \setminus A)_{2n}, M)$ ist surjektiv für $s > c$, ebenso ist nach Theorem 1.8 $Q_j(X \setminus A, M)$ surjektiv für $j > n + c$, so dass $H_{n-c-j}^{\varphi}(X, A; M) = 0$ für $j \geq 1$. Aus der exakten Homologiesequenz zum Paar (X, A) folgt dann die Behauptung.

Es ist bisweilen ökonomischer, die Grösse $n - c$ in Theorem 2.1 durch eine manchmal grössere Zahl zu ersetzen, die wie folgt definiert wird:

DEFINITION 2.1. $\text{Tab}_{\varphi}(X, \mathcal{F}) := \min(n, q - p)$, wobei alle p und alle $q \neq 2n$ zugelassen sind, für die $H_p^{\varphi}(X, \mathcal{Q}_q(X, \mathcal{F})) \neq 0$, falls derartige p und q existieren; andernfalls sei $\text{Tab}_{\varphi}(X, \mathcal{F}) = n$.

Man überzeugt sich leicht von der folgenden Ungleichung:

$$\text{Tab}_{\varphi}(X, \mathcal{F}) \geq n - \text{tab}(X) - \dim_{\varphi \cap \overline{Tr(\mathcal{F})} \cap \overline{S(X)}} \overline{Tr(\mathcal{F})} \cap \overline{S(X)}.$$

Während aber die rechte Seite der Ungleichung durchaus negativ sein kann, gilt:

i) Ist X reindimensional und φ parakompaktifizierend, so gilt nach I Satz 1.2: $\text{Tab}_\varphi(X, \mathcal{F}) \geq 1$, falls $n \geq 1$.

ii) Ist X lokal irreduzibel und reindimensional, φ parakompaktifizierend, so gilt nach Korollar 4.6: $\text{Tab}_\varphi(X, \mathcal{F}) \geq 2$ falls $n \geq 2$.

KOROLLAR 2.2. (Lefschetztheorem) X sei eine projektiv algebraische Varietät im $\mathbb{P}^r$. Für die Teilmenge A von X gelte: Ist $t := \text{Tab}_{\text{cl}d}(X \setminus A, L)$, so existieren eine ganze Zahl $d \geq 0$ und nicht notwendig verschiedene Hyperflächen $Y_0, \dots, Y_{d-t+n}$ im $\mathbb{P}^r$ mit $A = X \cap \left(\bigcap_{i=0}^{d-t+n} Y_i \right)$. Dann gilt für die natürlichen Homomorphismen

$$\varrho_i: H_i^c(A, N) \rightarrow H_i^c(X, N)$$

i) ϱ_i ist surjektiv für $i \leq t - d - 1$.

ii) ϱ_i ist bijektiv für $i \leq t - d - 2$.

Beweis: j sei zunächst fest, a der Grad des Y_j beschreibenden homogenen Polynoms; hat der $\mathbb{P}^r$ die homogenen Koordinaten $[z_0, \dots, z_r]$, so sei $\{w_k = z_0^{k_0} \dots z_r^{k_r}, \sum k_i = a\}$ die Menge der Monome in den z_i vom Grad a . Die Veronese Abbildung

$$\psi: \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^s$$

$$[z_0, \dots, z_r] \rightarrow [w_0, \dots, w_s]$$

liefert dann eine holomorphe Bijektion von X auf $\psi(X)$ wobei $X \setminus Y_j$ topologisch auf $\psi(X) \setminus \text{Hyperebene}$ abgebildet wird. $\psi(X)$ kann keine irreduzible Komponente haben, die diese Hyperebene nicht schneidet, da diese nulldimensional sein müsste, $X \setminus A$ aber nur für $t = 0$ isolierte Punkte hat. Damit wird $X \setminus Y_j$ topologisch und holomorph auf etwas affin algebraisches abgebildet, muss daher Steinsch sein. Dies gilt folglich auch für die Normalisierung $\widetilde{X \setminus Y_j}$. Man kann Y_j als Unterkomplex des endlichen simplizialen Komplexes $\widetilde{X}$ auffassen, daher ist nach I Satz 4.10 $H_*^c(\widetilde{X \setminus Y_j})$ ein endlich erzeugter L -Modul. Daher ist $H_n^c(\widetilde{X \setminus Y_j})$ frei über L nach [11] Satz 1 und somit $H^{n+k}(\widetilde{X \setminus Y_j}) = 0$ für alle $k \geq 1$. Eine induktive Anwendung von Mayer-Vietoris liefert dann $H^{2n-t+d+k}(\widetilde{X \setminus A}) = 0$ für diese k , woraus dann wie in 2.1 mit Hilfe der Dualität sich ergibt $H_{t-d-k}^c(X, A) = 0$. Aus dem

universellen Koeffiziententheorem der Homologie folgt $H_{t-d-k}^c(X, A; N) = 0$ für alle L -Moduln N , so dass sich aus der exakten Homologiesequenz zum Paar (X, A) 2.2 ergibt.

KOROLLAR 2.21. *Ist A der Schnitt von X mit höchstens $n - 1$ Hyperflächen, $X \setminus A$ reindimensional und lokal irreduzibel, so ist ϱ_0 bijektiv und ϱ_1 surjektiv. Insbesondere haben X und A gleich viele Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: Nach Korollar 4.6 gilt für $n \geq 2$: $\text{Tab}_{cl}(X \setminus A, L) \geq 2$. Daher ist $d := t - 2 \geq 0$, so dass nach Korollar 2.2 mit $(n - 2) + 1$ Hyperebenen geschnitten werden darf und ϱ_i die verlangten Eigenschaften hat für $i \leq t - (t - 2) - 1$. Da H_0^c die Anzahl der Zusammenhangskomponenten angibt, haben wegen ϱ_0 bijektiv A und X gleich viele Zusammenhangskomponenten. Für $n = 1$ ist die Aussage leer.

KOROLLAR 2.22. *Ist A ein Hyperflächenschnitt von X , so dass $X \setminus A$ keine irreduzible Komponente von kleinerer Dimension als zwei hat, dann haben $\tilde{X}$ und das Urbild $\tilde{A}$ von A in $\tilde{X}$ gleich viele Zusammenhangskomponenten. Ist X insbesondere irreduzibel, so sind A und $\tilde{A}$ zusammenhängend.*

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass $X \neq A$ und X reindimensional. Im Beweis von Korollar 2.2 wurde gezeigt, dass $A \neq \emptyset$, da $X \setminus A$ keine irreduzible Komponente der Dimension < 2 hat, ist $H_{2-n-1}^c(X \setminus A) = 0$. Die exakte Sequenz $0 \rightarrow \rightarrow H_c^1(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow H_{2n-1}^c(X \setminus A) = 0$ liefert daher $H_c^1(\tilde{X}, \tilde{A}) = 0$, da ferner $P_0(X, A)$ ein Isomorphismus ist, gilt auch $H_c^0(\tilde{X}, \tilde{A}) = 0$. Somit ist $H^0(\tilde{X}) = H^0(\tilde{A})$ und damit haben beide gleich viele Zusammenhangskomponenten. Es sei nun jede Zusammenhangskomponente von X irreduzibel. Dann ist jede Zusammenhangskomponente reindimensional, so dass ohne Einschränkung die Normalisierungsabbildung π surjektiv sei. Damit erhält man ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & H^0(X) & \rightarrow & H^0(A) \\
 & & \downarrow \sigma & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H^0(\tilde{X}) & \rightarrow & H^0(\tilde{A})
 \end{array}$$

Da jede Zusammenhangskomponente von X irreduzibel, ist σ ein Isomorphismus und folglich sind alle nichttrivialen Abbildungen im Diagramm Isomorphismen.

BEMERKUNG 2.1. Es sei in Korollar 2.2 $N = L$, $e := \min\{j, \mathcal{H}_j(X) \neq 0\}$. Gelten dann die Behauptungen von 2.2 über ϱ_i für $d = -1$, dann kann man zeigen $H^{i-e}(X \setminus A, \mathcal{H}_e(X)) = 0$. Damit kann man Beispiele isolierter normaler Singularitäten in $X \setminus A$ angeben, für die das Lefschetztheorem nur für $i < n - 1$ wahr ist.

BEMERKUNG 2.2. D. Liebermann verdanke ich den Hinweis, dass Grothendieck lokale und globale Lefschetztheoreme in der cohomologie étale bewiesen hat. Für Einzelheiten sei auf [19], exp. XIV insbesondere Cor. 4.6 verwiesen.

KOROLLAR 2.3. X in Theorem 2.1 sei kompakt und $X \setminus A$ sei homöomorph zu einer $n + c$ vollständigen offenen reindimensionalen Teilmenge eines Steinschen Raumes. Dann ist

$$\varrho_i: H_i(A, N) \rightarrow H_i(X, N)$$

isomorph für $i < n - c - 1$ und surjektiv für $i < n - c$.

Beweis: Nach [7] ist für $n + c$ vollständige offene Teilmengen eines Steinschen Raumes $H^{n+c+k}(X \setminus A) = 0$ für alle $k \geq 1$. Aus Theorem 2.1 folgt die Behauptung für L , aus dem universellen Koeffiziententheorem der relativen Homologie mit $\varphi = c$ folgt sie für allgemeines N .

Hat der topologische Raum T endlich erzeugte Homologie $H_*^c(T, L)$, so werde mit $b_j^L(T) = \text{Rang}_L H_j^c(T, L)$ die (von L abhängige) j -te Bettizahl bezeichnet. Für die Anzahl der irreduziblen Komponenten der Dimension n eines n -dimensionalen komplexen Raumes Y werde zur Abkürzung $\#(Y)$ gesetzt.

SATZ 2.4. X sei analytische Menge im $\mathbb{P}^r$, Y eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}^r$, die X umfasst. Ist $H_{2(r-n)}^c(\mathbb{P}^r \setminus X) = 0$ oder $b_{2(r-n)-1}^L(\mathbb{P}^r \setminus X) < \#(X)$, dann ist für alle $i \leq n$ und für alle torsionsfreien L -Moduln N der zur Inklusion gehörende Homomorphismus $H^{2i}(Y, N) \rightarrow H^{2i}(X, N)$ nicht die Nullabbildung. Insbesondere sind diese $b_{2i}^L(Y) \neq 0$.

Beweis: Es sei zunächst $Y = \mathbb{P}^r$. Da $\mathbb{P}^r$ Mannigfaltigkeit ist, existiert mit den Poincaré Isomorphismen ein exaktes kommutatives Diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow H^{2n-1}(X) & \rightarrow & H^{2n}(\mathbb{P}^r, X) & \rightarrow & H^{2n}(\mathbb{P}^r) & \rightarrow & H^{2n}(X) \rightarrow H^{2n+1}(\mathbb{P}^r, X) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & H_{2n-2r}^c(\mathbb{P}^r \setminus X) & \rightarrow & H_{2n-2r}^c(\mathbb{P}^r) & \rightarrow & H_{2n-2r}^c(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^r \setminus X) & \rightarrow & H_{2n-2r-1}^c(\mathbb{P}^r \setminus X)
\end{array}$$

Gilt nun $H_{2(r-n)}^c(\mathbb{P}^r \setminus X) = 0$, dann ist $H_{2n-2r}^c(\mathbb{P}^r) \rightarrow H_{2n-2r}^c(\mathbb{P}^r, \mathbb{P}^r \setminus X)$ injektiv und folglich auch $H^{2n}(\mathbb{P}^r) \rightarrow H^{2n}(X)$. Ist $b_{2n-2r-1}(\mathbb{P}^r \setminus X) < \#(X)$, dann hat $H^{2n}(X) \rightarrow H^{2n+1}(\mathbb{P}^r, X)$ einen nichttrivialen Kern, da $\#(X) = b_{2n}(X)$ und $H^{2n}(X)$ frei. Also ist auch dann $H^{2n}(\mathbb{P}^r) \rightarrow H^{2n}(X)$ nicht Null. Da $H^{2n}(\mathbb{P}^r)$ frei zyklisch und L als Hauptidealring insbesondere nullteilerfrei ist, muss diese Abbildung sogar injektiv sein. Bezeichnet nun λ die Inklusion $X \subset \mathbb{P}^r$ und e ein Erzeugendes des frei zyklischen Moduls $H^2(P^r)$, dann erhält man mit dem Cupprodukt: $(\lambda^*e)^i = \lambda^*(e^i)$ für alle i . Da e^n ein Erzeugendes von $H^{2n}(\mathbb{P}^r)$ ist, folgt nach dem soeben Bewiesenen, dass $\lambda^*(e^n)$ in $H^{2n}(X)$ nicht die Null ist. Damit gilt aber für alle $i \leq n$: $0 \neq \lambda^*(e^i) \in H^{2i}(X)$. Somit ist die Abbildung $H^{2i}(\mathbb{P}^r) \rightarrow H^{2i}(X)$ nicht die Nullabbildung; mit $\lambda^*(e^n)$ sind auch alle $\lambda^*(e^i)$ frei, so dass der von $\lambda^*(e^i)$ erzeugte Untermodul in $H^{2i}(X)$ frei zyklisch ist und $H^{2i}(\mathbb{P}^r) \rightarrow H^{2i}(X)$ injektiv ist. Gilt $X \subset Y \subset \mathbb{P}^r$ und Y abgeschlossen, so lässt sich die Abbildung faktorisieren als $H^{2i}(\mathbb{P}^r) \rightarrow H^{2i}(Y) \rightarrow H^{2i}(X)$, so dass die erste Abbildung insbesondere injektiv ist und damit $b_{2i}(Y) \neq 0$ und die zweite Abbildung ein Bild vom Rang ≥ 1 hat. Für einen torsionsfreien Modul N ist in dem exakten kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
0 \rightarrow H^{2i}(\mathbb{P}^r) \otimes N & \rightarrow & H^{2i}(\mathbb{P}^r, N) & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow a & & \downarrow b \\
0 \rightarrow H^{2i}(X) \otimes N & \rightarrow & H^{2i}(X, N) & &
\end{array}$$

aus dem universellen Koeffiziententheorem der Kohomologie mit kompakten Trägern die Abbildung a injektiv und damit auch b . Durch Faktorisieren ergibt sich wieder, dass $H^{2i}(Y, N) \rightarrow H^{2i}(X, N)$ nicht die Nullabbildung ist.

SATZ 2.5. *X sei eine irreduzible projektiv algebraische Varietät im $\mathbb{P}^r$ und lasse sich als simultanes Nullstellengebilde von $r - n + d$ homogenen Polynomen beschreiben. X habe nur isolierte topologische Singularitäten und $b_{2r-2r}^{L_m}(P^r \setminus X)$ sei Null für alle Ringe $L_m := L/(m)$, wobei (m) alle maximalen Ideale von L durchläuft. Dann gilt für die zu den Inklusionen*

gehörigen Homomorphismen :

$$\sigma^i: H^i(\mathbb{P}^r, N) \rightarrow H^i(X, N)$$

$$\tau_j: H_j^c(\mathbb{P}^r \setminus X, N) \rightarrow H_j(\mathbb{P}^r, N):$$

i) σ^i ist injektiv für $i \leq 2n$ (nur für $n-d-1 \leq i \leq n+d+1$ dieser Aussage benötigt man N torsionsfrei) und surjektiv für $i < n-d$ und $i > n+d+1$.

ii) τ_j ist ein Isomorphismus für $j < 2r-2n$.

iii) $H_{2r-i}^c(\mathbb{P}^r \setminus X, L_m) = 0$ falls $i \leq n-d$ und falls $n+d+2 < i \leq 2n$.

iv) $\chi(\mathbb{P}^r \setminus X) = r+1 - \chi(X)$.

$$v) \quad \chi(X) = n-d + \sum_{i=-d}^{d+1} (-1)^{n+1} b_{n+1}(X).$$

Beweis: Nach dem Lefschetztheorem 2.2 ist σ^i isomorp für $i < n-d$. Mit Satz 2.4 ist σ^i injektiv für $i \leq 2n$, da der $\mathbb{P}^r$ in den ungeraden Dimensionen verschwindende Homologie hat. Da nach Voraussetzung $\text{tab}(X) \leq d$, ferner $H_{n-d-2}(\mathbb{P}^r, L_m)$ für alle (m) und damit frei ist, folgt, dass $P_j(X, L_m)$ ein Isomorphismus ist für $j < n-d-1$ und für $j > n+d+1$. Insbesondere ist also $H^j(X, L_m) = H^j(\mathbb{P}^n, L_m)$ für diese j . Daraus soll abgeleitet werden, dass σ^i ein Isomorphismus ist für $n+d+1 < i \leq 2n$. Zunächst folgen aus der Injektivität von σ^i exakte Sequenzen $0 \rightarrow H^i(\mathbb{P}^r, L_m) \rightarrow H^i(X, L_m) \rightarrow H^{i+1}(\mathbb{P}^r, X; L_m) \rightarrow 0$, so dass für $n+d+1 < i \leq 2n$ folgt, dass $H^{i+1}(\mathbb{P}^r, X; L_m)$ ein zyklischer Torsionsmodul ist. Für alle ungeraden i darunter ist jedoch $H^i(X, L_m) = 0$ für alle L_m , woraus mit Hilfe des universellen Koeffiziententheorems für die Kohomologie folgt, dass sich aus $H^{i+1}(\mathbb{P}^r, X; L_m) = 0$ ergibt $H^{i+2}(\mathbb{P}^r, X; L)$ ist frei. Also müssen diese $H^{i+2}(\mathbb{P}^r, X; L)$ verschwinden. Ist $n+d+r$ grade, so ist $H^{n+d+4}(\mathbb{P}^r, X; L_m) = 0$ und daher $H^{n+d+3}(\mathbb{P}^r, X; L)$ frei, so dass auch dann der Schluss richtig ist. Damit ist σ^i ein Isomorphismus für $n+d+1 < i \leq 2n$. Aus dem Dualitätssatz folgt damit das Verschwinden der $H_{2r-i}^c(\mathbb{P}^r \setminus X, L)$ in iii). Nach I Satz 4.8 ist $\chi(\mathbb{P}^r \setminus X) = \chi(\mathbb{P}^r, X) = \chi(\mathbb{P}^r) - \chi(X) = r+1 - \chi(X)$. Andererseits ergibt sich aus i):

$$\chi(X) - \sum_{i=-d}^{d+1} (-1)^{n+i} b_{n+i}(X) = \chi(\mathbb{P}^n) - \sum_{i=-d}^{d+1} (-1)^{n+i} b_{n+i}(\mathbb{P}^n)$$

v), da man sich durch Nachrechnen leicht von der folgenden Gleichung überzeugt:

$$\sum_{i=-d}^{d+1} (-1)^{n+i} b_{n+i}(\mathbb{P}^n) = d+1.$$

Da X n dimensional ist, verschwindet $H^i(X, N)$ für $i > 2n + 1$. Daher ist mit $H^i(P^r, X; N) \rightarrow H^i(P^r, N)$ für $i > 2n + 1$ auch τ_{2r-i} ein Isomorphismus. Für $i = 2n + 1$ wurde die Behauptung bereits gezeigt.

BEISPIEL 2.1. H sei eine Hyperfläche in $\mathbb{P}^r$ vom Grad q , $X := H \cap \mathbb{P}^{n+1} \subset \mathbb{P}^r$ und Y sei eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^r$ die X enthält. Ist die Charakteristik von $L \neq q$, so gilt für alle i : $b_i(Y) \geq b_i(P^n)$.

Beweis: Bezeichnet $\lambda: X \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ die natürliche Injektion, so haben wir in dem Beweis zu 2.4 gesehen, dass $\lambda^{2n}: H^{2n}(\mathbb{P}^{n+1}) \rightarrow H^{2n}(X)$ nicht die Nullabbildung hinreichend ist, da dies für $H^{2n}(\mathbb{P}^r) \rightarrow H^{2n}(Y) \rightarrow H^{2n}(\mathbb{P}^{n+1})$ zutrifft. Es sei dazu zunächst $L = \mathbb{Z}$. Wir dürfen ohne Einschränkung X als irreduzibel voraussetzen. Dann sind $H^{2n}(\mathbb{P}^{n+1})$ und $H^{2n}(X)$ frei zyklisch und wir zeigen, dass λ^{2n} die Multiplikation mit $\pm q$ ist, woraus die Behauptung folgt. Ein Erzeugendes von $H^{2n}(\mathbb{P}^{n+1})$ erhält man durch Wahl der geeignet normierten Kählerform ω auf dem $\mathbb{P}^{n+1}$, dann erzeugt ω^n , das n -fach Cupprodukt, die Kohomologiegruppe. $[X]$ bezeichne die Fundamentalklasse in $H_{2n}(X)$ von X , dann hängt das Capprodukt $\omega^n \cap [X]$ nur von der Homologieklassse von $[X]$ in $H^{2n}(\mathbb{P}^{n+1})$ ab, da X irreduzibel ist ist $[X]$ homolog zu $q[\mathbb{P}^n]$ und folglich $\omega^n \cap [X] = q$. Andererseits hat man (vgl. etwa [18] 5.7.16): $q = \omega^n \cap [X] = \lambda_0(\lambda^{2n} \omega^n \cap [X])$. λ_0 ist ein Isomorphismus, also ist $\lambda^{2n} \omega^n \cap [X] = \pm q$. Nun ist wegen X irreduzibel $H^{2n}(\tilde{X}) = H^{2n}(X)$ und $H_{2n}(\tilde{X}) = H_{2n}(X)$ (vgl. etwa I Korollar 3.6), so dass in der Dimension $2n$ das Capprodukt die Poincaré Dualität beschreibt. Also ist $\lambda^{2n}(H^{2n}(\mathbb{P}^{n+1})) = = q \cdot H^{2n}(X)$. Für allgemeines L benutze man nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(\mathbb{P}^r, L) & \rightarrow & H^{2n}(X, L) \\ \parallel & & \parallel \\ L = H^{2n}(\mathbb{P}^r, \mathbb{Z}) \otimes L & \rightarrow & H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \otimes L = L \end{array}$$

Mit dem oberen Pfeil ist daher auch der untere Pfeil die Multiplikation mit $\pm q$.

KOROLLAR 2.6. L sei ein Körper der Charakteristik $\neq q$. X sei Hyperfläche vom Grad q im $\mathbb{P}^{n+1}$ mit nur isolierten Singularitäten, $n > 1$. Dann ist $P_j(X, N)$ ein Isomorphismus für alle $j \neq n - 1, n, n + 1$. $b_{n-1}(X) \leq b_{n+1}(X)$. $H_j(X, N) = H_j(\mathbb{P}^n, N)$ für alle $j \neq n, n + 1$. $H_{n+1}(X)$ ist frei.

$$\chi(X) = n + (-1)^n (b_n(X) - b_{n+1}(X)).$$

$$\chi(\mathbb{P}^{n+1} \setminus X) = 2 - (-1)^n (b_n(X) - b_{n+1}(X)).$$

$$H_j^e(\mathbb{P}^{n+1} \setminus X) = 0 \text{ falls } j \neq 0, n, n + 1.$$

Beweis: Da q in L eine Einheit ist (und diese Voraussetzung genügt sogar) ist wie in Beispiel 2.1 $H^{2n}(\mathbb{P}^r) \rightarrow H^{2n}(X)$ surjektiv. Daher kann man argumentieren wie in Satz 2.5 und erhält die Behauptungen über $\mathbb{P}^{r+1} \setminus X$. Da in die Aussagen über X über die exakte Sequenz 1.1 und über das Lefschetztheorem 2.2 folgen, gelten sie für beliebiges L .

KOROLLAR 2.7. X sei wie in Satz 2.5. Y sei das Nullstellengebilde von höchstens $r - n + d$ homogenen Polynomen im $\mathbb{P}^r$ mit $X \subset Y$, $\dim Y = s$, $\text{tab}(Y) = t$, $s + t < 2n$ und $S(Y)$ endlich. Dann gilt:

$$\sigma^i: H^i(Y, N) \rightarrow H^i(X, N)$$

ist ein Isomorphismus für $i \leq n - d - 1$ und für $c := 2 + \max(n + d, s + t) \leq i \leq 2n$. Für $j \leq 2s - 2n - 1$ ist

$$\tau_j: H_j^c(Y \setminus X, N) \rightarrow H_j(Y, N)$$

ein Isomorphismus. Für $2s - 2n - 1 \leq i \leq 2s - c$ und für $2s - n + d \leq i$ ist $H_i^c(Y \setminus X, N) = 0$, ausserdem gilt

$$\chi(Y \setminus X) = s - t + d - n + \sum_{i=n-d+1}^{c-1} (-1)^i b_{2s-i}(Y) - \sum_{i=-d}^{d+1} b_{n+i}(X).$$

Beweis: Man kann die Abbildung aus 2.5 $H^i(\mathbb{P}^r, N) \rightarrow H^i(X, N)$ faktorisieren über $H^i(\mathbb{P}^r, N) \rightarrow H^i(Y, N) \rightarrow H^i(X, N)$. Mit Hilfe von 2.2 für Y folgt dann leicht, dass für $L = N$ Isomorphismen vorliegen; allgemeines N behandelt man wieder mit dem universelle Koeffiziententheorem für $i \leq n - d - 1$. Insbesondere ergibt sich

$$H^{i+1}(Y, X; N) = H_{2s-i-1}^c(Y \setminus X, N) = 0$$

für diese i . Anwendung der Poincaré Dualität auf Y liefert analog, dass σ^i ein Isomorphismus für $c \leq i \leq 2n$ ist, $\sigma^c = 1$ auf, woraus das Verschwinden von $H_{2s-i}^c(Y \setminus X, N)$ folgt. Der Isomorphismus τ_j ergibt sich aus $\dim X = n$. Schliesslich ist nach I Satz 4.8 $\chi(Y \setminus X) = \chi(Y, X) = \chi(Y) - \chi(X)$. Bestimmt man nach Satz 2.5 $\chi(X)$ und $\chi(Y)$, so folgt die Behauptung.

KOROLLAR 2.8. Y sei eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^{n+2}$ und X ein Hyper ebenen schnitt von Y . Haben Y und X nur isolierte Singularitäten, so gilt:

- i) $\sigma^i: H^i(Y, N) \rightarrow H^i(X, N)$ ist ein Isomorphismus für alle $i \neq n, n + 1, n + 2$; σ^{n+2} ist surjektiv; σ^n injektiv für N torsionsfrei.

- ii) $H_j^c(Y \setminus X, N) = 0$ falls $j \neq 0, n, n+1$; $H_{n+1}^c(Y \setminus X)$ ist frei.
 iii) $\chi(Y \setminus X) = 1 + (-1)^{n+1} [b_{n+1}(Y) - b_{n+2}(Y) + b_n(X) - b_{n+1}(X)]$.

Beweis: Da X ein Hyperebenenchnitt ist, hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(\mathbb{P}^{n+2}) & \rightarrow & H^{2n}(\mathbb{P}^{n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2n}(Y) & \rightarrow & H^{2n}(X) \end{array}$$

wobei die beiden senkrechten Pfeile der Multiplikation mit Grad Y entsprechen und der obere waagrechte Pfeil ein Isomorphismus ist. Damit muss auch der untere waagrechte Pfeil ein Isomorphismus sein. Da $H^{2n+1}(X) = 0 = H^{2n+1}(Y, N)$, ist $H^{2n}(Y, N) \rightarrow H^{2n}(X, N)$ ein Isomorphismus für alle N . Daher lässt sich Korollar 2.7 anwenden mit $d = t = 0$, $s = n+1$, $r = n+2$. Die Freiheit von $H_{n+1}^c(Y \setminus X)$ ergibt sich aus dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie.

SATZ 2.9. A und A' seien Hyperflächenschnitte in der projektiv algebraischen Varietät X , so dass $S(X \setminus A) = S(X \setminus A')$ endlich ist. Dann ist $H_{n-j}(X, A; N) = H_{n-j}(X, A'; N)$ für alle $j \geq 1$.

Beweis: Nach Satz 1.1 existiert eine exakte Sequenz $H^{n+j}(X \setminus A) \rightarrow \rightarrow H_{n-j}(X, A) \rightarrow H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_{n-j}(X)) \rightarrow H^{n+j+1}(X \setminus A) \rightarrow \dots$. Da mit $X \setminus A$ auch $X \setminus A'$ Steinsch ist, verschwindet $H^{n+j}(X \setminus A)$ für alle $n \geq 1$. Damit hängt $H_{n-j}(X, A)$ nur noch von $H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_{n-j}(X))$ ab. Dies gilt ebenso für das Paar (X, A') , so dass für $N = L$ die Behauptung folgt. Allgemeines N erledigt sich wieder mit dem universellen Koeffiziententheorem.

SATZ 2.10. X sei eine einfach zusammenhängende lokal irreduzible analytische Menge im $\mathbb{P}^r$. A bezeichne den Schnitt von X mit einer durch höchstens $n-2$ homogene Polynome definierten analytischen Menge im $\mathbb{P}^r$. Es sei $n \geq 3$, $L = \mathbb{Z}$, $\text{tab}(X \setminus A) \leq n-3$ und $X \setminus A$ habe höchstens isolierte Singularitäten. Hat dann A abelsche Fundamentalgruppe, so ist A einfach zusammenhängend.

Beweis: Nach I Theorem 3.5 existiert eine exakte Sequenz

$$H^0(X, A; \mathcal{H}_{2n-1}(X, M)) \rightarrow H^2(X, A; M) \rightarrow H_{2n-2}^c(X \setminus A, M).$$

Da A durch höchstens $n-2$ Polynome beschrieben wird, ist $H_{2n-2}^c(X \setminus A, M) = 0$ für alle M . Wegen $\text{tab}(X \setminus A) \leq n-3$ ist $\mathcal{H}_2(X \setminus A) = 0$.

Nach Korollar 1.3 ist somit $\mathcal{H}_{2n-1}(X \setminus A, M) = 0$, so dass $H^0(X, A; \mathcal{H}_{2n-1}(X, M)) \subset H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_{2n-1}(X \setminus A, M)) = 0$. Daher verschwindet $H^2(X, A; M)$ für alle M und wegen des einfachen Zusammenhanges von X folgt $0 = H^1(X, M) \rightarrow H^1(A, M) \rightarrow H^2(X, A; M) = 0$. Wäre $H^2(A)$ nicht frei, dann wäre $H^1(A, H^2(A)) = \text{Tor}(H^2(A), H^2(A)) \neq 0$. Aus $H^2(A)$ frei folgt jedoch $H_1(A)$ frei. Wegen $H^1(A) = 0$ folgt $H_1(A) = 0$. Nach Voraussetzung ist $\pi_1(A) = H_1(A)$.

BEMERKUNG 2.3. Wie im Falle relativer Mannigfaltigkeiten gilt auch für singuläres $X \setminus A$ eine Homotopieform des Lefschetztheorems. Die Einzelheiten sollen an anderer Stelle ausgeführt werden.

§ 3. Spezielle projektiv algebraische Varietäten.

Im gesamten Paragraph 3 bezeichne X eine projektiv algebraische Varietät mit $n > 1$.

LEMMA 3.1. *Ist A ein Hyperflächenschnitt von X , so dass $X \setminus A$ topologisch lokal vollständiger Durchschnitt ist und nur isolierte Singularitäten hat, so existiert eine exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow H^{n-1}(X \setminus A, M) \rightarrow H_{n+1}(X, A; M) \rightarrow H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_{n+1}(X \setminus A, M)) \rightarrow \\ \rightarrow H^n(X \setminus A, M) \rightarrow H_n(X, A; M) \rightarrow H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_n(X, M)) \rightarrow 0.$$

Beweis: Da A Hyperflächenschnitt von X ist, folgt $X \setminus A$ Steinsch mit endlich erzeugter Homologie (I Satz 4.10). Daher ist $H^{n+1}(X \setminus A, M) = 0$ (vgl. [11] Satz 1). Die Behauptung folgt dann mit Korollar 1.5 aus Satz 1.1.

BEMERKUNG 3.2. Ist X lokal irreduzibel und reindimensional, ferner A eine analytische Menge in X , dann gilt für die Euler-Poincaré Charakteristik, falls $S(X \setminus A)$ endlich:

$$\chi(X \setminus A) = \chi(X) - \chi(A).$$

Beweis: Gemäss [9] kann man X so mit der Struktur eines endlichen simplizialen Komplexes versehen, dass A ein abgeschlossener Unterkomplex wird. Dann haben nach I Satz 4.10 X , A und $X \setminus A$ endlich erzeugte Homologie, so dass alle drei Charakteristiken existieren. Nach I Satz 4.8 ist $\chi(X \setminus A) = \chi(X, A)$, woraus die Behauptung folgt.

SATZ 3.3. X sei eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^{n+1}$, A ein Hyperflächenschnitt von X . Haben A und $X \setminus A$ nur isolierte analytische Singularitäten und ist $H_j^c(X \setminus A) = 0$ für alle $0 < j < n-1$, $j \neq r$, und ist $H_r^c(X \setminus A)$ frei, so gilt:

- i) $H_j(X, N) = H_j(P^n, N)$ falls $j \neq n, n+1, 2n-r-1, 2n-r$;
 $H_j(X)$ ist frei für $j \neq n$.
- ii) Ist r grade, so gilt i) auch für $j = 2n-r-1$ und $r < n-2$;
 $H_{2n-r}(X, N) = H_r(X \setminus A, N) \oplus N$ falls $r \leq n-2$.
- iii) Ist A ein Hyperebenenschnitt und Charakteristik $L \neq \text{Grad } X$, so gilt i) für $j = 2n-r-1$ und $r \neq n-2$; für $r \leq n-2$ gilt

$$H_{2n-r}(X, N) = H_r^c(X \setminus A, N) \oplus H_{2n-r}(\mathbb{P}^n, N).$$

- iv) $\chi(X) = n + (-1)^n [b_n(A) - b_{n-1}(A) + b_n(X \setminus A) - b_{n-1}(X \setminus A)] +$
 $+ (-1)^r b_r(X \setminus A)$, falls $\dim S(X) \leq n-2$.

Beweis: Durch zweimaliges Anwenden des Lefschetztheorems 2.2 auf X bzw. A erhält man $H_j(A, N) = H_j(\mathbb{P}^{n-1}, N)$ falls $j \leq n-2$. Da $S(A)$ endlich und $\text{tab}(A) = 0$, erhält man aus der Poincaré Dualität $H_j(A, N) = H_j(\mathbb{P}^{n-1}, N)$ für $j \neq n-1, n$. Damit ist $\chi(A) = \chi(\mathbb{P}^{n-1}) - (-1)^{n-1} \cdot (b_{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}) - b_n(\mathbb{P}^{n-1}) - b_{n-1}(A) + b_n(A)) = n-1 + (-1)^n (b_n(A) - b_{n-1}(A))$. Wegen $n > 1$ ist X lokal irreduzibel und reindimensional, so dass nach Bemerkung 3.2 gilt $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X \setminus A)$. $X \setminus A$ ist zusammenhängend, da X lokal irreduzibel, so dass iv) folgt. Aus dem Lefschetztheorem 2.2 folgt $H_j(X, N) = H_j(\mathbb{P}^n, N)$ falls $j \leq n-1$. Nach Lemma 3.1 ist $H_i(X, A; N) = H^{2-i}(X \setminus A; N) = 0$ falls $i \neq r$, $i > n+1$. Die Verwendung von N ist zulässig, da $H_r^c(X \setminus A)$ frei ist. Damit ergibt sich leicht i). Ist r grade, so ist $H_{2n-r+1}(A, N) = H_{2n-r-1}(A, N) = 0$, woraus sich mit $H_{2n-r}(A, N) = N$ leicht ii) ergibt. Ist A ein Hyperebenenschnitt, dann ist die Abbildung $H^{2n-r-1}(X) \rightarrow H^{2n-r-1}(A)$ nicht die Nullabbildung (vgl. Beweis zu Korollar 2.8), falls $2n-r-1$ grade ist. Daher muss $H^{2n-r-1}(X)$ frei zyklisch sein. Wegen $H_r^c(X \setminus A)$ frei ist dann $H^{2n-r-1}(X)$ direkter Summand des zyklischen Moduls $H^{2n-r-1}(A)$, also liegt Gleichheit vor. Da $H^{2n-r}(A)$ frei ist, folgt iii) für $N = L$. Da alle fraglichen Moduln frei sind, gilt iii) auch für allgemeines N .

KOROLLAR 3.4. Ist $X \setminus A$ für X und A aus 3.3 sogar zusammenziehbar, dann ist $H_j(X, N) = H_j(\mathbb{P}^n, N)$ für $j \neq n, n+1$ und es existiert eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow H_{n+1}(\mathbb{P}^n, N) \rightarrow H_{n+1}(X, N) \rightarrow \bigoplus_{y \in S(X \setminus A)} \mathcal{H}_{n+1}(X, N)_y \rightarrow$$

$$\rightarrow H_n(A, N) \rightarrow H_n(X, N) \rightarrow \bigoplus_{y \in S(X \setminus A)} \mathcal{H}_n(X, N)_y \rightarrow H_{n-1}(A^0, N) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{P}^n, N) \rightarrow 0.$$

Beweis: Da $X \setminus A$ zusammenziehbar, ist $H_j^c(X \setminus A, M) = 0$ für alle $j > 0$. Daher entfällt in 3.3 die Ausnahme r . Es bleibt das mittlere Stück zu untersuchen. Aus der exakten Sequenz in Satz 1.1 wird

$$0 = H^{n-1}(X \setminus A) \rightarrow H_{n+1}(X, A) \rightarrow H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_{n+1}(X \setminus A)) \rightarrow \\ \rightarrow H^n(X \setminus A) = 0 \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_n(X \setminus A)) \rightarrow H^{n+1}(X \setminus A) = 0.$$

Unter Verwendung der universellen Koeffiziententheoreme der Homologie folgt $H_i(X, A; N) = H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_i(X \setminus A, N))$ für $i = n, n+1$. Daraus folgt die Behauptung.

BEISPIEL 3.1. Es seien $n \geq 1$, $p \geq 1$ und $r \geq 0$ ganze Zahlen. Im $\mathbb{P}^{n+1}$ mit den homogenen Koordinaten $[z_0, \dots, z_{n+1}]$ werde die Hyperfläche ${}_r F_n^p$ definiert durch die Gleichung $\sum_{i=0}^r z_i^p = 0$. Dann gilt:

- i) $H_*({}_r F_n^p)$ ist frei.
- ii) $H_j({}_r F_n^p, N) = H_j(P^n, N)$ falls $j \neq 2n - r + 1$.
- iii) $\chi({}_r F_n^p) = n + 1 - \sum_{i=1}^r (1 - p)^i$.
- iv) $b_{2n+1-r}({}_r F_n^p) = b_{r+1}(P^n) + (-1)^r \sum_{i=1}^r (1 - p)^i$.

Beweis: Da p im folgenden stets fest bleibt, wollen wir auf diesen Index verzichten. Die Singularitätenmenge von ${}_r F_n$ ist $\{[0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots, z_{n+1}] \in P^{n+1}\}$. Zeichnen wir die Hyperebene $\{z_r = 0\}$ im P^{n+1} aus, dann ist ${}_r F_n \cap \{z_r = 0\}$ homöomorph zu ${}_{r-1} F_{n-1}$ und ${}_r R_n := {}_r F_n \setminus {}_{r-1} F_{n-1}$ ist eine Mannigfaltigkeit, homöomorph zu $\mathbb{C}^{n-r+1} \times \{(z_0, \dots, z_{r-1}) \in \mathbb{C}^r, z_0^p + \dots + z_{r-1}^p = 1\}$. Da $\mathbb{C}^{n-r+1}$ zusammenziehbar ist, ergibt sich aus [16] für die Homologie von ${}_r R_n$: $H_j^c({}_r R_n)$ ist Null für $j \neq 0$, $r-1$ und $H_{r-1}^c({}_r R_n)$ ist frei mit $(p-1)^r$ Erzeugenden. Daraus folgt:

$$\chi({}_r R_n) = 1 + (-1)^{r-1}(p-1)^r = 1 - (1-p)^r.$$

Mit Bemerkung 3.2 ergibt sich für $r \neq 1$ ($r=0$ ergibt ${}_0 F_n = \mathbb{P}^n$, wofür die Behauptung trivialerweise zutrifft):

$$\chi({}_r F_n) = \chi({}_r R_n) + \chi({}_{r-1} F_{n-1}),$$

woraus sich induktiv ergibt: $\chi({}_r F_n) = \sum_{j=0}^{r-1} \chi({}_{r-j} R_{n-j}) + \chi({}_0 F_{n-r}) =$

$$= \sum_{j=0}^{r-1} (1 - (1-p)^{r-j}) + n - r + 1 = - \sum_{i=1}^r (1-p)^i + r + n - r + 1,$$
 womit iii) bewiesen ist. Da ${}_rR_n$ eine Mannigfaltigkeit ist, impliziert die Dualität $H^j({}_rF_n \setminus {}_{r-1}F_{n-1}) = H_{2n-j}({}_rF_n, {}_{r-1}F_{n-1})$, dass $H_i({}_rF_n, {}_{r-1}F_{n-1}) = 0$ falls $i \neq 2n - r + 1, 2n$. Dies liefert insbesondere $H_i({}_rF_n) = H_i({}_{r-1}F_{n-1})$ falls $i \neq 2n, 2n - r, 2n - r + 1$. Durch Übergang von (r, n) zu $(r+q, n+q)$ für q gross genug sieht man daraus induktiv mit dem Satz von Lefschetz, dass $H_i({}_rF_n) = H_i(P^n)$ falls $i \leq 2n - r$, so dass ii) für $i < 2n - r + 1$ und $L = N$ gezeigt ist. Für $r \neq 1$ ist ${}_rR_n$ zusammenhängend, so dass man induktiv für $2n - r + 1 < i < 2n$ erhält: Für grades $i = 2n - 2j \geq 2n - r + 2$ ist $r - j \geq 2 + j \geq 2$, so dass $H_i({}_rF_n) = H_{2n-2j}({}_{r-j}F_{n-j}) = L$. Ist $i = 2(n - j) - 1 \geq 2n - r + 2$, so gilt $0 = H_{2n-2j-1}({}_{r-j-1}F_{n-j-1}) \rightarrow H_{2n-2j-1}({}_{r-j}F_{n-j}) \rightarrow H_{2n-2j-1}({}_{r-j}R_{n-j}) = 0$, so dass ii) insgesamt für $L = N$ bewiesen ist. Dies gibt zusammen mit der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H_{2n-r+1}({}_{r-1}F_{n-1}) \rightarrow H_{2n-r+1}({}_rF_n) \rightarrow (p-1) {}^rL,$$

dass $H_*({}_rF_n)$ frei ist, so dass sich alle Behauptungen für allgemeins N aus dem universellen Koeffiziententheorem ergibt. Somit bleibt nur noch $b_{2n-r+1}({}_rF_n)$ zu bestimmen. Dies ergibt sich leicht aus ii) und iii):

$$n + 1 - \sum_{i=1}^r (1-p)^i = \chi({}_rF_n) = (-1)^{r+1} b_{2n-r+1}({}_rF_n) + n + b_r(P^n).$$

Schliesslich bleibt $r = 1$ zu untersuchen:

${}_1R_n$ besteht aus p Zusammenhangskomponenten, die den p -ten Einheitswurzeln entsprechen. Also ist $H_{2n}({}_1F_n) = H_{2n}({}_1F_n, {}_0F_n) = H^0({}_1R_n)$ frei vom Rang p . Die restlichen Homologiegruppen ergeben sich wie für $r \neq 1$, woraus auch die Charakteristik folgt.

Mit Hilfe dieses Beispiels lassen sich die Homologiegruppen einer Reihe von projektiv algebraischen Varietäten bestimmen. Wir diskutieren den Fall, dass ein Hyperflächenschnitt A existiert mit topologisch einfachem Komplement $X \setminus A$. Für $y \in S(X)$ bezeichnen wir dabei mit b_j^y den Rang von $\mathcal{H}_j(X)_y$, die j -te lokale Bettizahl von X in y .

THEOREM 3.5. *X werde im $\mathbb{P}^s$ durch $n - s + d$ homogene Polynome beschrieben, wobei $d \leq n - 2$. Es existiere eine Hyperfläche H im $\mathbb{P}^s$ mit $X \cap H = {}_rF_{n-1}$. $X \setminus {}_rF_{n-1}$ habe nur isolierte Singularitäten und es gelte $H_j^c(X \setminus {}_rF_{n-1}) = 0$ für $j \neq 0, n - 1, n$. Dann folgt:*

$$i) \quad \chi(X) = n - \sum_{i=1}^r (1-p)^i + b_0(X \setminus A) + (-1)^n (b_n(X \setminus A) - b_{n-1}(X \setminus A)).$$

ii) $H^j(X, N) = H^j(\mathbb{P}^n, N)$ für $j \leq n - d - 1$ und $j \geq n + d + 2$ mit $j \neq 2n - 1 - r$. Ist $2n - 1 - r \geq n + d + 2$, dann ist $H^{2n-1-r}(X, N)$ frei über N mit $b_{r+1}(\mathbb{P}^{n-1}) + (-1)^r \sum_{i=1}^r (1-p)^i$ Erzeugenden.

iii) $b_{n-i}(X) = b_{n-i}(X, A) + b_{n-i}(\mathbb{P}^{n-1})$ falls $i \neq r - n, r + 1 - n$,
 $b_{2n-r}(X) - b_{2n-r-1}(X) = b_{2n-r}(\mathbb{P}^{n-1}) - b_{2n-r-1}(\mathbb{P}^{n-1}) + b_{2n-r}(X, A) -$
 $- b_{2n-r-1}(X, A) - (-1)^r \sum_{i=1}^r (1-p)^i.$

falls Charakteristik $X \neq p$.

iv) Für Charakteristik $L \neq \text{Grad } X$ gilt:

$$b_{n-i}(X) = b_{n-i}(\mathbb{P}^{n-1}) + \sum_{y \in S(X \setminus {}_r F_{n-1})} b_{n-i}^y(X)$$

falls $i \neq 0, 1, 2, r - n, r + 1 - n$.

Beweis: Aus Bemerkung 3.2 ergibt sich $\chi(X) = \chi(X \setminus A) + \chi({}_r F_{n-1}^p)$, woraus sich mit Beispiel 3.1 i) ergibt. ad ii). Für $j \leq n - d - 1$ wendet man Korollar 2.2 an. Mit Satz 1.1 folgt aus $\text{tab}(X \setminus {}_r F_{n-1}) \leq d$: $H^j(X \setminus {}_r F_{n-1}, M) = H_{2n-j}(X, {}_r F_{n-1}; M) = 0$ falls $2n - 1 \geq 3n - j \geq n + d + 2$. Daher ist $H^j(X, {}_r F_{n-1}; N) = 0$, also $H^j(X, N) = H^j({}_r F_{n-1}, N) = H^j(\mathbb{P}^{n-1}, N)$ falls $j \geq n + d + 2$, und falls für die letzte Gleichung nach Beispiel 3.1 zusätzlich $j \neq 2n - 1 - r$. $H^{2n-1-r}(X, N)$ ergibt sich ebenfalls aus Beispiel 3.1. ad iii): ${}_r F_{n-1}$ ist ein Hyperebenenschnitt im $\mathbb{P}^n$, daher ist für alle graden $i \leq 2n - 2$ die Abbildung $H^i(X) \rightarrow H^i({}_r F_{n-1})$ nicht die Nullabbildung, da dies für $H^i(\mathbb{P}^s) \rightarrow H^i(\mathbb{P}^n) \rightarrow H^i({}_r F_{n-1})$ zutrifft. Da $H^*({}_r F_{n-1})$ frei ist, ist diese Abbildung sogar für beliebige Koeffizienten N nicht die Nullabbildung. Die folgenden Aussagen beziehen sich nur noch auf die Bettizahlen, daher können wir annehmen, dass L ein Körper ist. Dann ist $H^i(X) \rightarrow H^i({}_r F_{n-1})$ sogar surjektiv für alle $i \neq 2n - r - 1$. Insbesondere ergibt sich für $i \neq r - n, r + 1 - n$ eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^{n-i}(X, A) \rightarrow H^{n-i}(X) \rightarrow H^{n-i}(A) \rightarrow 0.$$

Daraus ergibt sich der erste Teil von iii), der zweite ergibt sich aus dem entsprechenden Teil der Kohomologiesequenz, der sich um $H^{2n-r-1}(A)$ rahmt. ad iv): Aus Satz 1.1 folgt wiederum $H_{n-i}(X, {}_r F_{n-1}) = H^{n-i}(X, {}_r F_{n-1}) = H^0(X \setminus {}_r F_{n-1}, \mathcal{H}_{n-i}(X))$, falls $n - i \neq n - 1, n$ und $n - i + 1 \neq n - 1, n$. $X \setminus {}_r F_{n-1}$ hat nur isolierte Singularitäten, daher erhält man durch Einsetzen in iii) die Behauptung.

KOROLLAR 3.6. Es seien $P, Q \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_{n+1}]$, wobei P homogen vom Grad p sei sowie

$$P = \sum_{i=0}^r a_i z_i^p + z_{n+1} Q,$$

dabei seien alle $a_i \in \mathbb{C}^*$. Die Hyperfläche X im $\mathbb{P}^{n+1}$ sei definiert als $P = 0$, $A := X \cap \{z_{n+1} = 0\}$. Hat $X \setminus A$ nur isolierte Singularitäten und gilt $H_j^c(X \setminus A) = 0$ falls $j \neq 0, n-1, n$, dann folgt:

- i) $H^j(X, N) = H^j(\mathbb{P}^n, N)$ falls $j \neq n, n+1, 2n-r-1$. $H^j(X)$ ist frei für $j \neq n+1$. Ist $2n-r-1 \geq n+3$, dann ist

$$H^{2n-r-1}(X, N) = b_{2n-r-1}({}_r F_{n-1}) N.$$

- ii) Für $2n-r-1 \geq 3$ gilt:

$$H^n(X, N) = H^n(\mathbb{P}^{n-1}, N) \oplus H^n(X, {}_r F_{n-1}; N)$$

$$H^{n+1}(X, N) = H^{n+1}(\mathbb{P}^{n-1}, N) \oplus H^{n+1}(X, {}_r F_{n-1}; N)$$

- iii) Für $r = n$ gilt: $H^{n+1}(X, N) = H^{n+1}(\mathbb{P}^{n-1}, N) \oplus H^{n+1}(X, {}_r F_{n-1}; N)$

$$b_n(X) = b_n(X, A) + b_n(\mathbb{P}^n) - (-1)^n \sum_{i=1}^n (1-p)^i.$$

- iv) Für $r = n-1$ gilt:

$$\begin{aligned} b_n(X) - b_{n+1}(X) &= b_n(X \setminus A) - b_{n-1}(X \setminus A) - b_{n+1}(P^{n-1}) + \\ &+ b_n(P^{n-1}) + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^r (1-p)^i. \end{aligned}$$

- v) Für $r = n-2$ gilt:

$$H^{n+1}(X, N) = H^{n+1}(X, {}_r F_{n-1}; N) \oplus b_{n+1}({}_r F_{n-1}) N.$$

$$H^n(X, N) = H^n(\mathbb{P}^{n-1}, N) \oplus H^n(X, {}_r F_{n-1}; N).$$

Beweis: In der Tat hat der Hyperebenenschnitt A von X die Gestalt ${}_r F_{n-1}$, so dass wir Theorem 3.5 anwenden können. Dabei ist $d=0$ zu setzen. i) ergibt sich damit aus 3.5 ii) sowie der Tatsache, dass $H_{n-1}(X)$ frei ist. Da A ein Hyperebenenschnitt ist, erweist sich die natürliche Abbildung $H^i(P^{n+1}, N) \rightarrow H^i(A, N)$ als ein Isomorphismus für alle $i \neq 2n-r-1, 2n, 2n+2$. Daher erhalten wir für $2n-r-1 \geq n+3$ exakte

Sequenzen

$$0 \rightarrow H^n(X, A) \rightarrow H^n(X) \rightarrow H^n(A) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^{n+1}(X, A) \rightarrow H^{n+1}(X) \rightarrow H^{n+1}(A) \rightarrow 0$$

$H^*(A)$ ist frei, daher spalten sie auf und es ergibt sich ii). Für die restlichen r erhält man zwei solche Sequenzen, die an der Stelle $2n - r - 1$ gekoppelt sind. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen. Für $r = n - 1$ hat man dabei zu berücksichtigen, dass wegen $\chi(X, A) = \chi(X \setminus A)$ gilt $b_n(X \setminus A) - b_{n-1}(X \setminus A) = b_n(X, A) - b_{n+1}(X, A)$.

BEISPIEL 3.2. In Korollar 3.6 sei $Q(z_0, \dots, z_n, 1) = \sum_{i=r+1}^n z_i^{a_i} + 1$, wobei die a_i ganze Zahlen mit $2 \leq a_i \leq p - 1$. Dann ist $X \setminus A$ eine Mannigfaltigkeit und nach [15] gilt: $H_j^c(X \setminus A) = 0$ falls $j \neq 0, n$ sowie

$$b_n(X \setminus A) = (p - 1)^{r+1} \prod_{i=r+1}^n (a_i - 1).$$

Damit ergibt sich aus dem Beweis von Korollar 3.6:

i) $H^j(X, N) = H^j(\mathbb{P}^n, N)$ falls $j \neq n, 2n - r - 1$.

Für $r \leq n - 2$ gilt: $H^{2n-r-1}(X, N) = b_{2n-r-1}(rF_{n-1})N$.

$$H^n(X, N) = H^n(\mathbb{P}^{n-1}, N) \oplus b_n(X \setminus A)N.$$

ii) Für $r = n - 1$ gilt:

$$H^n(X, N) = H^n({}_{n-1}F_{n-1}, N) \oplus b_n(X \setminus A)N.$$

Für $r = n$ gilt: $H^n(X, N) = cN$ mit

$$c = 1 - b_{n-1}({}_nF_{n-1}) + (p - 1)^{r+1} \prod_{i=r+1}^n (a_i - 1).$$

KOROLLAR 3.7. In Korollar 3.6 sei $X \setminus A$ zusätzlich zusammenziehbar. Dann gilt zusätzlich:

i) Für $r \leq n - 3$ ist $H^n(X, N) = H^n(\mathbb{P}^{n-1}, N) \oplus \bigoplus_{y \in S(X \setminus A)} \mathcal{H}_{n+1}(X, N)_y$,

$$H^{n+1}(X, N) = H^{n+1}(\mathbb{P}^{n-1}, N) \oplus \bigoplus_{y \in S(X \setminus A)} \mathcal{H}_n(X, N)_y.$$

ii) Für $r = n$ ist $H^{n+1}(X, N)$ wie in i)

$$b_n(X) = \sum_{y \in S(X \setminus A)} b_{n+1}^y(X) + b_n(\mathbb{P}^n) - (-1)^n \sum_{i=1}^n (1 - p)^i.$$

Für $r = n - 1$ ist

$$b_n(X) - b_{n+1}(X) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^i + b_n(\mathbb{P}^n) - b_{n+1}(\mathbb{P}^n).$$

Für $r = n - 2$ ist $H^n(X, N)$ wie in i) und

$$H^{n+1}(X, N) = b_{n+1}({}_{n-2}F_{n-1})N \oplus \bigoplus_{y \in S(X \setminus A)} \mathcal{H}_n(X, N)_y.$$

BEWEIS: Da nach Voraussetzung $H^{n-1}(X \setminus A) = H^n(X \setminus A) = 0$, folgt aus Satz 1.1: $H_{n+i}(X, A) = H^0(X \setminus A, \mathcal{H}_{n+i}(X))$ für beliebiges N und $i = 0, 1$. Wegen $H^{n+2}(X, A) = 0$ ist $H^{n+1}(X, A; N) = H^{n+1}(X, A) \oplus N$. $H^{n+1}(X, A) = \text{Hom}(H_{n+1}(X, A), L) \oplus \text{Ext}(H_n(X, A), L) = \mathcal{H}_n(X \setminus A)$, so dass $H^{n+1}(X, A; N) = \mathcal{H}_n(X \setminus A, N)$. Wegen $H_{n-1}(X, A) = 0$ ist $H^n(X, A) = \text{Hom}(\mathcal{H}_n(X \setminus A), L) = \text{Hom}(\mathcal{H}_{n+1}(X \setminus A), L) = \mathcal{H}_{n+1}(X \setminus A)$ und somit $H^n(X, A; N) = H^n(X, A) \otimes N \oplus \text{Tor}(H^{n+1}(X, A), N) = \mathcal{H}_{n+1}(X \setminus A) \otimes N \oplus \text{Tor}(\mathcal{H}_n(X \setminus A), N) = \mathcal{H}_{n+1}(X \setminus A, N)$. Bedenkt man schliesslich noch, dass für $r = n - 1$ gilt: $b_n^y(X) = b_{n+1}^y(X)$ für alle $y \in S(X \setminus A)$ nach Korollar 1.2, dann folgt 3.7 aus dem Beweis von 3.6.

BEISPIEL 3.3. In Korollar 3.6 sei

$$Q(z_0, \dots, z_n, 1) = \sum_{i=r+1}^n z_i^{a_i}$$

wobei die a_i ganze Zahlen mit $2 \leq a_i \leq p - 1$ sind. Dann ist $X \setminus A$ zusammenziehbar und ausserhalb von $(0, \dots, 0, 1)$ eine Mannigfaltigkeit. Die lokale Homologie der isolierten Singularität lässt sich mit Hilfe der Picard-Lefschetz Monodromie explizit berechnen (vgl. [5]), so dass die Homologie von X sich unmittelbar ergibt.

Die in Theorem 3.5 betrachtete Situation lässt sich in gewissen Fällen induktiv höher schaukeln. Wir wollen nur ein Beispiel andeuten und die Details dem Leser überlassen:

BEISPIEL 3.4. Es seien Polynome $S, T, Q \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n, z, w]$ und $a_i \in \mathbb{C}[z, w]$ gegeben, wobei $a_i(0, 0) \neq 0$ und

$$T = Sw + zQ + \sum_{i=0}^r a_i z_i^p$$

homogen vom Grad $\geq p$ sei. Im zugehörigen $\mathbb{P}^{n+2}$ bezeichne $Y := \{T = 0\}$, $X := Y \cap \{w = 0\}$, $A := X \cap \{z = 0\}$. Haben $Y \setminus X$ und $X \setminus A$ nnr iso-

lierte Singularitäten und ist $H_j^c(Y \setminus X) = 0$, $j \neq 0, n, n+1$, $H_i^c(X \setminus A) = 0$, $i \neq 0, n-1, n$, dann gilt etwa:

$$H^j(Y, N) = H^j(\mathbb{P}^{n+1}, N) \text{ für } j \neq n+1, n+2, 2n-r-1.$$

Ist $r \leq n-4$, so ist $H^j(Y, N) = b_{2n-r-1}(rF_{n-1})N$.

§ 4. Lokal irreduzible Räume.

Für lokal irreduzibles X kann man die für Koeffizienten in einem Körper gegebene « Dualität » aus den universellen Koeffiziententheoremen, die Homologie und Kohomologie vergleichen, für folgendes Resultat ausnutzen:

SATZ 4.1. *X sei lokal irreduzibel mit abzählbarer Topologie und reindimensional, L sei ein Körper. Dann gilt für alle $q: P_q^{cld}(X, L)$ ist genau dann surjektiv (bzw. injektiv), wenn $P_{2n-q}^c(X, L)$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.*

BEWEIS: Nach den zitierten Koeffiziententheoremen existieren Bilinearformen

$$H_q^c(X, L) \times H^q(X, L) \rightarrow L$$

$$H_c^{2n-q}(X, L) \times H_{2n-q}(X, L) \rightarrow L$$

die wir durch $\langle, \rangle$ andeuten wollen. Da das Capprodukt $\cap$ für die Koeffizienten L dual zum Cupprodukt $\cup$ ist, erhalten wir nach I Satz 3.3 für die Fundamentalklasse $[X] \in H_{2n}(X, L)$: Ist $x \in H^q(X)$ und $y \in H_c^{2n-q}(X)$, so gilt:

$$\langle P_{2n-q}^c(y), x \rangle = \langle [X] \cap y, x \rangle = \langle [X], y \cup x \rangle$$

$$\langle y, P_q^{cld}(X) \rangle = \langle y, [X] \cap x \rangle = \langle y \cap x, [X] \rangle.$$

Daher sind die beiden Abbildungen $P_q^{cld}(X, L)$ und $P_{2n-q}^c(X, L)$ dual zueinander, woraus die Behauptung folgt.

KOROLLAR 4.2. *Unter den Voraussetzungen von 4.1 gilt für $q = c, cld$: $P_{2n}^q(X, L)$ ist ein Isomorphismus, $P_{2n-1}^q(X, L)$ ist surjektiv. Wenn q kompakt ist und $H_1^c(X)$ torsionsfrei, gilt dies für beliebigen L -Modul N ohne L -Torsion, selbst wenn L kein Körper ist.*

BEWEIS: Da $\mathcal{H}_{2n-1}(X)$ torsionsfrei ist, gilt nach Satz I, 3.1, dass $P_0^q(X, L)$ ein Isomorphismus ist. Nach Satz I 3.5 ist $P_{2n-1}^q(X, L)$ injektiv,

so dass aus 4.1 für L die Behauptung folgt. Ist $\varphi = c$, so erhält man aus den universellen Koeffiziententheoremen der Kohomologie ([4] II, 18,3), der Homologie ([4] V, 13,2) und der Poincaréhomomorphismen (s. u.) für beliebiges L und torsionsfreies N ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_c^p(X, L) \otimes N & \rightarrow & H_c^p(X, N) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow P_p^c(X) \otimes Id_N & & \downarrow P_p^c(X, N) & & \\ 0 & \rightarrow & H_{2n-p}^c(X, L) \otimes N & \rightarrow & H_{2n-p}^c(X, N) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Betrachtet man dies Diagramm zunächst für den Quotientenkörper $Q(L)$ als N , dann ist mit dem soeben gezeigten $P_{2n}^c(X, Q(L))$ bzw. $P_{2n-1}^c(X, Q(L))$ bijektiv bzw. surjektiv, also ist auch $P_{2n}^c(X, L)$ bijektiv und wegen $\text{Tor}(H_1^c(X, L), L) = 0$ ist $P_{2n-1}^c(X, L)$ surjektiv. Damit folgt für allgemeines torsionsfreies N aus obigem Diagramm die Behauptung.

SATZ 4.3. (*Universelles Koeffiziententheorem für Poincaré-homomorphismen*)
Ist φ eine parakompaktifizierende Trägerfamilie auf dem lokal irreduziblen reindimensionalen Raum X , N ein torsionsfreier L -Modul und $\mathcal{F}$ eine Garbe von L -Moduln auf X , so existiert ein natürliches kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_\varphi^p(X, \mathcal{F}) \otimes N & \rightarrow & H_\varphi^p(X, \mathcal{F} \otimes N) \\ \downarrow P_p(X, \mathcal{F}) \otimes Id_N & & \downarrow P_p(X, \mathcal{F} \otimes N) \\ H_{2n-p}^\varphi(X, \mathcal{F}) \otimes N & \rightarrow & H_{2n-p}^\varphi(X, \mathcal{F} \otimes N). \end{array}$$

BEWEIS: Ist $\mathcal{C}^*(X, \mathcal{F})$ die Auflösung von $\mathcal{F}$ auf X wie in [4] V, 3, so gilt $\mathcal{C}_*(X, \mathcal{F}) \otimes N = \mathcal{C}_*(X, \mathcal{F} \otimes N)$ und daher existiert eine natürliche Abbildung $\Gamma_\varphi(X, \mathcal{C}_*(X, \mathcal{F})) \otimes N \rightarrow \Gamma_\varphi(X, \mathcal{C}_*(X, \mathcal{F} \otimes N))$, die wegen der Torsionsfreiheit von N die behauptete Abbildung der unteren Zeile induziert. Die obere Zeile definiert man über das Cupproduct. Betrachten wir die Kategorie aller L -Modulgarben auf X , sie ist zulässig im Sinne von [4] II § 6. Durch $F_1^*(\mathcal{A}) := H_\varphi^*(X, \mathcal{A}) \otimes N$ wird auf ihr ein δ -Funktorkomplex definiert, ebenso durch $F^*(\mathcal{A}) := H_{2n-*}^\varphi(X, \mathcal{F} \otimes N)$. Beide sind kovariant und aufsteigend vom Grad 1. F_1^0 ist linksexakt und hat als Rechtsderivierte F_1^p .

$$S^p: H_\varphi^p(X, \mathcal{F}) \otimes N \rightarrow H_{2n-p}^\varphi(X, \mathcal{F}) \otimes N \rightarrow H_{2n-p}^\varphi(X, \mathcal{F} \otimes N)$$

und

$$T^p: H_\varphi^p(X, \mathcal{F}) \otimes N \rightarrow H_{2n-p}^\varphi(X, \mathcal{F} \otimes N) \rightarrow H_{2n-p}^\varphi(X, \mathcal{F} \otimes N)$$

sind offensichtlich zwei natürliche Transformationen von F_1^* nach F^* , für die wegen $H_{2n}^{\mathcal{F}}(X, \mathcal{F}) = \Gamma_{\varphi}(\mathcal{H}_{2n}(X, \mathcal{F}))$ und $\mathcal{H}_{2n}(X, \mathcal{F}) \otimes N = \mathcal{H}_{2n}(X, \mathcal{F} \otimes N)$ das Diagramm mit $p = 0$

$$\begin{array}{ccc} H_{\varphi}^0(X, \mathcal{F}) \otimes N & \longrightarrow & H_{\varphi}^0(X, \mathcal{F} \otimes N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{\varphi}(\mathcal{H}_{2n}(X, \mathcal{F})) \otimes N & \longrightarrow & \Gamma_{\varphi}(\mathcal{H}_{2n}(X, \mathcal{F} \otimes N)) \end{array}$$

nach Definition des Cupprodukts kommutiert, d. h. $S^0 = T^0$. Dann ist aber nach [4] II Theorem 6.2 $S^* = T^*$.

KOROLLAR 4.4. *Unter den Voraussetzungen von 4.3 gilt:*

$$P_p^c(X, \mathcal{F} \otimes N) = P_p^c(X, \mathcal{F}) \otimes Id_N.$$

BEWEIS: Da N torsionsfrei ist, sind die Waagrechten im Diagramm 4.3, die nach Konstruktion der Homomorphismen für $\varphi = c$ mit den entsprechenden Abbildungen in den universellen Koeffiziententheoremen übereinstimmen, Isomorphismen. Vermöge dieser Identifizierung folgt dann 4.4 aus 4.3.

SATZ 4.5. *X sei lokal irreduzibel und reindimensional, für alle $j < t - 1$ gelte $\mathcal{H}_j(X) = 0$. Dann hat $\mathcal{H}_t(X, \mathcal{F})$ für alle $\mathcal{F}$ einen höchstens $t - 2$ dimensionalen Träger.*

BEWEIS: Da es sich um ein lokales Problem handelt, können wir X nach Bedarf verkleinern. Insbesondere können wir dabei stets X als zusammenziehbar voraussetzen. Dann ist $P_{2n-1}^c(X)$ surjektiv und folglich in der $P^c(X)$ definierenden Spektralsequenz $E_{\infty}^{t-1, -t} = 0$. Ferner sieht man leicht: $E_2^{t-1, -t} = E_{2n-r+1}^{t-1, -t}$ und $E_{2n-r+2}^{t-1, -t} = E_{\infty}^{t-1, -t}$. Daher ist $\partial_{2n-r+1}^{t-1, -t}$ injektiv. Andererseits ist nach 4.2 $P_{2n}^c(X)$ ein Isomorphismus, so dass $H_c^{2n}(X) = E_2^{2n, -2n} = E_{\infty}^{2n, -2n}$ und daher $\partial_{2n-r+1}^{t-1, -t} = 0$. Dies impliziert $H_c^{t-1}(X, \mathcal{H}_t(X)) = E_2^{t-1, -t} = 0$. X sei nun trianguliert. Dann ist nach I Satz 1.2 $\mathcal{H}_t(X)$ auf das $t - 1$ Gerüst konzentriert und im Innern jedes Simplex konstant. Es werde nun X so verkleinert, dass $X \cap (t - 1 \text{ Gerüst})$ das offene Simplex s ergibt. Dann ist $\mathcal{H}_t(X) \mid s$ konstant und es gilt

$$\mathcal{H}_t(X) \mid s = H_c^{t-1}(s, \mathcal{H}_t(X)) = H_c^{t-1}(X, \mathcal{H}_t(X)) = 0.$$

Daher ist $\mathcal{H}_t(X)$ auf das $t - 2$ Gerüst konzentriert und nach dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie gilt dies auch für jedes $\mathcal{H}_t(X, \mathcal{F})$.

KOROLLAR 4.6. *Hat der lokal irreduzible Raum X keine j -dimensionalen Zusammenhangskomponenten, so ist der Träger von $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F})$ höchstens $j - 2$ dimensional.*

Beweis durch Induktion über j : Für $j = 1$ wurde dies in I Korollar 2.6 gezeigt. Bezeichnet S die Vereinigung aller Zusammenhangskomponenten von X , die kleinere Dimension als $j - 1$ haben, sowie der nach Induktionsvoraussetzung $< j - 2$ dimensional abgeschlossenen Träger der Garben $\mathcal{H}_i(X, L)$ mit $i < j$, dann ist $X \setminus S$ ein lokal irreduzibler komplexer Raum, dessen Zusammenhangskomponenten einzeln untersucht werden können: Auf den Zusammenhangskomponenten der Dimension kleiner j ist $\mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) = 0$. Auf den Zusammenhangskomponenten der Dimension grösser j ist nach Konstruktion $\mathcal{H}_i(X) = 0$ für $i < j$, so dass aus Satz 4.5 Behauptung folgt.

Dieses Korollar ermöglicht für lokal irreduzible Räume eine nützliche Verschärfung bisher bewiesener Resultate.

SATZ 4.7. *X sei lokal irreduzibel und reindimensional, φ sei parakompaktifizierend. Dann sind $P_{2n}^\varphi(X, A; \mathcal{F})$ und $Q_{2n}^\varphi(A, \mathcal{F})$ Isomorphismen.*

BEWEIS: Da φ parakompaktifizierend, ist $\dim_\varphi \operatorname{Tr} \mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) = \dim \operatorname{Tr} \mathcal{H}_j(X, \mathcal{F}) < j - 1$, so dass aus I Satz 3.2 die Behauptung folgt.

KOROLLAR 4.8. *Ist X lokal irreduzibel und reindimensional, φ parakompaktifizierend und N torsionsfrei, so ist für jeden L Modul S folgende Abbildung eine Injektion:*

$$H_\varphi^{2n}(X, S) \otimes N \rightarrow H_\varphi^{2n}(X, S \otimes N).$$

BEWEIS: Nach Satz 4.3 haben wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H_\varphi^{2n}(X, S) \otimes N & \rightarrow & H_\varphi^{2n}(X, S \otimes N) \\ P_{2n}^\varphi(X, S) \otimes Id_N \downarrow & & \downarrow P_{2n}^\varphi(X, S \otimes N) \\ H_0^\varphi(X, S) \otimes N & \xrightarrow{\tau} & H_0^\varphi(X, S \otimes N). \end{array}$$

Da die beiden senkrechten Homomorphismen nach 4.7 Isomorphismen sind, genügt es offensichtlich τ als Injektion nachzuweisen. Nun ist X lokal triangulierbar, so dass es eine natürliche Isomorphie zwischen der Borel-Moore Homologie und der lokalendlichen singulären Homologie von X mit

Trägern in φ gibt. In dieser Theorie ist es aber nicht schwer zu zeigen, dass τ injektiv ist.

Der folgende Satz gilt wegen Korollar 4.6 insbesondere für $P_{2n-1}(X, \mathcal{F})$. Er lässt sich unter analogen Voraussetzungen auch für $P_{2n-r}(X, A; \mathcal{F})$ bzw. $Q_{2n-r}(A, \mathcal{F})$ beweisen, wenn alle drei Aussagen gelten, kann man sie wie üblich zu einem kommutativen Diagramm zusammenfassen:

Satz 4.9. *Für eine Garbe $\mathcal{F}$ und eine Trägerfamilie φ existiere eine natürliche Zahl r mit $\text{Tab}_\varphi(X, \mathcal{F}) \geq r + 1$. Dann ist $P_{2n-i}^\varphi(X, \mathcal{F})$ surjektiv für $i \leq r$ und bijektiv für $i \leq r - 1$.*

Beweis: Es ist zunächst die in I Satz 2.2 definierte Abbildung $\alpha_{2n-i}: H_i^\varphi(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_\varphi^0(X, \mathcal{H}_i(X, \mathcal{F})) = 0$ zu testen; Wegen $H_\varphi^q(X, \mathcal{H}_{2n+q-(2n-i)}(X, \mathcal{F})) = 0$ für $0 < q < 2n - i$ ist $\text{Im } P_{2n-i}^\varphi(X, \mathcal{F}) = \text{Kern } \alpha_{2n-i} = H_i^\varphi(X, \mathcal{F})$, d. h. P_{2n-i} surjektiv. Andererseits ist die Abbildung $\gamma_{2n-i}: H_\varphi^0(X, \mathcal{H}_i(X, \mathcal{F})) \rightarrow H_\varphi^{i+1}(X, \mathcal{H}_{2n}(X, \mathcal{F}))$ aus I Satz 2.3 zu testen; sie existiert, da $H^{q+1}(X, \mathcal{H}_{2n+q-(2n-i)}(X, \mathcal{F})) = 0$, falls $0 < q < 2n - i$. Da für diese q auch noch die entsprechende q -te Kohomologie verschwindet, gilt $\text{Bild } \gamma_{2n-i} = \text{Kern } P_{2n-i+1}$, so dass aus $H_\varphi^0(X, \mathcal{H}_i(X, \mathcal{F})) = 0$ die Injektivität folgt.

Der folgende Satz liefert für lokal irreduzible Räume eine Verschärfung von I Theorem 3.5:

Theorem 4.10. *X sei lokal irreduzibel und reindimensional. Es existiere eine Basis offener Mengen U von X und eine natürliche Zahl r mit $\text{Tab}_c(U, L) \geq r$ für alle U . Dann existiert unter Verwendung der Poincaré-homomorphismen, der exakten Homologie — und Kohomologiesequenzen ein exaktes kommutatives Diagramm 4.10. Gilt dies für alle Primkörper als Grundring L , so darf in das Diagramm 4.10 überall $\mathcal{F}$ als Koeffizientengarbe eingesetzt werden.*

Beweis: Für lokal irreduzibles X gilt $\tilde{X} = X$, so dass mit I Theorem 3.5 ein Induktionsanfang gelegt ist. Nehmen wir als Induktionsbehauptung noch hinzu, dass $\mathcal{H}_{2n-r+2}(X) = 0$ falls $r \neq 2$, so trifft dies für den Induktionsanfang $r = 2$ zu. Den typischen Induktionsschritt führen wir für $r = 3$ durch: Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine exakte Sequenz für jedes U :

$$0 \rightarrow H^1(U) \rightarrow H_{2n-1}(U) \rightarrow H^0(U, \mathcal{H}_{2n-1}(U)) \rightarrow H^2(U) \rightarrow H_{2n-2}(U).$$

Wegen $\text{Tab}_c(U, L) \geq 3$ ist nach Satz 4.9 P_{2n-2}^c surjektiv und $P_{2n-1}^c(U, L)$

DIAGRAMM 4.10

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_{\varphi}^{r-1}(X, A; L) & \longrightarrow & H_{2n-r+1}^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A, L) & \longrightarrow & H_{\varphi}^0(X, \mathcal{H}_{2n-r+1}(X, L)) \longrightarrow H_{\varphi}^r(X, A; L) \longrightarrow H_{2n-r}^{\varphi|X \setminus A}(X \setminus A, L) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H_{\varphi}^{r-1}(X, L) & \longrightarrow & H_{2n-r+1}^{\varphi}(X, L) & \longrightarrow & H_{\varphi}^0(X, \mathcal{H}_{2n-r+1}(X, L)) \longrightarrow H_{\varphi}^r(X, L) \longrightarrow H_{2n-r}^{\varphi}(X, L) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H_{\varphi}^{r-1}(A, L) & \longrightarrow & H_{2n-r+1}^{\varphi}(X, X \setminus A; L) \longrightarrow H_{\varphi}^0(A, \mathcal{H}_{2n-r+1}(X, L)) \longrightarrow H_{\varphi}^r(A, L) \longrightarrow H_{2n-r}^{\varphi}(X, X \setminus A; L)
\end{array}$$

bijektiv, so dass nach Satz 4.1 $P_2^{old}(U, L)$ injektiv und $P_1^{old}(U, L)$ surjektiv ist. Dann liefert die exakte Sequenz $H^0(U, \mathcal{H}_{2n-1}(U)) = 0$. Da dies für eine Basis offener Mengen gilt, folgt $\mathcal{H}_{2n+1}(X) = 0$. Gilt dieses insbesondere für alle Primkörper als Koeffizientenring L , so ist nach dem universellen Koeffiziententheorem der lokalen Homologie $\mathcal{H}_{2n-2}(U)$ ohne L -Torsion und daher $H_{2n-1}(X, \mathcal{F}) = 0$ für jedes $\mathcal{F}$. Nun verifiziert man, dass die Voraussetzungen von I Satz 2.2 und Satz 2.3 erfüllt sind, aus denen sich das behauptete kommutative Diagramm analog wie in Beweis von I Theorem 3.5 ergibt.

KOROLLAR 4.11. *X sei lokal irreduzibel und reindimensional. Wenn eine Basis offener Mengen U von X existiert mit $\text{Tab}_c(U, L) = n$, und wenn $\mathcal{H}_n(X)$ torsionsfrei ist, dann ist X eine L -Homologiemannigfaltigkeit.*

BEWEIS: Aus der Voraussetzung $\text{Tab}_c(U, L) \geq n + 1$ ergibt sich wie im Beweis von 4.10, dass $\mathcal{H}_{2n-i}(X, L) = 0$ für $2 \leq i \leq n$. Daher gilt für diese $i: 0 = H_x^0(X, \mathcal{H}_{2n-i+1}(X)) = H_x^i(X)$ nach I Satz 2.5; so dass für alle x gilt $\mathcal{H}_j(U)_x = 0$ für $j < n$ und $\mathcal{H}_n(X)_x$ ist reiner Torsionsmodul. Da aber nach Voraussetzung $\mathcal{H}_n(X)_x$ nur triviale L -Torsion hat, verschwindet auch $\mathcal{H}_n(X)$.

Die Voraussetzungen des letzten Korollars sind insbesondere dann erfüllt, wenn $\mathcal{H}_j(X) = 0$ für $j \leq n$ und wenn $\mathcal{H}_{n+1+i}(X)$ für $0 \leq i \leq n - 2$ einen höchstens i -dimensionalen Träger hat. Daher stellt das folgende Korollar eine Ergänzung zu 4.11 dar:

KOROLLAR 4.12. *Ist $\mathcal{H}_j(X)$ für lokal irreduzibles reindimensionales X Null für $n + 1 \leq j \leq 2n - 1$ und ist $\mathcal{H}_n(X)$ torsionsfrei, so ist X eine L -Homologiemannigfaltigkeit.*

BEWEIS: Wie im Beweis von 4.11 folgt aus $H_j(X) = 0$ für $n + 1 \leq j \leq 2n - 1$, dass $\mathcal{H}_i(X) = 0$ für $i < n$ und dass $\mathcal{H}_n(X)$ eine Torsionsgarbe ist.

BEMERKUNG 4.1. Die Bedingung $\mathcal{H}_n(X)$ torsionsfrei ist notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: Ist X die im $\mathbb{C}^3$ durch die Gleichung $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ beschriebene analytische Menge, so hat X in O eine isolierte normale Singularität mit $\mathcal{H}_2(X, \mathbb{Z})_0 = \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{H}_j(X, \mathbb{Z}) = 0$ falls $j \neq 2, 4$.

Die Beweismethode von Satz 4.1 kann man auch für den Nachweis einer homologischen Residuenformel verwenden, für deren Interpretation auf [8] § 3 verwiesen sei.

A sei abgeschlossen in X , A sei HLC , $X \setminus A$ sei reindimensional und lokal irreduzibel. Ist L ein Körper, so verwenden wir zur Bezeichnung der Dualitäten zwischen Homologie und Kohomologie aus den universellen

Koeffiziententheoremen die Bezeichnungen

$$H_c^p(A) \quad \times \quad H_p(A) \quad \xrightarrow{\langle, \rangle_A} L.$$

$$H_p^c(X \setminus A) \times H^p(X \setminus A) \xrightarrow{\langle, \rangle_{X \setminus A}} L.$$

Die dimensionserniedrigende Abbildung in der Homologie sei $\partial_p: H_p(X \setminus A) \rightarrow H_{p-1}(A)$, die dazu duale Abbildung ist die dimensionserhöhende Abbildung der Kohomologie $\partial^p: H_c^{p-1}(A) \rightarrow H_c^p(X \setminus A)$. Da auch $P_p^c(X \setminus A)$ und $P_{2n-p}^{cl d}(X \setminus A)$ duale Abbildungen sind, gilt für $\alpha \in H_c^p(A)$ und $\beta \in H^{2n-p}(X \setminus A)$:

$$\langle P_p^c(X \setminus A) \partial^p \alpha, \beta \rangle_{X \setminus A} = \langle \partial^p \alpha, P_{2n-p}^{cl d} \beta \rangle_{X \setminus A}$$

$$= \langle \alpha, \partial_p P_{2n-p}^{cl d} \beta \rangle_A.$$

Damit haben wir gezeigt:

SATZ 4.13. (Homologische Residuenformel). Ist X mit abzählbarer Topologie, A abgeschlossen und HLC , L ein Körper, so gilt für alle $\alpha \in H_0^{p-1}(A)$ und $\beta \in H^{2n-p}(X \setminus A)$:

$$\langle P_p^c \partial^p \alpha, \beta \rangle_{X \setminus A} = \langle \alpha, \partial_p P_{2n-p}^{cl d} \beta \rangle_A.$$

BEMERKUNG 4.2. Die bisher in diesem Paragraphen ausgeführte Theorie gilt analog für einen Raum Y mit $L - p$ Normalisierung, wenn Y lokal triangulierbar, reindimensional und parakompakt ist.

LITERATUR

- [1] ANDREOTTI, A. und T. FRANKEL: *The Lefschetz theorem on Hyperplane sections*. Ann. Math. 69, 713-717 (1959).
- [2] ANDREOTTI, A. and R. NARASIMHAN: *A topological property of Runge pairs*. Ann. Math. 76, 499-509 (1962).
- [3] ABHYANKAR, S. S.: *Local analytic geometry*. New York 1964.
- [4] BREDON, G. E.: *Sheaf theory*, McGraw Hill. New York 1967.
- [5] BRIESKORN, E.: *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*. Invent. math. 2, 1-14 (1966).
- [6] CARTAN, H.: *Quotients of complex analytic spaces*. Contr. to function theory. Bombay 1960, 1-15.
- [7] COEN, S.: *Sull'omologia degli aperti q -completi di uno spazio di Stein*. Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, 23, 289-303 (1969).
- [8] DOLBEAULT, P.: *Theory of residues and homology*. Symposia Mathematica Vol. III, 295-304 Academic Press, London 1970.
- [9] GIESECKE, B.: *Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume*. Math. Zeitschr. 83, 177-213 (1964).
- [10] GRAUERT, H. und R. REMMERT: *Komplexe Räume*. Math. Ann. 186, 245-318 (1958).
- [11] KAUP, L.: *Eine topologische Eigenschaft Steinscher Räume*. Nachr. Göttinger Akad. Wiss. 1966, 213-226.
- [12] KAUP, L.: *Zum Satz von Lefschetz über Hyperebenenschnitte*. Bayer. Akad. Wiss. 1966, 163-165.
- [13] KAUP, L.: *Bemerkungen zur Kohomologie komplexer Räume*. Habilitationsschrift Erlangen 1969.
- [14] KAUP, L.: *Poincaré Dualität für Räume mit Normalisierung*. Annali Sc. Norm. Sup. Pisa XXVI, 1-31 (1972).
- [14a] KAUP, L.: *Zur Homologie projektiv algebraischer Varietäten*. Notas de matemática No. 15 ed. previa, Univ. Nac. La Plata (1970).
- [15] PHAM, F.: *Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des integrales*. Bull. Soc. Math. France 93, 333-67 (1965).
- [16] REIFFEN, H. J.: *Riemannsche Hebbbarkeitssätze für Kohomologieklassen mit kompaktem Träger*. Math. Ann. 164, 272-279 (1966).
- [17] REMMERT, R.: *Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes*. Compt. Rend. Ac. Sc. Paris 243, 118-121 (1956).
- [18] SPANIER, E. H.: *Algebraic Topology*. McGraw-Hill (1966).
- [19] GROTHENDIECK, A.: *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*. Paris 1968.

Fachbereich Mathematik
D-775 Konstanz
Postfach 733