

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

M. GIAQUINTA

L. PEPE

**Esistenza e regolarità per il problema dell'area minima
con ostacoli in n variabili**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 25,
n° 3 (1971), p. 481-507*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_3_481_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESISTENZA E REGOLARITÀ PER IL PROBLEMA DELL'AREA MINIMA CON OSTACOLI IN n VARIABILI

M. GIAQUINTA - L. PEPE ⁽¹⁾

In questo lavoro ci occuperemo dell'esistenza e della regolarità delle soluzioni del problema dell'area minima per le superfici cartesiane di assegnato contorno che si mantengono al di sopra di un ostacolo $\psi(x)$.

Il lavoro consta di due parti. Nella prima parte diamo dei teoremi di esistenza e unicità nelle classi delle funzioni continue e lipschitziane. Nella seconda parte daremo un teorema di regolarità $C^{1,\alpha}$, nelle ipotesi di ostacolo $\psi(x)$ regolare, sfruttando dei risultati relativi ai funzionali uniformemente ellittici con ostacoli.

Risultati per funzionali uniformemente ellittici con ostacolo si possono ritrovare in Brezis-Stampacchia [3], i quali usano metodi diversi dai nostri, nello spirito delle disuguaglianze variazionali. Risultati relativi al tipo di problema qui affrontato sono contenuti in un lavoro di H. Lewy e G. Stampacchia di prossima pubblicazione.

Ringraziamo E. De Giorgi, E. Giusti, M. Miranda coi quali abbiamo discusso i risultati di questo lavoro.

PARTE I

ESISTENZA E UNICITÀ

Notazioni. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\bar{\Omega}$ la sua chiusura, $\partial\Omega$ la sua frontiera indicheremo con $C^0(\bar{\Omega})$ la classe delle funzioni continue su $\bar{\Omega}$, $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ la classe delle funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$ e con $\text{Lip}_k(\bar{\Omega})$, $k \geq 0$, la sottoclasse delle funzioni di $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ con costante di Lipschitz minore o uguale a k .

Pervenuto alla Redazione il 6 Ottobre 1970.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

(A) Per area di Lebesgue di $\{y = u(x) \mid x \in \bar{\Omega}\}$ intendiamo il funzionale definito su $C^0(\bar{\Omega})$:

$$\text{area } u = \inf \left\{ \min_{n \rightarrow +\infty} \lim \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n (D_i u_n)^2} dx \mid u_n \in \text{Lip}(\bar{\Omega}), \right. \\ \left. u_n \rightarrow u \text{ uniformemente} \right\}.$$

Si ricordi che se $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, allora $\text{area } u = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx$

(B) Diremo che $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ verifica la B.S.C. (Bounded slope condition) con costante k se per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono $a, b \in \mathbb{R}^N$, con $|a| \leq k$ e $|b| \leq k$, tali che

$$\sum_{i=1}^N a_i (y_i - x_i) + \varphi(x) \leq \varphi(y) \leq \sum_{i=1}^N b_i (y_i - x_i) + \varphi(x) \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

(C) Diremo che Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, è uniformemente convesso se esiste una costante k non negativa e, per ogni $x \in \partial\Omega$, un iperpiano π_x di $\mathbb{R}^N$ passante per x , tale che Ω venga a trovarsi in uno dei due semispazi determinati da π_x , e per il quale valga

$$\sup_{y \in \Omega} \frac{|x - y|^2}{\text{dist}(y, \pi_x)} \leq k.$$

1. Esistenza e unicità nella classe $\text{Lip}(\bar{\Omega})$.

In questo paragrafo dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 1.1. Sia Ω un aperto convesso limitato di $\mathbb{R}^N$; siano $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che verifichi la B.S.C. e ψ una funzione lipschitziana su $\bar{\Omega}$ con $\psi \geq \varphi$ su $\partial\Omega$. Allora esiste unica $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ che risolve il problema

(I) $\text{area } u = \min$
nella classe

$$\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : z = \varphi \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

Cominciamo col provare un principio di massimo per le soluzioni del problema (I).

Qui e nel seguito indicheremo con φ_1 e φ_2 due funzioni definite su $\partial\Omega$ e con ψ_1 e ψ_2 due funzioni di $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ verificanti le relazioni $\psi_1 \leq \varphi_1$ su $\partial\Omega$, $\psi_2 \leq \varphi_2$ su $\partial\Omega$.

LEMMA 1.1. Siano $u_1, u_2 \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega})$ soluzioni del problema (I) rispettivamente nella classe $\{z \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega}) : z = \varphi_1 \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi_1 \text{ su } \bar{\Omega}\}$ e nella classe

$$\{z \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega}) : z = \varphi_2 \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi_2 \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

Se $\varphi_1 \leq \varphi_2$ su $\partial\Omega$ e $\psi_1 \leq \psi_2$ su $\bar{\Omega}$, allora

$$(1.1) \quad u_1(x) \leq u_2(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Dim: Supponiamo per assurdo che $A = \{x \in \bar{\Omega} : u_1(x) > u_2(x)\} \neq \emptyset$.

Siano:

$$w^+ = \max(u_1, u_2)$$

$$w^- = \min(u_1, u_2)$$

evidentemente $w^+, w^- \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega})$, $w^+ \geq \psi_2$ su $\bar{\Omega}$ e $w^+|_{\partial\Omega} = \varphi_2$, mentre $w^- \geq \psi_1$ su $\bar{\Omega}$ e $w^-|_{\partial\Omega} = \varphi_1$. Allora, poiché u_1 e u_2 sono soluzioni del problema (I)

$$(1.2) \quad \text{area}_{\Omega} w^+ \geq \text{area}_{\Omega} u_2$$

$$\text{area}_{\Omega} w^- \geq \text{area}_{\Omega} u_1$$

d'altra parte

$$(1.3) \quad \text{area}_{\Omega} w^+ = \text{area}_A u_1 + \text{area}_{\Omega-A} u_2$$

$$\text{area}_{\Omega} w^- = \text{area}_A u_2 + \text{area}_{\Omega-A} u_1$$

segue quindi dalle (1.2) e (1.3) che

$$(1.4) \quad \text{area}_A u_1 = \text{area}_A u_2.$$

Inoltre $u_1 = u_2$ su ∂A e $u_1 \geq \psi_2$ su $\bar{A}$, pertanto u_1 e u_2 risolvono il problema (I) nella classe $\{z \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega}) : z = u_1 = u_2 \text{ su } \partial A, z \geq \psi_2 \text{ su } \bar{A}\}$; ma allora, poiché il funzionale area è strettamente convesso su $\text{Lip}(\bar{A})$, $u_1 = u_2$ su A . Questo contraddice la definizione di A . c. v. d.

PROPOSIZIONE 1.1. Siano $u_1, u_2 \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega})$ soluzioni del problema (I) rispettivamente nella classe $\{z \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega}) : z = u_1 \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi_1 \text{ su } \bar{\Omega}\}$ e nella classe $\{z \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega}) : z = u_2 \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi_2 \text{ su } \bar{\Omega}\}$. Allora

$$(1.5) \quad \max_{\Omega} |u_1 - u_2| \leq \max \left\{ \max_{\partial\Omega} |u_1 - u_2|, \max_{\bar{\Omega}} |\psi_1 - \psi_2| \right\}.$$

Dim: Osserviamo che $u_2 + \max \left\{ \max_{\partial\Omega} |u_1 - u_2|, \max_{\bar{\Omega}} |\psi_1 - \psi_2| \right\} = u_2 + M$ risolve il problema (I) nella classe $\{z \in \text{Lip}_k(\bar{\Omega}) : z = u_2 + M \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi_2 + M \text{ su } \bar{\Omega}\}$, che, inoltre

$$u_1 \leq u_2 + M \text{ su } \partial\Omega$$

$$\psi_1 \leq \psi_2 + M \text{ su } \bar{\Omega}.$$

Allora per il lemma 1.1 si ha

$$(1.6) \quad u_1 \leq u_2 + M \text{ su } \bar{\Omega}.$$

Analogamente si ottiene che

$$(1.7) \quad u_2 \leq u_1 + M \text{ su } \bar{\Omega}.$$

Dalle (16) e (17) si ricava la (1.5). c. v. d.

Riprendiamo ora ad occuparci dell'esistenza di soluzioni del problema (I), stabilendo un risultato molto importante per la dimostrazione del teorema 1.1.

PROPOSIZIONE 1.2. Sia Ω convesso, $\psi \in \text{Lip}_h(\bar{\Omega})$; sia u una funzione lipschitziana su $\bar{\Omega}$, tale che la sua restrizione a $\partial\Omega$ verifichi la B.S.C. con costante k ; u risolva il problema (I) nella classe $\{z \in \text{Lip}_q(\bar{\Omega}) : z = u \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}$. Allora $u \in \text{Lip}_{\max(h, k)}(\bar{\Omega})$.

Dim: Cominciamo con il valutare $|u(x) - u(x')|$ quando $x \in \partial\Omega$ e $x' \in \bar{\Omega}$. Siano $a, b \in \mathbb{R}^N$ con $|a| \leq k, |b| \leq k$ tali che valga

$$II^-(y) = \sum_{i=1}^N a_i(y_i - x_i) + u(x) \leq u(y) \leq \sum_{i=1}^N b_i(y_i - x_i) + u(x) = II^+(y) \\ \forall y \in \partial\Omega.$$

Sia $P^+(x') = \sum_{i=1}^N b'_i (x'_i - \tilde{x})$ un piano per $\Pi^+ \cap \Pi^-$ tale che

$$P^+(x') \geq \Pi^+(x') \quad \forall x' \in \bar{\Omega}$$

$$|b'| \geq \max(h, k).$$

Sia $\tilde{x} \in \partial\Omega$ tale che

$$\sum_{i=1}^N b'_i (x'_i - \tilde{x}) = |b'| |x' - \tilde{x}|.$$

Allora

$$P^+(x') - P^+(\tilde{x}) = |b'| |x' - \tilde{x}|$$

$$\psi(x') - \psi(\tilde{x}) \leq |b'| |x' - \tilde{x}|$$

e quindi, poichè $P^+(\tilde{x}) \geq \psi(\tilde{x})$, risulta

$$\psi(x') \leq P^+(x') \quad \forall x' \in \Omega.$$

Allora si ha

$$\Pi^-(y) \leq u(y) \leq P^+(y) \quad \forall y \in \partial\Omega$$

$$\psi(x) \leq P^+(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

e quindi per il lemma 1.1

$$\Pi^-(x') \leq u(x') \leq P^+(x') \quad \forall x' \in \bar{\Omega}$$

da cui si ricava che $\forall x \in \partial\Omega$ e $\forall x' \in \bar{\Omega}$ si ha:

$$(1.8) \quad |u(x') - u(x)| \leq \max(h, k) |x' - x|.$$

Siano ora $x, x' \in \Omega$ ed indichiamo con $\tau = x' - x$, con $\Omega_\tau = \{x + \tau, x \in \Omega\}$ con $u_\tau(x)$ la funzione definita su Ω_τ da $u_\tau(x + \tau) = u(x)$. Avremo allora che u e u_τ risolvono il problema (I) rispettivamente nelle classi

$$\{z \in \text{Lip}_q(\Omega \cap \Omega_\tau) : z = u \text{ su } \partial(\Omega \cap \Omega_\tau), z \geq \psi \text{ su } \overline{\Omega \cap \Omega_\tau}\}$$

$$\{z \in \text{Lip}(\Omega \cap \Omega_\tau) : z = u_\tau \text{ su } \partial(\Omega \cap \Omega_\tau), z \geq \psi_\tau \text{ su } \overline{\Omega \cap \Omega_\tau}\}$$

Poichè $x' \in \Omega \cap \Omega_\tau$, per la proposizione 1.1 esistono $y \in \partial(\Omega_\tau \cap \Omega)$ e $y' \in \Omega \cap \Omega_\tau$ tali che

$$|u(x') - u_\tau(x')| \leq \max(|u(y) - u_\tau(y)|, |\psi(y') - \psi_\tau(y')|)$$

ora, poichè $\circ y \circ y - \tau$ appartiene a $\partial\Omega_\tau$ si può applicare la (18) e concludere

$$|u(x') - u_\tau(x')| \leq \max(\max(h, k), h) |\tau| = \max(h, k) |x' - x|$$

e quindi ancora la (18) per $x, x' \in \bar{\Omega}$ c. v. d.

Dimostrazione del teorema 1.1. Sia h la costante di Lipschitz di ψ , e sia k la costante della B.S.C per φ .

Sia

$$V = \{v \in \text{Lip}_{2\max(h, k)}(\bar{\Omega}) : v = \varphi \text{ su } \partial\Omega, v \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

La classe V è non vuota, è compatta nella topologia della convergenza uniforme per il teorema di Ascoli-Arzelà. Allora, poichè il funzionale dell'area è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme su V , esiste $u \in V$ soluzione del problema (I) in V ; inoltre per la proposizione 1.2 $u \in \text{Lip}_{\max(h, k)}(\bar{\Omega})$.

Sia ora z una qualunque funzione lipschitziana su $\bar{\Omega}$ con $z = \varphi$ su $\partial\Omega$ e $z \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$; per t sufficientemente piccolo $u + t(z - u) \in V$ e quindi

$$(1.9) \quad \text{area}(u + t(z - u)) \geq \text{area } u \text{ per } t \text{ abbastanza piccolo.}$$

Poichè $\text{area}(u + t(z - u))$ è una funzione convessa in t la (1.9) è vera per ogni $t \in [0, 1]$, in particolare per $t = 1$. Si ha

$$\text{area } z \geq \text{area } u$$

cioè u risolve il problema di area minima nella classe

$$\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : z = \varphi \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\} \quad \text{c. v. d.}$$

2. Esistenza e unicità nella classe delle funzioni continue.

In questo paragrafo proveremo il seguente teorema.

TEOREMA 2.1. *Sia Ω un aperto limitato ed uniformemente convesso di $\mathbb{R}^N$; sia φ una funzione continua su $\partial\Omega$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, sia $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ con $\psi \leq \varphi$ su $\partial\Omega$.*

Allora esiste unica $u \in C^0(\bar{\Omega})$ che risolve il problema

$$(I) \quad \text{area } u = \min$$

nella classe

$$\{f \in C^0(\bar{\Omega}) : f = \varphi \text{ su } \partial\Omega, f \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

a) *Teorema di esistenza.* Dimostreremo questo teorema servendoci di un procedimento di approssimazione nel quale ci sarà utile la maggiorazione stabilita nel seguente lemma.

LEMMA 2.1. Per ogni aperto limitato e convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ esiste una costante $C(\Omega)$ tale che, se u è soluzione del problema (I) nella classe

$$\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : z = u \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}, \psi \in \text{Lip}(\bar{\Omega})\}$$

ed $f \in C^0(\Omega)$, $f \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$, risulta

$$(2.10) \quad \text{area } u \leq \text{area } f + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u - f|.$$

Dim: Per la definizione di area di Lebesgue sarà sufficiente dimostrare la (2.10) per le $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, $f \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$.

Sia $\theta_\varepsilon(x)$ la funzione di $\bar{\Omega}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$\theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon \\ \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\varepsilon} & \text{se } \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon \end{cases}$$

$\theta_\varepsilon(x)$ è lipschitziana con costante $1/\varepsilon$. Indichiamo con $f_\varepsilon(x)$ la funzione

$$f_\varepsilon(x) = (1 - \theta_\varepsilon(x)) u(x) + \theta_\varepsilon(x) f(x)$$

$f_\varepsilon(x)$ è lipschitziana ed inoltre $f_\varepsilon|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$, $f_\varepsilon \geq \psi$.

Allora per la proprietà di minimo di u , risulta

$$\text{area } u \leq \text{area } f_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D'altra parte

$$\text{area } f_\varepsilon \leq \text{area } f + \int_{\Omega} |D(f_\varepsilon - f)| dx.$$

Per completare la dimostrazione del lemma basterà, quindi, provare che

$$(2.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |D(f_\varepsilon - f)| dx \leq c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u - f|.$$

Quasi ovunque su Ω , si ha

$$D(f_\varepsilon - f) = (1 - \theta_\varepsilon(x)) D(u - f) + (u - f) D(1 - \theta_\varepsilon(x)).$$

Per il teorema di Lebesgue

$$(2.12) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |(1 - \theta_\varepsilon(x)) D(u - f)| dx = 0$$

inoltre

$$\int_{\Omega} |u - f| |D(1 - \theta_\varepsilon(x))| dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} |u - f| dx \leq \sup_{\Omega - \Omega_\varepsilon} |u - f| \frac{\text{mis}(\Omega - \Omega_\varepsilon)}{\varepsilon}$$

dove $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Ma

$$(2.13) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\Omega - \Omega_\varepsilon} |u - f| \frac{\text{mis}(\Omega - \Omega_\varepsilon)}{\varepsilon} = c(\Omega) \sup_{\partial\Omega} |u - f|.$$

Allora dalle (2.12) e (2.13) si ricava la (2.11) e quindi la tesi. c. v. d.

Dimostrazione del teorema di esistenza. Sia $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni di classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ le cui restrizioni a $\partial\Omega$ convergono uniformemente a φ : le $\varphi_n|_{\partial\Omega}$ verificano la B. S. C. (cfr. [5]); sia $\{\psi_n\}$ una successione di funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$ convergenti a ψ su $\bar{\Omega}$.

Consideriamo la successione dei problemi di minimo relativi all'ostacolo ψ_n e al dato al bordo $\varphi_n + \max_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi_n) + \max_{\partial\Omega}(\psi_n - \psi)$ ⁽²⁾. Sia u_n la soluzione lipschitziana dello n -simo problema, che esiste ed è unica per il teorema 1.1.

Per la proposizione 1.1, si ha

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} |u_k - u_h| &\leq \max_{\partial\Omega} \{ \max_{\partial\Omega} |\varphi_k + \max_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi_k) + \max_{\partial\Omega}(\psi_k - \psi) - \\ &\quad - \varphi_h - \max_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi_h) - \max_{\partial\Omega}(\psi_h - \psi)|, \max_{\bar{\Omega}} |\psi_k - \psi_h| \} \leq \\ &\leq 2 \max_{\partial\Omega} |\varphi_h - \varphi_k| + \max_{\bar{\Omega}} |\psi_k - \psi_h| \end{aligned}$$

⁽²⁾ Si osservi che $\psi_n \leq \varphi_n + \max_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi_n) + \max_{\partial\Omega}(\psi_n - \psi)$ su $\partial\Omega$.

quindi la successione $\{u_n\}$ converge uniformemente ad una funzione continua u su $\bar{\Omega}$, la quale verifica $u = \varphi$ su $\partial\Omega$ e $u \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$.

Ancora, se $f \in C^0(\bar{\Omega})$, $f = \varphi$ su $\partial\Omega$, $f \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$ si ha

$$(2.14) \quad \text{area } u \leq \text{area } f.$$

Infatti, posto

$$f_n = f + \max_{\bar{\Omega}} (\psi_n - \psi) \quad (\geq \psi_n)$$

per il lemma 2.1, si ha

$$\begin{aligned} \text{area } u_n &\leq \text{area } f_n + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u_n - f_n| = \\ &= \text{area } f + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |\varphi_n - \varphi| + \max_{\partial\Omega} (\varphi - \varphi_n) \end{aligned}$$

e passando al limite $n \rightarrow \infty$, poiché l'area di Lebesgue è semicontinua inferiormente per la topologia della convergenza uniforme, si ha la (2.14).
c.v.d.

Osservazione 2.1. La funzione u che compare nella dimostrazione precedente ha area finita. Infatti, fissata $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ $f \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$, per il lemma 2.1

$$\text{area } u_n \leq \text{area } f + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u_n - f - \max_{\bar{\Omega}} (\psi_n - \psi)|$$

da cui

$$\text{area } u \leq \text{area } f + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u - f| < +\infty.$$

b) *Teorema di unicità.* Nel seguito supporremo sempre che Ω sia un aperto uniformemente convesso. Sia $f \in C^0(\bar{\Omega})$ con $\text{area } f < +\infty$, è allora noto (cfr. [5]) che l'area di $\{y = f(x) \mid x \in \bar{\Omega}\}$ è data dalla variazione totale su Ω della misura vettoriale ν di componenti $\nu_i = D_i f$ $i = 1, \dots, N$ e $\nu_{N+1} =$ misura di Lebesgue; in simboli

$$(2.15) \quad \text{area } f = \int_{\bar{\Omega}} |d\nu_f|.$$

Cominciamo col provare un teorema di unicità per il problema dell'area minima con ostacolo più debole di quello enunciato.

PROPOSIZIONE 2.1. *Siano f, g soluzioni del problema (I) nella classe*

$$\{z \in C^0(\bar{\Omega}) : z = f = g \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}.$$

Supponiamo $f \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ e area $g < +\infty$. Allora

$$(2.16) \quad f = g \text{ su } \bar{\Omega}$$

dim : Le $D_i g$ sono misure, mentre

$$\text{area } f = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Df|^2} dx.$$

Sia μ una misura rispetto a cui siano assolutamente continue le $D_i g$ e la misura di Lebesgue. Se indichiamo con $\dot{D}_i f$ e $\dot{D}_i g$ le derivate (di Radon-Nikodim) di f e g rispetto a μ e con α la derivata della misura di Lebesgue rispetto a μ , l'area delle funzioni che risolvono il problema (I) si esprime come

$$\min = \int_{\Omega} \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N |\dot{D}_i f|^2} d\mu = \int_{\Omega} \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N |\dot{D}_i g|^2} d\mu.$$

La funzione $\frac{f+g}{2}$ è uguale a $f = g$ su $\partial\Omega$ e $\frac{f+g}{2} \geq \psi$ su $\bar{\Omega}$, quindi

$$\int_{\Omega} \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N \left| \dot{D}_i \frac{f+g}{2} \right|^2} d\mu \geq \min$$

ma d'altra parte

$$(2.17) \quad 2 \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N \left| \dot{D}_i \frac{f+g}{2} \right|^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N |\dot{D}_i f|^2} + \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N |\dot{D}_i g|^2}$$

quindi

$$\int_{\Omega} \sqrt{\alpha^2 + \sum_{i=1}^N \left| \dot{D}_i \frac{f+g}{2} \right|^2} d\mu = \min$$

e allora nella (2.17) vale il segno di uguaglianza μ -quasi ovunque. Indicato, allora, con Ω_0 l'insieme

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : \alpha(x) = 0\}$$

dalla (2.17) segue che $\dot{D}f = \dot{D}g$ in $\Omega - \Omega_0$.

D'altra parte si ha

$$\int_{\Omega-\Omega_0} |d\nu_g| + \int_{\Omega_0} |d\nu_g| = \int_{\Omega-\Omega_0} |d\nu_f| = \min$$

$$\int_{\Omega-\Omega_0} |d\nu_g| = \int_{\Omega-\Omega_0} |d\nu_f|$$

da cui

$$(2.18) \quad \int_{\Omega_0} |Dg| d\mu = 0$$

poiché

$$0 = \int_{\Omega_0} |d\nu_g| \geq \int_{\Omega_0} |Dg| d\mu.$$

Dalla (2.18) e dal fatto che $\dot{D}f = \dot{D}g$ su $\Omega - \Omega_0$ segue che le misure $D_i f$ e $D_i g$ coincidono su Ω e quindi, poiché $f = g$ su $\partial\Omega$, vale (2.16).

c. v. d.

Conseguenze della proposizione precedente è il seguente lemma, che utilizzeremo nella dimostrazione del teorema di unicità.

LEMMA 2.2. *Siano $\psi_1 \in C^0(\bar{\Omega})$ e $\psi_2 \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$. Siano $f \in C^0(\bar{\Omega})$ e $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ soluzioni del problema (I) rispettivamente nella classe $\{z \in C^0(\bar{\Omega}) : z = f \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi_1 \text{ su } \bar{\Omega}\}$ e nella classe $\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : z = u \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi_2 \text{ su } \bar{\Omega}\}$. Inoltre sia, area $f < +\infty$. Allora, se $f \leq u$ su $\partial\Omega$ e $\psi_1 \leq \psi_2$ su $\bar{\Omega}$, si ha*

$$(2.19) \quad f \leq u \text{ su } \bar{\Omega}$$

e lo stesso è vero se si invertono i segni di disuguaglianza.

Dim: Sia $\{\bar{\psi}_n\}$ una successione di funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$ tale che $\bar{\psi}_n \rightarrow \psi_1$ uniformemente in $\bar{\Omega}$; sia $\{f_n\} \subset \text{Lip}(\bar{\Omega})$ tale che $f_n \geq \psi_n$ e

$$\text{area } f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^N |D_i f_n|^2} dx.$$

Supponiamo che la (2.19) sia falsa. Posto $w = \max(u, f)$ si ha $w \neq u$. Poiché u è soluzione unica del problema dell'area minima tra le lipschitziane aventi i suoi stessi valori al bordo e $\geq \psi_2$, u è, per il lemma 2.1,

soluzione dello stesso problema tra le funzioni continue aventi i suoi stessi valori al bordo $e \geq \psi_2$; e allora, per la proposizione 2.1 è unica. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\text{area}_{\Omega} w > \text{area}_{\Omega} u + \varepsilon$$

Poniamo $w_n = \max(u, f_n)$, w_n converge uniformemente in $\bar{\Omega}$ a w e $w_n \geq \bar{\psi}_n$; quindi si ha

$$\min_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Omega} \text{area}_{\Omega} w_n > \text{area}_{\Omega} u + \varepsilon$$

allora, passando eventualmente ad una sottosuccessione, possiamo supporre che per ogni n

$$\text{area}_{\Omega} w_n > \text{area}_{\Omega} u + \varepsilon.$$

Detto allora $A_n = \{x \in \Omega : f_n(x) > u(x)\}$ avremo

$$\text{area}_{\Omega} w_n = \int_{A_n} \sqrt{1 + |Df_n|^2} dx + \int_{\Omega - A_n} \sqrt{1 + |Du|^2} dx$$

quindi

$$(2.20) \quad \int_{A_n} \sqrt{1 + |Df_n|^2} dx > \int_{A_n} \sqrt{1 + |Du|^2} dx + \varepsilon \quad \forall n.$$

Poniamo $\sigma_n = \min(f_n, u)$ e $\sigma = \min(f, u)$, $\{\sigma_n\}$ converge uniformemente a σ su $\bar{\Omega}$, $\sigma = f$ su $\partial\Omega$ e $\sigma \geq \psi_1$ su $\bar{\Omega}$. Allora si ha

$$(2.21) \quad \text{area}_{\Omega} f \leq \text{area}_{\Omega} \sigma \leq \min_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Omega} \text{area}_{\Omega} \sigma_n$$

d'altra parte

$$\text{area}_{\Omega} \sigma_n = \int_{A_n} \sqrt{1 + |Du|^2} dx + \int_{\Omega - A_n} \sqrt{1 + |Df_n|^2} dx$$

e per la (2.20), si ha

$$(2.22) \quad \text{area}_{\Omega} \sigma_n < \text{area}_{\Omega} f - \varepsilon \quad \forall n.$$

Da (2.20) e (2.22) segue allora che :

$$\text{area}_{\Omega} f < \text{area}_{\Omega} f - \varepsilon$$

che è assurdo poiché $\text{area}_{\Omega} f < +\infty$.

c. v. d.

Dimostrazione del teorema di unicità: Siano $\{\varphi_n^+\}$ e $\{\varphi_n^-\}$ due successioni di funzioni continue con le loro derivate dei primi due ordini su $\mathbb{R}^N$ e tali che:

$$\varphi_n^+ \geq \varphi_{n+1}^+ \geq \varphi_{n+1}^- \geq \varphi_n^-$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^- = \varphi \quad \text{uniformemente su } \partial\Omega.$$

Siano $\{\psi_n^+\}$ e $\{\psi_n^-\}$ due successioni di funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$ e tali che:

$$\psi_n^+ \geq \psi_{n+1}^+ \geq \psi_{n+1}^- \geq \psi_n^-$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^- = \psi \quad \text{uniformemente su } \bar{\Omega}.$$

Si può sempre supporre $\psi_n^+ \leq \varphi_n^+$ ($\psi_n^- \leq \varphi_n^-$) su $\partial\Omega$.

Sia u_n^+ (u_n^-) la soluzione del problema dell'area minima nella classe delle funzioni lipschitziane $\geq \psi_n^+$ (ψ_n^-) su $\bar{\Omega}$ e che assumono i valori φ_n^+ (φ_n^-) su $\partial\Omega$.

Grazie al principio di massimo e alla convergenza uniforme dei dati, u_n^+ e u_n^- convergono, come abbiamo osservato nella dimostrazione del teorema di esistenza, uniformemente su $\bar{\Omega}$ ad una funzione continua u che risolve il problema dell'area minima relativamente all'ostacolo ψ e al dato al bordo φ .

Sia ora $v \in C^0(\bar{\Omega})$ un'altra soluzione del problema, per l'osservazione 2.1 si ha $\text{area } v < +\infty$ quindi per il lemma 2.2

$$u_n^- \leq v \leq u_n^+ \quad \text{su } \bar{\Omega}$$

e al limite per $n \rightarrow \infty$

$$v = u \quad \text{su } \bar{\Omega}.$$

Questo prova completamente il teorema 2.1.

c. v. d.

PARTE II

REGOLARITÀ

Notazioni. Indichiamo con $L^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni misurabili tali che:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \quad 1 < p < \infty$$

$C^k(\bar{\Omega})$ è la classe delle funzioni continue in $\bar{\Omega}$ con le derivate di ordine $\leq k$; $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ è il sottospazio delle funzioni di $C^k(\bar{\Omega})$ che hanno le derivate k -sime hölderiane con esponente α , $0 < \alpha < 1$.

Il completamento di $C^k(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|i| \leq k} \|D^i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p} \quad 1 < p < +\infty$$

$i = (i_1, \dots, i_N)$ lo indichiamo con $H^{k,p}(\Omega)$.

Il completamento di $C_0^k(\bar{\Omega})$, funzioni di $C^k(\bar{\Omega})$ a supporto compatto in Ω , rispetto alla norma $\|\cdot\|_{H^{k,p}(\Omega)}$ lo indichiamo con $H_0^{k,p}(\Omega)$.

Diciamo infine che $u \in H_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ se per ogni $x \in \Omega$ esiste un intorno $V(x) \subset \Omega$ tale che $u \in H^{k,p}(V(x))$.

Sia E un sottoinsieme chiuso di $\bar{\Omega}$; una funzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ si dice non negativa su E nel senso di H^1 se esiste una successione $\{u_n\}$ di funzioni $C^1(\Omega)$ ($C^\infty(\Omega)$) tale che: (i) $u_n \geq 0$ su E , (ii) $u_n \rightarrow u$ in $H^{1,2}(\Omega)$ per $n \rightarrow \infty$. Più in generale diciamo che, per $u \in H^{1,2}(\Omega)$ e $v \in H^{1,2}(\Omega)$, $u \geq v$ su E nel senso di $H^{1,2}$ se $u - v \geq 0$ su E nel senso di $H^{1,2}$.

Si vede che (ad es. cfr. [4]) la disuguaglianza $u \geq \psi$ su E nel senso di $H^{1,2}$ implica che $u \geq \psi$ è soddisfatta per tutti i punti di E eccetto al più un insieme di capacità zero e che l'insieme $\{u \in H^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega), u \geq \psi\}$ è un insieme chiuso e convesso di $H^{1,2}(\Omega)$.

1. Funzionali uniformemente ellittici.

Sia $f(x, p)$ una funzione definita in $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che

$$(a_1) \quad f(x, p) \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)^{(3)}.$$

$$(a_2) \quad \text{Esistono } \nu, \lambda \in \mathbb{R} \ (0 < \nu < \lambda) \text{ tali che}$$

$$\nu |p|^2 \leq f(x, p) \leq \lambda (|p|^2 + 1)$$

$$\nu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N f_{p_i p_j}(x, p) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall p \in \mathbb{R}^N \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

(³) Si noti che nel seguito non si userà mai l'esistenza delle derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

$$(a_3) \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_i} \right| \leq M |p| \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad M = \text{costante positiva.} \\ \forall p \in \mathbb{R}^N$$

Siano ancora φ e ψ due funzioni appartenenti ad $H^{1,2}(\Omega)$, con $\varphi(x) \geq \psi(x)$ su $\partial\Omega$.

È ben noto (cfr. ad es. [6]), in queste ipotesi, che il funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, Du) dx$$

è fortemente continuo e, quindi, debolmente semicontinuo inferiormente su $H^{1,2}(\Omega)$. Con i metodi diretti del calcolo delle variazioni si dimostra allora facilmente che il funzionale $F(u)$ ammette minimo unico nella classe $A = \{u \in H^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \text{ } u \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}$.

Introduciamo la seguente funzione:

$$g(x, u) = \max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right) \max(0, \psi - u).$$

LEMMA 1.1. *Sia $\{\psi_n\}$ una successione di funzioni di $H^{2,2}(\Omega)$ convergente a ψ in $H^{2,2}(\Omega)$; sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni di $H^{1,2}(\Omega)$ convergenti a u in $H^{1,2}(\Omega)$. Allora*

$$\int_{\Omega} g(x, u_n) dx \rightarrow \int_{\Omega} g(x, u) dx.$$

Dim: Si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |g(x, u_n) - g(x, u)| dx = \\ & = \int_{\Omega} \left| \max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} \right) \max(0, \psi_n - u_n) - \right. \\ & \quad \left. - \max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right) \max(0, \psi - u) \right| dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} \right) |\psi_n - \psi + u_n - u| dx + \\ & + \int_{\Omega} \max(0, \psi - u) \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right| dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(\int_{\Omega} \left[\max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} \right)^2 \right] dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\psi_n - \psi + u_n - u|^2 dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{\Omega} [\max(0, \psi - u)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Osservando ora che:

$$\int_{\Omega} \left| \max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} \right) \right|^2 dx \quad \text{è limitato}$$

$$\int_{\Omega} |\psi_n - \psi + u_n - u|^2 dx \rightarrow 0$$

e che

$$\left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi_n)}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right|^2$$

converge a zero puntualmente ed è maggiorata da una funzione di $L^1(\Omega)$, si ottiene

$$\int_{\Omega} |g(x, u_n) - g(x, u)| dx \rightarrow 0$$

cioè la tesi.

c. v. d.

Come conseguenza del lemma 1.1 si ha che il funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \{f(x, Du) + g(x, u)\} dx$$

è fortemente continuo (quindi, perchè convesso, debolmente semicontinuo inferiormente) in $H^{1,2}(\Omega)$. Segue allora che $\mathcal{F}(u)$ ammette minimo unico nella classe $\mathcal{A} = \{v \in H^{1,2}(\Omega); v - \varphi \in H_0^1(\Omega)\}$.

TEOREMA 1.1. *Sia $\psi \in H^{2,2}(\Omega)$ e sia $\varphi \in H^{1,2}(\Omega)$ con $\varphi \geq \psi$ su $\partial\Omega$. Sia u la soluzione del problema*

$$(I) \quad F(u) = \int_{\Omega} f(x, Du) dx = \min$$

nella classe $A = \{u \in H^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega), u \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}$. Sia v la solu-

zione del problema

$$(II) \quad \mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} \{f(x, Dv) + g(x, v)\} dx = \min$$

nella classe $\mathcal{A} = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)\}$.

Allora $u = v$

Dim: Cominciamo col far vedere che per ogni $w \in H^{1,2}(\Omega)$, $w \geq \psi$ su $\partial\Omega$

$$(1.1) \quad \mathcal{F}(w \vee \psi) \leq \mathcal{F}(w) \quad (4).$$

Supponiamo, prima, che $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, allora;

$$\mathcal{F}(w \vee \psi) = \int_{\{w \geq \psi\}} f(x, Dw) dx + \int_{\{w < \psi\}} f(x, D\psi) dx.$$

D'altra parte, sfruttando la convessità di f rispetto a p e integrando per parti, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\{w < \psi\}} \{f(x, D\psi) - f(x, Dw)\} dx &\leq \int_{\{w < \psi\}} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} (D_i \psi - D_i w) dx = \\ &= - \int_{\{w < \psi\}} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} (\psi - w) dx \leq \\ &\leq \int_{\{w < \psi\}} \left\{ \left(- \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right) \vee 0 \right\} (\psi - w) dx = \int_{\{w < \psi\}} g(x, w) dx \end{aligned}$$

da cui segue la (1) per $w, \psi \in C^\infty$.

Siano ora $w \in H^{1,2}(\Omega)$ e $\psi \in H^{2,2}(\Omega)$ con $w \geq \psi$, esistono due successioni $\{w_n\}$ e $\{\psi_n\}$ di funzioni $C^\infty(\bar{\Omega})$ tali che $w_n \geq \psi_n$ su $\partial\Omega$, $w_n \rightarrow w$ in $H^{1,2}(\Omega)$ e $\psi_n \rightarrow \psi$ in $H^{2,2}(\Omega)$. Infatti poichè $w - \psi \geq 0$ esiste una successione $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ tale che $u_n \rightarrow w - \psi$ in $H^{1,2}(\Omega)$ e $u_n \geq 0$ su $\partial\Omega$; basterà allora prendere $w_n = u_n + \psi_n$.

Tenendo ora conto che $w_n \vee \psi_n$ converge in $H^{1,2}(\Omega)$ a $w \vee \psi$, $\mathcal{F}(v)$ è fortemente continuo in $H^{1,2}(\Omega)$, $\psi_n \rightarrow \psi$ in $H^{2,2}$ e del lemma 1.1, passando al limite su

$$\mathcal{F}(w_n \vee \psi_n) \leq \mathcal{F}(w_n)$$

si ottiene la (1.1) per ogni $w \in H^{1,2}(\Omega)$ e $w \geq \psi$ su $\partial\Omega$.

Sia ora v la soluzione del problema (II) in $\mathcal{A}$; per la (1.1)

$$\mathcal{F}(v \vee \psi) \leq \mathcal{F}(v).$$

(4) $(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)).$

Dall'unicità della soluzione del problema (II) in $\mathcal{A}$ segue allora che $v \vee \psi = v$ cioè $v \geq \psi$. Ma se $v \geq \psi$, $\mathcal{F}(v) = F(v)$ e quindi v minimizza F in A . D'altra parte il problema (I) in A ha soluzione unica, allora $v = u$.
c. v. d.

Lo studio della regolarità della soluzione del problema (I) è ora ricondotto allo studio della regolarità del minimo del funzionale $\mathcal{F}(u)$. Come è ormai standard si studierà separatamente la regolarità all'interno e quella al bordo.

Per lo studio della regolarità all'interno sarà utile una formulazione locale del teorema 2.2; per questo diamo la seguente definizione.

Definizione 1.1. Diremo che $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ è *minimale per $\mathcal{F}$ in Ω se per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$* .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{supp } \varphi}(u) &= \int_{\text{supp } \varphi} \left\{ f(x, Du) + g(x, u) \right\} dx \leq \\ &\leq \int_{\text{supp } \varphi} \left\{ f(x, D(u + \varphi)) + g(x, u + \varphi) \right\} dx = \mathcal{F}_{\text{supp } \varphi}(u + \varphi). \end{aligned}$$

Analogamente diremo che $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ è *minimale (con ostacolo ψ) per F in Ω se $u \geq \psi$ e per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $u + \varphi \geq \psi$*

$$F_{\text{supp } \varphi}(u) \leq F_{\text{supp } \varphi}(u + \varphi).$$

Oss. 1.1. $u \in H^{1,2}(\Omega)$ è *minimale per $\mathcal{F}(F)$ in Ω se e solo se u minimizza $\mathcal{F}(F)$ su ogni $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ (cioè $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$) tra le funzioni di $H^{1,2}(\Omega_0)$ che hanno su $\partial\Omega_0$ la stessa traccia di u .*

Possiamo allora enunciare il seguente teorema.

TEOREMA 1.2. $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ è *minimale (con ostacolo ψ) per F in Ω se e solo se è minimale per $\mathcal{F}$ in Ω .*

Regolarità dell'interno.

TEOREMA 1.3. Sia $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ *minimale per*

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \{ f(x, Du) + g(x, u) \} dx$$

in Ω , con $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p > N$. Allora u appartiene ad $H_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$.

Dimostreremo il teorema 1.3 facendo vedere che le u minimali per $\mathcal{F}$ sono limiti di successioni di funzioni regolari, minimali per funzionali approssimanti $\mathcal{F}$.

Cominciamo col fare alcune considerazioni. Sia $\theta(t)$ la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

posto

$$\tau(x) = \max \left(0, - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x, D\psi)}{\partial p_i} \right)$$

si ha

$$g(x, u) = \max(0, \psi - u) \cdot \tau(x) = \tau(x) \int_{-\infty}^{\psi-u} \theta(t) dt.$$

Sia $\{\theta_n(t)\}$ una successione di funzioni di classe C^1 su $\mathbb{R}$ tali che :

- (i) $0 \leq \theta_n(t) \leq 1$ per ogni n e per ogni $t \in \mathbb{R}$
- (ii) $\theta_n(t) = 1$ per $t > \frac{1}{n}$, $\theta_n(t) = 0$ per $t < -\frac{1}{n}$
- (iii) $\theta'_n(t) \geq 0$

poniamo

$$g_n(x, u) = \tau(x) \int_{-\infty}^{\psi-u} \theta_n(t) dt$$

ovviamente si ha

$$(b_1) \quad |g^{(n)}(x, u)| \leq \tau(x) |u| + (1 + |\psi|) \tau(x)$$

$$(b_2) \quad g^{(n)}(x, u) \text{ è di classe } C_1 \text{ rispetto a } u, \text{ inoltre}$$

$$\left| \frac{\partial g^{(n)}}{\partial u} \right| \leq \tau(x).$$

Osserviamo ancora che per la condizione (iii), $g^{(n)}(x, u)$ è convessa in u , quindi il funzionale

$$\mathcal{F}^{(n)}(u) = \int_{\Omega} \{f(x, Du) + g^{(n)}(x, u)\} dx$$

ammette unico minimo nella classe $\mathcal{A} = \{u \in H^{1,2}(\Omega) \mid u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)\}.$

Con le notazioni precedenti vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.1. Sia $u_n \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ soluzione dell'equazione di Eulero

$$(1.2) \quad \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^N f_{p_i}(x, Dv) D_i \varphi + g_v^{(n)}(x, v) \varphi \right\} dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

relativa al funzionale

$$\mathcal{F}^{(n)}(v) = \int_{\Omega} \{ f(x, Dv) + g^{(n)}(x, v) \} dx$$

con $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p > N$. Allora $u_n \in H_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$.

Inoltre per ogni coppia di aperti $\Omega_1 \subset \subset \Omega_0 \subset \subset \Omega$ si ha la maggiorazione

$$(1.3) \quad \|u_n\|_{H^{2,p}(\Omega_1)} \leq c$$

dove c è una costante che dipende da $N, \nu, \lambda, M, \Omega_0, \Omega_1, p, \|\psi\|_{H^{2,p}(\Omega)}$ e da $\|u_n\|_{H^{1,2}(\Omega_0)}$.

Dim. Usando la tecnica standard dei rapporti incrementali (vedi ad es. Morrey [6] pag. 34-39) si ottiene che $u_n \in H_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$, che per ogni coppia di aperti $\Omega_1 \subset \subset \Omega_0 \subset \subset \Omega$ vale la maggiorazione

$$(1.4) \quad \|u_n\|_{H^{2,2}(\Omega_1)} \leq c(N, \nu, \lambda, M, \Omega_1, \Omega_0) \{ \|u_n\|_{H^{1,2}(\Omega_0)} + \|\psi\|_{H^{2,2}(\Omega_0)} \},$$

e che, per ogni $s = 1, \dots, N$ la funzione $v = D_s u_n$ è soluzione dell'equazione lineare ellittica a coefficienti discontinui

$$(1.5) \quad \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^N f_{p_i p_j}(x, Du_n(x)) D_i v D_j \varphi dx = \\ = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N G_i D_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$$

con

$$(1.6) \quad G_i = \delta_{is} g_v^{(n)}(x, u_n) - f_{p_i x_s}(x, Du_n).$$

Poniamo

$$q_0 = 2 \quad q_{k+1} = q_k^* \quad (5).$$

⁽⁵⁾ q_k^* è l'esponente di Sobolev relativo a q , $\frac{1}{q_k^*} = \frac{1}{q} = \frac{1}{N}$, se $q_k < N$, $q_k^* = p$ se $q_k \geq N$.

e, fissata una sfera $B_R \subset \subset \Omega_1$

$$R_k = R \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \right).$$

Si ha la maggiorazione

$$(1.7) \quad \|Du_n\|_{L^{q_k}(B_{R_k})} \leq c(N, \nu, \lambda, M, B_R, B_{R_k}, q_k, k) \{ \|u_n\|_{H^{1,2}(\Omega_0)} + \|\psi\|_{H^{2,p}(\Omega_0)} \}$$

Infatti, per induzione su k , la (1.7) è vera per $k=0$. Supponiamo la (1.7) vera per k , poichè la $D_s u_n$, $s=1, \dots, N$, verifica l'equazione (1.5) e $G_i \in L^{q_k}(B_{R_k})$

$$(1.8) \quad \|G_i\|_{L^{q_k}(B_{R_k})} \leq c \{ \|\psi\|_{H^{2,q_k}(B_{R_k})} + \|Du_n\|_{L^{q_k}(B_{R_k})} \}$$

per noti risultati di regolarità (cfr. [8]) si ha che $D_s u_n \in L^{q_k^*}(B_{R_{k+1}})$, $s=1, \dots, N$, e

$$\|D_s u_n\|_{L^{q_k^*}(B_{R_{k+1}})} \leq c \{ \|Du_n\|_{H^{1,2}(B_R)} + \|G_i\|_{L^{q_k}(B_{R_k})} \}$$

da cui la (1.7), tenendo conto di (1.4) e (1.8).

Sia ora $\bar{k}$ tale che $q_{\bar{k}+1} \geq N$, allora, poichè $D_s u_n$, $s=1 \dots N$ verifica l'equazione (1.5) e ovviamente $G_i \in L^q(B_{R_{\bar{k}+1}})$, esiste (cfr. [8]) α , $0 < \alpha \leq 1$, tale che $D_s u_n \in C^{0,\alpha}(B_{R_{\bar{k}+2}})$, $s=1 \dots N$ ed inoltre

$$(1.9) \quad \|D_s u_n\|_{C^{0,\alpha}(B_{R_{\bar{k}+2}})} \leq c \{ \|u_n\|_{H^{1,2}(B_R)} + \|\psi\|_{H^{2,p}(B_R)} \}.$$

Ma allora i coefficienti $f_{p_i p_J}(x, Du_n(x))$ dell'equazione (1.5) sono continui, quindi per i risultati sulla teoria L^p per equazioni lineari a coefficienti continui ([1], [2]) si ha

$$D_i(D_s u_n) \in L_{loc}^p(\Omega) \quad s=1, \dots, N$$

cioè $u_n \in H_{loc}^{2,p}(\Omega)$ e vale la maggiorazione

$$(1.10) \quad \|D_i D_s u\|_{L^p(B_R)} \leq c \{ \|D_s u_n\|_{H^{1,2}(B_{2R})} + \|G_i\|_{L^p(B_{2R})} \}$$

dove c è una costante che dipende da N, ν, λ, M, R, p e dal modulo di continuità di $f_{p_i p_J}(x, Du_n)$, cioè della norma di $D_s u_n$ in $C^{0,\alpha}(B_{2R})$, e quindi in definitiva dalla $\|u_n\|_{H^{2,2}}$, e dalla $\|\psi\|_{H^{2,2}}$. Tenendo allora conto delle (1.9), (1.10), (a_3) , (b_2) , (1.7) e (1.4) si ottiene la (3). c. v. d.

Siano ora in grado di dare la dimostrazione del teorema 1.3.

Dimostrazione del teorema 1.3. Sia $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ minimale per $\mathcal{F}$ in Ω ; preso $\Omega_0 \subset \subset \Omega$ sia u_n la soluzione del problema

$$\mathcal{F}_{\Omega_0}^{(n)}(v) = \int_{\Omega_0} \{f(x, Dv) + g^{(n)}(x, v)\} dx = \min$$

nella classe

$$\mathcal{A}_u = \{v \in H^{1,2}(\Omega_0) : v - u \in H_0^{1,2}(\Omega_0)\}.$$

Per la proposizione 1.1, se $\Omega_1 \subset \subset \Omega_0$ allora $u_n \in H^{2,p}(\Omega_1)$.

Per le (a_2) e (b_1)

$$(1.11) \quad \|u_n\|_{H^{1,2}(\Omega_0)} \leq c(N, \nu, \lambda, \Omega_0 \{ \|u\|_{H^{1,2}(\Omega_0)} + \|\psi\|_{H^{2,2}(\Omega_0)} + 1 \})$$

infatti

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega_0} |Du_n|^2 dx - \int_{\Omega_0} \tau |u_n| dx - \int_{\Omega_0} \tau (|\psi| + 1) dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega_0} \{f(x, Du_n) + g^{(n)}(x, u_n)\} dx \leq \int_{\Omega_0} \{f(x, Du) + g^{(n)}(x, u)\} dx \leq \\ & \leq \lambda \int_{\Omega_0} (|Du|^2 + 1) dx + \int_{\Omega_0} \tau |u| dx + \int_{\Omega_0} \tau (|\psi| + 1) dx \end{aligned}$$

da cui $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega_0} |Du_n|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega_0} |u - u_n|^2 dx \leq \lambda \int_{\Omega_0} |Du|^2 dx + \lambda |\Omega_0| + \\ & + 2 \int_{\Omega_0} \tau |u| dx + 2 \int_{\Omega_0} \tau (1 + |\psi|) dx + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_0} \tau^2 dx \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto della disuguaglianza di Poincaré ($u - u_n \in H_0^{1,2}(\Omega_0)$) e scegliendo ε abbastanza piccolo si ottiene la (1.11).

Per la (1.11) la successione $\{u_n\}$ è equilimitata in $H^{1,2}(\Omega_0)$, quindi esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente debolmente in $H^{1,2}(\Omega_0)$ ad una $v \in \mathcal{A}_\mu$; e si ha

$$(1.12) \quad \int_{\Omega_0} f(x, Dv) dx \leq \min \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} f(x, Du_{n_k}) dx$$

$$(1.13) \quad \int_{\Omega_0} g(x, v) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} g^{(n_k)}(x, u_{n_k}) dx.$$

La (1.12) è conseguenza del fatto che $\int_{\Omega_0} f(x, Dw) dx$ è debolmente semi-continuo inferiormente in $H^{1,2}(\Omega_0)$. Resta da provare la (1.13).

Ricordando la definizione di $g^{(n_k)}(x, w)$ si ha

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_0} g^{(n_k)}(x, u_{n_k}) - \int_{\Omega_0} g(x, v) \right| = \\ & = \left| \int_{\Omega_0} \tau(x) \left\{ \int_{-\infty}^{\psi - u_{n_k}} \theta_{n_k}(t) - \theta(t) dt - \int_{\psi - u_{n_k}}^{\psi - v} \theta(t) dt \right\} dx \right| \leq \\ & \leq \int_{\Omega_0} \tau(x) \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta_{n_k} - \theta| dt dx + \int_{\Omega_0} \tau(x) |v - u_{n_k}| dx \leq \\ & \leq \|\tau\|_{L^2(\Omega)} \left\{ \int_{-1}^1 |\theta_{n_k} - \theta| dt \operatorname{mis}(\Omega_0) + \left(\int_{\Omega_0} |v - u_{n_k}|^2 dx \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Poiché θ_n converge puntualmente a θ , per il teorema di Lebesgue

$$\int_{-1}^1 |\theta_{n_k} - \theta| dt \rightarrow 0 \quad \text{per } n_k \rightarrow \infty$$

d'altra parte $u_{n_k} \rightarrow v$ in $H^{1,2}(\Omega_0)$: questo dimostra la (1.13).

Analogamente si verifica che:

$$(1.14) \quad \int_{\Omega_0} g(x, w) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} g^{(n)}(x, w) dx.$$

Dalle (1.12), (1.13) e (1.14) segue che v è minimale per $\mathcal{F}$ in Ω_0 , infatti per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$

$$\begin{aligned} & \int_{\operatorname{supp} \varphi} \left\{ f(x, Dv) + g(x, v) \right\} dx \leq \min_{k \rightarrow \infty} \lim_{\operatorname{supp} \varphi} \int \left\{ f(x, Du_{n_k}) + g^{(n_k)}(x, u_{n_k}) \right\} dx \leq \\ & \leq \min_{k \rightarrow \infty} \lim_{\operatorname{supp} \varphi} \int \left\{ f(x, Dv + D\varphi) + g^{(n_k)}(x, v + \varphi) \right\} dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\text{supp } \varphi} \left\{ f(x, Dv + D\varphi) + g(x, v + \varphi) \right\} dx.$$

Inoltre $v = u$ su $\partial\Omega_0$, ne segue che $v = u$ su Ω_0 . Ancora, per l'unicità, tutta la successione $\{u_n\}$ converge debolmente a u .

Dalla (1.3) e dalla (1.11) segue che, se $\Omega_1 \subset \subset \Omega_0$

$$\|u_n\|_{H^{2,p}(\Omega_1)} \leq c$$

dove c è una costante che dipende da $N, \nu, \lambda, M, \Omega_1, \Omega_0, p, \|\psi\|_{H^{2,p}(\Omega_0)}$ e da $\|u\|_{H^{1,2}(\Omega_0)}$; cioè $\{u_n\}$ è equimitata in $H^{2,p}(\Omega_1)$. Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ che converge debolmente in $H^{2,p}(\Omega_1)$ a una w ($\in H^{2,p}(\Omega_1)$); poiché $\{u_n\}$ converge in $H^{1,2}(\Omega_0)$ a u , segue che $w = u$, su Ω_1 , cioè $u \in H^{2,p}(\Omega_1)$. La tesi segue allora dall'arbitrarietà di Ω_1 . c. v. d.

Regolarità al bordo ⁽⁶⁾. Per la regolarità di $\partial\Omega$, mediante un opportuno cambiamento di variabili l'equazione (2) si riduce localmente ad una equazione nella $w_n = u_n - \varphi$, verificata su una semisfera $B_R^+ = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| < R, x_N \geq 0\}$ e la w_n è nulla sulla parte piatta $\{x_N = 0\}$ di B_R^+ .

L'equazione trasformata ha le stesse proprietà dell'originale, eccetto che per gli andamenti. Facendo i rapporti incrementali, nella direzione tangenziale, come per l'interno, si mostra che $D_s w_n \in H^{1,2}(B_r^+)$ $r < R, s = 1 \dots N-1$ e che $v_n = D_s w_n$ soddisfa l'equazione trasformata di (5). Poiché si ha già la differenziabilità all'interno, per l'ellitticità, si risolve l'equazione in $D_N D_N w_n$ e si vede che $D_N w_n \in H^{1,2}(B_r^+)$ e verifica la trasformata di (5).

Da qui e dai risultati all'interno segue che $v_n = D_s u_n \in H^{1,2}(\Omega)$ e che v_n verifica l'equazione (5) (cfr. [6]). Ora, con un discorso analogo a quello della proposizione 2.1, utilizzando i risultati di regolarità relativi al problema di Dirichlet (cfr. [8], [1], [2]) per equazioni lineari ellittiche si ottiene che $u_n \in H^{2,p}(\Omega)$ e che

$$\|u_n\|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq c(N, \nu, \lambda, p, \|\psi\|_{H^{2,p}(\Omega)}, \|\varphi\|_{H^{2,p}(\Omega)}, \|u_n\|_{H^{1,2}(\Omega)}).$$

D'altra parte

$$\|u_n\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq c(\nu, \lambda, M, |\Omega|) \{ \|\varphi\|_{H^{1,2}(\Omega)} + \|\psi\|_{H^{2,2}(\Omega)} + 1 \}$$

quindi si vede (si confronti la dimostrazione del teorema 2.1) che una sottosuccessione di $\{u_n\}$, u_{n_k} , converge debolmente in $H^{2,p}(\Omega)$ e converge proprio al minimo u del funzionale $\mathcal{F}(u)$ in $\mathcal{A} = \{u \in H^{1,2}(\Omega) : u - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)\}$, cioè $u \in H^{2,p}(\Omega)$.

Concludendo, possiamo enunciare i seguenti teoremi:

⁽⁶⁾ Essendo il procedimento ormai standard, diamo solo la traccia, della dimostrazione.

TEOREMA 1.4. Sia $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ minimale (con ostacolo ψ) per il funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, Du) dx$$

con $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$, $p > N$. Allora $u \in H_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$.

In particolare $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$, con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.

TEOREMA 1.5. Sia Ω di classe C^2 . Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni appartenenti ad $H^{2,p}(\Omega)$ ($p > N$), con $\varphi(x) \geq \psi(x)$ su $\partial\Omega$. Sia u il minimo del funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, Du) dx$$

nella classe $A = \{v \in H^{1,2}(\Omega) : v - \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega), v \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}$. Allora $u \in H^{2,p}(\Omega)$.

In particolare $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.

2. Regolarità per il problema dell'area.

Sfruttando i risultati del paragrafo precedente, si dimostrano i seguenti teoremi di regolarità relativi al problema dell'area minima con ostacolo.

TEOREMA 2.1. Sia u una funzione localmente lipschitziana minimale (con ostacolo ψ) per il funzionale

$$\text{area } u = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx.$$

Supponiamo $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$. Allora per ogni α , $0 \leq \alpha < 1$, u appartiene a $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$.

TEOREMA 2.2. Sia Ω un aperto uniformemente convesso con frontiera di classe C^2 , φ la restrizione a $\partial\Omega$ di una funzione di classe C^2 , $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ $\varphi \geq \psi$ su $\partial\Omega$. Sia $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ la soluzione del problema

$$\text{area } u = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx = \min$$

nella classe $\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}) : z = \varphi \text{ su } \partial\Omega, z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}\}$. Allora per ogni α , $0 \leq \alpha < 1$, u appartiene a $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Dim. del teorema 2.1. Fissato $\Omega_0 \subset \subset \Omega$, $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega}_0)$ è soluzione del problema dell'area minima nella classe $\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}_0) : z = u \text{ su } \partial\Omega_0, z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}_0\}$.

Sia k la costante di Lipschitz della u .

Indichiamo con $f(p)$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N)$, che coincida con $\sqrt{1 + \sum p_i^2}$ per $|p| < 2k$ ed inoltre tale che esistano m, M, ν, λ costanti positive per cui

$$m |p|^2 \leq f(p) \leq M(|p|^2 + 1) \quad \forall p \in \mathbb{R}^N$$

$$\nu |\xi|^2 \leq f_{p_i p_j}(p) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

$u \in \text{Lip}(\bar{\Omega}_0)$ è l'unica soluzione del problema

$$(2.1) \quad F(u) = \int_{\Omega} f(Du) dx = \min$$

nella classe $\{z \in \text{Lip}(\bar{\Omega}_0) : z = \varphi \text{ su } \partial\Omega_0, z \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}_0\}$, in quanto u è minimo relativo interno per $F(u)$ ed il funzionale $F(u)$ è strettamente convesso.

Inoltre u è soluzione del problema (2.1) nella classe $A = \{v \in H^{1,2}(\Omega_0) : v - u \in H_0^{1,2}(\Omega_0), v \geq \psi \text{ su } \bar{\Omega}_0\}$, poiché $F(u)$ è fortemente continuo in $H^{1,2}(\Omega)$ e $\text{Lip}(\bar{\Omega}_0)$ è denso in A . Allora per il teorema 1.4 del paragrafo precedente $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$ per ogni α , $0 \leq \alpha < 1$. c. v. d.

Dim. del teorema 2.2. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 2.1: si sfrutta il teorema 1.5 del paragrafo precedente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGMON-A. DOUGIS-L. NIRENBERG - *Estimates near the boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition I.* Comm. Pure Appl. Math. vol. XII (1959).
- [2] S. AGMON-A. DOUGIS-L. NIRENBERG - Idem II, Comm. Pure Appl. Math. vol. XVII (1964).
- [3] H. BREZIS-G. STAMPACCHIA - *Sur la régularité de la solutions d'inéquations elliptiques.* Bull. Soc. Math. de France, 96 (1968).
- [4] H. LEWY-G. STAMPACCHIA - *On the regularity of the solutions of a variational inequality.* Comm. Pure Appl. Math. vol. XXII (1969).
- [5] M. MIRANDA - *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1965.
- [6] C. B. MORREY - *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Springer-Verlag (1966).
- [7] J. C. C. NITCHE - *Variational problems with inequalities as boundary conditions.* Arch. Rat. Mech. Anal. (1969).
- [8] G. STAMPACCHIA - *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Anu. Inst. Fourier t. 15 (1965).