ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

F. LAZZERI
A. TOGNOLI

Alcune proprietà degli spazi algebrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 4 (1970), p. 597-632
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_4_597_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ALCUNE PROPRIETÀ DEGLI SPAZI ALGEBRICI

F. LAZZERI, A. TOGNOLI (*)

Introduzione.

Dallo studio degli spazi analitici reali si trae la convinzione che, nel loro ambito, ogni operazione topologicamente possibile sia analiticamente possibile.

È dunque naturale cercare delle strutture più rigide di quella analitica su cui si possa però sfruttare il teorema di approssimazione di Weierstrass.

A tale scopo abbiamo definiti gli spazi algebrici.

Sia K il corpo dei reali o dei complessi ed $\mathcal{O}$ il fascio su K^n dei germi di funzioni analitiche che sono nella chiusura algebrica dei polinomi, $\mathcal{O}$ sarà detto il fascio delle funzioni algebriche.

Uno spazio algebrico sarà uno spazio, con fascio di anelli locali, localmente isomorfo ad un luogo di zeri di funzioni algebriche.

Nel § 1 si studiano alcune proprietà locali del fascio $\mathcal{O}$ (teorema di preparazione di Weierstrass nelle varie forme e dimostrazione che le spighe di $\mathcal{O}$ sono noetheriane).

Nel § 2 si da il teorema delle funzioni implicite nel caso algebrico.

Nel § 3 si studiano alcune proprietà degli insiemi algebrici di K^n (si prova fra l'altro che un insieme analitico V di K^n è algebrico se e solo se è unione di una famiglia al più numerabile di componenti irriducibili (analiticamente) di varietà affini).

Nel § 4 si prova come, dal teorema di approssimazione di Weierstrass, segua che ogni applicazione continua fra varietà algebriche compatte di $\mathbb{R}^n$ sia approssimabile con applicazioni algebriche.

Va notato che, a differenza del caso analitico:

Pervenuto alla Redazione il 17 Febbraio 1970.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo per la matematica del C. N. R., contratto N. 115.3038.00 5173.

I) non ogni varietà algebrica reale connessa è immergibile in $\mathbb{R}^n$

II) il teorema B per le varietà algebriche reali (anche immerse) è falso.

Notiamo infine che se V è una sottovarietà algebrica, reale, compatta di $\mathbb{R}^n$ allora la struttura da noi introdotta coincide con quella definita da J. Nash in [13].

Gli autori ringraziano il prof. R. Narasimhan per gli utili suggerimenti da lui avuti mentre preparavano il lavoro.

§ 1. Definizione del fascio delle funzioni algebriche e proprietà locali.

a) Sia K un corpo valutato completo ed U un aperto di K^n, notiamo con, $\mathcal{A}_U$ il fascio dei germi delle funzioni analitiche a valori in K su U. Quando non è possibile confusione indicheremo $\mathcal{A}_U$ semplicemente con $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_x$ denoterà la spiga di $\mathcal{A}$ in x, $x \in U$ e $\Gamma_U(\mathcal{A}_U)$ l'anello delle sezioni di $\mathcal{A}_U$ su U. Siano $x_1, \dots, x_n$ le funzioni coordinate di K^n, con $K[x_1, \dots, x_n]$ noteremo l'anello dei polinomi a coefficienti in K nelle n variabili $x_1, \dots, x_n$. Nel seguito l'anello $K[x_1, \dots, x_n]$ sarà identificato al sottoanello di $\Gamma_{K^n}(\mathcal{A}_{K^n})$ formato dalle funzioni polinomiali.

Per ogni aperto V di U sia $\Gamma_V(\mathcal{O})$ il sottoanello di $\Gamma_V(\mathcal{A})$ formato dalle funzioni analitiche $f\colon V \to K$ tali che per ogni $x \in V$ esiste un intorno V_x e degli elementi $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ di $K[x_1, \dots, x_n]$ tali che:

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(y)\,(f(y))^i = 0 \quad \text{per} \quad y \in V_x\,.$$

Gli elementi di $\Gamma_V(\mathcal{O})$ saranno detti funzioni algebriche su V a valori in K.

Associando ad ogni aperto V di U l'anello delle funzioni algebriche su V si definisce, con gli ovvii omomorfismi di restrizione, un prefascio su U.

Si verifica che detto prefascio è canonico, denoteremo con $\mathcal{O}_U$ il fascio associato il quale risulta essere un fascio di anelli e di K-moduli. Detto fascio sarà detto fascio dei germi delle funzioni algebriche su U.

Il fascio $\mathcal{O}_U$ è inoltre, in modo naturale, sottofascio di $\mathcal{A}_U$ (cioè $\mathcal{O}_U$ è un aperto di $\mathcal{A}_U$ e questo segue dal fatto che una funzione analitica che sia algebrica in un punto è algebrica in un intorno del punto).

Nel seguito identificheremo le sezioni di $\mathcal{O}_U$ alle corrispondenti sezioni di $\mathcal{A}_U$.

OSSERVAZIONI.

I) Sia V un aperto connesso di K^n ed $f \in \Gamma_V(\mathcal{O}_V)$, allora esistono degli elementi, non tutti nulli, $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ di $K[x_1, \dots, x_n]$ tali che

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x)\,(f(x))^i = 0, \quad \text{per} \quad x \in V. \tag{1}$$

Infatti su un aperto V_y di V la f soddisfa una relazione del tipo (1), ma la funzione $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i(z) f(z)^i$ è analitica ed essendo V connesso risulta $\varphi(x) = 0$, $x \in V$, da cui la tesi.

II) Sia V un aperto di K^m, $f \in \Gamma_V(\mathcal{A})$ e supponiamo che su ogni componente connessa V_n di V esistano degli elementi $\beta_0, \dots, \beta_{q_n}$ di $\Gamma_{V_n}(\mathcal{O})$ tali che:

$$\sum_{i=0}^{q_n} \beta_i(x)\,(f(x))^i = 0, \quad x \in V_n. \tag{2}$$

In queste ipotesi $f \in \Gamma_V(\mathcal{O})$.

Infatti dire che $f \in \Gamma_V(\mathcal{O})$ equivale a dire che $f_{|V_n} \in \Gamma_{V_n}(\mathcal{O})$ per ogni n, cioè che $f_{|V_n}$ è nella chiusura algebrica di $K[x_1, \dots, x_m]$ in $\Gamma_{V_n}(\mathcal{A})$.

D'altra parte tutti gli elementi di $\Gamma_{V_n}(\mathcal{O})$ sono algebrici su $K[x_1, \dots, x_m]$ e quindi, per la (2) $f_{|V_n}$ risulta algebrica su $K[x_1, \dots, x_m]$ e l'asserzione è così provata.

III) Sia $f \in \Gamma_U(\mathcal{O})$, allora $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in \Gamma_U(\mathcal{O})$, $i = 1, \dots, m$.

Sia infatti $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x)\,(f(x))^i = 0$ una relazione a cui soddisfa f, allora:

$$\sum_{i=1}^{p} i\,\alpha_i(x) f^{i-1}(x) \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial \alpha_i(x)}{\partial x_j}\,(f(x))^i = 0$$

da una relazione, a coefficienti funzioni algebriche, a cui soddisfa $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ che risulta quindi algebrica.

IV) Le spighe $\mathcal{O}_x$ del fascio $\mathcal{O}$ sono anelli dotati di un unico ideale massimale. Infatti i germi di funzioni algebriche sono unità dell'anello se e solo se sono germi di funzioni non nulle nel punto (per l'Osservazione II). Dunque gli elementi non invertibili di $\mathcal{O}_x$ formano un ideale, che conterrà quindi ogni altro ideale proprio di $\mathcal{O}_x$.

V) Sia U, $U \ni (0, \dots, 0)$, un aperto connesso di K^n ed $f \in \Gamma_U(0)$, $f \not\equiv 0$; esistono allora degli elementi $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ di $K[x_1, \dots, x_n]$ tali che:

$$\sum_{i=0}^{p} (\alpha_i(x))^i f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x \in U, \quad \alpha_0 \not\equiv 0, \tag{3}$$

il polinomio $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x)\, t^i$ è irriducibile.

Se $\dfrac{\partial f(0, \dots, 0, x_n)}{\partial x_n} \not\equiv 0$, allora per ogni relazione di tipo (3) risulta $\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial x_n} \not\equiv 0$.

Sia infatti $\sum_{i=0}^{q} \alpha_i'(x)\,(f(x))^i = 0$ una relazione, non banale irriducibile a cui soddisfi f su U; se fosse $\alpha_0' \equiv 0$ dovremmo avere $f \equiv 0$ contro l'ipotesi dunque $\alpha_0' \not\equiv 0$ ed è così provata la prima asserzione.

Supponiamo ora K sia algebricamente chiuso, allora si verifica (usando ad esempio il teorema di preparazione di Weierstrass) che in un intorno di $(0, \dots, 0) \in K^{n-1}$ è definita un'applicazione (non necessariamente analitica) $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ tale che, vicino a $(0, \dots, 0)$ si abbia:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0.$$

Se, per assurdo, α_0 dipendesse solo da $x_1, \dots, x_{n-1}$ si avrebbe per tutti i punti $x_1', \dots, x_{n-1}'$ di un intorno di $(0, \dots, 0)$: $f(x_1', \dots, x_{n-1}', \varphi(x_1', \dots, x_{n-1}')) = 0$ e quindi $\alpha_0(x_1', \dots, x_{n-1}') = 0$ onde $\alpha_0 \equiv 0$ contro l'ipotesi.

Se K non è algebricamente chiuso basta considerare f come funzione algebrica nella chiusura algebrica di K e ripetere gli argomenti detti sopra.

VI) Sia $K = \mathbb{C}$ ed U un aperto di Zariski di K^n, allora: $\Gamma_U(\mathcal{O}) =$ anello delle funzioni razionali regolari su U.

Sia infatti $f \in \Gamma_U(\mathcal{O})$ ed $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x)\,(f(x))^i = 0$ una relazione non banale a cui soddisfi f (U è connesso).

Supponiamo anche il polinomio $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x)\,t^i$ sia irriducibile.

Consideriamo l'applicazione olomorfa propria: $\varphi: U \to U \times \mathbb{C}$ definita da: $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$. In $U \times \mathbb{C}$ è definito l'insieme analitico

$$Y = \{(x_1, \dots, x_n, t) \mid t = f(x_1, \dots, x_n)\},$$

φ è propria quindi $\varphi(U)$ è un insieme analitico, il polinomio $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x)\,t^i$ è irriducibile quindi Y è irriducibile dunque essendo $\dim \varphi(U) = \dim Y$ risulta $\varphi(U) = Y$.

Se il polinomio $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x)\,t^i$ avesse grado q maggiore di uno fissato un punto generico $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ esisterebbero q punti di Y che si proietterebbero su x^0 ma allora $f(x^0)$ non sarebbe definita come funzione contro le ipotesi.

Dunque f soddisfa ad una relazione del tipo $\alpha_1 f + \alpha_0 = 0$ e perciò f è razionale.

VI)′ Osserviamo subito che se $k = \mathbb{R}$ esistono elementi f di $\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O})$ che non sono funzioni razionali (ad esempio $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$).

VII) Sia ora $K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$, U un aperto di K^n ed $f: U \to K$ una funzione C^∞ (nel senso delle variabili reali) tale che per ogni punto $x_0 \in U$ esista un intorno U_{x_0} e dei polinomi $\alpha_0, \dots, \alpha_{p_{x_0}}$ tali che su U_{x_0} valga $\sum_{i=0}^{p_{x_0}} \alpha_i(x) f(x))^i = 0$. In queste ipotesi f è algebrica su U.

Infatti la f soddisfa formalmente ad una relazione analitica e quindi, per i risultati di M. Artin (vedi [1]), essa è analitica da cui la tesi.

VIII) Sia U un aperto connesso di K^n ed $f \not\equiv 0$ una funzione algebrica.

Esiste allora un polinomio $\alpha_0 \not\equiv 0$ tale che:

$$\{x \in U \mid \alpha_0(x) = 0\} \supset \{x \in U \mid f(x) = 0\}. \tag{1}$$

Sia $\sum_{i=0}^{q} \alpha_i(x)) f^i = 0$ una relazione e cui soddisfi f, è immediato che α_0 soddisfa la (1).

b) Proprietà locali del fascio.

Sia K un corpo valutato completo, $\mathcal{O}$ il fascio delle funzioni algebriche su K^n.

Sia o l'origine di K^n, $f \in \mathcal{O}_0$; diremo che f è regolare in x_n se $f(0, \dots, 0, x_n) \neq 0$.

Se f è regolare in x_n, l'ordine di zero di $f(0, \dots, 0, x_n)$ si indicherà con $\partial_n f$.

Con $\mathcal{O}_{(n-1)}$ noteremo il fascio delle funzioni algebriche su K^{n-1} identificato con l'iperpiano $x_n = 0$ di K^n.

PROPOSIZIONE 1. (Teorema di preparazione di Weierstrass, I^0 forma).
Sia $f \in \mathcal{O}_0$ regolare in x_n, e sia $s = \partial_n f$.
Esistono allora $E \in \mathcal{O}_0$, $R_1, \dots, R_s \in \mathcal{O}_0(n-1)$ tali che

$$f = E \cdot (x_n^s + R_1 x_n^{s-1} + \dots + R_s). \tag{1}$$

(2) *E è una unità, nessuna delle $R_1, \dots, R_s$ è unità.*

Inoltre tali E, $R_1, \dots, R_s$ sono univocamente determinate da 1), 2).

PROVA. Essendo $f \in \mathcal{A}_0$, tali $E, R_1, \dots, R_s$ esistono analitiche, ed univocamente determinate. Basta dunque provare che se f è algebrica, anche $E, R_1, \dots, R_s$ lo sono e per far ciò, in virtù dell'Osservazione II), basta dimostrare che $R_1, \dots, R_s$ lo sono. Siano $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ funzioni definite in un intorno U dell'origine di K^{n-1}, a valori nella chiusura algebrica di K, tali che per ogni $x \in U$, $(\sigma_1(x), \dots, \sigma_s(x))$ siano le radici (con l'opportuna molteplicità) del polinomio

$$x_n^s + R_1(x)\, x_n^{s-1} + \dots + R_s(x) = 0. \tag{3}$$

Vogliamo ora provare che $\lim\limits_{x \to 0} \sigma_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, s$.

La proposizione è vera nel caso analitico, dunque vale la (1) nell'anello $\mathcal{A}_0$ e le R_i sono funzioni nulle nell'origine.

Essendo le σ_i radici del polinomio (3) si avrà, per x vicino all'origine:

$$|\sigma_i(x)| \leq |R_1(x)| + |R_2(x)| \cdot |\sigma_i(x)|^{-1} + \dots + |R_s(x)| \cdot |\sigma_i(x)|^{-(s-1)}. \tag{4}$$

Se per assurdo esistesse $\varepsilon > 0$ tale che in ogni intorno dell'origine di K^{n-1} esistesse un x^* tale che $\sigma_i(x^*) \geq \varepsilon$, dalla (4) si avrebbe la relazione

$$\varepsilon \leq |R_1(x)| + |R_2(x)| \cdot \varepsilon^{-1} + \dots + |R_s(x)| \cdot \varepsilon^{-(s-1)}$$

la quale è ovviamente in contrasto col fatto che $\lim\limits_{x \to 0} R_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, s$.

Vogliamo ora dimostrare che le σ_i sono algebricamente dipendenti dalle $x_1, \dots, x_{n-1}$.

La f è algebrica, e $\dfrac{\partial f(0, \dots, 0, x_n)}{\partial x_n} \not\equiv 0$ quindi, per l'osservazione V) esistono degli elementi $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ di $K[x_1, \dots, x_n]$ tali che in un intorno V dell'origine di K^n si abbia:

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x)\, (f(x))^i = 0 \quad \text{per} \quad x \in V \quad \text{ed inoltre} \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_n} \not\equiv 0. \tag{5}$$

Per tutti i punti $(x_1', \dots, x_{n-1}')$ di un intorno W dell'origine di K^{n-1} si ha perciò $(x_1', \dots, x_{n-1}', \sigma_i(x_1', \dots, x_{n-1}')) \in V$, $i = 1, \dots, s$.

Valendo la (1) si ha $f(x_1', \dots, x_{n-1}', \sigma_i(x_1', \dots, x_{n-1}')) = 0$, onde dalla (5) si ottiene $\alpha_0(x_1', \dots, x_{n-1}', \sigma_i(x_1', \dots, x_{n-1}')) = 0$ e questo prova che σ_i dipende algebricamente da $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Le funzioni $R_1, \dots, R_s$ sono analitiche, sono funzioni simmetriche delle σ_i (e quindi dipendono algebricamente da $x_1, \dots, x_{n-1}$) perciò sono funzioni algebriche. La proposizione è così provata.

PROPOSIZIONE 2. *Siano* $f_0 \in \mathcal{O}_0$, $f_1 \in \mathcal{A}_0$, $f_2 \in \mathcal{A}_0$ *tali che* $f_0 = f_1 \cdot f_2$. *Esiste allora* $h \in \mathcal{A}_0$ *tale che*:

$$h(0) \neq 0, \quad hf_1 \in \mathcal{O}_0, \quad h^{-1}f_2 \in \mathcal{O}_0 .$$

PROVA. Possiamo supporre f_0 regolare in x_n, allora anche f_1 ed f_2 saranno regolari in x_n e si avrà

$$\partial_n f_0 = \partial_n f_1 + \partial_n f_2 . \tag{1}$$

Per il teorema di preparazione di Weierstrass nel caso analitico si hanno le relazioni:

$$f_i = E_i \cdot (x_n^{s_i} + R_1^i x_n^{s_i - 1} + \dots + R_{s_i}^i) = E_i \cdot R_i , \qquad i = 0, 1, 2, \tag{2}$$

ove $s_i = \partial_n f_i$ ed E_0, R_j^0 sono algebriche.

Si ha $E_0 \cdot R_0 = E_1 E_2 R_1 R_2$ e quindi, per l'unicità della (2), garantita dalla proposizione 1, si ha $E_0 = E_1 \cdot E_2$, $R_0 = R_1 \cdot R_2$.

Risulta $R_1 = E_1^{-1} f_1 = x_n^{s_1} + R_1^1 x_n^{s_1 - 1} + \dots + R_{s_1}^1$; siano $\sigma_1, \dots, \sigma_{s_1}$ funzioni definite su K^{n-1} a valori nella chiusura algebrica di K tali che per ogni $x \in K^{n-1}$, $\sigma_1(x), \dots, \sigma_{s_1}(x)$ siano le s_1 radici (con la dovuta molteplicità) del polinomio $x_n^{s_1} + R_1^1(x) x_{n_1}^{s-1} + \dots + R_{s_1}^1(x)$.

$\sigma_1, \dots, \sigma_{s_1}$ sono alcune delle funzioni $\sigma_1, \dots, \sigma_{s_1}, \dots, \sigma_{s_0}$ che danno le radici del polinomio $R_0 = R_1 \cdot R_2$, dunque, per la proposizione 1, le $\sigma_1, \dots, \sigma_{s_1}$ sono algebricamente dipendenti da $x_1, \dots, x_{n-1}$ e perciò le R_j^1 sono algebriche. Si è così provato che $E_1^{-1} \cdot f_1$ è algebrica, dunque anche $E_1 E_2 f_2 = f_0 \cdot (f_1 E_1^{-1})^{-1}$ è algebrica e la proposizione risulta provata ponendo $h = E_1^{-1}$.

COROLLARIO 1. *Sia* $\mathcal{O}_0$ *l'anello dei germi di funzioni algebriche nell'origine di* K^n, $\mathcal{A}_0$ *quello delle analitiche. L'anello* $\mathcal{O}_0$ *è a fattorizzazione unica; per di più data* $f \in \mathcal{O}_0$ *ogni fattorizzazione di* f *in* $\mathcal{A}_0$, *ne induce una equivalente* (*a meno dell'ordine e di unità*) *in* $\mathcal{O}_0$.

PROVA. Sia $f \in \mathcal{O}_0$, $f = g_1^{R_1}, \dots, g_s^{R_s}$ una fattorizzazione di f in $\mathcal{A}_0$. Ripetute applicazioni della proposizione 2 danno la tesi.

PROPOSIZIONE 3. *L'anello* $\mathcal{O}_0$ *è noetheriano, e quindi è un anello locale.*

PROVA. Dimostriamo la proposizione per induzione sulla dimensione dello spazio K^n.

Sia A un ideale di $\mathcal{O}_0$, dobbiamo provare che A è finitamente generato.

Possiamo supporre che esista $f \in A$ regolare in x_n. Sia A' l'insieme dei $g \in A$ regolari in x_n. A' genera A perchè se $g \in A$ è non regolare in x_n, allora $h = g - f \in A'$ è regolare in x_n e $g = h + f$.

Sia ora $\varphi \in A'$; per la proposizione 1 si ha:

$$\varphi = (x_n^s + R_1 x_n^{s-1} + \dots + R_s) E. \tag{1}$$

Con E algebrica invertibile ed R_j, algebriche non invertibili. La (1) prova che A' (e quindi A) è generato dai germi funzioni algebriche della forma $x_n^s + R_1 x_n^{s-1} + \dots + R_s$, in particolare dunque A è generato in $\mathcal{O}_0$ da $A \cap \mathcal{O}_0(n-1)[x_n] = B$, ove $\mathcal{O}_0(n-1)[x_n]$ è l'anello dei polinomi in x_n a coefficienti germi di funzioni algebriche in 0 origine di K^{n-1}. Per l'ipotesi d'induzione $\mathcal{O}_0(n-1)$ è noetheriano, quindi anche $\mathcal{O}_0(n-1)[x_n]$ lo è.

Ne segue che B, e quindi A, è finitamente generato, e la proposizione è dimostrata.

COROLLARIO 2. *La coppia* $(\mathcal{A}_0, \mathcal{O}_0)$ *è piatta. In particolare se* A *è un ideale di* $\mathcal{O}_0$, *si ha* $(A \cdot \mathcal{A}_0) \cap \mathcal{O}_0 = A$, *ove* $A \cdot \mathcal{A}_0$ *è l'ideale generato da* A *in* $\mathcal{A}_0$.

PROVA. Il corollario è conseguenza del fatto che $\mathcal{O}_0$ ed $\mathcal{A}_0$ sono anelli locali (noetheriani) aventi lo stesso completamento (vedi [11] Prop. 22).

PROPOSIZIONE 4. (Teorema di Weierstrass).

Sia $f \in \mathcal{O}_0(n)$ *regolare d'ordine* s *in* x_n. *Per ogni* $g \in \mathcal{O}_0(n)$ *esistono* $h \in \mathcal{O}_0(n)$, $R_1, \dots, R_s \in \mathcal{O}_0(n-1)$ *tali che*

$$g = h \cdot f + R_1 x_n^{s-1} + \dots + R_s. \tag{1}$$

Inoltre le $h, R_1, \dots, R_s$ *sono univocamente determinate dalla* (1).

PROVA. *a*) Per la proposizione 1 si può supporre $f = x_n^s + \overline{R}_1 x_n^{s-1} + \dots$ $\dots + \overline{R}_s$ con $\overline{R}_1, \dots, \overline{R}_s \in \mathcal{O}_0(n-1)$.

b) Basta provare la proposizione nel caso che f sia irriducibile. Supponiamo infatti $f = f_1 \cdot f_2$, f_i polinomio di grado s_i in x_n a coefficienti in $\mathcal{O}_0(n-1)$, per cui la proposizione sia provata. Se $g \in \mathcal{O}_0(n)$ si avrà: $g = h_1 \cdot f_1 + T_1$ con T_1 polinomio di grado $\leq s_1 - 1$ in x_n, e $h_1 = h_2 \cdot f_2 + T_2$ con T_2 polinomio di grado $\leq s_2 - 1$ in x_n. Sostituendo avremo: $g = h_2 \cdot$ $\cdot (f_2 \cdot f_1) + f_1 \cdot T_2 + T_1 = h_2 \cdot f + T$, e T sarà un polinomio di grado $\leq s - 1$ in x_n.

c) La proposizione è vera nel caso analitico, quindi la (1) può essere scritta con $h \in \mathcal{A}_0(n)$, $R_1, \dots, R_s \in \mathcal{A}_0(n-1)$. Al solito basterà provare che $R_1, \dots, R_s$ sono algebrici, ed anche h lo sarà.

d) Essendo f irriducibile, il discriminante Δ di f rispetto a x_n è non identicamente nullo. Sia $p(n)$ un policilindro di centro $0 \in K^n$ ove gli ele-

menti di (1) sono definiti, e sia $\underline{x} \in p(n-1) = p(n) \cap K^{n-1}$ tale che $\Delta(\underline{x}) \neq 0$. Proveremo ora che i germi indotti in $\underline{x}$ da $R_1, \dots, R_s$ sono algebrici. L'equazione $f = 0$ definisce s funzioni $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ all'intorno di $\underline{x}$ ed a valori nella chiusura algebrica $\overline{K}$ di K; i valori di tali funzioni saranno distinti all'intorno di $\underline{x}$ essendo $\Delta(\underline{x}) \neq 0$. Sostituendo successivamente $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ a x_n nella (1) si ottiene

$$(2) \qquad \begin{cases} g(x, \sigma_1(x)) = R_1(x) \cdot \sigma_1^{s-1}(x) + \dots + R_s(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g(x, \sigma_s(x)) = R_1(x) \cdot \sigma_s^{s-1}(x) + \dots + R_s(x). \end{cases}$$

Il determinante del sistema lineare 2) nelle $R_1(x), \dots, R_s(x)$ è il determinante di Vandermonde delle $\sigma_1(x), \dots, \sigma_s(x)$, distinte per ipotesi, ed è quindi non nullo. Allora 2) ha una ed una sola soluzione in una chiusura algebrica di $\mathcal{O}_{\underline{x}}(n-1)$ e la proposizione è provata.

Sia A un anello locale, M un A-modulo. Diremo che M è quasi finito su A se $M/\mathfrak{M}_A \cdot M$ ha dimensione finita come spazio vettoriale su $A/\mathfrak{M}_A$, ove $\mathfrak{M}_A$ è l'ideale massimale di A. Siano A, B anelli locali.

Diremo morfismo $\varphi: A \to B$ un omomorfismo tale che $\varphi(1_A) = 1_B$, $\varphi(\mathfrak{M}_A) \subset \mathfrak{M}_B$. Sia M un B-modulo, $\varphi: A \to B$ un morfismo. Allora M può considerarsi dotato in modo naturale (tramite φ) di una struttura di A-modulo. Nel seguito denoteremo con $\mathcal{O}_n$ lo anello dei germi di funzioni algebriche in $0 \in K^n$.

TEOREMA (teorema di preparazione, forma generale).

Sia $A = \mathcal{O}_n, B = \mathcal{O}_m, \varphi: A \to B$ un morfismo, M un B-modulo di tipo finito. Allora M è finito su A se e solo se è quasi finito su A.

PROVA. Se M è finito, sarà evidentemente quasi finito. Mostriamo il viceversa.

I° *caso.* $A = \mathcal{O}_{n-1} = \mathcal{O}(x_1, \dots, x_{n-1})$, $B = \mathcal{O}_n = \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)$, $\varphi: A \to B$ l'immersione naturale. Supponiamo esista $f \in B$, regolare in x_n tale che $f \cdot M = 0$. Allora può supporsi $f = x_n^s + R_1 x_n^{s-1} + \dots + R_s$, con $R_1, \dots, R_s \in A$, ed M è quindi in modo naturale un modulo di tipo finito su $B/(f)$ che è generato come A modulo da $1, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_n^{s-1}$, ove $\bar{b}$ indica l'immagine di $b \in B$ in $B/(f)$. Quindi M sarà finito su A. Mostriamo che tale f esiste. Siano $m_1', \dots, m_q' \in M$ tali che le loro immagini in $M/\mathfrak{M}_A \cdot M$ sia un sistema di generatori su K; siano poi $m_1'', \dots, m_r'' \in M$ generanti M su B, e poniamo $\{m_1, \dots, m_p\} = \{m_1', \dots, m_q'\} \cup \{m_1'', \dots, m_r''\}$.

Allora per ogni $m \in M$ si ha $m = \sum_1^p \alpha_i m_i$ con $\alpha_i \in \varphi(A) + \mathcal{M}_A \cdot B$. Infatti si avrà

$$m - \Sigma\, a_i' \cdot m_i' \in \mathcal{M}_A \cdot M \text{ con } a_i' \in K \text{ e quindi}$$

$$m - \Sigma\, a_i' \cdot m_i' = \Sigma\, h_j \mu_j \text{ con } h_j \in \mathcal{M}_A\,,\ \mu_j \in M.$$

Espressi i μ_j come combinazioni lineari degli m_i'', a coefficienti in B si ottiene quanto asserito. Poniamo allora

$$x_n \cdot m_i = \Sigma\, \alpha_{ij} m_j \qquad \alpha_{ij} \in \varphi(A) + \mathcal{M}_A \cdot B$$

ed infine $f = \det(x_n \delta_{ij} - \alpha_{ij})$.

1) Si ha $f \cdot m_j = 0$, $j = 1, \dots, p$. Infatti in generale sia M un A-modulo, $m_1, \dots, m_p \in M$, e sia $\sum_{i=1}^p R_{ij} m_j = 0$ per $i = 1, \dots, p$, con ogni R_{ij} in A.

Allora $\det(R_{ij}) \cdot m_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, p$. Basta esprimere $\det(R_{ij})$ sviluppando con la regola di Laplace rispetto alla prima colonna, e ricordare le proprietà della matrice (R_{ij}) delle aggiunte.

2) f è regolare in x_n. Infatti posto $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$, $\alpha_{ij}(0, \dots, 0, x_n)$ sarà costante essendo $\alpha_{ij} \in \varphi(A) + \mathcal{M}_A \cdot B$. Quindi $f(0, \dots, 0, x_n)$ è un polinomio non nullo di grado p in x_n.

2⁰ *caso*. Proviamo ora il teorema in generale.

Sia $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(y_1, \dots, y_m)$.

Fattorizziamo φ nel seguente modo $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \xrightarrow{\tau} \mathcal{O}(y_1, \dots, y_m)$ ove σ è l'immersione naturale e τ è definita da $\tau : y_j \to y_j$, $x_j \to \varphi(x_j)$. Allora $\varphi = \tau \circ \sigma$. Se M è un modulo di tipo finito su $\mathcal{O}(y_1, \dots, y_m)$, lo sarà evidentemente anche su $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ perchè τ è surgettiva.

Spezziamo ora σ in m inclusioni $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \to \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n, y_1) \to \to \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) \to \dots$.

Essendo M quasi finito su $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)$ lo sarà a maggior ragione su $\mathcal{O}(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots, y_i)$ per ogni i. La proposizione è provata allora applicando un numero finito di volte il 1⁰ caso.

§ 2. Il teorema delle funzioni implicite.

In questo paragrafo con K indicheremo $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

LEMMA 1. *Sia $f : U \to K$ una funzione algebrica definita sull'aperto U di K^{n+1} ed $h : U_0 \to K$ una seconda funzione algebrica definita su un aperto U_0*

di $K^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in K^{n+1} / x_{n+1} = 0\}$ *e tale che* $(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)) \in U$ *per ogni* $(x_1, \dots, x_n) \in U_0$. *In queste ipotesi la funzione* $\varphi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n))$ *è algebrica su* U_0.

PROVA. Premettiamo le seguenti osservazioni:

a) basta dimostrare il lemma nel caso U_0 ed U siano connessi cosa che supporremo dunque verificata.

b) se $\psi : U_0 \to K$ è una funzione analitica ed esiste un aperto non vuoto W di U_0 tale che ψ / W sia algebrica allora ψ è algebrica su tutto U_0.

c) se f è identicamente nulla il lemma è banalmente vero, supporremo dunque $f \not\equiv 0$.

Essendo f algebrica e non identicamente nulla esistono degli elementi α_i di $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ tali che su U si abbia

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x_1, \dots, x_{n+1}) (f(x_1, \dots, x_{n+1}))^i = 0 \tag{1}$$

ed $\alpha_0 \not\equiv 0$.

Ponendo $x_{n+1} = h(x_1, \dots, x_n)$ la (1) diventa:

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)) (\varphi(x_1, \dots, x_n))^i = 0. \tag{2}$$

Essendo h algebrica le funzioni $\alpha_i(x_1, \dots, x_n, h)$ sono algebriche e quindi, per l'osservazione II), se qualche $\alpha_i(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n))$ è non identicamente nullo la (2) prova che φ è algebrica.

Esaminiamo ora il caso in cui $\alpha_i(x_1, \dots, x_n, h) \equiv 0$ per ogni i.

Sia $x^0 \in p_{n+1}^{-1}(U_0) \cap U$, ove $p_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, 0)$.

In un intorno di x^0 le funzioni $x_1, \dots, x_n, y = x_{n+1} - h'$, ove $h'(x_1, \dots, x_{n+1}) = h(p_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}))$, danno un sistema di coordinate locali (analitiche).

Facciamo la seguente osservazione: sia ψ un germe di funzione analitica definito nel punto x^0, allora ψ dipende algebricamente da $x_1, \dots, x_{n+1}$ se e solo se dipende algebricamente da $x_1, \dots, x_n, y$.

Infatti se ψ dipende algebricamente da $x_1, \dots, x_{n+1}$ soddisfa ad una relazione, non banale, del tipo:

$$\sum_{j=0}^{q} \beta_j(x_1, \dots, x_{n+1}) (\psi)^j = 0 \quad \text{con } \beta_j \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$$

e quindi:

$$\sum_{j=0}^{q} \beta(x_1, \dots, x_n, y - h') (\psi)^j = 0.$$

La funzione h' è algebricamente dipendente da $x_1, \dots, x_n$ quindi $\beta_j(x_1, \dots, x_n, y-h'), j=0, \dots, q$, è algebricamente dipendente da $x_1, \dots, x_n, y$. Per l'osservazione II) dunque ψ è algebricamente dipendente da $x_1, \dots, x_n, y$.

Viceversa supponiamo, ψ dipenda algebricamente da $x_1, \dots, x_n, y$, allora esistono $\beta'_j \in K[x_1, \dots, x_n, y]$ tali che:

$$\sum_{j=0}^{r} \beta'_j(x_1, \dots, x_n, y)(\psi)^j = 0, \beta_0 \not\equiv 0.$$

Si ha allora:

$$\sum_{j=0}^{r} \beta'_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - h')(\psi)^j = 0.$$

Analogamente a prima risulta che $\beta'_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - h')$ è algebricamente dipendente da $x_1, \dots, x_{n+1}$ e l'osservazione è così provata.

La funzione f in un intorno di x^0 dipende dunque algebricamente da $x_1, \dots, x_n, y$ dunque esistono $\gamma_j \in K[x_1, \dots, x_n, y]$ tali che in un intorno di x^0 risulti:

$$\sum_{j=0}^{s} \gamma_j(x_1, \dots, x_n, y)(f)^j = 0, \quad \gamma_0 \not\equiv 0.$$

Sia t l'intero non negativo tale che tutti i polinomi γ_j siano divisibili per y^t ma non per y^{t+1}.

Posto $\widehat{\gamma_j}(x_1, \dots, x_n, y) = \gamma_j(x_1, \dots, x_n, y)/y^t$ la relazione $\sum_{j=0}^{s} \widehat{\gamma_j}(x_1, \dots, x_n, 0) \cdot (\varphi(x_1, \dots, y_n))^j = 0$ (1) è non banale e prova che φ è algebrica in un intorno di $p_{n+1}(x^0)$ e quindi su U_0. Il lemma è così dimostrato.

TEOREMA 1. *Sia $P_0 = P_0' \times P_0'' \in K^n \times K^h$ e siano assegnate delle funzioni algebriche $f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h)$, $i = 1, \dots, h$ definite in un intorno di P_0 e tali che $f_i(P_0) = 0, i = 1, \dots, h$.*

Supponiamo la matrice $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right]_{P_0}\right)_{i, j=1, \dots, h}$ abbia caratteristica h, in queste ipotesi esistono delle funzioni algebriche definite su un intorno U di P_0' in K^n: $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ $i = 1, \dots, h$, tali che: $(\varphi_1(P_0'), \dots, \varphi_h(P_0')) = P_0''$ ed in un intorno di P_0 in $K^n \times K^h$ risulti:

$$(1) \qquad f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h) = 0, \ i = 1, \dots, h \iff$$
$$\iff y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \ i = 1, \dots, h.$$

(1) Va osservato che, essendosi posto $y = x_{n+1} - h'$ porre $y = 0$ equivale a sostituire $h(x_1, \dots, x_n)$ ad x_{n+1}.

PROVA. Per il teorema delle funzioni implicite nel caso analitico sono univocamente determinate delle funzioni analitiche $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ $i = 1, \dots, h$ che soddisfano la (1) e tali che $(\varphi_1(P_0'), \dots, \varphi_h(P_0')) = P_0''$.

Rimane da dimostrare che le φ_i sono algebriche.

Dimostreremo il teorema per induzione su h.

Se $h = 1$ è assegnata una funzione algebrica $f_1(x_1, \dots, x_n, y)$ tale che $\left[\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]_{P_0} \neq 0$.

Sia $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ la funzione analitica che soddisfa alla (1) ed

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x_1, \dots, x_n, y)(f(x_1, \dots, x_n, y))^i = 0, \ \alpha_i \in K[x_1, \dots, x_n, y], \tag{2}$$

una relazione cui soddisfi la f (che per ipotesi è algebrica).

Per l'osservazione V) del § 1 la relazione (2) può essere scelta in modo che α_0 dipenda da y.

Ponendo $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ nella (2) si ottiene $\alpha_0(x_1, \dots, x_n, \varphi) = 0$ e questo prova che φ è algebrica.

Supponiamo ora provato il teorema per $h = \nu - 1$ e dimostriamolo per $h = \nu$.

Facendo eventualmente un cambiamento lineare nelle coordinate $y_1, \dots, y_h$ si può supporre $\left[\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right]_{P_0} \neq 0$.

Per la validità del teorema nel caso $h = 1$ esiste una funzione algebrica $\widehat{\varphi}_1(x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_h)$ tale che vicino a P_0 risulti:

$$f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h) = 0 \iff y_1 = \widehat{\varphi}_1(x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_h).$$

I seguenti due sistemi sono dunque equivalenti vicino a P_0:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y_1 - \widehat{\varphi}_1(x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_h) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n, \widehat{\varphi}_1(x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_h), y_2, \dots, y_h) = \widehat{f}_2(x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_h) = 0 \\ \vdots \\ f_h(x_1, \dots, x_n, \widehat{\varphi}_1(x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_h), y_2, \dots, y_h) = \widehat{f}_h(x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_h) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Per il lemma 1 le funzioni $f_i(x_1, \dots, x_n, \widehat{\varphi_1}, y_2, \dots, y_h)$ sono algebriche nelle variabili $x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_h$ ed è facile verifica che il rango dello Jacobiano $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right]\right)_{i,j=2,\dots,h}$, è $h-1$ (²).

Si può applicare l'ipotesi di induzione al sistema:

$$(5) \qquad \begin{cases} f_2(x_1, \dots, x_n, \widehat{\varphi_1}, y_2, \dots, y_h) = 0 \\ \vdots \\ f_h(x_1, \dots, x_n, \widehat{\varphi_1}, y_2, \dots, y_h) = 0. \end{cases}$$

Siano $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 2, \dots, h$, le funzioni algebriche che risolvono il sistema (5), per il lemma 1 anche $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \widehat{\varphi_1}(x_1, \dots, x_n, \varphi_2, \dots, \varphi_h)$ è algebrica ed il teorema è così completamente dimostrato.

COROLLARIO 1. *Sia U_0 un aperto di $K^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = 0\}$ $f: U_0 \to K$ una funzione analitica ed $f'(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$ il prolungamento di f ad $U_0 \times K$.*

Si ha: f è algebrica se e solo se f' è algebrica.

PROVA. Se f è algebrica è immediato che f' è tale, viceversa sia f' algebrica allora f risulta algebrica in virtù del lemma 1 (ponendo $x_{n+1} = 0$).

Siano U, V due aperti di K^n, K^m rispettivamente e $\varphi: U \to V$ un'applicazione.

DEFINIZIONE 1. $\varphi: U \to V$ si dice algebrica se sono algebriche le funzioni $p_i \circ \varphi: U \to K$, $i = 1, \dots, m$, ove $p_i: K^m \to K$ è la proiezione di K^m sulla i-esima coordinata. Se $\varphi: U \to V$ è un omeomorfismo e φ, φ^{-1} sono applicazioni algebriche allora φ sarà detto isomorfismo algebrico.

DEFINIZIONE 2. Sia U un aperto di K^n ed S un chiuso di U, S dicesi insieme algebrico di U se per ogni $x \in S$ esiste un intorno U_x di X in U

(²) Dato il sistema di funzioni analitiche $g_i(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots y_h) = 0$ $i = 1, \dots, h$ e supposto $g_i(0 \dots 0) = 0$, sia V_0 il germe di insieme analitico determinato dal sistema nell'origine e $\mathcal{T}_0$ lo spazio tangente di Zariski a V_0. Si ha ovviamente $n + h - \text{rango} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_0 = \dim \mathcal{T}_0$ Da quanto detto segue che sistemi equivalenti hanno Jacobiano dello stesso rango.

ed un numero finito $f_1, \dots, f_q$ di funzioni algebriche definite su U_x tali che:

$$U_x \cap S = \{y \in U_x \mid f_1(y) = f_2(y) = \dots = f_p(y) = 0\}.$$

DEFINIZIONE 3. Siano assegnate le funzioni algebriche $f_1, \dots, f_n$ su un intorno U di $x^0 \in K^n$. Le funzioni $f_1, \dots, f_n$ si dicono un sistema di coordinate locali, (in x^0) se esiste un aperto U', $U \supset U' \ni x^0$ tale che l'applicazione $\varphi : U' \to K^n$ definita da: $\varphi(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p))$ sia un isomorfismo algebrico fra U' ed un aperto $\varphi(U')$ di K^n.

LEMMA 2. *Sia $\varphi : U \to V$ un'applicazione fra due aperti di K^n, K^m rispettivamente, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) *φ è un'applicazione algebrica*

ii) *esistono delle funzioni algebriche $f_i : U \to K$ tali che $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$*

iii) *per ogni funzione algebrica $g : V \to K$ la funzione $g \circ \varphi : U \to K$ è algebrica.*

PROVA. i) $\Longleftrightarrow$ ii) è immediata infatti la condizione i) equivale a dire che le funzioni $f_i' = p_i \circ \varphi$ sono algebriche ed ovviamente vale $\varphi(x) = (f_1'(x), \dots, f_m'(x))$.

iii) $\Longrightarrow$ i) è immediato

i) $\Longrightarrow$ iii) È sostanzialmente il lemma 1. Sia infatti $g : V \to K$ una funzione algebrica e $g' : U \times V \to K$ la funzione $g'(u, v) = g(v)$, per il corollario 1 g' è algebrica.

Essendo φ algebrica si ha $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ con f_i funzioni algebriche; per il lemma 1 la funzione

$$\widehat{g}(x_1, \dots, x_n) = g'(x_1, \dots, x_n, y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n))$$

è algebrica. D'altra parte dalle definizione risulta: $\widehat{g} = g \circ \varphi$ ed il lemma è così provato.

LEMMA 3. *Siano $f_1, \dots, f_n$ delle funzioni algebriche definite sull'intorno U di x^0, $x^0 \in K^n$. Le seguenti condizioni sono allora equivalenti:*

i) *$f_1, \dots, f_n$ sono delle coordinate locali algebriche in x^0*

ii) *i vettori $v_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_{x^0}$ $i = 1, \dots, n$, sono linearmente indipendenti fra loro (ove $x_1, \dots, x_n$ sono le funzioni coordinate di K^n)*

iii) *una funzione analitica e algebricamente dipendente da $x_1, \dots, x_n$ se e solo se è algebricamente dipendente da $f_1, \dots, f_n$ ed inoltre $f_1, \dots, f_n$ sono coordinate locali analitiche.*

PROVA. i) $\Longrightarrow$ ii). Se $f_1, \dots, f_n$ sono coordinate algebriche locali sono anche coordinate analitiche locali e quindi vale ii).

ii) $\Longrightarrow$ i) Le f_i definiscono l'applicazione $\varphi(x) = (f_1(x) = y_1, \dots, f_n(x) = y_n) \in K^n$, dunque si ha il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 - f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ y_n - f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Se i vettori v_i sono linearmente indipendenti, per il teorema 1, dal sistema (1) si ricavano delle funzioni algebriche $x_i = h_i(y_1, \dots, y_n)$ tali che:

$$(2) \qquad y_j - f_j(h_1(y_1, \dots, y_n), \dots, h_n(y_1, \dots, y_n)) = 0, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Dunque posto

$$\psi(y_1, \dots, y_n) = (h_1(y_1, \dots, y_n), \dots, h_n(y_1, \dots, y_n))$$

si ha: $\psi \circ \varphi = \mathrm{id.}$ e perciò φ è un isomorfismo locale e ciò prova i).

i) $\Longrightarrow$ iii) È conseguenza del fatto che, se vale i), $f_1, \dots, f_n$ sono algebricamente dipendenti da $x_1, \dots, x_n$ e viceversa.

iii) $\Longrightarrow$ ii) segue dal fatto che $f_1, \dots, f_n$ sono coordinate locali analitiche.

COROLLARIO 2. *Siano $\varphi: U \to V$, $\psi: V \to W$ due applicazioni algebriche fra aperti di K^n, K^m, K^q, allora l'applicazione $\psi \circ \varphi: U \to W$ è algebrica.*

COROLLARIO 3. *Sia $\varphi: U \to V$ un'applicazione algebrica dell'aperto U di K^n nell'aperto V di K^m e si abbia $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Sia $x^0 \in U$ e supponiamo in un intorno di x^0 la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ abbia rango costante q.*

In queste ipotesi esistono delle coordinate algebriche locali $x'_1, \dots, x'_n$ in x^0 e $y'_1, \dots, y'_m$ in $\varphi(x^0)$ tali che in esse risulti $\varphi(x'_1, \dots, x'_n) = (y'_1 = x'_1, \dots, y'_1 = x'_q, 0, \dots, 0)$.

PROVA. È identica a quella del caso differenziabile od analitico.

§. 3. Alcune proprietà degli insiemi algebrici.

a) *La dimensione di uno spazio algebrico*

In questo paragrafo con K indicheremo $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

Sia U un aperto di K^n ed S un insieme algebrico di U, (per la definizione vedi § 2).

Sia O_U il fascio dei germi delle funzioni algebriche su U ed $\mathcal{J}_V$ il sottofascio dei germi di funzioni algebriche nulle su V.

Il fascio $O_U/\mathcal{J}_V = O_V$ sarà detto fascio delle funzioni algebriche su V e lo spazio con fascio di anelli (V, O_V) sarà chiamato spazio algebrico di U. Il fascio O_V è un fascio di anelli locali e le sue sezioni si possono interpretare come funzioni continue su V che, localmente, sono restrizione di funzioni algebriche definite su aperti di U.

Se V è un insieme algebrico di U e W è un secondo insieme algebrico di U ed accade che $W \subset V$ allora diremo che (W, O_W) è sottospazio algebrico di (V, O_V).

Dati due spazi algebrici $(V, O_V), (V', O_{V'})$ degli aperti di U, U' di K^n, K^m dicesi morfismo di (V, O_V) in $(V', O_{V'})$ il dato di:

1⁰) un'applicazione continua $\varphi : V \longrightarrow V'$

2⁰) un omomorfismo di fasci di anelli locali $\widehat{\varphi^*} : \varphi^*(O_{V'}) \longrightarrow O_V$

Un morfismo dicesi isomorfismo se ammette un inverso.

Sia (X, O_X) uno spazio con fascio di anelli locali, diremo che (X, O_X) é uno spazio algebrico (sul corpo K) se:

I) lo spazio topologico X è paracompatto

II) lo spazio con fascio di anelli locali (X, O_X) è localmente isomorfo ad uno spazio algebrico di un aperto di K^n.

Chiameremo morfismi fra spazi algebrici $(X, O_X), (X', O_{X'})$ i morfismi $\widehat{(\varphi, \varphi^*)} : (X, O_X) \longrightarrow (X', O_{X'})$ di spazi con fasci di anelli locali ed isomorfismi i morfismi che ammettono inverso.

Sia W un aperto dello spazio algebrico (X, O_X), chiameremo carta su W (o rappresentazione locale di W) ogni isomorfismo fra W ed uno spazio algebrico W' di K^n.

LEMMA 1. *Sia* $\widehat{(\varphi, \varphi^*)} : (V, O_V) \longrightarrow (V', O_{V'})$ *un morfismo fra spazi algebrici di due aperti di* K^n, K^m. *Per ogni* $x \in V$ *esiste allora un intorno* U_x *in* K^n *ed un'applicazione algebrica* $\varphi_x : U_x \longrightarrow K^m$ *(nel senso della definizione* 1 *del* § 2) *tale che*: $\varphi|_{V \cap U_x} = \varphi_x|_{V \cap U_x}$.

Viceversa data un'applicazione continua $\varphi : V \longrightarrow V'$, *che localmente sia restrizione di un'applicazione algebrica, è definito un unico morfismo* $\widehat{(\varphi, \varphi^*)}$: $(V, O_V) \longrightarrow (V', O_{V'})$.

PROVA. È del tutto analoga a quella che si usa nel caso analitico vedi ad esempio [6].

OSSERVAZIONE I. Sia (V, O_V) uno spazio algebrico di un aperto U di K^n, lo spazio con fascio di anelli (V, O_V) è completamente determinato dal sottoinsieme V di U.

Dato un secondo spazio algebrico $(V', O_{V'})$ dell'aperto U' di K^m i morfismi di V in V' sono completamente determinati, in base al lemma 1, dall'applicazione $\varphi : V \longrightarrow V'$.

OSSERVAZIONE II. Sia V un insieme algebrico dell'aperto U di K^n ed I'_V un sottofascio di ideali di O_U tale che:

$y \in U - V \Longrightarrow (I'_V)_y = (O_U)_y$ (ove $(I'_V)_y$, $(O_U)_y$ sono le spighe di I'_V ed O_U nel punto y).

Il fascio $O'_V = O_{U/I'_V}$ è un fascio di anelli locali e si può considerare lo spazio con fascio di anelli locali (V, O'_V).

Definiremo spazio algebrico su K, (non ridotto), ogni spazio con fascio di anelli locali (X, O_X) tale che:

X sia paracompatto

(X, O_X) sia localmente isomorfo ad un modello (V, O'_V) del tipo sopra descritto.

Come per gli spazi analitici si può considerare, anche per gli spazi algebrici, la categoria degli spazi non ridotti (cioè con elementi nilpotenti). Nel seguito ci occuperemo solo del caso ridotto, vogliamo solo notare che:

1) se (V, O_V) è uno spazio algebrico (non ridotto) dell'aperto U di K^n allora (V, O_V) non è determinato dall'insieme V

2) nel caso non ridotto il lemma 1 va sostituito con l'analogo delle proposizioni 1.2.4 e 1.2.5 di [14] (che valgono in virtù del corollario 2 del § 1).

Sia (V, O_V) uno spazio algebrico su K, per ogni $x \in V$ è definita la dimensione di Krull: $d(V_x)$ della spiga $(O_V)_x$ di O_V in x. (con V_x denoteremo il germe di insieme algebrico individuato da V in x).

Sia $\mathcal{M}_x$, (od $(\mathcal{M}_V)_x$ quando è possibile confusione), l'ideale massimale di $(O_V)_x$ e $\mathcal{T}(V_x) =$ dimensione su K di $\mathcal{M}_{x/(\mathcal{M}_x)^2} =$ dimensione di Zariski di V_x.

LEMMA 2. *Sia $\mathcal{T}(V_x) = p$, allora esiste uno spazio algebrico (W, O_W) di un aperto di K^p che è isomorfo ad un aperto di V contenente x e non esiste uno spazio algebrico di un aperto di K^{p-1} godente di questa proprietà.*

PROVA. Osserviamo che se $V = K^n$, $x = (0, \dots, 0) = 0$ allora $\mathcal{M}_{x/(\mathcal{M}_x)^2}$ si può identificare allo spazio vettoriale, su k, delle funzioni lineari su K^n nulle all'origine e dunque $\mathcal{T}(K_0^n) = n$ (infatti $\mathcal{M}_{x/(\mathcal{M}_x)^2}$ ha come generatori (su K) le classi di equivalenza dei generatori di $\mathcal{M}_x$ come O_x modulo (vedi [12]) dunque $\mathcal{M}_{x/(\mathcal{M}_x)^2}$ ha come generatori liberi le classi di $x_1, \dots, x_n$).

Nel seguito, per semplicità, supporremo $x = 0$. Sia ora V_0 propriamente contenuto in K_0^n ed $(I_V)_0$ la spiga in 0 del fascio dei germi delle funzioni algebriche di K^n nulle su V_0. Per definizione si ha:

$$(O_{K^n})_{0/(I_V)_0} = (O_V)_0 \,,\, (\mathcal{M}_{K^n})_0/(I_V)_0 = (\mathcal{M}_V)_0$$

ed infine, per il teorema dell'omomorfismo risulta:

$$(1) \qquad (\mathcal{M}_V)_{0/(\mathcal{M}_V)_0)^2} = (\mathcal{M}_{K^n})_{0/(\mathcal{M}_{K^n})_0^2 + (I_V)_0} =$$

$$= (\mathcal{M}_{K^n})_{0/(\mathcal{M}_{K^n})_0)^2}/(I_V)_{0/((\mathcal{M}_{K^n})_0)^2 \cap (I_V)_0}$$

ove $((\mathcal{M}_{K^n})_0^2 + (I_V)_0)$ è il minimo ideale contenente $(\mathcal{M}_{K^n})_0^2$ ed $(I_V)_0$.

Dalla (1) si ha: $\mathcal{T}(K_0^n) \geq \mathcal{T}(V_0)$ e questo prova l'ultima parte del lemma.

Sia $p = \mathcal{T}(V_x)$, $p < n$, esistono allora $n - p$ funzioni q-algebriche $g_1, \dots, g_{n-p}$, definite in un intorno di 0 in K^n, tali che la matrice

$$\left(\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_0\right)_{\substack{i=1,\dots,n-p \\ j=1,\dots,n}}$$

abbia caratteristica $n - p$. Infatti se in $(I_V)_0$ non esistessero tali funzioni, per la (1), la dimensione di $(I_V)_{0/((\mathcal{M}_{K^n})_0)^2}$ sarebbe inferiore ad $n - p$ e quindi risulterebbe $\mathcal{T}(V_0) > p$ contro l'ipotesi.

Per il teorema delle funzioni implicite esiste un sistema locale di coordinate $(g_1, \dots, g_{n-p}, y_1, \dots, y_p)$ in 0 tali che in esse V_0 risulti contenuto nella sottovarietà lineare $g_1 = \dots = g_{n-p} = 0$ da cui la tesi del lemma.

COROLLARIO 1. *Sia (V, O_V) uno spazio algebrico, la funzione $T: V \to N$ definita da $T(x) = \mathcal{T}(V_x)$, $x \in V$, è semicontinua superiormente e quindi l'insieme M dei punti in cui essa è continua è un aperto denso in V.*

PROVA. Il fatto che T sia semicontinua superiormente deriva dalla caratterizzazione di $T(x)$ come più piccolo intero n tale che V_x sia realizzabile in K^n (vedi lemma 2).

Sia ora $x_0 \in V$ e $t' = \min \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}} T(x)$, esiste allora un intorno aperto U_{x_0} di x_0 in V tale che $y \in U_{x_0} \Longrightarrow T(y) \geq t'$.

L'insieme dei punti $A = \{z \in U_{x_0} \mid T(z) = t'\}$ è un aperto non vuoto contenuto in M. L'arbitrarietà di U_{x_0} prova che M è denso. Avendosi poi

che T è continua in x_0 se e solo se è localmente costante si ha che M è aperto ed il corollario è così dimostrato.

Dato lo spazio algebrico (V, O_V) diremo che esso è regolare (o non singolare) in x_0 se $\mathcal{T}(V_{x_0}) = d(V_{x_0})$.

LEMMA 3. *Sia (V, O_V) uno spazio algebrico di K^n ed $x_0 \in V$; le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:*

a) (V, O_V) è regolare in x_0 e $d = d(V_{x_0})$

b) $(O_V)_{x_0}$ è un anello regolare e $d = d(V_{x_0})$

c) posto $d = d(V_{x_0})$, esistono $n - d$ funzioni algebriche $g_1, \dots, g_{n-d}$, definite in un intorno di x_0, e nulle su V_{x_0}, tali che la caratteristica della matrice

$$\left(\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_h}\right]_{x_0}\right)_{\substack{i=1,\dots,n-d \\ h=1,\dots,n}} \quad \textit{sia } n-d.$$

d) la funzione $T(x) = \mathcal{T}(V_x)$ è continua nel punto x_0 e $\mathcal{T}(V_{x_0}) = d$

e) esiste un intorno aperto U_{x_0} di x_0 in V che è isomorfo ad un aperto di K^d.

PROVA. *a)* $\Longleftrightarrow$ *b)* è immediato dalle definizioni.

a) $\Longleftrightarrow$ *c)*. In generale si prova che $\mathcal{T}(V_{x_0}) \geq d(V_{x_0})$ (vedi ad esempio [12]) la *c)* equivale a dire che $d(V_{x_0}) \geq \mathcal{T}(V_{x_0})$ e quindi che $d(V_{x_0}) = \mathcal{T}(V_{x_0})$ che è la condizione *a)*.

e) $\Longrightarrow$ *a)*, *e)* $\Longrightarrow$ *d)* sono immediate conseguenze delle definizioni

d) $\Longrightarrow$ *e)* Se vale *d)* esistono $n - d$ funzioni algebriche $g_1, \dots, g_{n-d}$ definite in un intorno di x_0 e delle funzioni lineari $y_1, \dots, y_d$ (su K^n) tali che: $y_1, \dots, y_d, g_1, \dots, g_{n-d}$ sono un sistema di coordinate locali algebriche in x_0.

Sia $\psi(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_j), \dots, y_d(x_j), (g_1(x_j), \dots, g_{n-d}(x_j))$, l'isomorfismo definito da dette coordinate locali fra un intorno U_{x_0} di x_0 in K^n e l'aperto U' di K^n.

$\psi(V_{x_0})$ è contenuto nella varietà lineare W' di U' avente equazioni $g_1 = 0, \dots, g_{n-d} = 0$. Per dimostrare l'asserto basterà provare che, se vale *d)*, allora $\psi: V \to W'$ è aperta nel punto x_0.

Se $\psi(V_{x_0})$ fosse il germe di un insieme analitico propriamente contenuto in $W'_{\psi(x_0)}$ esisterebbero dei germi di funzioni algebriche, su $W'_{\psi(x_0)}$, non identicamente nulle, ma nulle su $\psi(V_{x_0})$.

Sia $\mathcal{J}$ l'anello di tali germi ed r l'intero tale che: esiste $g \in \mathcal{J}$ che ha parte omogenea di grado r non identicamente nulla, ma per ogni $r' < r$ non esistono in $\mathcal{J}$ funzioni con siffatte proprietà.

Presa una tale g essa si annulla su $\psi(V_{x_0})$ ma almeno una delle sue derivate deve essere non indenticamente nulla su $\psi(V_{x_0})$ (perchè almeno

una delle sue derivate ha parte omogenea di grado $r-1$ non identicamente nulla).

Sia h una derivata di g non identicamente nulla su $\psi(V_{x_0})$, per la definizione di $\mathcal{T}(\psi(V_x))$ si ha:

$$h(x) \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{T}(\psi(V_x)) < d.$$

Si è dunque provato che se $\psi(V_{x_0})$ è un insieme algebrico proprio di $W'_{\psi(x_0)}$ allora la funzione $T' : x \longrightarrow \mathcal{T}(\psi(V_x))$ non è localmente costante in x_0, ed essendo ψ un isomorfismo, si ha dunque che neppure la funzione $T : x \longrightarrow \mathcal{T}(V_x)$ è localmente costante in x_0 e l'asserzione è provata.

$a) \Longrightarrow e)$ Per quanto visto nel lemma 2 V_{x_0} è isomorfo ed il germe di un insieme algebrico V'_{x_0} di K^d, $d = \mathcal{T}(V_{x_0}) = d(V_{x_0})$.

Se V'_{x_0} fosse il germe di un insieme algebrico proprio di K_{x_0} allora il numero dei parametri dell'anello $(O_V)_{x_0}$ sarebbe inferiore a d (per la definizione del numero dei parametri di $(O_V)_{x_0}$ si prende l'analoga di quella usata nel caso analitico (vedi ad esempio [12] pag. 150)).

D'altra parte il numero dei parametri di $(O_V)_{x_0}$ è eguale a $d(V_{x_0})$ (la dimostrazione è identica a quella del caso analitico) e quindi se vale $a)$ V_{x_0} è isomorfo al germe indotto da un aperto di K^d.

Il lemma è così completamente dimostrato.

COROLLARIO 2. *Sia (V, O_V) uno spazio algebrico su K, allora l'insieme dei punti regolari di V è un aperto denso in V.*

PROVA. L'affermazione segue dal corollario 1 e dall'implicazione $d) \Longleftrightarrow a)$ del lemma 3.

Sia (V, O_V) uno spazio algebrico di K^n, se $K = \mathbb{C}$ l'insieme dei punti singolari di V (cioè non regolari) forma un sottospazio algebrico di V.

Se $K = \mathbb{R}$, in generale, l'insieme dei punti singolari non è un sottospazio algebrico (nè è contenuto, in generale, in un sottospazio algebrico proprio).

Nel seguito chiameremo varietà algebrica ogni spazio algebrico privo di punti singolari.

Dato uno spazio algebrico (V, O_V) diremo dimensione di V e scriveremo $\dim V$ il numero, (oppure il simbolo $+\infty$), $\dim V = \sup_{x \in V} d(V_x)$.

OSSERVAZIONE III. Sia V_x un germe di insieme algebrico di K^n ed I_{V_x} l'ideale dei germi delle funzioni algebriche nulle su V_x.

Analogamente a quanto si fa nel caso analitico (vedi [2]) si provano i fatti seguenti: esiste un intero p, $n \geq p \geq 0$, tale che, fatto un opportuno cambiamento lineare delle variabili risulta:

1) l'applicazione $O_p \xrightarrow{\eta} O_x/I_{V_x} = O_{V_x}$ è iniettiva (ove O_p è l'anello dei germi delle funzioni algebriche dipendenti dalle prime p variabili)

2) ogni elemento di O_{V_x} è intero su $\eta(O_p)$

3) sono soddisfatte le relazioni:

(1) $x_r^{q_r} + a_{r,q_r} x_r^{q_r-1} + \dots + a_{r,1} = 0 \bmod I_{V_x}$, $r = p+1, \dots, n$ ove gli $a_{i,j}$ sono elementi di O_p

4) in un opportuno intorno $U = U' \times U''$ di x in K^n se un punto sta su V allora verifica le (1) (U' è un aperto di K^p, U'' di K^{n-p})

5) detta $\pi: U' \times U'' \to U'$ la proiezione canonica risulta $\pi_{|U \cap V}$ è propria, a fibra finita e $\pi(U \cap V)$ contiene un aperto di U', se poi $K = \mathbb{C}$ ed I_{V_x} è primo, allora esiste un elemento non nullo δ di O_p tale che detto $U'' = \{x \in U' \mid \delta(x) \neq 0\}$ si ha: $\pi|_{\pi^{-1}(U'') \cap V}$ è un rivestimento.

Il numero p di cui sopra si usa chiamare numero dei parametri di V_x.

Dalla condizione 5) risulta che il numero dei parametri di V_x è eguale alla dimensione topologica di V_x.

Si prova d'altra parte, (teorema di Cohen Seidenberg) che la dimensione di Krull di O_{V_x} è uguale a quella di O_p quindi risulta $d(V_x) =$ dimensione topologica di V_x ed anche $d(V) =$ dimensione topologica di V.

b) Complessificazione e decomposizione in componenti irriducibili.

Sia V un insieme algebrico di K^n, diremo inviluppo affine di V, e lo noteremo $\mathrm{In}(V)$, l'intersezione di tutte le varietà affini di K^n contenenti V (W dicesi varietà affine di K^n se esistono degli elementi g_i $i = 1, \dots, q$, di $K[x_1, \dots, x_n]$ tali che $W = \{x \in K^n \mid g_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, q\}$.

Analogamente dato un germe V_x di insieme algebrico di K^n dicesi inviluppo affine di V_x e si nota $\mathrm{In}(V_x)$ l'intersezione di tutti i germi di varietà affini che contengono V_x.

Consideriamo ora $\mathbb{R}^n$ canonicamente immerso in $\mathbb{C}^n$.

Sia V un insieme algebrico di $\mathbb{R}^n$, $x \in V$; diremo complessificato del germe V_x, e lo denoteremo con $\tilde{V}_x$, il più piccolo germe di insieme analitico complesso di $\mathbb{C}^n$ contenente V_x. Si dimostra che $\mathcal{A}_{V_x} \otimes \mathbb{C} = \mathcal{A}_{\tilde{V}_x}$, questa ultima proprietà permette di definire il complessificato di un germe di insieme analitico reale a prescindere da una sua realizzazione (vedi [6]).

Diremo complessificato algebrico di V_x, e lo noteremo con $\widehat{V}_x$, il più piccolo germe di insieme algebrico (su $\mathbb{C}$) di $\mathbb{C}^n$ che contiene V_x. Analogamente a quanto fatto nel caso analitico si può definire il complessificato algebrico di V_x senza ricorrere ad una particolare realizzazione di V_x in $\mathbb{R}^n$ ma definendo V_x come il germe di insieme algebrico (su $\mathbb{C}$) associato all'anello $O_{V_x} \otimes \mathbb{C}$.

Sono ovvie le seguenti inclusioni:

$$(\mathrm{In}\,(V))_x \supset \mathrm{In}\,(V_x),$$

$$\widehat{V}_x \supset \widetilde{V}_x\,.$$

Si pongono naturali le seguenti questioni:

I) vale $\dim V = \dim \mathrm{In}\,(V)$?

II) si ha: $\widehat{V}_x = \widetilde{V}_x$?

Nel seguito di questo paragrafo proveremo che entrambe le domande hanno risposta affermativa.

PROPOSIZIONE 1. *Sia V un insieme algebrico di K^n ed $x_0 \in V$; esiste una varietà affine W tale che:*

$$W_{x_0} \supset V_{x_0}\,, \qquad \dim W = \dim V_{x_0}\,.$$

PROVA. *a*) Dimostreremo la proposizione nel caso in cui $K = \mathbb{R}$, se $K = \mathbb{C}$ la dimostrazione è del tutto analoga (salvo qualche semplificazione).

Basta evidentemente dimostrare che data una componente analiticamente irriducibile $V^s_{x_0}$ di V_{x_0} esiste una varietà affine della stessa dimensione che la contiene (si noti che $V^s_{x_0}$ non è, a priori, il germe di un insieme algebrico).

Incominciamo col provare la cosa seguente: sia X una varietà affine di $\mathbb{R}^n$ ed $x_0 \in X$ un punto regolare di X (regolare nel senso delle varietà affini), sia $Y \subset X$, $Y \ni x_0$ un sottoinsieme algebrico di X tale che Y_{x_0} sia propriamente contenuto in X_{x_0}, in queste ipotesi esiste un polinomio P tale che: $P_{|\,Y_{x_0}} \equiv 0$, P ed almeno una sua derivata non si annulla identicamente su X_{x_0}.

Sia $d = \dim X_{x_0}$, per ipotesi allora, (X è regolare in x_0), esistono dei polinomi $g_1, \dots, g_{n-d}$ nulli su X_{x_0} e tali che la matrice:

$$\left(\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{x_0}\right)_{\substack{i=1,\dots,n-d\\ j=1,\dots,n}}$$

abbia rango massimo.

Esistono perciò delle funzioni lineari su $\mathbb{R}^n$: $y_{n-d+1}, \dots, y_n$ tali che le funzioni $g_1, \dots, g_{n-d}$, $y_{n-d+1}, \dots, y_n$ danno un sistema di coordinate locali in x_0 per $\mathbb{R}^n$.

È definito l'isomorfismo $\psi: U_{x_0} \to U'_{\psi(x_0)}$, fra due aperti di $\mathbb{R}^n$, tramite le equazioni:

$$\begin{cases} g_i = g_i(x_1, \dots, x_n) \\ y_j = y_j(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-d, \quad j = n-d+1, \dots, n.$$

$\psi(Y_{x_0})$ risulta essere il germe di un insieme algebrico propriamente contenuto nella varietà lineare $X'_{\psi(x_0)}$ definita in $U'_{\psi(x_0)}$ dalle equazioni $g_i = 0$ $i = 1, \dots, n-d$.

Esiste pertanto una funzione algebrica $h(y_{n-d+1}, \dots, y_n)$ nulla su $\psi(Y_{x_0})$ ma non identicamente nulla su $X'_{\psi(x_0)}$, per l'osservazione VIII del § 1 esistono quindi dei polinomi $Q(y_j) \in \mathbb{R}\cdot[y_{n-d+1}, \dots, y_n]$ nulli su $\psi(Y_{x_0})$ ma non identicamente nulli e sia $\mathcal{J}$ l'insieme di tali polinomi.

Se $P' \in \mathcal{J}$ e la parte omogenea di grado s di P' non è identicamente nulla su $\psi(Y_{x_0})$ mentre tutti gli elementi di $\mathcal{J}$ hanno la parte omogenea di grado inferiore ad s identicamente nulla su $\psi(Y_{x_0})$, allora P' ha almeno una derivata non identicamente nulla su $\psi(Y_{x_0})$. Ponendo $P(x_1, \dots, x_n) = P'(y_j(x_i))$ si ha la tesi della nostra asserzione.

b) Sia V^* la varietà affine intersezione di tutte le varietà affini di $\mathbb{R}^n$ che contengono $V^s_{x_0}$, si ha: $V^*_{x_0} \supset V^s_{x_0}$. Notiamo con V^s un insieme analitico che induca $V^s_{x_0}$.

Esiste un intorno U_{x_0} di x_0 in V^s ed un insieme analitico V_1 di $U_{x_0} \cap V^s$ tale che $V^s \cap U_{x_0} - V_1 \cap U_{x_0}$ è formato da un numero finito di componenti connesse $\{V^j\}_{j=1,\dots,q}$, ogni V^j è un aperto di $V^s \cap U_{x_0}$ formato da punti regolari (analiticamente) ed inoltre risulta: $\overline{V^j} \ni x_0$, $\dim V_j = \dim V^s_{x_0}$ per ogni j (per la prova di questo fatto vedasi [2]).

Dal fatto $\overline{V}^j \ni x_0$ e dall'irriducibilità (analitica) di $V^s_{x_0}$ si deduce che ogni funzione analitica f definita in un intorno di x_0 e nulla su un aperto di V^j è identicamente nulla su V_{x_0}, (infatti l'insieme analitico $W' = \{f = 0\} \cap V^s_{x_0}$ ha la stessa dimensione di $V^s_{x_0}$ e quindi coincide con esso).

c) Supponiamo ora, per assurdo, sia $d^* = \dim V^* > \dim V^s_{x_0}$ e siano $g_1, \dots, g_r$ dei polinomi che generano l'ideale dei polinomi nulli su V^*.

L'insieme dei punti di V^* in cui la matrice

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}} \tag{1}$$

ha rango $n - d^*$ è un aperto non vuoto di V^* (in caso contrario si avrebbe $\dim V^* < d^*$ (vedi [15]).

Sia S la sottovarietà affine di V^* formata dai punti in cui il rango della (1) è minore di $n - d^*$, se $S \cap V^j$ avesse punti interni per qualche j si avrebbe $S \supset V_{x_0}$ contro l'ipotesi di minimalità di V^*.

Si conclude perciò che $(V^* - S) \cap V^j$ è un aperto non vuoto per ogni j, essendo i punti algebricamente regolari di V_{x_0} densi, si ha perciò che esiste un punto $x' \in (V^* - S) \cap V^1$ che è algebricamente regolare per V_{x_0}.

Per quanto provato nel punto *a*) si può allora concludere che esiste un polinomio P che è identicamente nullo su V^1 ma non su V^*. Si avrebbe dunque:

$$V^* \cap \{P = 0\} \supset V^*_{x_0},$$

$V^* \cap \{P = 0\}$ è una varietà affine diversa da V^* e questo contrasta con le minimalità di V^*.

Si conclude così che non si poteva supporre $\dim V^* > \dim V_{x_0}$ è la proposizione è dimostrata.

COROLLARIO 1. *Sia V un insieme algebrico dell'aperto U di K^n, allora esiste una famiglia numerabile di varietà affini $\{W_m\}_{m \in N}$ di K^n tali che:* $\dim W_m \leq \dim V$, $(\bigcup_{m \in N} W_m) \supset V$.

Se V è compatto la famiglia $\{W_m\}$ può essere scelta finita.

PROVA. Dalla proposizione 1 si deduce che per ogni $x \in V$ esiste un intorno U_x di x in V ed una varietà affine W_x di K^n tale che $W_x \supset U_x$, $\dim W_x \leq \dim V$. Dal fatto che V soddisfa al secondo assioma di numerabilità segue la tesi:

Sia V_x il germe di un insieme algebrico (analitico) su K, diremo che V_x è irriducibile se esso non è unione di due germi di insiemi algebrici (analitici) propri.

Diremo che V_x è riducibile se non è irriducibile.

PROPOSIZIONE 2. *Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$, π la restrizione ad U della proiezione di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}^p$ (prime p variabili) ed $U' = \pi(U)$. Sia A' un sottoinsieme di U' contenuto in un insieme analitico complesso proprio di U'.*

Sia X un sottoinsieme algebrico (su $\mathbb{C}$) di $U - \pi^{-1}(A)$ e supponiamo $\pi_{|X}$ sia un rivestimento finito di $U' - A$ (cioè $\pi_{|X}$ è propria e localmente bialgebrica) e che $\pi_{|\bar{X}}$ sia un'applicazione propria in U'. In queste ipotesi $\bar{X}$ è un insieme algebrico di U (su $\mathbb{C}$) di dimensione complessa p in ogni punto.

PROVA. È del tutto analoga a quella del teorema 4 di pag. 47 di [2].

COROLLARIO 2. *Sia V_x il germe di un insieme algebrico (su $\mathbb{C}$) di $\mathbb{C}^n$, se V_x è algebricamente irriducibile allora esso è analiticamente irriducibile.*

Se W_x è il germe di un insieme algebrico e $W_x = \bigcup_{i=1}^{q} W_x^i$ è la decomposizione di W_x nelle sue componenti irriducibili (analitiche) allora i W_x^j sono germi di insiemi algebrici e $W_x = \bigcup_{i=1}^{q} W_x^i$ è la decomposizione di W_x nelle sue componenti irriducibili (algebriche).

PROVA. Dal fatto che l'anello $\mathcal{O}_{V_x}$ sia noetheriano segue che W_x ammette una decomposizione in un numero finito di componenti irriducibili (algebricamente). Basterà quindi provare la prima parte del corollario.

Sia dunque V_x algebricamente irriducibile, $\dim V_x = p$, se V_x fosse analiticamente riducibile esisterebbero due germi V_x', V_x'' di insiemi analitici tali che $V_x' \cup V_x'' = V_x$, $V_x' \neq V_x$, $V_x'' \neq V_x$, V_x' è analiticamente irriducibile.

Sia V' un rappresentante di V_x' e V^* l'insieme dei punti (algebricamente) regolari di V'. Per quanto detto nell'osservazione III si potrebbe allora applicare la proposizione 2 e concludere che V_x' è il germe di un insieme algebrico. Ripetendo il ragionamento per le altre componenti analiticamente irriducibili di V_x si avrebbe una decomposizione di V_x in componenti algebriche contro l'ipotesi che V_x sia algebricamente irriducibile. Il corollario è così provato.

COROLLARIO 3. *Sia (V, O_V) uno spazio algebrico su $\mathbb{R}$, per ogni $x \in V$ il complessificato analitico $\widetilde{V}_x$ di V_x è isomorfo al complessificato algebrico $\widehat{V}_x$ di V_x.*

Se $V_x = \bigcup_{i=1}^{q} V_x^i$ è la decomposizione di V_x nelle componenti analiticamente irriducibili allora i V_x^i sono germi di insiemi algebrici (ovviamente algebricamente irriducibili).

PROVA. Supponiamo per comodità V_x sia rappresentato da un insieme algebrico V di $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Come già osservato si ha: $\widetilde{V}_x \subset \widehat{V}_x$; in [16] è provato che $\widetilde{V}_x = \bigcup_{i=1}^{q} \widetilde{V}_x^i$ ove $\widetilde{V}_x^i$ è il complessificato di V_x^i, $i = 1, \dots, q$. Ogni V_x^i è contenuto in una varietà reale affine W_i di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $p_i = \dim V_x^i$ (proposizione 1), W_i è contenuta in una varietà affine complessa $\widehat{W}_i$ tale che $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{W}_i = \dim_{\mathbb{R}} W_i = p_i$ (vedi [15] lemma 8) dunque $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{V}_x^i = p_i$. Una delle componenti analiticamente irriducibili di $\widehat{V}_x^i$ deve coincidere con $\widetilde{V}_x^i$ ma ogni componente analitica irriducibile di $\widehat{V}_x^i$ è anche il germe di un insieme algebrico complesso (corollario 2) dunque per la minimalità del complessificato si ha $\widehat{V}_x^i = \widetilde{V}_x^i$ ed il corollario è così dimostrato.

PROPOSIZIONE 3. *Sia V una varietà affine di K^n ($K = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$). allora esiste un numero finito di sottoinsiemi algebrici $\{V_i\}_{i=1,\dots,q}$ tali che:*

1) *ogni V^i è analiticamente irriducibile e si ha:*

$$V_i \not\subset \bigcup_{j\neq i} V_j, \quad i = 1, \dots, q$$

2) *sia W un sottospazio analitico* (chiuso) *di V_i tale che* $\dim W = \dim V_i$, *allora $V_i = W$.*

PROVA. Se $K = \mathbb{C}$ la proposizione è conseguenza del fatto che la riducibilità analitica e quella algebrica coincidono (corollario 2) e dall'esistenza di una decomposizione in componenti analiticamente irriducibili soddisfacenti 1) e 2) (vedi [2]). Sia ora $K = \mathbb{R}$. Per i risultati di [15] esiste una decomposizione: $V = \bigcup_{i=1}^{q'} V_i^{\#}$ di V in componenti analiticamente irriducibili (cioè le $V_i^{\#}$ non sono unione di due sottospazi analitici propri). Evidentemente si può chiedere che valga $V_i^{\#} \not\subset \bigcup_{j\neq i} V_j^{\#}$, $i = 1, \dots, q'$ ed allora la decomposizione data è unica a meno dell'ordine dei termini. Per il corollario 3 gli insiemi analitici $V_j^{\#}$ sono insiemi algebrici.

Basta quindi provare che se W è un sottospazio analitico di $V_i^{\#}$ della stessa dimensione di $V_i^{\#}$ allora $W = V_i^{\#}$, $i = 1, \dots, q'$.

Come provato in [15] $V_i^{\#}$ è unione di un numero finito di aperti $M_1, \dots, M_p$ isomorfi a varietà algebriche connesse di dimensione $d = \dim V_i$ e di un sottospazio analitico W_i avente dimensione inferiore a d.

Diremo contigue due componenti M_j, M_k se esiste un germe di insieme analitico irriducibile $(V_i^{\#})_x^1$ di $(V_i^{\#})_x$ tale che: ogni rappresentante di $(V_i^{\#})_x^1$ contiene un aperto di M_j ed uno di M_k.

Diremo M_j $\mathcal{R}$-equivalente ad M_r se esiste una catena $M_{j_1}, \dots, M_{j_s}$ tale che M_{j_m} sia contigua ad $M_{j_{m+1}}$ $m = 1, \dots, s-1$, $j_1 = j$, $j_s = r$. $\mathcal{R}$ è evidentemente una relazione di equivalenza ed ogni insieme del tipo $S = (\bigcup_{j\in I} M_j) \cup W_i$, ove I è una classe di $\mathcal{R}$-equivalenza, è un insieme analitico di $V_i^{\#}$. Per la analitica irriducibilità di $V_i^{\#}$ si ha dunque che tutte le M_i sono $\mathcal{R}$-equivalenti fra loro, d'altra parte per come risulta costruito $V_i^{\#}$ si ha che se $W \subset V_i^{\#}$, $\dim W = \dim V_i^{\#}$ allora $W = V_i^{\#}$ (infatti W deve contenere qualche M_j, ma allora le contiene tutte, d'altra parte W deve contenere anche W_i perchè sennò $V_i^{\#} = W \cup W_i$ sarebbe una decomposizione propria di $V_i^{\#}$ contro l'ipotesi di analitica irriducibilità di $V_i^{\#}$). La proposizione è così provata.

COROLLARIO 4. *Sia V un insieme analitico* (su K) *di K^n, V è un insieme algebrico se, e solo se, V è l'unione di una famiglia finita o numerabile di componenti analiticamente irriducibili di varietà affini*

PROVA. Sia $V = \bigcup_{n \in N} V_n$ con V_n componente irriducibile di una varietà affine.

Basta dimostrare che il germe V_x è algebrico per ogni $x \in V$; sia $V_x = \bigcup_{i=1}^{p_x} V_x^i$ la decomposizione di V_x nelle sue componenti irriducibili, ogni V_x^i deve essere indotta (eventualmente insieme a qualche altra componente irriducibile di V_x) da un V_n dunque, per i corollari 2 e 3, V_x^i, e perciò V_x, è algebrico.

Viceversa sia V algebrico, allora esiste una famiglia numerabile V_n' di varietà affini tali che: $\dim V_n' = \dim V_n' \cap V$, $\bigcup_{n \in N} V_n' \supset V$. (corollario 1).

Sia $V_n' = \bigcup_{j=1}^{q_n} V_n^j$ la decomposizione delle V_n' soddisfacente alle proprietà 1) e 2) della proposizione 3 e $\{V_n^{j_i}\}_{n \in N}$ le sottofamiglie di $\{V_n^j\}$ formate da quelle componenti tali che $\dim V_n^{j_i} \cap V = \dim V_n^{j_i}$.

Dalle definizioni segue che V è unione delle $V_n^{j_i}$ al variare di n e j_i ed il corollario è così provato.

COROLLARIO 5. *Sia V un insieme algebrico* (su K) *di K^n, allora esiste una famiglia finita o numerabile di sottospazi algebrici $\{V_n\}_{n \in N}$ tali che:*

1) $$V = \bigcup_{n \in N} V_n, \qquad V_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} V_j$$

2) *ogni V_n non contiene sottospazi analitici propri della stessa dimensione*

3) *ogni V_n è una componente irriducibile di una varietà affine della stessa dimensione.*

PROVA. La decomposizione del corollario 4 opportunamente raffinata prova l'asserto.

OSSERVAZIONE IV. Si potrebbe pensare che ogni insieme algebrico di $\mathbb{R}^n$ sia un C-insieme (3), a tale scopo diamo un controesempio.

---

(3) Ricordiamo che un insieme analitico V di $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, si dice un C-insieme se una delle seguenti equivalenti condizioni è soddisfatta:

a) V ammette equazioni globali

b) esiste un insieme analitico complesso $\tilde{V}$ in un aperto di $\mathbb{C}^n$ tale che $\tilde{V} \cap \mathbb{R}^n = V$ (vedi [3]).

Esattamente costruiremo una ipersuperficie affine V di $\mathbb{R}^n$ tale che :

1) la minima varietà affine di $\mathbb{C}^4$ che la contiene è normale

2) l'insieme dei punti singolari di V ha codimensione due

3) V si decompone in due componenti analiticamente irriducibili di dimensione 3 che non sono C-insiemi, (ma sono insiemi algebrici per il corollario 5).

Sia $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(x, y, z, w) = (z^2 - 4)(x^2 + y^2) - x^2 w^2 - w^2 = 0\}$ e $\widetilde{V}$ la varietà affine di $\mathbb{C}^4$ definita dall'equazione $\varphi(x, y, z, w) = 0$.

α) I punti singolari di $\widetilde{V}$ formano una sottovarietà affine di dimensione uno e quindi, per un teorema di Oka ([7]), $\widetilde{V}$ è uno spazio analitico normale.

PROVA. Le derivate parziali di φ hanno le espressioni :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x(z^2 - 4) - 2xw^2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y(z^2 - 4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = -2w(x^2 + 1) .$$

I punti singolari di $\widetilde{V}$ si trovano dunque risolvendo il sistema formato dalle quattro equazioni scritte sopra e da $\varphi(x, y, z, w) = 0$.

Le soluzioni sono date da uno dei seguenti sistemi :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \mp 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 = -1 \\ 4x + xw^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

dunque la dimensione del luogo dei punti singolari di $\widetilde{V}$ è uno e l'affermazione è provata.

β) Posto:

$$V_1 = \{(x, y, z, w) \mid (x, y, z, w) \in V,\ z \geq 2 \quad \text{oppure } x = y = w = 0\}$$

$$V_2 = \{(x, y, z, w) \mid (x, y, z, w) \in V,\ z \leq -2 \text{ oppure } x = y = w = 0\}$$

si ha: V si decompone nelle due componenti analiticamente irriducibili V_1, V_2 che non sono C-insiemi.

PROVA. La $\varphi = 0$ equivale a

$$(x^2 + y^2)(z^2 - 4) = x^2 w^2 + w^2$$

dunque se $z^2 - 4$ è negativo, cioè $|z| < 2$, gli unici punti reali che soddisfano la relazione $\varphi = 0$ sono del tipo $(0, 0, z, 0)$. Perciò V è formato dalle due componenti V_1, V_2 unite dalla retta di equazione $x = y = w = 0$.

In ogni punto P di V in cui $|z| \geq 2$ si ha: $\dim V_P = 3$ e quindi, per la normalità di $\tilde{V}$, $\tilde{V}_P$ è il complessificato di V_P (vedi [5]). Da quanto detto segue che V_1 e V_2 sono localmente e globalmente irriducibili.

$\tilde{V}$ è localmente e globalmente irriducibile quindi ogni insieme analitico complesso, di un aperto di $\mathbb{C}^4$ che contiene V_1 contiene tutto V e questo prova che V_1 e V_2 non sono C-insiemi

OSSERVAZIONE V. Non ogni varietà algebrica su $\mathbb{R}$ è immergibile in qualche spazio euclideo.

Si consideri infatti in $\mathbb{R}^2$ il sottogruppo $Z \times Z$ dei punti a coordinate intere. La struttura di spazio algebrico (su $\mathbb{R}$) di $\mathbb{R}^2$ induce una struttura di spazio algebrico sul quoziente $T = \mathbb{R}^2/_{Z \times Z}$.

Vogliamo provare che T non è isomorfo ad un sottospazio algebrico di $\mathbb{R}^n$. Infatti sia V_0 il germe di insieme algebrico indotto su T dal germe di insieme algebrico della retta di $\mathbb{R}^2$ di equazione $y - \sqrt{2}x = 0$.

Se T fosse sottospazio algebrico di $\mathbb{R}^n$ allora per la proposizione 1 esisterebbe un insieme algebrico W di T tale che $W \supset V_0$, $\dim W = 1$ e questo è impossibile.

OSSERVAZIONE VI. Le varietà algebriche compatte immerse in $\mathbb{R}^n$ hanno per funzioni algebriche globali le stesse funzioni assegnate da J. Nash in [13] (per dimostrare questo fatto bisogna usare un risultato (non banale) di M. Artin, vedi osservazione VII del § 1).

OSSERVAZIONE VII. Sia $\mathcal{O}$ il fascio delle funzioni algebriche su K^n ($K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$) allora $H^1(K^n, \mathcal{O}) \neq 0$ (anzi $H^1(K^n, \mathcal{O})$ ha dimensione infinita come K modulo).

Sia infatti $\mathcal{M}$ il fascio dei quozienti di $\mathcal{O}$ (il fascio delle funzioni « meromorfe algebriche »).

Si consideri la successione esatta

$$0 \to H^0(K^n, \mathcal{O}) \to H^0(K^n, \mathcal{M}) \xrightarrow{\eta} H^0(K^n, \mathcal{M}_{/\mathcal{O}}) \to H^1(K^n, \mathcal{O}) \to \dots$$

se $H^1(K^n, \mathcal{O})$ fosse nullo allora η sarebbe surgettiva, mostriamo che ciò non avviene.

Sia ad esempio $K^n = \mathbb{R}$, $\{x_m\}$ una successione divergente di punti di K^n e $\gamma \in H^0(K^n, \mathcal{M}_{/\mathcal{O}})$ l'elemento che consiste nell'assegnare in ogni x_m il polo $\dfrac{1}{x - x_m}$. È facile verificare che $\gamma \notin \operatorname{im} \eta$.

Osservazione VIII. Sia V un insieme algebrico di K^n ($K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$). Notiamo, come al solito, con $\mathcal{A}_V$, 0_V i fasci delle funzioni analitiche ed algebriche su V. Non è difficile, usando il fatto che $\mathcal{A}_{V_x}$ è piatto su $\mathcal{O}_{V_x}$ (vedi § 1), provare il seguente

Teorema. *Il fascio 0_V è coerente nel punto x di V (come $\mathcal{O}_V$ modulo) se e solo se $\mathcal{A}_V$ è coerente in x (come $\mathcal{A}_V$ modulo).*

Corollario. *$\mathcal{O}_{K^n}$ è un fascio coerente di $\mathcal{O}_{K^n}$ moduli.*

§. 4. Un teorema di approssimazione.

Teorema 1. *Sia V una varietà algebrica di $\mathbb{R}^n$, esiste allora un intorno U di V in $\mathbb{R}^n$, ed un'applicazione algebrica $\Phi : U \to V$ tale che $\Phi(x) = x$, $x \in V$.*

Prova. Consideriamo l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^n \times V \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2$$

e sia:

$T = \{\{x_j\} \times \{y_{j'}\} \in \mathbb{R}^n \times V \mid \varphi$ considerata come funzione del punto $\{x_j\} \in V$ ha in $\{x_j\} \times \{y_{j'}\}$ un punto critico $j, j' = 1, \dots, n\}$.

(cioè se $z_1, \dots, z_r$ sono delle coordinate locali di V, allora $P \in T$ se e solo se $\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i}\right]_P = 0$ $i = 1, \dots, r$. È immediato che la condizione data non dipende dalle coordinate scelte su V) (4).

---

(4) Intuitivamente se P' è abbastanza vicino a V si ha (come dimostreremo): $P' \times P'' \in T$ se e solo se P'' è il punto di V più vicino a P'.

Sia $P_0 \in V$, per semplicità supporremo che $P_0 = (0, \dots, 0)$ sia l'origine ed in un intorno di P_0 le funzioni $y_1, \dots, y_r$ diamo un sistema di coordinate locali su V.

Per il teorema delle funzioni implicite esistono delle funzioni algebriche $\psi_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, \psi_n(y_1, \dots, y_r)$ tali che in un intorno $U(P_0)$ di P_0 in $\mathbb{R}^n$ si abbia:

$$V \cap U(P_0) = \{\{y_1, \dots, y_n\} \mid y_{r+1} = \psi_{r+1}(y_1 \dots y_r), \dots, y_n = \psi_n(y_1, \dots, y_r)\}.$$

In un intorno $W(P_0 \times P_0)$ di $P_0 \times P_0$ in $\mathbb{R}^n \times V$ la φ ha dunque la forma:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} (y_i - x_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} (\psi_i(y_1, \dots, y_r) - x_i)^2. \tag{1}$$

Dunque un punto $P = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r, \psi_{r+1}, \dots, \psi_n)$ sta in T se e solo se soddisfa alle condizioni:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right]_P = (y_i - x_i) + \sum_{j=r+1}^{n} (\psi_j(y_1, \dots, y_r)) - x_j) \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} = 0, \qquad i = 1 \dots r. \tag{2}$$

Se dimostriamo che:

(3) la caratteristica della matrice $\left(\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \, \partial y_l}\right]_{P_0 \times P_0}\right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ l=1,\dots,r}}$ è eguale ad r,

allora per il teorema delle funzioni implicite, esisteranno delle funzioni algebriche $y_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, r$ tali che in un opportuno intorno $W(P_0 \times P_0)$ di $P_0 \times P_0$ in $\mathbb{R}^n \times V$ si abbia $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots \dots, y_r, \psi_{r+1}, \dots, \psi_n\} \in T$ se e solo se $y_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, r$ ed inoltre $g_i(P_0) = 0$. In questo caso dunque vicino a $P_0 \times P_0$ T è il grafico dell'applicazione algebrica $\Phi_{P_0}: \widehat{U}(P_0) \to V$:

$$\Phi_{P_0}: (x_1, \dots, x_n) \to (y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n) \dots y_r = \\ = g_r(x_1, \dots, x_n), \psi_{r+1}, \dots, \psi_n). \tag{4}$$

La (4) è definita intrinsecamente e quindi esiste una famiglia numerabile di applicazioni $\Phi_{P_i}: U(P_i) \to V$ che definiscono, per incollamento, un'applicazione algebrica $\Phi: U \to V$ su un intorno U di V e tale che $\Phi(P) = P$ se $P \in V$.

Resta dunque da dimostrare la (3).

Si ha dalla (2):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i\, \partial y_l} = \delta_{il} + \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \psi_j}{\partial y_l} + \sum_{j=r+1}^{n} (\psi_j - x_j)\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_j\, \partial y_l} \tag{5}$$

ove δ_{il} è il simbolo di Kronecker.

Nel punto $P_0 \times P_0$ la (5) diviene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i\, \partial y_l} = \delta_{il} + \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_l}\,. \tag{6}$$

Dunque si ha:

$$\left(\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i\, \partial y_l}\right]_{P_0\times P_0}\right)_{i,\, l=1\ldots r} = I + \sum_{j=r+1}^{n} A_j$$

ove I è la matrice identità $r \times r$ e le $A_j = \dfrac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\cdot\dfrac{\partial \psi_j}{\partial y_l}$ $i, l = 1 \ldots r$ $j = r+1, \ldots, n$ sono matrici quadrate $r \times r$.

Le matrici A_j sono semidefinite positive in $P_0 \times P_0$ infatti risulta:

$$\sum_{i,\, l=1}^{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_l}\, u_i\, u_l = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\, u_i\right)^2.$$

La matrice $\left(\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i\, \partial y_l}\right]_{P_0\times P_0}\right)_{i,\, l=1\ldots 2}$ è dunque definita positiva e quindi non degenere, il teorema è così provato.

COROLLARIO 1. *Sia V uno spazio algebrico di un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e W una varietà algebrica di $\mathbb{R}^m$, comunque si assegni un compatto K di U, un'applicazione continua $\varphi : V \to W$, ed $\varepsilon > 0$ esiste un'applicazione algebrica $\psi : U(K) \to W$ definita su un intorno $U(K)$ di K in V tale che:*

$$d(\varphi(x), \psi(x)) < \varepsilon, \quad x \in U(K),$$

ove $d(z, w)$ è la distanza euclidea in $\mathbb{R}^m$.

PROVA. Si usi il teorema di approssimazione di Weierstrass ed il teorema 1.

COROLLARIO 2. *Sia W un aperto a chiusura compatta di $\mathbb{R}^n$, W' un intorno di $\overline{W}$ e V una varietà algebrica di $\mathbb{R}^m$. Sia $\varphi : W' \to V$ una applicazione C^∞. Comunque si fissi un numero positivo ε ed un intero p esiste un'applicazione algebrica $\varphi_a : W \to V$ tale che, dette $\varphi^i = \pi_i \circ \varphi, \varphi^i_a = \pi_i \circ \varphi_a$ le*

funzioni ottenute componendo φ, φ_a con le proiezioni canoniche si abbia:

$$(1) \qquad \sup_{x \in W} |\varphi^i(x) - \varphi_a^i(x)| < \varepsilon, \sup_{x \in W} \left| \frac{\partial^\alpha (\varphi_a^i - \varphi^i)}{\partial^{\alpha_1} x_{i_1} \dots \partial^{\alpha_q} x_{i_q}} \right| < \varepsilon, \text{ per } \alpha \leq p.$$

PROVA. Sia $\Phi : U \to V$ un'applicazione algebrica di un intorno U di V in $\mathbb{R}^m$ su V tale che $\Phi_{|V} = id$.

Ad ogni applicazione $\psi : W \to U$ assoceremo l'applicazione $\psi_* = \Phi \circ \psi : W \to V$.

Sia $C(W, \mathbb{R}^m)$ l'iniseme delle applicazioni $g : \overline{W} \to \mathbb{R}^m$ che siano restrizione di un'applicazione C^∞ definita su un intorno di $\overline{W}$.

Su $C(W, \mathbb{R}^m)$ consideriamo la topologia che ha per sistema fondamentale di intorni del generico elemento gli insiemi del tipo:

$$U(g, \varepsilon, q) = \{g' \in C(W, \mathbb{R}^m) \,|\, \sup_{x \in \overline{W}} |g_i(x) - g_i'(x)| < \varepsilon, \sup_{x \in \overline{W}} \left| \frac{\partial^\alpha (g_i - g_i')}{\partial^{\alpha_1} x_{i_1} \dots \partial^{\alpha_q} x_{i_q}} \right| < \varepsilon\}$$

ove $g_i = \pi_i \circ g$, $g_i' = \pi_i \circ g'$ ed $\alpha \leq q$.

Sia $P(W, \mathbb{R}^m)$ il sottospazio di $C(W, \mathbb{R}^m)$ formato dalle applicazioni g tali che $\pi_i \circ g$ siano polinomi.

Il teorema di approssimazione di Weierstrass afferma che $\overline{P(W, \mathbb{R}^m)} = C(W, \mathbb{R}^m)$.

Sia B_1 un intorno di φ in $C(W, \mathbb{R}^m)$ tale che $\varphi' \in B_1 \Longleftrightarrow \varphi'(\overline{W}) \subset U$.

Per provare il corollario basterà ora far vedere che per ogni punto y di $\varphi(\overline{W})$ esiste un intorno D_y di y in V tale che per ogni $\delta > 0$ esiste un intorno B_δ di φ in B_1 per cui si abbia: $g \in B_\delta \Longrightarrow g_* = \Phi \circ g_{|\varphi^{-1}(D_y)}$ soddisfa alle condizioni analoghe alle (1) (con δ invece di ε).

Quest'ultimo fatto si prova facilmente osservando che in opportune coordinate locali Φ ha la forma

$$\Phi : (y_1, \dots, y_s, y_{s+1} \dots y_n) \to (y_1, \dots, y_s, 0, \dots, 0)).$$

COROLLARIO 3. *Sia X uno spazio algebrico compatto sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e V una varietà algebrica di $\mathbb{R}^m$. Sia $\varphi : X \to V$ un'applicazione continua, allora esiste un'applicazione algebrica $\varphi_a : X \to V$ che è omotopa a φ.*

Siano $\varphi_i : X \to V$, $i = 0, 1$ due applicazioni algebriche, se esiste una famiglia ψ_t di applicazioni continue di X in V tali che $\psi_0 = \varphi_0$, $\psi_1 = \varphi_1$ allora esiste una famiglia di applicazioni algebriche avente la stessa proprietà.

PROVA. È del tutto analoga a quella fatta nel caso analitico in [8].

COROLLARIO 4. *Sia* $F \xrightarrow{\pi} X$ *un fibrato analitico reale tale che* F, X *abbiamo struttura di varietà algebrica immergibile in qualche* $\mathbb{R}^n$. *Supponiamo inoltre* X *sia compatta e sia assegnata una metrica continua* $d : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ *su* F.

Sia γ *una sezione continua ed* $\varepsilon > 0$, *esiste allora una sezione algebrica* $\gamma_a : X \longrightarrow F$ *tale che* $d(\gamma(x), \gamma_a(x)) < \varepsilon$, $x \in X$.

PROVA. È del tutto analoga (tenendo del corollario 2) a quella fatta nel caso analitico in [9].

OSSERVAZIONE. I corollari 3 e 4 permettono di applicare le tecniche usate nel caso analitico (in [8] e [9]) per provare che la classificazione dei fibrati analitici reali si riduce alla classificazione topologica.

Nel caso algebrico però si ottengono (almeno ad un primo esame) ri-risultati molto più limitati, in particolare.

I) bisogna supporre lo spazio di base sia compatto ed immergibile

II) bisogna supporre lo spazio totale sia immergibile e senza singolarità

III) bisogna fare forti ipotesi sul gruppo strutturale.

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] M. ARTIN: *On solutions of analytic equations,* Inventiones math. Vol. 5 (1968) pp. 277-291.

[2] R. NARASIMHAN: *Introduction to the theory of analytic spaces,* Lecture notes in mathematics, Springer 1966.

[3] F. BRUHAT - H. WHITNEY: *Quelques proprieties fondamentales des ensembles analytique reel,* Comm. Mat. Helvetici 33 (1959) pp. 132-160.

[4] F. BRUHAT - H. CARTAN: *Sur les composantes irreductibles d'un sous ensemble analytique reel,* C. R. Acad. Sci. Paris 244 (1957) pp. 1123-1126.

[5] A. TOGNOLI: *Proprietà globali degli spazi analitici reali,* Annali di matematica LXXV (1967) pp. 143-218.

[6] H. CARTAN - Seminari 1960-61.

[7] S. S. ABHYANKAR: *Concepts of order and rank on a complex space and a condition for normality,* Math. Ann. 141 (1960) pp. 171-192.

[8] A. TOGNOLI: *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali,* Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa XXI (1967) pp. 709-744.

[9] A. TOGNOLI: *L'analogo del teorema delle matrici olomorfe invertibili nel caso analitico reale,* Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa Vol. XXII (1968) pp. 527-558.

[10] N. E. STEENROD, *Topology of fibre bundles,* Princeton Math. Series, Univ. Press 1951.

[11] B. MALGRANGE: *Ideals of differential functions,* Oxford Univ. Press 1966.

[12] V. VILLANI: *Sulle varie nozioni di dimensione per un insieme analitico,* Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa Vol. XVII (1963) pp. 141-173.

[13] J. NASH: *Real algebraic manifolds,* Annals of math. Vol. 56 (1952) pp. 405-421.

[14] B. MALGRANGE: *Analytich spaces,* L'enseignement mathematique Monographie N. 17.

[15] H. WHITNEY: *Elementary structure of real algebraic varieties,* Annals of math. Vol. 66 (1957)) pp. 545-556.

[16] H. CARTAN: *Varieties analytiques reelles et varieties analytiques complexes,* Bull. soc. math. France 85 (1957) pp. 77-99.