ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VALENTIN POÉNARU

Quelques remarques sur les diagrammes de Heegard

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 1 (1970), p. 37-52

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_1_37_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUELQUES REMARQUES SUR LES DIAGRAMMES DE HEEGARD

par VALENTIN POÉNARU (*)

1. Introduction.

Le présent travail est un supplément à la Conférence (mise à jour) de l'Auteur, au Colloque de Géométrie de Rome, mai 1968. Le texte (mis à jour) de cette conférence, va paraître sous le titre « Sur les variétés différentiables de basses dimensions », dans le volume dédié au travaux du Colloque (voire [5]). On y trouvera un THEOREME DE STRUCTURE (sur les sphères d'homotopie de dimension 3).

On va donner içi un autre énoncé de ce théorème (voir le paragraphe 3 du présent travail).

On y déduira une certaine propriété relative aux diagrammes de Heegard des sphères d'homotopie, qu'on va indiquer içi brièvement (voir les paragraphes 2 et 3 pour plus de détails).

Je rappelle qu'un diagramme de Heegard de M_3 est une paire (M_3, T_2^p) où T_3^p et M_3 — int T_3^p sont difféomorphes à $(S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$ (p-fois). On prouve sans peine, par des procédés « classiques » que (M_3, T_3^p) est un diagramme de Heegard d'une sphères d'homotopie M_3, si et seulement si elle a la propriété suivante:

On considère un « bouquet » (« wedge ») de p cercles (c'est à dire p cercles avec exactement un point en commun):

$$\Sigma^p := S_1^1 \vee \dots \vee S_1^p \subset \operatorname{int} T_3^p$$

« differentiablement » plongé tel que T_3^p soit un voisinage régulier (dans

---

Pervenuto alla Redazione il 27 Giugno 1969.

(*) Ce travail a été effectué pendant que l'auteur était invité par le Consiglio Nazionale delle Ricerche à la Scuola Normale Superiore (Pisa).

le sens de J. H. C. Whitehead) de T_3^p. Alors, chacun des cercles S_1^i, est homotope (dans T_3^p) à un lacet $l^i : S_1 \longrightarrow \partial T_3^p$ qui est homotope à 0 dans $M_3 - \operatorname{int} T_3^p$.

On va donner une version *isotopique* (donc plus forte) de ce fait *homotopique.* On montre qu'il existe, pour une sphère d'homotopie M_3, un diagramme de Heegard : (M_3, T_3^p) et un $\Sigma^p \subset \operatorname{int} T_3^p$, tel que T_3^p soit voisinage régulier de Σ^p, avec la propriété ; chaque $S_1^i \subset \Sigma^p = S_1^1 \vee \ldots \vee S_1^p$ est *isotope* (dans T_3^p) à un *plongement* $l^i : S_1 \longrightarrow \partial T_3^p$ qui est homotope à 0 (donc *isotope à* 0, d'après le Lemme de Dehn [3]) dans $M_3 - \operatorname{int} T_3^p$.

On a ajouté une remarque finale sur les « diagramme de Heegard en grandes dimensions », qui gardent les mêmes propriétés algébriques (c'est-à-dire un « homomorphisme de Stallings », comme au paragraphe 2, ci-dessus) que les diagrammes de Heegard en dimension 3, et leurs applications (possibles) en « basses » dimensions.

2. Rappels sur les diagrammes de Heegard ; résultats homotopiques.

Soit M_3 une variété differentiable de dimension 3, connexe et fermée (c'est-à-dire compacte et sans bord).

DÉFINITION : *Un diagramme de Heegard* (*de longueur* p) de M_3 est par définition, une paire (M_3, T_3) où T_3 est une sousvariété différentiable, connexe, compacte, à bord, de dimension 3, de M_3, telle qu'on ait les difféomorphismes suivants :

$$T_3 = p \# (S_1 \times D_2)$$

$$M_3 - \operatorname{int} T_3 = p \# (S_1 \times D_2).$$

($\#$ désigne de « somme connexe »).

On rappelle le théorème classique :

THÉORÈME 1 : « *Toute variété de dimension* 3, *connexe fermée et orientable admet un diagramme de Heegard* »

DÉMONSTRATION : (différentiable). Soit M_3 la variété respective. Il existe sur M_3 une function de Morse f. On peut toujours supposer que f a : 1 Point critique d'indice 0 (le minimum de f), p points critiques d'indice 1, q points critiques d'indice 2 et 1 point critique d'indice 3 (le maximum de f). On peut supposer aussi que si $x_1, x_2 = M_3$ sont deux points critiques, d'indi-

ces $\lambda(x_1)$, $\lambda(x_2)$, alors :

$$(f(x_2) - f(x_1))(\lambda(x_2) - \lambda(x_1)) \geq 0$$

(i. e. la fonction f est « nice »). Ceci nous permet de considérer un niveau non singulier $(f = c)$ qui sépare les points critiques d'indices 0 et 1 de ceux d'indices 2 et 3. Les variétés $(f \leq c)$ et $(f \geq c)$ sont des variétés orientables obtenues en ajoutant à D_3, p (respectivement q) anses d'indice 1. On a donc des difféomorphismes.

$$(f \leq c) = p \# (S_1 \times D_2)$$

$$(f \leq c) = q \# (S_1 \times D_2).$$

D'autre part, vu que $\partial(f \leq c) = \partial(f \geq c) = (f = c)$ il résulte que $p = q$. Donc $(M_3, (f \leq c))$ est un diagramme de Heegard de longueur p de M_3.

DÉFINITION : Soit $G_p = \pi_1(\partial(p \# (S_1 \times D_2)))$ et F_p le groupe libre à p générateurs. On considère les inclusions naturelles :

$$i_1 : \quad \partial T_3 \longrightarrow T_3$$

$$i_2 : \quad \partial T_3 \longrightarrow M_3 - \operatorname{int} T_3 .$$

Par définition, l'*homomorphisme de Stallings* associé au diagramme de Heegard de longueur $p : (M_3, T_3)$ est l'unique homomorphisme

$$\mu : \pi_2(\partial T_3) \longrightarrow \pi_1(T_3) \times \pi_1(M_3 - \operatorname{int} T_3)$$

($\times$ désigne le « produit direct ») qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(T_3) & \\
\pi_1(\partial T_3) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & & \pi_1(T_3) \times \pi_1(M_3 - \operatorname{int} T_3) \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & \pi_1(M_3 - \operatorname{int} T_3) &
\end{tikzcd}$$

μ est donc un homomorphisme :

$$G_p \xrightarrow{\mu} F_p \times F_p .$$

LEMME 1 : « *μ est surjectif si et seulement si M_3 est simplement connexe* ». (voir aussi [6]).

DÉMONSTRATION : Remarquons d'abord que sans aucune hypothèse supplémentaire sur M_3, les flèches $(i_1)_*$ et $(i_2)_*$ sont de toute façon surjectives, puisque la suite suivante est exacte :

$$\pi_1 (\partial (p \# (S_1 \times D_2)) \xrightarrow{i_*} \pi_1 (p \# (S_1 \times D_2)) \longrightarrow 0$$

(où $i : \partial (p \# (S_1 \times D_2)) \subset p \# (S_1 \times D_2)$ est l'inclusion naturelle).

On rappelle la notion de « somme amalgamée » (qui est le dual du « produit cartésien fibré »).

On part de 3 groupes G_1, G_2 et K et deux homomorphismes α et β :

$$\begin{tikzcd} & G_1 \\ K \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & G_2 \end{tikzcd}$$

La « somme amalgamée de G_1 et G_2, suivant (K, α, β) » est un groupe $G_1 \underset{K}{*} G_2$ donné avec un diagramme commutatif d'homomorphismes :

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\ K \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"'] & & G_1 \underset{K}{*} G_2 \\ & G_2 \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

représentant la solution du « problème universel » suivant :

Chaque fois qu'un diagramme commutatif (dans la catégorie des groupes) est donné sous la forme suivante

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dl, "f_1"'] & \\
Z & & K \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll] \arrow[dl, "\beta"] \\
 & G_2 \arrow[ul, "f_2"] &
\end{tikzcd}$$

il existe un homomorphisme *unique* :

$$G_1 \underset{K}{*} G_2 \xrightarrow{\nu} Z$$

qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "j_1"] & \\
Z \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "f_2"'] & K \arrow[u, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[r, "\gamma"] & G_1 \underset{K}{*} G_2 \arrow[dl, "j_2"] \\
 & G_2 & \arrow[uuull, bend left, "\nu"]
\end{tikzcd}$$

On montre que $G_1 \underset{K}{*} G_2$, j_1, j_2, γ existent et sont uniques à isomorphisme pres.

En particulier, si G_1, G_2, K sont à nombre fini de générateurs : $(x_1, \dots, x_n)$ (pour G_1), $(y_1, \dots, y_m)$ (pour G_2) et $(z_1, \dots, z_q)$ (pour K) et G_1 (G_2) sont en plus de « présentation finie » (donc peuvent être définis pour un nombre fini de relation : $R_1, \dots, R_a$ (en x, pour G_1) et $Q_1, \dots, Q_b$ (en y pour G_2), alors $G_1 \underset{K}{*} G_2$ admet le présentation finie suivante : Les générateurs sont $j_1(x_1) \dots j_1(x_n)$, $j_2(y_1) \dots j_2(y_m)$ et ses relations $R_1(j_1(x)), \dots, R_a(j_1(x))$, $Q_1(j_2(y)), \dots, Q_b(j_2(y))$, et en plus les relations : $j_1(\alpha(z_1)) = j_2(\beta(z_1)), \dots$ $\dots, j_1(\alpha(z_q)) = j_2(\beta(z_q))$.

Ceci vaut aussi si n, m, q, a ou b sont ∞.

Donc $G_1 \underset{K}{*} G_2$ est engendré par Image $j_1 \cup$ Image j_2.

En particulier, si K est réduit à l'élement unité 1 :

$$G_1 \underset{1}{*} G_2 = G_1 * G_2$$

est le « produit libre » habituel.

Si on revient à notre diagramme de Heegard, le théorème de Van Kampen nous dit qu'il existe un isomorphisme :

$$\pi_1(M_3) = \pi_1(T_3) \underset{\pi_1(\partial T_3)}{*} \pi_1(M_3 - \operatorname{int} T_3).$$

tel que dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(T_3) \arrow[dr, "j_1"] & \\
\pi_1(\partial T_3) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & & \pi_1(T_3) \underset{\pi_1(\partial T_3)}{*} \pi_1(M_3\text{-int } T_3) \\
 & \pi_1(M_3\text{-int } T_3) \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

les homomorphismes j_1, j_2, γ sont les homomorphismes de groupes fondamentaux, induits par les inclusions : $T_3 \subset M_3$, $M_3 - \operatorname{int} T_3 \subset M_3$, $\partial T_3 \subset M_3$.

La remarque faite an début de la démonstration nous dit que la suite suivante est exacte :

$$\pi_1(\partial T_3) \xrightarrow{\gamma} \pi_1(M_3) \longrightarrow 0.$$

Maintenant, si l'homomorphisme de Stallings :

$$\pi_1(\partial T_3) \xrightarrow{\mu} \pi_1(T_3) \times \pi_1(M_3 - \operatorname{int} T_3)$$

est surjectif, celà veut dire que pour chaque élément

$$\eta \in \pi_1(T_3) \quad (\eta \in \pi_1(M_3 - \operatorname{int} T_3)) \qquad \text{il existe un } \xi \in \pi_1(\partial T_3)$$

tel que :

$$(i_1)_*(\xi) = \eta, \quad (i_2)_*(\xi) = 1 \in \pi_1(M_3 - \operatorname{int} T_3)$$

(ou : $(i_1)_*(\xi) = 1 \in \pi_1(T_3)$, $(i_2)_*(\xi) = \eta$).

Ceci implique que γ est nul, donc $\pi_1(M_3) = 1$.

Réciproquement, supposons que $\pi_1(M_3) = 1$.

On va montrer que μ est surjectif.

Il suffit de montrer que pour chaque $\eta \in \pi_1(T_3)$ il existe un $\xi \in \pi_1(\partial T_3)$ tel que :

$$(i_1)_*(\xi) = \eta, \qquad (i_2)_*(\xi) = 1.$$

On peut supposer que η est représenté par un plongement differentiable $g = S_1 \longrightarrow \operatorname{int} T_3$.

Puisque $\pi_1(M_3) = 1$ il existe une application (différentiable) $G\colon D_2 \longrightarrow M_3$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[d, "g"'] & \subset & D_2 \arrow[d, "G"] \\ \operatorname{int} T_3 & \subset & M_3 \end{tikzcd}$$

Sans perdre la généralité, on peut supposer que :

1) G est une immersion (différentiable)

2) G est transversable à ∂T_3.

Ceci nous permet de considérer la *sousvariété* $G^{-1}(T_3)$ de D_2, dont le bord contient $S_1 = \partial D_2$.

Si $G^{-1}(T_3) = S_1 \times I$ (avec $S_1 \times O = S_1$) on a fini, puisqu'on peut prendre $[G(S_1 \times 1) = \xi \in \pi_1(\partial T_3)$ ([...] signifie la classe d'homotopie de ...).

En général, pour un sousensemble $X \subset D_2$ qui contient $S_1 = \partial D_2$, on définit :

$$\varrho(X) = \operatorname{rang}_{Z_2}(H_0(X \bmod S_1 ; Z_2)) + \operatorname{rang}_{Z_2} H_1(X, Z_2)$$

$G^{-1}(T_3)$ est $S_1 \times I$ si et seulement si $\varrho(G^{-1}(T_3)) = 1$. L'idée de la démonstration est de faire de la chirurgie sur $G^{-1}(T_3)$ de telle façon que ϱ devienne 1 (et de changer, d'une façon correspondante G, sans tendre à g).

On commence par considérer, dans $\operatorname{int} D_2$, des arcs differentiablement plongés, deux-à-deux disjoints :

$$A_1, \dots, A_n, \quad B_1, \dots, B_m$$

tels que :

1) $\qquad A_i \cap G^{-1}(\partial T_3) = \partial A_i, \quad B_j \cap G^{-1}(\partial T_3) = \partial B_j,$

et A_i, B_j rencontrent $G^{-1}(\partial T_3)$ transversalement

2) $$A_i \subset G^{-1}(T_3), \quad B_j \subset G^{-1}(M_3 - \operatorname{int} T_3).$$

3) $$\varrho(G^{-1}(T_3) + B_1 + B_2 + \dots + B_m - A_1 - \dots - A_n) = 1$$

(voire figure 1).

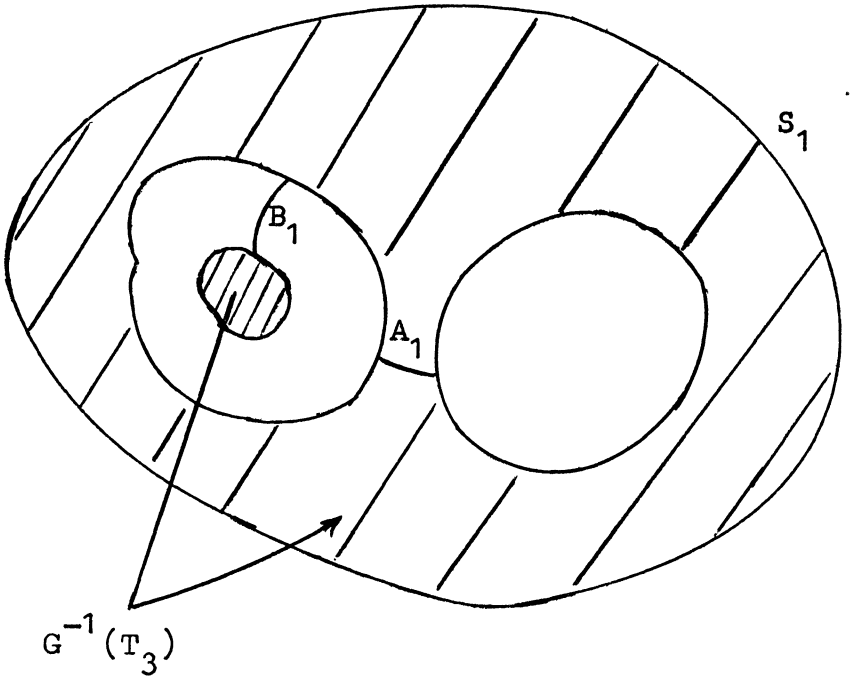

fig. 1

La suite exacte d'homotopie :

$$\pi_1(\partial(p \# (S_1 \times D_2)) \longrightarrow \pi_1(p \# (S_1 \times D_2)) \longrightarrow \pi_1(p \# (S_1 \times D_2),$$

$$\partial(p \# (S_1 \times D_2)) \longrightarrow \pi_0(\partial(p \# (S_1 \times D_2)) = 1$$

dont la première flèche est surjective, nous dit que

$$\pi_1(p \# (S_1 \times D_2), \quad \partial(p \# (S_1 \times D_2)) = 1.$$

En particulier, il existe des applications différentiables :

$$f_i, g_i \colon I \longrightarrow \partial T_3 \qquad (i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m),$$

$$F_i \colon D_2 \longrightarrow T_3, \quad G_j \colon D_2 \longrightarrow M_3 - \operatorname{int} T_3$$

telles que :

4) $$f_i(\partial I) = G(\partial A_i), \quad g_j(\partial I) = G(\partial B_j)$$

5) $$F_i(\partial D_2) = G(A_i) + f_i(I)$$

$$G_j(\partial D_2) = G(B_j) + g_j(I).$$

On remarque que $G^{-1}(\partial T_3)$ est formé de exactement $\varrho(G^{-1}(T_3))$ composantes connexes, chacune difféomorphe à S_1 et que $n + m = \varrho(G^{-1}(\partial T_3)) - 1$.

Les $\varrho(G^{-1}(T_3))$ lacets differentiables de $G(G^{-1}(\partial T_3))$ avec les $\varrho(G^{-1}(T_3))-1$ chemins differentiables $f_i(I)$, $g_j(I)$ qui les unissent, definissent sur ∂T_3 un lacet unique z.

Je dis que z est homotope à $g(S_1)$ dans T_3 (une homotopie est obtenue en ajoutant à $G(G^{-1}(T_3))$, deux fois chaque disque singulier $F_i(D_2)$) et à 0 dans $M_3 - \operatorname{int} T_3$ (un disque singulier qui borde z dans $M_3 - \operatorname{int} T_3$ est obtenu en ajoutant à $G(G^{-1}(M_3 - \operatorname{int} T_3))$ chaque $G_j(D_2)$, deux fois). On peut donc prendre $[z] = \xi \in \pi_1(\partial T_3)$ ce qui résout notre problème.

Du lemme précédent, on deduit tout de suite le :

THÉORÈME 1. (Le THÉORÈME HOMOTOPIQUE sur les diagrammes de Heegard des sphères d'homotopie). *Soit* (M_3, T_3) *un diagramme de Heegard de longueur* p. *On identifie* T_3 *avec* $(S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$ (p fois) *et on considère les* p *circles* $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p \subset T_3$ *obtenus on considérant dans chaque facteur* $S_1 \times D_2$ *le circle* $S_1 \times 0_2$ ($0_2 =$ centre du disque D_2).

M_3 *est une sphère d'homotopie, si et seulement si la condition suivante est satisfaite : Il existe* p *lacets :* $l_i : S_1 \longrightarrow \partial T_3$ $(i = 1, \dots, p)$ *tels que* $l_i(S_1)$ *soit homotope à* Σ_i *dans* T_3 *et* $l_i(S_1)$ *soit homotope à* 0 *dans* $M_3 - \operatorname{int} T_3$.

3. Résultats « isotopiques » sur les diagrammes de Heegard des spheres d'homotopie :

Soient X, Y deux variétés differentiables et $f_0, f_1 \subset Pl^\infty(X, Y) =$ espace des plongements differentiables de X dans Y. f_0 et f_1 sont dits *isotopes* s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & Y \times I \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

où $F \in Pl^{\infty}(X \times I, Y \times I)$ et $F(i) = f_i$ $(i = 0, 1)$. Si *en plus* l'application composée :

$$X \times I \xrightarrow{F} Y \times I \xrightarrow{\pi} Y$$

est dans $Pl^{\infty}(X \times I, Y)$, on dit que f_0 et f_1 sont *fortement isotopes.* $F \circ \pi \in Pl^{\infty}(X \times I, Y)$ s'appelle une *isotopie forte* (F s'appelle une *isotopie,* tout court).

Par définition $f \in Pl^{\infty}(S_k, X)$ ($\dim X > \dim S_k$) est dite *fortement isotope* à 0 s'il existe un $F \in Pl^{\infty}(D_{k+1}, X)$ tel que $F \mid \partial D_{k+1} = f$. C'est une conséquence immédiate des théorème de fibration pour les espaces différentiables, que si $f_0, f_1 \in Pl^{\infty}(S_k, X)$ sont isotopes, et f_1 est fortement isotope à 0, alors f_0 est aussi fortement isotope à 0.

On peut donner le théorème suivant qui est en quelque sorte une contrepartie *isotopique* du théorème *homotopique* ci-dessus.

THÉORÈME 2 : (le THÉORÈME ISOTOPIQUE pour les diagrammes de Heegard des sphères d'homotopie).

« *Soit M_3 une sphère d'homotopie. Il existe un diagramme de Heegard (M_3, T_3) et un diffeomorphisme $h : T \longrightarrow (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$* ($p$ fois), *ayant les propriétés suivantes* :

Si $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p \subset (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$ (p fois) *désignent les p cercles obtenues en prenant dans chaque $(S_1 \times D_2)$ la sousvariété $S_1 \times 0_2$, il existe p cercles différentiables $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ différentiablements* plongés *dans ∂T_3 tels que*:

a) $h^{-1}(\Sigma_i)$ et σ_i sont FORTEMENT ISOTOPES *dans T_3.*

b) Chaque σ_i est FORTEMENT ISOTOPES *à 0 dans $M_3 - \operatorname{int} T_3$.*

REMARQUES : 1⁰. D'après le lemme de Dehn, [3] puisque σ_i est plongé dans $\partial T_3 = \partial (M_3 - \operatorname{int} T_3)$ c'est la même chose de dire qu'il est homotope à 0, où (fortement) isotope à 0 (dans $M_3 - \operatorname{int} T_3$).

2⁰. Le théorème 2) contient plusieurs restrictions : on n'affirme ni que la propriété énoncée soit vraie pour *tous les diagrammes de Heegard* (M_3, T_3) d'une sphère d'homotopie M_3, ni pour *tous* les difféomorphismes $h : T_3 \longrightarrow (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)$.

Si c'était vrai pour tous les diagrammes (mais pas nécessairement pour tous les h), on pourrait d'ailleurs y déduire que $M_3 = S_3$.

En effet, il suffit de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1 : « Si M_3 admet un diagramme de Heegard de longueur p : (M_3, T_3) avec les propriétés de l'énoncé du théorème 2, alors M_3 admet aussi un diagramme de Heegard de longueur $(p - 1)$ ».

La proposition 1 va être prouvée à partir de plusieures lemmes :

LEMME 2 (Papakyriakopoulos) : « Soit N_3 une variété de dimension 3, pas nécéssairement compacte, avec un bord $\partial N_3 \neq \emptyset$. ($\partial N_3$ n'est ni nécéssairement compact, ni nécéssairement avec $\partial\partial N_3$ où $\partial\partial\partial N_3$ nuls). Si l'homomorphisme :

$$\pi_1(\partial N_3) \longrightarrow \pi_1(N_3)$$

possède un noyau différent de 1, il existe un disque différentiablement plongé :

$$\varphi : (D_2, \partial D_2) \longrightarrow (N_3, \partial N_3)$$

tel que $[\varphi \mid \partial D_2] \in \pi_1(\partial N_3)$ soit différent de $1 \in \pi_1(\partial N_3)$ ».

Ceci est une conséquence immédiate des « loop theorèm » [2] et du lemme de Dehn [3].

LEMME 3 : « Soit N_3 une variété de dimension 3, dont le revêtement universel N_3 puisse être plongé (différentiablement) dans S_3.

Soit M_3 une variété à bord, compacte, connexe, de bord connexe, telle que M_3 soit sousvariété (différentiable) de N_3, que $\pi_1(M_3)$ soit libre à p générateurs, F_p, et que $\partial M_3 = (S_1 \times S_1) \# \ldots \# (S_1 \times S_1)$ (p fois) (le *même* p que pour F_p). Alors :

$$M_2 = D_3 \# (p \# (S_1 \times D_2)) \text{ ».}$$

Démonstration : Si $\pi_1(M_3) = 0$ le lemme est trivial puisqu'on peut relever le plongement $M_3 \subset N_3$ dans un plongement $M_3 \subset \widetilde{N}_3 \subset S_3$ et on sait que toute sousvariété compacte, connexe et simplement connexe de S_3 est D_3. Si $p > 0$, on remarque que le noyan de $\pi_1(\partial M_3) \longrightarrow \pi_1(M_3)$ est non-trivial puisque le dernier groupe est libre et le premier ne l'est pas. D'après lemme 2, il existe un plongement différentiable :

$$\varphi : (D_2, \partial D_2) \longrightarrow (M_3, \partial M_3) \; (\varphi(\text{int } D_2) \subset \text{int } M_3)$$

tel que $[\varphi \mid \partial D_2] \subset \pi_1(\partial M_3)$ soit non trivial.

Il *y* a deux cas :

a) Ou bien $\varphi(D_2)$ ne sépare pas M_3. Alors en coupant M_3 suivant $\varphi(D_2)$ on obtient une variété M_3^1 qui est connexe, telle que ∂M_3^1 soit $(S_1 \times S_1) \# \ldots \# (S_1 \times S_1)$ $(p-1)$ fois, et telle que :

$\pi_1(M_3^1) * Z = F_p =$ groupe libre à p générateurs. (içi $Z = F_1 =$ le groupe des entiers).

D'apres le théorème de Groushko [1], $\pi_1(M_3^1) = F_{p-1}$.

b) ou bien $\varphi(D_2)$ sépare M_3 en $M_3 = M_3^{11} \# M_3^{12}$. Toujours d'apres le théorème de Groushko :

$$\pi_1(M_3^{11}) = F_\alpha, \; \pi_1(M_3^{12}) = F_\beta \text{ où } \alpha + \beta = p, \alpha \neq 0 \neq \beta.$$

On a $\partial M_3^{11} = \alpha' \# (S_1 \times S_1)$, $\partial M_3^{12} = \beta' \# (S_1 \times S_1)$, $\alpha' + \beta' = p$.

Je dis que $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$. En effet, autrement $\alpha' > \alpha$ (ou $\beta' > \beta$). En appliquant le même construction que ci-dessus à M_3^{11} (ou à M_3^{11}, suivant le cas), après un nombre fini de pas on trouverait une variété simplement connexe à bord non simplement connexe, ce qui est impossible.

Donc, dans chaque cas, $M_3^1, M_3^{11}, M_3^{12}$, qui sont clairement des sousvariétés différentiables de N_3, satisfon aux mêmes hypothèses que M_3 mais avec des p plus petits. Par induction on se ramène au cas $p = 0$, traité dejà.

On va considérer maintenant $T_2^p = p \# (S_1 \times D_2)$ et le plongement « canonique ».

$$i : T_3^p = p \# (S_1 \times D_2) \subset p \# (S_1 \times S_2) = 2T_3^p$$

obtenu en « doublant » T_3^p (et recollant les deux examplaires suivant leurs bords), ou bien en « multipliant » $D_2 \subset S_2 = 2D_2$ par S_1 et par $p \#$. On remarque que $i_* : \pi_1 (T_3^p) \longrightarrow \pi_1 (2\, T_3^p)$ est un *isomorphisme.*

LEMME 4 : On considère dans ∂T_3^p, $q \leq p$ cercles $\sigma_1^1, \dots, \sigma_1^q \subset \partial T_3^p$ différentiablement plongés, 2-à-2 disjoints.Les deux affirmations suivantes sont equivalentes :

a) il existent q plongements différentiables 2-à-2 disjoints : $\varphi_i : (D_2, \partial D_2) \longrightarrow T_3^p (\varphi_i(\text{int } D_2) \subset \text{int } T_3^p)$ tels que $\varphi_i(\partial D_2) \cap \sigma_1^j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\varphi_i(\partial D_2)$ rencontre σ_1^i exactement en un point, transversalement.

b) Il existent q plongements différentiable $\psi_i : S_2 \longrightarrow 2T_3^p$, 2-à-2 disjoints, tels que $\psi_i(S_2) \cap \sigma_1^j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\psi_i(S_2)$ rencontre σ_1^i exactement en un point, transversalement.

DÉMONSTRATION : Clairement *a*) $\Longrightarrow$ *b*). Pour montrer que *b*) $\Longrightarrow$ *a*) on raisonne comme suit :
On peut supposer que les ψ_i coupent $\partial T_3^p \subset 2T_3^p$ transversalement. En particulier on considère dans chaque $\psi_i(S_2)$ la composante connexe de $\psi_i(S_2) \cap \cap \partial T_3^p$, appelons là γ_i qui contient $\psi_i(S_2) \cap \sigma_1^i$. $\gamma_i \subset \partial T_3^p$ sont des cercles différentiablement plongés, 2-à-2 disjoints de ∂T_3^p. Dans $\pi_1 (2T_3^p)$ (donc dans $\pi_1 (T_3^p)$!) les $[\psi^i]$ sont nuls.

D'après le lemme de Dehn [3] il existent donc des plongements :

$$\Phi_i (D_2, \text{int } D_2) \longrightarrow (T_3^p, \text{ int } T_3^p)$$

tels que $\Phi_i(\partial D_2) = \gamma_i$. Si les $\Phi_i(D_2)$ étaient deux-à-deux disjoints tout serait fini. Supposons, par induction que $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ sont dejà 2-à-2 disjoints. On

va modifier Φ_{r+1} de façon à le rendre disjoint des $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, sans toucher à son bord. On peut supposer qu'il coupe les $\Phi_i (i \leq r)$ transversalement, et parmi les composantes connexes de $\bigcup_{i \leq r} \Phi_i \cap \Phi_{r+1}$ choisir un cercle $C \subset \Phi_{i_0} \cap \Phi_{r+1}$ qui soit minimal dans Φ_{i_0} (sans un autre cerche dans son intérieur). On enlève de Φ_{r+1} l'intérieur de C (dans Φ_{r+1}) et on le remplance par l'intérieur de C dans Φ_{i_0}. En perturbant un peu le nouveau Φ_{r+1} (appelons le Φ'_{r+1}), ainsi obtenu, on peut le rendre transversal aux $\Phi_i (i \leq r)$ et tel que le nombre des composantes connexes de $\bigcap_{i \leq r} \Phi_i \cap \Phi_{r+1}$ soit strictement plus petit que celui de $\bigcup_{i \leq r} \Phi_i \cap \Phi_{r+1}$, e.a.d.s.

Après tous ces lemmes, on peut démontrer notre proposition 1 :
On part donc d'un diagramme de Heegard (M_3, T_3), de longueur p, qui a les propriétés de l'énoncé du Théorème 2. On considére la sousvariété $\sigma_1 \subset \partial T_3$ et le disque différentiablement plongé :
$\psi_2 : (D_2, \text{ int } D_2) \longrightarrow (M_3 - \text{int } T_3, M_3 - T_3)$, $\psi_2(\partial D_2) = \sigma_1$, qui existe, d'après l'énoncé du théorème 2.

On peut utiliser ψ_2 pour ajouter une anse d'indice 2 à T_3, dans M_3. (on considère donc un plongement $\psi_2 : D_2 \times I \longrightarrow M_3 - \text{int } T_3$, tel que $\psi_2 \mid D_2 \times 0 = \psi_2$ et que $\psi_2^{-1}(\partial T_3) = \partial D_2 \times I$. Je dis que $(M_3, T_3 + (\psi_2) = T_3 \cup \psi_2(D_2 \times I))$ est un diagramme de Heegard de longueur $(p - 1)$.

D'après le lemme 4, on a :

$$T_3 + (\psi_2) = (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2) \ ((p - 1) \text{ fois})$$

(en effet σ_1 et $S_1 \times O_2 \subset$ le premier $(S_1 \times D_2)$ de $p \# (S_1 \times D_2) = T_3)$ sont isotopes dans $2T_3$, donc σ_1 satisfait à *b*) du lemme 4, ce qui implique que (ψ_2) « tue » une anse d'indice 1 de T_3).

D'après le lemme 3 on a :

$$M_3 - \text{ int } (T_3 + (\psi_2)) = (p - 1) \# (S_1 \times D_2).$$

En effet il suffit, (pour pouvoir appliques le lemme 3) de montrer que σ_1 ne sépare pas ∂T_3 (donc que $[\sigma_1] \neq 0 \subset H_1(\partial T_3, Z)$). Ceci est évident puisque dans l'homomorphisme d'inclusion $H_1(\partial T_3) \longrightarrow H_1(T_3)$, l'image de $[\sigma_1]$ est $[S_1 \times O_2] \neq 0 \in H_1(T_3)$.

Ceci finit la démonstration de la proposition 1.

Le théorème 2, est un corollaire immédiat du théorème suivant, qui est une reformulation du THÉORÈME DE STRUCTURE de [5].

THÉORÈME 3 : (THÉORÈME DE STRUCTURE) :
« Une sphère d'homotopie M_3 possède toujours un diagramme de Heegard

(M_3, T_3) avec la structure suivante : Il existe un difféomorphisme :

$$h : T_3 \longrightarrow (S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^{2p+q} \times D_2^{2p+q}) = (2p+q) \# (S_1 \times D_2)$$

et $2p+q$ plongements differentiables de S_1 dans $\partial T_3 : \sigma_1, \dots, \sigma_{2p+q}$ tels que :

1) Il existe des isotopies fortes :

$$F_i : S_1 \times I \to T_3 \, (i = 1, \dots, 2p+q)$$

reliant $S_1^i \times 0_2^i$ et σ_i $(F_i(S_1 \times 0) = S_1^i \times 0_2^i)$; $F_i(S_1 \times 1) = \text{Image } F_i \cap \partial T_3 = \sigma_i)$.

2) σ_i est fortement homotope à 0 dans $M_3 - \text{int } T_3$.

3) Image $F_i \cap$ Image $F_{p+j} = \emptyset$ si $i, j \leq p$ et $i \neq j$.

4) Image $F_i \cap$ Image $F_j = \emptyset$

Image $F_{p+i} \cap$ Image $F_{p+j} = \emptyset$ et :

Image $F_{2p+i_0} \cap$ Image $F_{2p+j_0} = \emptyset$

(si $i \neq j$ $(i_0 \neq j_0)$ et $i, j \leq p$ $(i_0, j_0 \leq q)$.

5) F_i et F_{p+i} $(i \leq p)$ se coupent transversalement et $F_i^{-1}(F_i \cap F_{p+i})$ est constitué par deux arcs reliant $S_1 \times 0$ et $S_1 \times 1$.

6) Image $F_{2p+i} \cap$ Image $F_{p+j} \cap$ Image $F_k = \emptyset$

et F_{2p+i} coupe F_j $(j \leq 2p)$ transversalement. »

Le théorème 3 est equivalent au théorème de structure de [5]. On obtient cette equivalence en utilisant l'*involution canonique* $j : 2T_3 \longrightarrow 2T_3$ $(j^2 = id_{2T_3})$ qui permute les deux exemplaires de T_3 (dans $2T_3$) et qui a comme ensemble des points fixes ∂T_3.

PROPOSITION 2 : « Soit (M_3, T_3) un diagramme de Heegard (de la sphère d'homotopie M_3), ayant les propriétés du théorème 3. Si en plus :

$$\text{Image } F_{2p+i} \cap \text{Image } F_j = \emptyset$$

pour tous les $i \leq q$, $j \leq 2p$, alors $M_3 = S_3$. »

La démonstration est assez technique, elle va paraître dans le travail qui contiendra la démonstration complète du théorème de structure (voire aussi le Théorème 3 de [4]).

4. Une remarque finale :

(Sur la manière dont la topologie « en grandes dimension » pourrait servir pour établir des resultats en « petites dimensions »).

On va considérer maintenant des « diagrammes de Heegard » pour les variétés de la forme $M_3 \times S_n$ où M_3 est une variété orientable, fermée de dimension 3. Un diagramme de Heegard (de longueur p) de $M_3 \times S_n$, sera une paire : $(M_3 \times S_n, \Theta_{3+n})$ où Θ_{3+n} est une sousvariété differentiable telle que :

$$\Theta_{3+n} = (p \# (S_1 \times D_2)) \times S_n$$

$$M_3 \times S_n - \operatorname{int} \Theta_{3+n} = (p \# (S_1 \times D_2)) \times S_n .$$

Si $n > 1$ on remarque que du point de vue des groupes foundamentaux la situation se présente exactement comme pour les diagrammes de Heegard ordinaires.

En particulier il y a un homomorphisme de Stallings :

$$\mu : G_p \longrightarrow F_p' \times F_p''$$

attaché à $(M_3 \times S_n, \Theta_{3+n})$. On dira que le diagramme de Heegard $(M_3 \times S_n, \Theta_{3+n})$ est *dégénéré* s'il existe un diagramme de Heegard (M_3, T_3) et un difféomorphisme :

$$(M_3, T_3) \times S_n = (M_3 \times S_n, \Theta_{3+n}).$$

Remarquons que (M_3, T_3) et $(M_3 \times S_n, \Theta_{3+n})$ ont *le même* homomorphisme de Stallings.

Soit maintenant M_3 une sphère d'homotopie. Alors si $n \geq 2$, $M_3 \times S_n = S_3 \times S_n$, donc $(M_3, T_3) \times S_n$ peut etre concu comme diagramme de Heegard de $S_3 \times S_n$. Si ce diagramme est dégénéré (c'est-à-dire de la forme $(S_3, T_3') \times S_n$) son homomorphisme de Stallings se factorise (si $p > 1$) d'une façon non triviale pour un produit libre. (Ceci est facile a voire). On sait d'autre part [6] que si pour tous les diagrammes de Heegard de M_3, de longueur $p > 1$ cette propriété est vraie, alors $M_3 = S_3$ (En effet si Ker μ contient toujours un élément non trivial représenté par un *plongement* ω : $S_1 \subset \partial T_3$ on peut faire une induction sur la longueur des diagrammes de Heegard. D'autre part, si μ se factorise pour un produit libre, il n'y a aucune obstruction à considerer la flèche $\nu : G_p \longrightarrow K * L$ comme étant l'homomorphisme induit sur les groupes fundamentaux pour une application du type :

$f : p \# (S_1 \times S_1) \longrightarrow X \vee Y$. On peut trouver un ω comme ci-dessus en utilisant l'image inverse (f^{-1}) du point unique de $X \cap Y \subset X \vee Y$).

Donc, la conjecture suivante implique que M_3 (sphère d'homotopie) est toujours S_3.

Conjecture: « Tout diagramme de Heegard de $S_3 \times S_n$ $(n \geq 2)$ est dégénéré ».

Il s'agit donc de déterminer la position d'une sousvariété de $S_3 \times S_n$, qui est voisinage régulier d'un sous complexe de codimension 2 (dans $S_3 \times S_n$), et telle qu'on connait de type d'homotopie (en fait le type de difféotopie) du complément.

Faculté des Sciences d'Orsay
Dept. de Mathématiques
91 - ORSAY (France)

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. G. KUROSH : *The theory of groups.* Chelsea 1956.

[2] C. D. PAPAKYRIAKOPOULOS : *On solid tori.* Proc. London Math. Sc. 7 (1957) pp. 281-299.

[3] C. D. PAPAKYRIAKOPOULOS : *On Dehn's lemma and the asphericity of knots.* Ann. of Math. 66 (1957) pp. 1-26.

[4] V. POÉNARU : *Constructions on low-dimensional differentiable manifolds.* B. A. M. S. 74 (1968) pp. 253-257.

[5] V. POÉNARU : *Sur les variétés différentiables de basses dimension.* Symposia Matematica vol. II, 1968 pp. 363-369 (Istituto Nazionale di Alta Matematica).

[6] J. STALLINGS : *How not to prove the Poincaré conjecture.* (Topology Seminar Ann. of Math. Studies 60 (1966)).