

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LAMBERTO CATTABRIGA

**Moltiplicatori di Fourier e teoremi di immersione
per certi spazi funzionali**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 24,
n° 1 (1970), p. 111-158*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_1_111_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MOLTIPLICATORI DI FOURIER E TEOREMI DI IMMERSIONE PER CERTI SPAZI FUNZIONALI (*)

LAMBERTO CATTABRIGA

Teoremi di immersione per spazi di funzioni definite sullo spazio euclideo n -dimensionale E^n sono stati recentemente ottenuti da vari Autori utilizzando teoremi su moltiplicatori di Fourier. Ricordiamo qui L. R. Volvič-B. P. Paneyah [20], P. I. Lizorkin [10], P. I. Lizorkin S. M. Nikol'skii [13], M. D. Ramanzanov [16]. Ci serviamo qui di alcuni risultati riguardanti certi moltiplicatori di Fourier per ottenere teoremi di immersione simili a quelli di S. L. Sobolev per un tipo di spazi di funzione generalizzate che contiene come caso particolare un tipo già introdotto in [14], [13], [3]. A differenza di [20] le funzioni usate qui come moltiplicatori di Fourier non sono moltiplicatori nello spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni indefinitamente differenziabili in E^n ed ivi a decrescenza rapida, poichè a tali funzioni si consente di non essere indefinitamente differenziabili in tutto E^n . Dai teoremi di immersione provati si traggono formule di maggiorazione per norme di funzioni ordinarie e di loro derivate mediante somme di norme di derivate assegnate alle quali in certi casi si aggiunge una norma della funzione stessa.

I risultati principali, esposti nel n. 4, completano ed estendono i risultati presentati in [3] e [4]. Lo spazio funzionale indicato con $L_p^{\mathbb{D}}$ coincide con quello definito in [13] e rappresenta una generalizzazione degli spazi L_p^r studiati da vari Autori fra i quali ricordiamo A. P. Calderón [2], P. I. Lizorkin [10], [11] (¹). I corollari 4.3 e 4.4 contribuiscono anche a rispondere

Pervenuto alla Redazione il 26 Novembre 1969.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R.

(¹) Rinviamo ad [1] per una ampia bibliografia su questi spazi. Si veda anche il cap. 9 di [15].

ad un problema posto da V. P. Il'in [9]. Alcuni risultati del tipo di quelli qui provati sono stati ottenuti anche da R. S. Strichartz [18]. Essi riguardano funzioni definite in un dominio di E^n ; nel caso in cui tale dominio coincida con E^n essi possono dedursi da quelli qui provati per lo spazio $L_p^{\mathbb{P}}$.

Il n. 3 è dedicato allo studio di certe funzioni e delle loro trasformate (inverse) di Fourier. Utilizzando un teorema di Lizorkin [12] si prova che queste funzioni sono moltiplicatori di tipo (p, q) per precisati p e q ; si prova inoltre che le loro trasformate (inverse) di Fourier hanno certe potenze integrabili su E^n e si valutano certe norme di loro incrementi, fondandosi anche su un risultato di Calderòn [2]. Con l'aiuto dei risultati del n. 3 si provano quelli del n. 4.

Il n. 2 contiene alcuni teoremi riguardanti moltiplicatori di tipo (p, q) del tipo di quelli studiati nel n. 3. Il n. 1 si occupa di certi spazi di funzioni fondamentali e generalizzate già definiti e studiati in [10] nonché di alcune loro relazioni con altri spazi di funzioni e di distribuzioni. Una parte dei risultati dei nn. 1 e 2 è stata esposta in [5].

1. Con E^n indichiamo lo spazio euclideo reale n -dimensionale, di elementi $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Sia $|\xi|^2 = \sum_1^n \xi_j^2$, $\delta = \min \{ \min_j |\xi_j|, 1 \}$ ed $A = \left\{ \xi \in E^n; \prod_1^n \xi_j = 0 \right\}$. Per ogni $\xi \in E^n \setminus A$ ed ogni intero non negativo k poniamo

$$M_k(\xi) = \max \{ (1 + |\xi|^2)^{k/2}, \delta^{-k} \}^{(2)}.$$

Tutte le funzioni $M_k(\xi)$ così definite sono continue su $E^n \setminus A$ ed ivi è $1 = M_0(\xi) < M_1(\xi) < \dots < M_k(\xi) < M_{k+1}(\xi) < \dots$.

Sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni a valori complessi indefinitamente differenziabili su E^n ed ivi a decrescenza rapida e Ψ il sottospazio di $\mathcal{S}$ costituito da tutte le funzioni $\psi \in \mathcal{S}$ nulle con tutte le loro derivate su A e tali che risultino limitate su $E^n \setminus A$ tutte le funzioni

$$M_k(\xi) D^{\mathbf{l}} \psi(\xi) \quad k = 0, 1, \dots$$

ove $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$, $l_j = 0, 1, \dots$ per $j = 1, \dots, n$ ⁽³⁾, $D^{\mathbf{l}} = \partial^{\mathbf{l}} / \partial \xi_1^{l_1} \dots \partial \xi_n^{l_n}$, $|\mathbf{l}| = l_1 + \dots + l_n$. Lo spazio Ψ con la topologia generata dalla successione di

⁽²⁾ Si potrebbe completare la definizione delle funzioni $M_k(\xi)$ su tutto E^n ponendole eguali a $+\infty$ su A .

⁽³⁾ Diremo anche che $\mathbf{l}$ è un multi-indice di interi non negativi.

norme

$$\|\psi\|_k = \sup_{|\mathbf{I}| \leq k} \sup_{\xi \in E^n \setminus A} M_k(\xi) |D^{\mathbf{I}} \Psi(\xi)|, \quad k = 0, 1, \dots$$

è uno spazio numerabilmente normato e completo ed uno spazio fondamentale nel senso di I. M. Gel'fand e G. E. Šilov⁽⁴⁾.

LEMMA 1.1. Per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $M_k(\xi) > \varepsilon M_{k+1}(\xi)$, $k = 0, 1, \dots$ per ogni $\xi \in E^n \setminus A$ che verifichi una almeno delle $|\xi| > \varepsilon^{-k}$, $M_k(\xi) > \varepsilon^{-k}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\xi \in E^n \setminus A$ è $M_{k+1}(\xi) = [M_k(\xi)]^{1+1/k}$, $k = 1, 2, \dots$. Se $\xi \in E^n \setminus A$ è tale che $M_k(\xi) > \varepsilon^{-k}$ è quindi

$$M_k(\xi) < \varepsilon M_{k+1}(\xi) \quad k = 1, 2, \dots;$$

se $|\xi| > \varepsilon^{-k}$ è

$$M_k(\xi) \geq (1 + |\xi|^2)^{k/2} \geq 1 + |\xi|^k > \varepsilon^{-k} \quad k = 2, \dots$$

e

$$M_1(\xi) \geq |\xi| > \varepsilon^{-1}$$

e quindi ancora $M_k(\xi) < \varepsilon M_{k+1}(\xi)$, $k = 1, 2, \dots$.

Per $k = 0$ e $\xi \in E^n \setminus A$ tale che $|\xi| > \varepsilon^{-1}$ risulta $M_0(\xi) = 1 < \varepsilon M_1(\xi)$. Nessuno degli $\xi \in E^n \setminus A$ soddisfa alla $M_0(\xi) > \varepsilon^{-1}$ se $\varepsilon \in]0, 1[$, mentre tutti gli $\xi \in E^n \setminus A$ soddisfano a tale disuguaglianza se $\varepsilon > 1$. In quest'ultimo caso è $M_0(\xi) < \varepsilon M_1(\xi)$ per ogni $\xi \in E^n \setminus A$.

Questo lemma, per noti teoremi sugli spazi numerabilmente normati⁽⁵⁾, assicura che

COROLLARIO 1.1. Lo spazio Ψ è perfetto. Le funzioni a supporto compatto appartenenti a Ψ ne costituiscono un sottospazio denso.

Per $\psi \in \Psi$ poniamo

$$\widehat{\psi}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{E^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \psi(\xi) d\xi$$

ove $x \in E^n$ ed $\langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$. Indichiamo con Φ il sottospazio di $\mathcal{S}$ co-

⁽⁴⁾ Si veda [8] cap. II, § 1

⁽⁵⁾ Si veda [8] cap. II, § 2.

stituito dalle $\varphi \in \mathcal{S}$ tali che $\varphi = \widehat{\psi}$, $\psi \in \Psi$; è allora

$$\psi(\xi) = \int_{E^n} e^{-i\langle \xi, x \rangle} \varphi(x) dx = \widetilde{\varphi}(\xi), \quad \xi \in E^n.$$

Scriveremo anche $\widetilde{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ e $\widehat{\psi} = \mathcal{F}^{-1}\psi$, indicando con $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}^{-1}$ la trasformazione di Fourier e la sua inversa. L'applicazione $\psi \rightarrow \mathcal{F}^{-1}\psi$ è un isomorfismo algebrico di Ψ su Φ . In Φ consideriamo come topologia quella che resta definita scegliendo come intorni dell'origine, le immagini degli intorni dell'origine in Ψ rispetto all'applicazione $\mathcal{F}^{-1}$. Tale topologia è la più fine fra le topologie in Φ , compatibili con la struttura di spazio vettoriale, rispetto alle quali l'isomorfismo $\psi \rightarrow \mathcal{F}^{-1}\psi$ riesce continuo. L'applicazione $\mathcal{F}$ è anch'essa un isomorfismo di Φ su Ψ , rispetto alla loro struttura di spazi vettoriali topologici. Anche Φ è quindi uno spazio numerabilmente normato completo e perfetto ed uno spazio fondamentale. Per $\varphi \in \Phi$ porremo quindi

$$\|\varphi\|_k = \|\widetilde{\varphi}\|_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

La topologia di Ψ è più fine di quella indotta in esso da $\mathcal{S}$, poichè qualunque sia $k = 0, 1, \dots$ è $M_k(\xi) \geq (1 + |\xi|^2)^{k/2}$ per ogni $\xi \in E^n \setminus A$. Anche la topologia introdotta ora in Φ è quindi più fine di quella in esso indotta da $\mathcal{S}$. La restrizione a Φ od a Ψ di ogni funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$ è quindi un funzionale lineare continuo su Φ o rispettivamente su Ψ .

Da P. I. Lizorkin [10] sono stati provati i seguenti risultati sugli spazi Φ e Ψ

LEMMA 1.2. *La funzione $(i\xi)^{\mathbf{r}} = \prod_{j=1}^n (i\xi_j)^{r_j}$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, r_j reali qualunque, è un moltiplicatore in Ψ , ossia l'applicazione $\psi \rightarrow (i\xi)^{\mathbf{r}} \psi$ è lineare e continua da Ψ in sé.*

LEMMA 1.3. *Per ogni $\varphi \in \Phi$ ed ogni $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$, l_j interi non negativi, è*

$$\int_{E^m} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \varphi(x) dx' = 0,$$

ove E^m è un qualunque sottospazio coordinato di E^n di dimensione $m \leq n$ e dx' è l'elemento di volume in esso.

LEMMA 1.4. L'applicazione $\varphi \rightarrow \tau_h \varphi = \varphi(x+h)$, $h \in E^n$, è lineare e continua da Φ in sé.

Con $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$, $\alpha \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, indichiamo lo spazio vettoriale (sul corpo complesso) costituito da tutte le funzioni ζ a valori complessi indefinitamente differenziabili su E^n e tali che

$$\|D^{\mathbf{l}} \zeta\|_{L_p(E^n), \alpha} = \left\{ \int_{E^n} |D^{\mathbf{l}} \zeta|^p (1 + |x|^{\alpha p}) dx \right\}^{1/p} < \infty$$

per ogni $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$, l_j interi non negativi. Con la topologia definita dalle norme

$$\sup_{|\mathbf{l}| \leq m} \|D^{\mathbf{l}} \zeta\|_{L_p(E^n), \alpha}, \quad m = 0, 1, \dots$$

$\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ è uno spazio numerabilmente normato e completo ⁽⁶⁾. Scriveremo $\mathcal{D}_{L_p}$ anzichè $\mathcal{D}_{L_p, 0}$. Si prova facilmente ⁽⁷⁾ che

LEMMA 1.5. $\mathcal{C}_0^\infty(E^n)$ ⁽⁸⁾ (e quindi $\mathcal{S}$) è denso in ciascuno dei $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$.

Per il seguito è fondamentale il seguente

LEMMA 1.6. Se $\varphi \in \mathcal{S}$, esiste una successione di elementi di Φ convergente φ secondo tutte le topologie indotte in $\mathcal{S}$ da ciascuno dei $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ con $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1 - 1/p = 1/p'$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mu \in \mathcal{C}_0^\infty(E^1)$ eguale ad uno per $|\tau| \leq 1$, nulla per $|\tau| \geq 2$ e $\mu(-\tau) = \mu(\tau)$. Sia poi $\mu_\varepsilon(\tau) = \mu(\tau \varepsilon^{-1})$ e $\lambda_\varepsilon(\xi) = \prod_{j=1}^n [1 - \mu_\varepsilon(\xi_j)]$, $\varepsilon > 0$. È

$$A_\varepsilon = \text{supp } \lambda_\varepsilon \subset \{\xi \in E^n; |\xi_j| \geq \varepsilon, j = 1, \dots, n\} \subset E^n \setminus A.$$

In A_ε è quindi $\delta = 1$ se $\varepsilon \geq 1$ e $\delta \geq \varepsilon$ se $\varepsilon < 1$. Qualunque sia k intero non negativo avremo dunque

$$M_k(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{k/2} \quad \forall \xi \in A_\varepsilon$$

⁽⁶⁾ Esso è infatti uno spazio del tipo $K_p\{M_m\}$ studiato in [7], cap. 3.

⁽⁷⁾ Basta ripetere con opportune semplici varianti la dimostrazione del teorema 49, p. 86, di [7].

⁽⁸⁾ Con $\mathcal{C}_0^\infty(E^n)$ indichiamo lo spazio di tutte le funzioni indefinitamente differenziabili su E^n ed ivi a supporto compatto.

se $\varepsilon \geq 1$, mentre se $\varepsilon < 1$ sarà

$$M_k(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{k/2} \quad \forall \xi \in A_\varepsilon, |\xi| \geq (\varepsilon^{-2} - 1)^{1/2}$$

$$M_k(\xi) \leq \varepsilon^{-k} \quad \forall \xi \in A_\varepsilon, |\xi| < (\varepsilon^{-2} - 1)^{1/2}.$$

Se $\varphi \in \mathcal{S}$ è $\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}$, poichè λ_ε è una funzione indefinitamente differenziabile a crescita lenta, e $\text{supp } \lambda_\varepsilon \tilde{\varphi} \subset A_\varepsilon$ e quindi se $\varepsilon \geq 1$ ed $\mathbf{l}$ un multi-indice di interi non negativi

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in E^n \setminus A} M_k(\xi) |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi})(\xi)| &= \sup_{\xi \in A_\varepsilon} M_k(\xi) |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi})(\xi)| = \\ &= \sup_{\xi \in E^n} (1 + |\xi|^2)^{k/2} |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi})(\xi)| < \infty \end{aligned}$$

e se $\varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in E^n \setminus A} M_k(\xi) |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi})(\xi)| &= \sup_{\xi \in A_\varepsilon} M_k(\xi) |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi})(\xi)| \leq \\ &\leq \max \left\{ \sup_{|\xi| \geq (\varepsilon^{-2} - 1)^{1/2}} (1 + |\xi|^2)^{k/2} |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi})(\xi)|, \right. \\ &\quad \left. \varepsilon^{-k} \sup_{|\xi| < (\varepsilon^{-2} - 1)^{1/2}} |D^{\mathbf{l}}(\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi})(\xi)| \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Qualunque sia $\varepsilon > 0$ è dunque $\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi} \in \mathcal{P}$.

Sia e un sottoinsieme dell'insieme $\{1, \dots, n\}$. Poniamo $x = (x', x'')$ con $x' = (x_{k_1}, \dots, x_{k_r}) \in E'$, $x'' = (x_{h_1}, \dots, x_{h_s}) \in E''$, $k_1, \dots, k_r \in e$, $h_1, \dots, h_s \in \{1, \dots, n\} \setminus e$ ⁽⁹⁾.

È

$$\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} = \sum_{e \neq \emptyset} (-1)^{\nu(e)} \tilde{\varphi} \prod_{j \in e} \mu_\varepsilon(\xi_j)$$

con $\nu(e)$ numero degli elementi di e , e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\lambda_\varepsilon \tilde{\varphi})(x) - \varphi(x) &= \sum_{e \neq \emptyset} (-1)^{\nu(e)} \varphi * \left[\times_{j \in e} \delta(x_j) \times_{j \in e} \widehat{\mu_\varepsilon}(x_j) \right] = \\ &= \sum_{e \neq \emptyset} (-1)^{\nu(e)} \int_{E'} \varphi(x' - y', x'') \prod_{j \in e} \widehat{\mu_\varepsilon}(y_j) dy' \end{aligned}$$

(9) Se $e = \emptyset$ si intende che sia $E'' = E^n$ e per $e = \{1, \dots, n\}$ che $E' = E^n$.

e per ogni multi-indice $\mathbf{l}$ di interi non negativi

$$D^{\mathbf{l}} \mathcal{F}^{-1}(\lambda_{\varepsilon} \tilde{\varphi})(x) - D^{\mathbf{l}} \varphi(x) = \sum_{e \neq \emptyset} (-1)^{v(e)} \int_{E'} D^{\mathbf{l}} \varphi(x' - y', x'') \prod_{j \in e} \widehat{\mu_{\varepsilon}}(y_j) dy'.$$

Osserviamo che per $x \in E^n$ ed $\alpha \geq 0$ è

$$C'(1 + |x|)^{\alpha} \leq (1 + |x|^2)^{\alpha/2} \leq C''(1 + |x|)^{\alpha}$$

con C' e C'' dipendenti soltanto da α ,

$$1 + |x|^2 \leq (1 + |x'|^2)(1 + |x''|^2), \quad 1 + |x'|^2 \leq \prod_{j \in e} (1 + x_j^2), \quad x' \in E', \quad x'' \in E''$$

ed inoltre

$$1 + |x'|^2 \leq 2(1 + |y'|^2)(1 + |x' - y'|^2), \quad x', y' \in E'.$$

Risulta dunque per ogni multi-indice $\mathbf{l}$ di interi non negativi

$$\begin{aligned} & |D^{\mathbf{l}} \mathcal{F}^{-1}(\lambda_{\varepsilon} \tilde{\varphi})(x) - D^{\mathbf{l}} \varphi(x)| (1 + |x|)^{\alpha} \leq \\ & \leq C \sum_{e \neq \emptyset} (1 + |x''|^2)^{\alpha/2} \int_{E'} (1 + |x' - y'|^2)^{\alpha/2} |D^{\mathbf{l}} \varphi(x' - y', x'')| \prod_{j \in e} (1 + y_j^2)^{\alpha/2} \widehat{\mu_{\varepsilon}}(y_j) dy' = \\ & = C \sum_{e \neq \emptyset} \varphi_{\varepsilon, e}(x', x'')^{(10)}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\|f\|_{L_p(E^n)}^p = \int_{E^n} |f(x)|^p dx = \int_{E''} \|f(\cdot, x'')\|_{L_p(E')}^p dx''$$

e che

$$\|\varphi_{\varepsilon, e}(\cdot, x'')\|_{L_p(E')} \leq (1 + |x''|^2)^{\alpha/2} \|D^{\mathbf{l}} \varphi(\cdot, x'')\|_{L_1(E'), \alpha} \|\widehat{\mu_{\varepsilon}}\|_{L_p(E^1), \alpha}^{v(e)},$$

riesce

$$\begin{aligned} & \|D^{\mathbf{l}} \mathcal{F}^{-1}(\lambda_{\varepsilon} \tilde{\varphi}) - D^{\mathbf{l}} \tilde{\varphi}\|_{L_p(E^n), \alpha} \leq C \sum_{e \neq \emptyset} \|\varphi_{\varepsilon, e}\|_{L_p(E^n)} \leq \\ & \leq C \sum_{e \neq \emptyset} \|\widehat{\mu_{\varepsilon}}\|_{L_p(E^1), \alpha}^{v(e)} \|D^{\mathbf{l}} \varphi(\cdot, x'')\|_{L_1(E'), \alpha} \|L_p(E''), \alpha. \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁾ Qui e nel seguito C e così $C', C'', \dots, c, c', c'', \dots$ indicano costanti positive il cui valore cambierà in generale da formula a formula.

D'altra parte è

$$\widehat{\mu_\varepsilon}(t) = \pi^{-1} \varepsilon \int_0^2 \cos t\varepsilon\tau \mu(\tau) d\tau,$$

$$t \widehat{\mu_\varepsilon}(t) = -\pi^{-1} \int_0^2 \mu'(\tau) \operatorname{sen} t\varepsilon\tau d\tau, \quad t \in E^1,$$

e quindi

$$|\widehat{\mu_\varepsilon}(t)| \leq C \varepsilon, \quad |t \widehat{\mu_\varepsilon}(t)| \leq C$$

da cui

$$|\widehat{\mu_\varepsilon}(t)| \leq 2 C (\varepsilon^{-1} + |t|)^{-1} = C' \varepsilon (1 + \varepsilon |t|)^{-1}, \quad t \in E^1$$

con C e C' indipendenti da ε . Se $0 \leq \alpha < 1/p'$ avremo quindi

$$\|\widehat{\mu_\varepsilon}\|_{L_p(E^1), \alpha} \leq C' \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^p (1 + \varepsilon |t|)^{-p} (1 + t^2)^{\alpha p/2} dt \right\}^{1/p}.$$

Se ora si osserva che per $\varepsilon \leq 1$

$$\varepsilon^p (1 + \varepsilon |t|)^{-p} (1 + t^2)^{\alpha p/2} \leq (1 + |t|)^{-p} (1 + t^2)^{\alpha p/2}$$

e che la funzione a secondo membro è integrabile su E^1 se $\alpha < 1/p'$, si conclude che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\widehat{\mu_\varepsilon}\|_{L_p(E^1), \alpha} = 0.$$

Per ogni multi-indice $\mathbf{l}$ di interi non negativi e $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p'$ è dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^{\mathbf{l}} \mathcal{F}^{-1}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi}) - D^{\mathbf{l}} \varphi\|_{L_p(E^n), \alpha} = 0.$$

Il lemma è così provato ricordando che $\mathcal{F}^{-1}(\lambda_\varepsilon \widetilde{\varphi}) \in \Phi$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Dai lemmi 1.5 e 1.6 discende il seguente corollario

COROLLARIO 1.2. Φ è denso di ogni $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p'$.

Con $L_p(E^n) = L_p$, $1 \leq p < \infty$, indichiamo come è d'uso, lo spazio delle classi delle funzioni a valori complessi aventi p -esima potenza integrabile su E^n , con la norma $\|f\|_{L_p(E^n)} = \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$.

COROLLARIO 1.3. Φ è denso in ogni $L_p(E^n)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p'$.

LEMMA 1.7. $\zeta \in \mathcal{D}_{L_p, \alpha}$, $\alpha \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, se e soltanto se $\zeta(1 + |x|^2)^{\alpha/2} \in \mathcal{D}_{L_p}$; l'applicazione $\zeta \rightarrow \zeta(1 + |x|^2)^{\alpha/2}$ da $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ su $\mathcal{D}_{L_p}$ è lineare e continua con la sua inversa.

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathbf{l}$ e $\mathbf{k}$ multi-indici di interi non negativi. È

$$(1.1) \quad D^{\mathbf{l}}[\zeta(x)(1 + |x|^2)^{\alpha/2}] = \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{l}|} \binom{\mathbf{l}}{\mathbf{k}} D^{\mathbf{l}-\mathbf{k}} \zeta D^{\mathbf{k}}(1 + |x|^2)^{\alpha/2}$$

con

$$(1.2) \quad |D^{\mathbf{k}}(1 + |x|^2)^{\alpha/2}| \leq C(\mathbf{k})(1 + |x|^2)^{\alpha/2}.$$

Se $\zeta \in \mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ per (1.2) è

$$\|D^{\mathbf{l}-\mathbf{k}} \zeta D^{\mathbf{k}}(1 + |x|^2)^{\alpha/2}\|_{L_p} \leq C(\mathbf{k}) \|D^{\mathbf{l}-\mathbf{k}} \zeta\|_{L_p, \alpha}$$

con $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{l}|$. Dalla (1.1) segue allora

$$\|D^{\mathbf{l}}[\zeta(1 + |x|^2)^{\alpha/2}]\|_{L_p} \leq C \sup_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{l}|} \|D^{\mathbf{k}} \zeta\|_{L_p, \alpha}.$$

Viceversa sia $\zeta(1 + |x|^2)^{\alpha/2} \in \mathcal{D}_{L_p}$. Dalla (1.1) con $|\mathbf{l}| = 1$, tenuto conto della (1.2) segue che

$$\|D^{\mathbf{l}} \zeta\|_{L_p, \alpha} \leq C \left\{ \int_{E^n} |D^{\mathbf{l}} \zeta|^p (1 + |x|^2)^{\alpha p/2} dx \right\}^{1/p} \leq C' \sup_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{l}|} \|D^{\mathbf{k}}[\zeta \cdot (1 + |x|^2)^{\alpha/2}]\|_{L_p}.$$

La stessa maggiorazione si prova per ogni $\mathbf{l}$ procedendo per induzione e utilizzando le (1.1) e (1.2).

Il seguente corollario è conseguenza del lemma ora provato e del fatto che $\mathcal{D}_{L_p} \subset \mathcal{D}_{L_q}$, $p < q$, e l'immersione di $\mathcal{D}_{L_p}$ in $\mathcal{D}_{L_q}$ è continua⁽¹⁴⁾.

COROLLARIO 1.4. Se $1 \leq p < q < \infty$ è $\mathcal{D}_{L_p, \alpha} \subset \mathcal{D}_{L_q, \alpha}$ e l'immersione di $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ in $\mathcal{D}_{L_q, \alpha}$ è continua.

LEMMA 1.8. Se $0 \leq \beta < \alpha$ è continua l'immersione di $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ in $\mathcal{D}_{L_q, \beta}$ per ogni $q \in]p/[p(\alpha - \beta) + 1], \infty[$ o $q \in]n/[n, \infty[$.

⁽¹⁴⁾ Si veda [17] p. 56.

DIMOSTRAZIONE. Per $q \geq p$ il lemma è immediata conseguenza del corollario 1.4 e del fatto che è continua l'immersione di $\mathcal{D}_{L_q, \alpha}$ in $\mathcal{D}_{L_q, \beta}$ se $\beta < \alpha$. Per $1 \leq q < p$ è $|D^1 \zeta|^q (1 + |x|)^{\alpha q} \in L_{p/q}$ e se $q > p/[p(\alpha - \beta) + 1]$ è $(\alpha - \beta)q(p/q)' = (\alpha - \beta)qp/(p - q) > 1$ onde $(1 + |x|)^{(\beta - \alpha)q} \in L_{(p/q)'}$. Dalla

$$|\mathcal{D}^1 \zeta|^q (1 + |x|)^{\beta q} = |D^1 \zeta|^q (1 + |x|)^{\alpha q} (1 + |x|)^{(\beta - \alpha)q}$$

segue allora l'asserto applicando la disuguaglianza di Hölder.

COROLLARIO 1.5. Se $\alpha, \beta \in [0, 1[, \beta < \alpha$ è

$$\bigcap_{(1-\alpha)^{-1} < p < \infty} \mathcal{D}_{L_p, \alpha} \subset \bigcap_{(1-\beta)^{-1} < q < \infty} \mathcal{D}_{L_q, \beta}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $p > (1 - \alpha)^{-1}$ è $p/[p(\alpha - \beta) + 1] > (1 - \beta)^{-1}$ e per il lemma precedente se $p > (1 - \alpha)^{-1}$

$$\mathcal{D}_{L_p, \alpha} \subset \bigcap_{p/[p(\alpha - \beta) + 1] < q < \infty} \mathcal{D}_{L_q, \beta}.$$

Facendo l'intersezione di tutti i $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ con $p > (1 - \alpha)^{-1}$ e tenuto conto che $p/[p(\alpha - \beta) + 1]$ tende a $(1 - \beta)^{-1}$ per p tendente a $(1 - \alpha)^{-1}$ si ottiene il risultato enunciato.

Con Φ' e Ψ' indichiamo i duali di Φ e Ψ rispettivamente. In essi la convergenza debole e la convergenza forte delle successioni coincidono, essendo Φ e Ψ spazi perfetti. Con $\langle f, \varphi \rangle$, $\langle g, \psi \rangle$, $f \in \Phi'$, $g \in \Psi'$, $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ indicheremo i valori di f e g in φ e ψ rispettivamente. Converremo che i prodotti λf , λg con λ complesso siano definiti dalle

$$\langle \lambda f, \varphi \rangle = \langle f, \bar{\lambda} \varphi \rangle = \bar{\lambda} \langle f, \varphi \rangle \quad \text{e} \quad \langle \lambda g, \psi \rangle = \langle g, \bar{\lambda} \psi \rangle = \bar{\lambda} \langle g, \psi \rangle$$

ove $\bar{\lambda}$ indica il complesso coniugato di λ . La trasformata di Fourier di $f \in \Phi'$ si definisce come l'elemento $\tilde{f} \in \Psi'$ tale che

$$\langle \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle = (2\pi)^n \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

analogamente se $g \in \Psi'$, $\hat{g} = \mathcal{F}^{-1} g$ è l'elemento di Φ' definito da

$$\langle g, \psi \rangle = (2\pi)^n \langle \hat{g}, \hat{\psi} \rangle \quad \forall \psi \in \Psi.$$

Indichiamo con $\mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$ il duale di $\mathcal{D}_{L_{p'}, \alpha}$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p \leq \infty$. Secondo un teorema di A. Friedman⁽¹²⁾ ogni $f \in \mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$ si può rappresentare nella forma

$$(1.2') \quad f = \sum_{|\mathbf{I}| \leq m} D^{\mathbf{I}} [(1 + |x|)^{\alpha p'} f_1(x)], \quad m \text{ intero non negativo,}$$

ove le f_1 sono funzioni misurabili tali che

$$\int_{E^n} (1 + |x|)^{\alpha p'} |f_1(x)|^p dx < \infty.$$

È $(1 + |x|)^{\alpha p'} f_1 = (1 + |x|)^{\alpha} (1 + |x|)^{\alpha p'/p} f_1$. Dunque ogni $f \in \mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$ si può rappresentare come somma di derivate di prodotti di funzioni di p -esima potenza integrabile su E^n per $(1 + |x|)^{\alpha}$.

Dai corollari 1.2 ed 1.3 tenuto conto che le immersioni di Φ in ciascuno dei $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$ e degli L_p sono continue, discende il

COROLLARIO 1.6. *Ciascuno degli spazi $\mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p$, è isomorfo, rispetto alla sua struttura di spazio vettoriale, a quel sottospazio di Φ' costituito dagli elementi di Φ' continui in Φ rispetto alla topologia indotta in questo da $\mathcal{D}_{L_p, \alpha}$. La topologia di ciascuno degli spazi $\mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$ indicati è più fine di quella indotta dalla topologia di Φ' nei sottospazi ad essi isomorfi. Un risultato analogo vale per tutti gli spazi L_p , $1 < p < \infty$. Il sottospazio di Φ' isomorfo ad L_p lo indicheremo con Φ'_p .*

COROLLARIO 1.7. *Se $0 \leq \alpha \leq \beta$, $\mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$ si può considerare come sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}'_{L_q, \beta}$, per $p^{-1} \in [0, 1[\cap]\alpha - \beta + q^{-1}, 1[$, avente in tali $\mathcal{D}'_{L_q, \beta}$ immersione continua.*

DIMOSTRAZIONE. Per il corollario 1.4 ed il lemma 1.8 è continua l'immersione di $\mathcal{D}_{L_{q'}, \beta}$ in $\mathcal{D}_{L_{p'}, \alpha}$ per $p' \in]q'/[q'(\beta - \alpha) + 1], \infty[\cap[1, \infty[$. Inoltre $\mathcal{D}_{L_{q'}, \beta}$ è denso in $\mathcal{D}_{L_{p'}, \alpha}$ poichè $\mathcal{C}_0^{\infty}(E^n)$ è contenuto in $\mathcal{D}_{L_{q'}, \beta}$ e denso in $\mathcal{D}_{L_{p'}, \alpha}$. Ciò basta a provare il corollario.

LEMMA 1.9. $\mathcal{N} = \bigcup_{0 \leq \beta < 1} \bigcup_{1 < q < \beta^{-1}} \mathcal{D}'_{L_q, \beta}$ è isomorfo ad un sottospazio vettoriale di Φ' .

(12) Si veda [17] p. 86, teorema 48.

DIMOSTRAZIONE. Supposto $0 \leq \alpha < \beta < 1$ e $q < \beta^{-1}$, il corollario 1.7 consente di affermare che

$$(1.3) \quad \bigcup_{\alpha - \beta + q^{-1} < p^{-1} < 1} \mathcal{D}'_{L_p, \alpha} \subset \mathcal{D}'_{L_q, \beta}$$

ove l'insieme a primo membro è sottospazio vettoriale di quello a secondo membro poichè, ancora per il corollario 1.7 con $\alpha = \beta$, $\mathcal{D}'_{L_{p_1}, \alpha}$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}'_{L_{p_2}, \alpha}$ se $p_1 < p_2$. D'altra parte se $q_1 < q_2 < \beta^{-1}$ è

$$\bigcup_{\alpha - \beta + q_1^{-1} < p^{-1} < 1} \mathcal{D}'_{L_p, \alpha} \subset \bigcup_{\alpha - \beta + q_2^{-1} < p^{-1} < 1} \mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$$

onde eseguendo su ambo i membri della (1.3) la riunione rispetto a tutti i $q \in]1, \beta^{-1}[$, si vede che $\bigcup_{1 < p < \alpha^{-1}} \mathcal{D}'_{L_p, \alpha}$ risulta sottospazio vettoriale di $\bigcup_{1 < q < \beta^{-1}} \mathcal{D}'_{L_q, \beta}$. Da ciò segue che ad $\mathcal{N}$ si può dare la struttura di spazio vettoriale. Si verifica poi facilmente mediante il corollario 1.6 che l'applicazione da $\mathcal{N}$ in Φ' che ad ogni elemento di $\mathcal{N}$ fa corrispondere la sua restrizione a Φ è iniettiva, onde l'immagine di $\mathcal{N}$ rispetto ad essa è un sottospazio vettoriale di Φ' isomorfo ad $\mathcal{N}$.

LEMMA 1.10. Se $f \in \mathcal{S}'$, $f \neq 0$ ed $\langle f, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \Phi$, allora $f \notin \mathcal{N}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{N}$ esistono $\beta \in]0, 1[$ e $q \in]1, \beta^{-1}[$ tali che $f \in \mathcal{D}'_{L_q, \beta}$. Per il lemma 1.6 da $\langle f, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \Phi$ segue allora che $\langle f, \varphi \rangle = 0$ anche per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, onde $f = 0$.

Immediata conseguenza di questo lemma e del lemma 1.2 è il

COROLLARIO 1.8. Ad $\mathcal{N}$ non appartiene alcun polinomio non identicamente nullo.

TEOREMA 1.1. Se $f \in \mathcal{N}$ e per un $p \in]1, \infty[$ è

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{L_p} \quad \forall \varphi \in \Phi$$

con c indipendente da φ , allora f è una funzione ordinaria, appartiene ad L_p e $\|f\|_{L_p} \leq c$.

DIMOSTRAZIONE. Esistono $\alpha \in]0, 1[$ e $q \in]1, \alpha^{-1}[$ tali che $f \in \mathcal{D}'_{L_q, \alpha}$. Sia $\eta \in \mathcal{S}$. Il lemma 1.6 assicura che esiste una successione (φ_n) di elementi

di Φ convergenti ad η secondo la topologia indotta in $\mathcal{S}$ da $\mathcal{D}_{L_{p'}}$, e secondo la metrica di $L_{p'}$. È quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi_n \rangle = \langle f, \eta \rangle$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{L_{p'}} = \|\eta\|_{L_{p'}}$. Da

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| \leq c \|\varphi_n\|_{L_{p'}}$$

segue quindi

$$|\langle f, \eta \rangle| \leq c \|\eta\|_{L_{p'}}.$$

Ciò prova il teorema poichè quest'ultima maggiorazione vale, con la stessa costante c , per ogni $\eta \in \mathcal{S}$.

Abbiamo indicato con Φ'_p il sottospazio vettoriale di Φ' isomorfo ad L_p . L'isomorfismo è realizzato dalla applicazione che ad ogni $f^* \in L_p$ fa corrispondere il funzionale lineare f definito in Φ da

$$f: \varphi \rightarrow \int_{E^n} \bar{f}^* \varphi \, dx,$$

continuo in Φ rispetto alla metrica in esso indotta da $L_{p'}$ e quindi anche rispetto alla topologia di Φ che è più fine.

LEMMA 1.11. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $f \in \Phi'_p$ è che esista una costante positiva c tale che*

$$(1.4) \quad |\langle f, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{L_{p'}} \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

DIMOSTRAZIONE. La condizione è manifestamente necessaria poichè se $f \in \Phi'_p$ esiste una ed una sola $f^* \in L_p$ tale che $\langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} \bar{f}^* \varphi \, dx$ per ogni

$\varphi \in \Phi$. La condizione (1.4) è poi sufficiente poichè da essa segue che f è continua in Φ rispetto alla metrica di $L_{p'}$ e quindi, per il corollario 1.3, f ammette uno ed un solo prolungamento (lineare e) continuo su tutto $L_{p'}$.

Esiste dunque una ed una sola $f^* \in L_p$ tale che $\langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} \bar{f}^* \varphi \, dx$ per ogni

$\varphi \in \Phi$.

Se per $f \in \Phi'_p$ poniamo

$$(1.5) \quad \|f\|_{\Phi'_p} = \|f^*\|_{L_p}.$$

Φ'_p diviene uno spazio di Banach e l'applicazione $f \rightarrow f^*$ una isometria lineare fra Φ'_p ed L_p . Nel seguito supporremo sempre che Φ'_p sia dotato della norma (1.5). Se vale la (1.4) è dunque $\|f\|_{\Phi'_p} \leq c$.

A proposito dello spazio Φ'_p osserviamo che se f è una funzione definita (quasi ovunque) su E^n tale che il funzionale lineare

$$\varphi \rightarrow \int_{E^n} \bar{f} \varphi \, dx, \quad \varphi \in \Phi$$

appartenga a Φ'_p , non si può concludere che $f \in L_p$, ma soltanto che esiste uno ed un solo elemento $f^* \in L_p$ tale che

$$\int_{E^n} \bar{f} \varphi \, dx = \int_{E^n} \bar{f}^* \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Infatti per il lemma 1.3 f potrebbe differire da f^* per un arbitrario polinomio. Vale tuttavia il seguente corollario del teorema 1.1.

COROLLARIO 1.9. *Se $f \in \Phi'_p$ esiste uno ed un solo $f^* \in \mathcal{N}$ tale che*

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f^*, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi$$

ed è $f^ \in L_p$.*

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza di un $f^* \in L_p$ soddisfacente alla condizione richiesta è conseguenza dell'isomorfismo fra Φ'_p ed L_p . Se $g \in \mathcal{N}$ è tale che $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ per ogni $\varphi \in \Phi$ allora per il lemma 1.9 è pure $f^* - g \in \mathcal{N}$ e $\langle f^* - g, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \Phi$. Per il teorema 1.1 $f^* - g$ è quindi una funzione nulla quasi ovunque su E^n .

2. Una funzione $\mu(\xi)$, $\xi \in E^n$, è un moltiplicatore in Ψ se l'applicazione $\psi \rightarrow \mu \psi$ è una applicazione continua di Ψ in sè. Se μ è un moltiplicatore in Ψ tale è pure il suo complesso coniugato $\bar{\mu}$ e l'applicazione $g \rightarrow \mu g$ definita da $\langle \mu g, \psi \rangle = \langle g, \bar{\mu} \psi \rangle$, $\psi \in \Psi$, è una applicazione lineare e continua di Ψ' in sè.

LEMMA 2.1. *Se $\mu(\xi)$ è una funzione indefinitamente differenziabile su $E^n \setminus A$ e per ogni multi-indice $\mathbf{h}$ di interi non negativi risulta*

$$|D^{\mathbf{h}} \mu(\xi)| \leq P_{\mathbf{h}}(\xi), \quad \xi \in E^n \setminus A,$$

con $P_{\mathbf{h}}(\xi)$ combinaziane lineare a coefficienti costanti positivi di funzioni $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j}$, r_j reali qualunque, allora μ è un moltiplicatore in Ψ .

DIMOSTRAZIONE. Se k è un intero non negativo risulta

$$M_k(\xi) \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} \leq c M_{\kappa}(\xi), \quad \xi \in E^n \setminus A^{(13)},$$

con $\kappa > k$ dipendente, oltre che da k , dagli r_j . Per ogni $\psi \in \Psi$ ed ogni multi-indice $\mathbf{l}$ di interi non negativi con $|\mathbf{l}| \leq k$ è quindi

$$\begin{aligned} M_k(\xi) |D^{\mathbf{l}}(\mu(\xi) \psi(\xi))| &\leq c \sum_{|\mathbf{h}| \leq |\mathbf{l}|} M_k(\xi) P_{\mathbf{h}}(\xi) |D^{\mathbf{l}-\mathbf{h}} \psi(\xi)| \leq \\ &\leq C' \sum_{|\mathbf{h}| \leq |\mathbf{l}|} M_{\kappa(\mathbf{h})}(\xi) |D^{\mathbf{l}-\mathbf{h}} \psi(\xi)| \leq C'' \sup_{|\mathbf{a}| \leq \kappa} M_{\kappa}(\xi) |D^{\mathbf{a}} \psi(\xi)| \end{aligned}$$

ove $\kappa(\mathbf{h}) > k$ dipende dal multi-indice $\mathbf{h}$ e $\kappa = \max_{0 \leq |\mathbf{h}| \leq k} \kappa(\mathbf{h})$. Ciò prova il lemma.

Se $T \in \mathcal{S}'$ è tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ risulta

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi})\|_{L_q} \leq c \|\varphi\|_{L_p}, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty$$

con c indipendente da φ si dice che T è un *moltiplicatore di tipo* (p, q) . La più piccola costante c per la quale vale la precedente maggiorazione per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ si dice *norma del moltiplicatore* T e si indica con $M_p^q(T)$.

TEOREMA 2.1. Se T è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) , $1 < p \leq q < \infty$, allora per ogni $f \in \Phi'_p$ è $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}(T) * f \in \Phi'_q$ e

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f})\|_{\Phi'_q} \leq c \|f\|_{\Phi'_p}.$$

Se inoltre $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) \in \mathcal{N}$ allora $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) \in L_q$ e

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f})\|_{L_q} \leq c \|f\|_{\Phi'_p}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per $f \in \Phi'_p$ e $\varphi \in \Phi$ è

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}), \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \langle T\tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}(\bar{T}\tilde{\varphi}) \rangle$$

⁽¹³⁾ Su questa maggiorazione si fonda la dimostrazione di Lizorkin del lemma 1.2. Si veda [10] pp. 327-28.

onde

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}), \varphi \rangle| \leq \|f\|_{\Phi'_p} \|\mathcal{F}^{-1}(\bar{T}\tilde{\varphi})\|_{L_{p'}} \leq c \|f\|_{\Phi'_p} \|\varphi\|_{L_{q'}},$$

poichè $\bar{T}$, al pari di T , è un moltiplicatore di tipo (p, q) e quindi di tipo (q', p') . In forza del lemma 1.11 ciò prova la prima parte del teorema. La $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}(T) * f$ è conseguenza di un noto teorema sulla convoluzione delle funzioni generalizzate ⁽¹⁴⁾. La seconda parte del teorema è conseguenza della prima e del teorema 1.1.

TEOREMA 2.2. *Nelle stesse ipotesi del teorema 2.1 su T , se $u \in L_p$, $1 < p < \infty$, è $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}) \in \Phi'_q$ e*

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u})\|_{\Phi'_q} \leq c \|u\|_{L_p}.$$

Se inoltre $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}) \in \mathcal{N}$, allora $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}) \in L_q$ e

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u})\|_{L_q} \leq c \|u\|_{L_p},$$

in tal caso se (φ_ν) è una successione di elementi di Φ convergente ad u in L_p , la successione $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu)$ converge in L_q ad $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u})$.

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare soltanto l'ultima affermazione del teorema; le altre sono conseguenza immediata del teorema precedente e del fatto che L_p e Φ'_p sono isomorfi ed isometrici E' .

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu) - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\mu)\|_{L_q} \leq c \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_{L_p}$$

onde la successione $\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu)$ converge in L_q : sia $A_T u$ il suo limite. Per ogni $\varphi \in \Phi$ è

$$\begin{aligned} |\langle A_T u - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}), \varphi \rangle| &\leq \\ &\leq |\langle A_T u - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu), \varphi \rangle| + |\langle \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu) - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{u}), \varphi \rangle| \leq \\ &\leq |\langle A_T u - \mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi}_\nu), \varphi \rangle| + c \|\varphi_\nu - u\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_{q'}} \end{aligned}$$

⁽¹⁴⁾ Si veda [8] Cap. III, 3

da cui per $\nu \rightarrow \infty$ si ottiene che

$$\langle A_T u - \mathcal{F}^{-1}(T \tilde{u}), \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Per la densità di Φ in $L_{q'}$ ciò prova che $A_T u = \mathcal{F}^{-1}(T \tilde{u})$.

TEOREMA 2.3. *Siano T_1 e T_2 moltiplicatori in Ψ , T_1 un moltiplicatore di tipo (q, r) e T_2 un moltiplicatore di tipo (p, q) , $1 < p \leq q \leq r < \infty$. Se $f \in \Phi'_p$ è allora $\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{f}) \in \Phi'_r$ e*

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{f})\|_{\Phi'_r} \leq c \|f\|_{\Phi'_p}.$$

Se inoltre $T = T_1 T_2$ è un moltiplicatore di tipo (p, r) allora

$$M_p^r(T) \leq M_q^r(T_1) M_p^q(T_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\varphi \in \Phi$ applicando il teorema 2.1 a T_2 ed il lemma 1.11 è

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{f}), \varphi \rangle| &= (2\pi)^{-n} |\langle T_2 \tilde{f}, \bar{T}_1 \tilde{\varphi} \rangle| = |\langle \mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{f}), \mathcal{F}^{-1}(\bar{T}_1 \tilde{\varphi}) \rangle| \leq \\ &\leq \|\mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{f})\|_{\Phi'_q} \|\mathcal{F}^{-1}(\bar{T}_1 \tilde{\varphi})\|_{L_{q'}} \leq c \|f\|_{\Phi'_p} \|\varphi\|_{L_{r'}}. \end{aligned}$$

In forza del lemma 1.11 la prima parte del teorema resta così provata. Osserviamo poi che se $\varphi \in \mathcal{S}$ è $\mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{\varphi}) \in L_q$ e

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{\varphi})\|_{L_q} \leq M^q(T_2) \|\varphi\|_{L_p}.$$

Applicando il teorema 2.2 a T_1 e tenendo conto che $\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{\varphi}) = \mathcal{F}^{-1}(T \tilde{\varphi}) \in L_r$ risulta quindi

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{\varphi})\|_{L_r} \leq M_q^r(T_1) \|\mathcal{F}^{-1}(T_2 \tilde{\varphi})\|_{L_q} \leq M_q^r(T_1) M_p^q(T_2) \|\varphi\|_{L_p} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

COROLLARIO 2.1. *Nelle stesse ipotesi del teorema 2.3 su T_1 e T_2 , se $u \in L_p$ è $\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{u}) \in \Phi'_r$ è*

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T_1 T_2 \tilde{u})\|_{\Phi'_r} \leq c \|u\|_{L_p}.$$

Sia $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, r_j reali, $j = 1, \dots, n$, e

$$D^{\mathbf{r}}(x) = (\widehat{i\xi})^{\mathbf{r}} = (\widehat{i\xi_1})^{r_1} \times \dots \times (\widehat{i\xi_n})^{r_n}$$

ove $\times$ indica il prodotto diretto e si intende che sia

$$(i\xi_j)^{r_j} = e^{i\pi r_j/2} \begin{cases} \xi_j^{r_j} & \text{se } \xi_j > 0 \\ e^{-ir_j\pi} |\xi_j|^{r_j} & \text{se } \xi_j < 0 \end{cases}.$$

La funzione $(i\xi)^{\mathbf{r}}$ è un moltiplicatore in Ψ , onde per il teorema citato in ⁽¹⁴⁾

$$D^{\mathbf{r}}(x) * f \in \Phi' \quad \forall f \in \Phi'$$

e

$$\overbrace{D^{\mathbf{r}} * f}^n = \prod_{j=1}^n (i\xi_j)^{r_j} \tilde{f} \in \Psi' \quad \forall f \in \Phi'.$$

Inoltre è

$$D^{\mathbf{r}_1} * D^{\mathbf{r}_2} = D^{\mathbf{r}_2} * D^{\mathbf{r}_1} = D^{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}, \quad D^{\mathbf{o}} = \widehat{1} = \delta(x), \quad D^{\mathbf{r}} * D^{-\mathbf{r}} = D^{\mathbf{o}}.$$

Se $f \in \Phi'$ ed $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, con r_j reali per $j = 1, \dots, n$, l'elemento di Φ' definito da

$$D^{\mathbf{r}} * f = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^{\mathbf{r}} \tilde{f})$$

lo indicheremo, seguendo Lizorkin [10], con $D^{\mathbf{r}}f$ e lo chiameremo derivata generalizzata secondo Liouville di ordine $\mathbf{r}$. Porremo inoltre

$$D_*^{\mathbf{r}}f = \mathcal{F}^{-1}\left(\prod_{j=1}^n (-i\xi_j)^{r_j} \tilde{f}\right);$$

se gli r_j sono tutti interi non negativi è quindi $D_*^{\mathbf{r}}f = (-1)^{|\mathbf{r}|} D^{\mathbf{r}}f$. Se $\varphi \in \Phi$ e gli r_j sono reali non negativi risulta

$$D^{\mathbf{r}}\varphi = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (\Gamma([r_j] + 1 - r_j))} \frac{\partial^{[r_1] + \dots + [r_n] + n}}{\partial x_1^{[r_1] + 1} \dots \partial x_n^{[r_n] + 1}} \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\varphi(t) dt_n}{\prod_{j=1}^n (x_j - t_j)^{r_j - [r_j]}}$$

ove con $[r_j]$ si è indicato il massimo intero non superiore ad r_j . Se gli r_j sono interi non negativi avremo quindi

$$D^{\mathbf{r}}\varphi = \partial^{|\mathbf{r}|} \varphi / \partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}.$$

Qualunque siano gli r_j reali è inoltre

$$\langle D^{\mathbf{r}} f, \varphi \rangle = \langle f, D_{*}^{\mathbf{r}} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Se $f \in \mathcal{D}'_{L_{p,\alpha}}$, $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < \alpha^{-1}$, e gli r_j sono tutti interi non negativi il funzionale lineare

$$\varphi \rightarrow \langle f, D_{*}^{\mathbf{r}} \varphi \rangle = (-1)^{|\mathbf{r}|} \langle f, D^{\mathbf{r}} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \Phi$$

è continuo in Φ secondo la topologia indotta in Φ da $\mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$. Essendo Φ denso in $\mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$ tale funzionale ha uno ed un solo prolungamento continuo in $\mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$. Esiste cioè uno ed un solo $\omega_{\mathbf{r}} \in \mathcal{D}'_{L_{p,\alpha}}$ tale che

$$\langle \omega_{\mathbf{r}}, \varphi \rangle = (-1)^{\mathbf{r}} \langle f, D^{\mathbf{r}} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Tenuto conto della densità di Φ in $\mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$ e del fatto che $D^{\mathbf{r}} \varphi \in \mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}$ è anzi

$$\langle \omega_{\mathbf{r}}, \varphi \rangle = (-1)^{\mathbf{r}} \langle f, D^{\mathbf{r}} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L_{p',\alpha}}.$$

$\omega_{\mathbf{r}}$ coincide quindi con la derivata di f di ordine $\mathbf{r}$ nel senso delle distribuzioni. Porremo quindi $D^{\mathbf{r}} f = \omega_{\mathbf{r}} = \partial^{|\mathbf{r}|} f / \partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}$.

3. In [3] abbiamo considerato la famiglia $\mathcal{P}^n$, $n \geq 1$, dei poliedri convessi $\mathbb{P}$ dello spazio euclideo n -dimensionale S^n tali che

- 1) $\mathbb{P} \subset S_+^n = \{s \in S^n; s_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$;
- 2) $\mathbb{P}$ ha dimensione n ;
- 3) se s^l , $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, sono i vertici (punti estremi) di $\mathbb{P}$ allora

$$\mathcal{Q}(s^l) = \{r \in S^n; 0 \leq r_j \leq s_j^l, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{P}.$$

Si può provare che⁽¹⁵⁾ se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$

- i) l'origine $\mathbf{o}$ di S^n è vertice di $\mathbb{P}$; porremo $s^1 = \mathbf{o}$;
- ii) per ogni $s \in \mathbb{P}$ è $\mathcal{Q}(s) = \{r \in S^n; 0 \leq r_j \leq s_j, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{P}$;

⁽¹⁵⁾ Si veda [3] lemma 1.1.

iii) per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste un vertice s^j di $\mathbb{P}$ tale che $s^j = s^j_j e^j$ ⁽¹⁶⁾
 con $s^j_j = \max_{s \in \mathbb{P}} s_j = m_j > 0$;

iv) esiste un insieme finito e non vuoto $\mathcal{A}(\mathbb{P}) \subset S_+^n \setminus \{0\}$ tale che

$$\mathbb{P} = \bigcap_{a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ s \in S_+^n ; \sum_{j=1}^n a_j s_j \leq 1 \right\}$$

e per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste almeno un $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ con $a_j > 0$. È $m_j = \min_{a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} a_j^{-1}$;

v) se $s \in \mathbb{P}$ è

$$\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{s_j} \leq P(\xi) = \sum_{l=1}^{N(\mathbb{P})} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{s_j^l} \quad \forall \xi \in E^n,$$

se $s \in S_+^n \setminus \mathbb{P}$ è

$$\sup_{\xi \in E^n} \left(\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{s_j} [P(\xi)]^{-1} \right) = +\infty.$$

Osserviamo che se $\mathbb{P}$ è un sottoinsieme di S^n per il quale vale la iv) riportata qui sopra allora $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$. Dalla iv) segue infatti che $\mathbb{P}$ è un insieme limitato e non vuoto intersezione di un numero finito di semispazi, cioè un poliedro convesso, che soddisfa evidentemente alle 1) e 3) e che ha dimensione n poichè ad esso appartengono, oltre 0 , i punti $(\min_{a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} a_j^{-1}) e^j$, $j = 1, \dots, n$.

DEFINIZIONE 3.1. Con $\mathcal{P}_*^n$ indichiamo la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti di S^n tali che

A_* esistono due sottoinsiemi finiti $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ ed $\mathcal{A}'(\mathbb{P})$ di $S_*^n \setminus \{0\}$ il primo dei quali non vuoto e tale che per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste almeno un a appartenente ad esso con $a_j > 0$, tali che

$$\mathbb{P} = \left(\bigcap_{a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ s \in S_+^n ; \sum_{j=1}^n a_j s_j \leq 1 \right\} \right) \cap \left(\bigcap_{a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \left\{ s \in S_+^n ; \sum_{j=1}^n a'_j s_j \geq 1 \right\} \right);$$

B_* se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ sia $a_j \leq a'_j$ per ogni $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$, $a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$, $j = 1, \dots, n$.
 Da quanto si è osservato sopra segue che $\mathcal{P}^n \subset \mathcal{P}_*^n$ e che se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$

⁽¹⁶⁾ $e^j \in S_+^n$ con $e_k^j = 0$ per $k \neq j$ ed $e_j^j = 1$.

allora $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ se e soltanto se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) = \emptyset$, ovvero se e soltanto se $\mathbf{o} \in \mathbb{P}$.
Per $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ poniamo

$$\mathbb{P}_0 = \bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n; \sum_{j=1}^n a_j s_j \leq 1 \right\},$$

$$\mathbb{P}^+ = \mathbb{P} \cap \left(\bigcup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n; \sum_{j=1}^n a_j s_j = 1 \right\} \right),$$

$$\delta \mathbb{P} = \{ \mathbf{s} \in S_+^n; \delta^{-1} \mathbf{s} \in \mathbb{P} \}, \quad \delta > 0,$$

$$k(\mathbb{P}, \mathbf{s}) = \inf \{ t > 0; t^{-1} \mathbf{s} \in \mathbb{P} \}, \quad \mathbf{s} \in S_+^n,$$

$$h(\mathbb{P}, \mathbf{s}) = \sup \{ t > 0; t^{-1} \mathbf{s} \in \mathbb{P} \}, \quad \mathbf{s} \in S_+^n,$$

$$\mathbb{P}^r = \{ \mathbf{s} \in S_+^n; \mathbf{s} + \mathbf{r} \in \mathbb{P} \}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{P}_0.$$

È sempre $\mathbb{P}_0 \in \mathcal{P}^n$. Scriveremo per brevità $k(\mathbb{P})$ ed $h(\mathbb{P})$ in luogo di $k(\mathbb{P}, \mathbf{e})$ ed $h(\mathbb{P}, \mathbf{e})$ ⁽¹⁷⁾.

Ad ogni $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, come già in [3] ad ogni $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, associamo la funzione

$$(3.1) \quad \mathbb{P}(\xi) = \sum_{l=1}^{N(\mathbb{P})} |\xi^{s^l}| = \sum_{l=1}^{N(\mathbb{P})} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{s_j^l}, \quad \xi \in E^n,$$

ove s^l , $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, sono i vertici di $\mathbb{P}$. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ porremo anche

$$(3.1') \quad P_1(\xi) = \sum_{l=1}^{N(\mathbb{P})} \prod_{j=1}^n (1 + \xi_j^{2s_j^l})^{1/2}, \quad \xi \in E^n.$$

LEMMA 3.1. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ allora

i) per ogni $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{P}$ con $t_j \leq s_j$, $j = 1, \dots, n$, è $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \{ \mathbf{r} \in S^n; t_j \leq r_j \leq s_j, j = 1, \dots, n \} \subset \mathbb{P}$;

ii) per ogni $j = 1, \dots, n$ è $\max_{\mathbf{s} \in \mathbb{P}} s_j = \max_{\mathbf{s} \in \mathbb{P}_0} s_j = m_j > 0$; $\varrho \mathbf{e}^j \in \mathbb{P}$ per ogni $\varrho \in [\max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} a_j'^{-1}, m_j]$ se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ e per ogni $\varrho \in [0, m_j]$ se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) = \emptyset$;

iii) $\mathbb{P}$ è un poliedro convesso di S^n di dimensione almeno eguale ad $n - 1$;

⁽¹⁷⁾ $\mathbf{e} \in S^n$, $e_j = 1$, $j = 1, \dots, n$.

$$\text{iv) per ogni } s \in S_+^n \text{ è } k(\mathbb{P}, s) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \sum_1^n a_j s_j \text{ ed } h(\mathbb{P}, s) = \\ = \min_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \sum_1^n a'_j s_j \text{ se } \mathcal{A}'(\mathbb{P}) \neq \emptyset, h(\mathbb{P}, s) = +\infty \text{ se } \mathcal{A}'(\mathbb{P}) = \emptyset;$$

v) se $s \in \mathbb{P}$ è

$$\prod_1^n |\xi_j|^{s_j} \leq P(\xi) \quad \forall \xi \in E^n,$$

se $s \in S_+^n \setminus \mathbb{P}$ è

$$\sup_{\xi \in E^n \setminus \{0\}} \left(\prod_1^n |\xi_j|^{s_j} [P(\xi)]^{-1} \right) = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. La i) è immediata. Se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) = \emptyset$ la ii) si ottiene dalle i) e iii) riportate all'inizio di questo numero. Se $\mathcal{A}'(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ è $\max_{s \in \mathbb{P}} s_j \leq \max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j$ poichè $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}_0$, mentre dalla iii) ora citata applicata a $\mathbb{P}_0$ segue che $a_j \max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j \leq 1$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$, il segno eguale verificandosi per almeno un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$. Per B_* è dunque $a'_j \max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j \geq 1$ per ogni $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ e quindi $(\max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j) e^j \in \mathbb{P}$ e $\max_{s \in \mathbb{P}_0} s_j \leq \max_{s \in \mathbb{P}} s_j$. È poi $a'_j (\max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} a'^{-1}_j) \geq 1$ per ogni $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ e tenuto conto di B_*) $a_j \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} a'^{-1}_j \leq 1$ onde $(\max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} a'^{-1}_j) e^j \in \mathbb{P}$.

La iii) è conseguenza del fatto che $\mathbb{P}$ è un sottoinsieme non vuoto e limitato di S^n intersezione di un numero finito di semispazi al quale appartengono i punti $m_j e^j$, $j = 1, \dots, n$. Di facile verifica è la iv). Se $s \in \mathbb{P}$ esistono $\lambda_l \in [0, 1]$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, $\sum_1^{N(\mathbb{P})} \lambda_l = 1$ tali che $s = \sum_1^{N(\mathbb{P})} \lambda_l s^l$. È allora

$$\prod_1^n |\xi_j|^{s_j} = \prod_1^n \left(\prod_1^n |\xi_j|^{s^l_j} \right)^{\lambda_l} \leq \sum_1^{N(\mathbb{P})} \lambda_l \prod_1^n |\xi_j|^{s^l_j} \leq P(\xi).$$

Se $s \in S_+^n \setminus \mathbb{P}_0$ allora per la v) riportata all'inizio di questo numero la funzione $\prod_1^n |\xi_j|^{s_j} [P_0(\xi)]^{-1}$ non è limitata in E^n . D'altra parte la proposizione ora citata applicata al poliedro $\mathbb{P}_0$ ed ai vertici di $\mathbb{P}$ assicura che $P(\xi) \leq N(\mathbb{P}) P_0(\xi)$, $\xi \in E^n$, onde neppure la funzione $\prod_1^n |\xi_j|^{s_j} [P(\xi)]^{-1}$ sarà limitata su $E^n \setminus \{0\}$. Se $s \in \mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}$ allora per almeno un $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ sarà

$\sum_1^n a'_j s_j = \varrho < 1$. Per $\xi_j = t^{a'_j}$, $t \in]0, 1[$, $j = 1, \dots, n$, è allora

$$\prod_1^n |\xi_j|^{s_j} = t^{\varrho} \quad \text{e} \quad P(\xi) = \sum_1^{N(\mathbb{P})} t^{\sum_1^n a'_j s_j^l} \leq N(\mathbb{P}) t$$

poichè per ogni $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$ è $\sum_1^n a'_j s_j^l \geq 1$. Ne segue che

$$\prod_1^n |\xi_j|^{s_j} [P(\xi)]^{-1} \geq N(\mathbb{P})^{-1} t^{\varrho-1}, \quad t \in]0, 1[,$$

onde anche in questo caso la funzione a primo membro non può restare limitata su $E^n \setminus \{0\}$.

LEMMA 3.2. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ allora

- i) per $\mathbf{r} \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}^+$ è $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \in \mathcal{P}^n$; per $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}$ è $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \in \mathcal{P}_*^n$;
- ii) se $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}^+$ e $\mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P})$ è l'insieme degli $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ tali che $\sum_1^n a'_j r_j < 1$, allora

$$k(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}, \mathbf{s}) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left[1 - \sum_1^n a_j r_j \right]^{-1} \sum_1^n a_j s_j,$$

$$h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}, \mathbf{s}) = \min_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P})} \left[1 - \sum_1^n a'_j r_j \right]^{-1} \sum_1^n a'_j s_j,$$

se $\mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ e $h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}, \mathbf{s}) = +\infty$ se $\mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P}) = \emptyset$.

iii) $\mathbb{P}^{\mathbf{r}} \notin \mathcal{P}^n$ per ogni $\mathbf{r} \in \mathbb{P}$ se e soltanto se esiste un $\mathbf{a} \in S^n$, con $a_j > 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$, tale che $\mathbb{P} = \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n; \sum_1^n a_j s_j = 1 \right\}$. In questo caso ed in questo soltanto è $k(\mathbb{P}) = h(\mathbb{P})$;

iv) $\delta \mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ per ogni $\delta > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per provare la i) osserviamo che se $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}^+$ allora $\mathbf{s} \in \mathbb{P}^{\mathbf{r}}$ se e soltanto se

$$\sum_1^n a'_j (r_j + s_j) \geq 1 \quad \forall \mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P}) \quad \text{e} \quad \sum_1^n a_j (r_j + s_j) \leq 1 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P}).$$

È dunque

$$\mathbb{P}^{\mathbf{r}} = \left(\bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \{ \mathbf{s} \in S_+^n; \sum_1^n a_j [1 - \sum_1^n a_j r_j]^{-1} s_j \leq 1 \} \right) \cap$$

$$\cap \left(\bigcap_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'_{\mathbf{r}}(\mathbb{P})} \{ \mathbf{s} \in S_+^n; \sum_1^n a'_j [1 - \sum_1^n a'_j r_j]^{-1} s_j \geq 1 \} \right).$$

$\mathbb{P}^r$ non è vuoto e soddisfa alla A_*); esso soddisfa anche alla B_*), come si verifica subito. Dunque $\mathbb{P}^r \in \mathcal{P}_*^n$. Se $r \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}^+$ è $\mathcal{A}'_r(\mathbb{P}) = \emptyset$ e quindi $\mathbb{P}^r \in \mathcal{P}^n$. La ii) è immediata conseguenza della rappresentazione di $\mathbb{P}^r$ data qui sopra. Se $\mathbb{P}$ è del tipo indicato in iii) allora per ogni $r \in \mathbb{P}$ è $\mathbb{P}^r = \{0\}$ e quindi $\mathbb{P}^r \notin \mathcal{P}^n$. Viceversa se $\mathbb{P}^r \notin \mathcal{P}^n$ per ogni $r \in \mathbb{P}$, allora per ognuno di tali r esisterà un $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ tale che $\sum_1^n a_j r_j = 1$, altrimenti per i) $\mathbb{P}^r$ apparterebbe a $\mathcal{P}^n$. Dunque è $\mathbb{P} = \mathbb{P}^+$. $\mathbb{P}$ non può quindi avere dimensione eguale ad n altrimenti⁽¹⁸⁾ possederebbe punti interni. Per la iii) del lemma 3.1 avrà allora dimensione $n-1$ e coinciderà quindi con l'insieme $\left\{s \in S_+^n; \sum_1^n m_j^{-1} s_j = 1\right\}$. In questo caso è evidentemente $k(\mathbb{P}, s) = h(\mathbb{P}, s)$ per ogni $s \in S_+^n$. Viceversa se per $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ è $k(\mathbb{P}) = h(\mathbb{P})$, dalla iv) del lemma 3.1 e della B_*) segue che esiste un a^* appartenente ad $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ e ad $\mathcal{A}'(\mathbb{P})$ tale che $\sum_1^n a_j^* = \max_{a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \sum_1^n a_j = \min_{a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \sum_1^n a'_j$ onde $\mathbb{P} = \left\{s \in S_+^n; \sum_1^n a_j^* s_j = 1\right\}$. La iv) infine è immediata.

LEMMA 3.3. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ l'inviluppo convesso dei vertici di $\mathbb{P}$ appartenenti a $\mathbb{P}^+$ coincide con l'insieme $\mathbb{P}^+ = \mathbb{P} \cap \left\{s \in S_+^n; \sum_1^n m_j^{-1} s_j \geq 1\right\}$ ed appartiene quindi a $\mathcal{P}_*^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che $\mathbb{P}^+ \in \mathcal{P}_*^n$ si verifica immediatamente tenendo conto che $m_j^{-1} = \max_{a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} a_j$. Se v è un vertice di $\mathbb{P}$ appartenente a $\mathbb{P}^+$ è $\sum_1^n m_j^{-1} v_j \geq \sum_1^n a_j v_j$ per ogni $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ ed esiste almeno un $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ che rende l'ultima somma scritta eguale ad 1, onde è $\sum_1^n m_j^{-1} v_j \geq 1$. Se s appartiene all'inviluppo convesso dei vertici di $\mathbb{P}$ appartenenti a $\mathbb{P}^+$ è quindi $\sum_1^n m_j^{-1} s_j \geq 1$, mentre poi s è evidentemente contenuto in $\mathbb{P}$. Viceversa se $s \in \mathbb{P}^+$, $k^{-1}(\mathbb{P}, s)$ appartiene a $\mathbb{P}^+$ e quindi all'inviluppo convesso dei vertici di $\mathbb{P}$ appartenenti a $\mathbb{P}^+$, mentre $q^{-1} s$ con $q = \sum_1^n m_j^{-1} s_j$ appartiene all'inviluppo convesso dei vertici $m_j e^j, j = 1, \dots, n$, anch'essi appartenenti a $\mathbb{P}^+$. D'altra parte è $k^{-1}(\mathbb{P}, s) \geq 1$ e $q^{-1} \leq 1$, e quindi s sta sul segmento

(18) Si veda ad es. [6] p. 16.

congiungente $q^{-1}s$ con $k^{-1}(\mathbb{P}, s)s$ e dunque appartiene anch'esso all'involuppo convesso dei vertici di $\mathbb{P}$ appartenenti a $\mathbb{P}^+$.

Analogamente si prova che l'involuppo convesso dei vertici di $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, situati su almeno uno degli iperpiani di equazione $\sum_1^n a'_j s_j = 1$ coincide con l'insieme $\mathbb{P}^- = \mathbb{P} \cap \left\{ s \in S_+^n; \sum_1^n m_j^{-1} s_j \leq 1 \right\} \in \mathcal{P}_*^n$.

LEMMA 3.4 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un poliedro convesso di S^n appartenga a $\mathcal{P}_*^n$ è che*

- 1_{*}) $\mathbb{P} \subset S_+^n$;
- 2_{*}) se $t, s \in \mathbb{P}$ e $t_j \leq s_j, j = 1, \dots, n$, allora $\mathbb{Q}(t, s) \subset \mathbb{P}$;
- 3_{*}) per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste $m_j > 0$ tale che $m_j e^j \in \mathbb{P}$.

DIMOSTRAZIONE. La necessità della 1_{*}) è ovvia, quella delle 2_{*}) e 3_{*}) segue dalle i) e ii) del lemma 3.1. Per provare che la condizione è sufficiente osserviamo che $\mathbb{P}$, quale poliedro convesso di S^n , è intersezione di un numero finito di semispazi chiusi ciascuno avente per frontiera un iperpiano passante per un punto frontiera di $\mathbb{P}$. Se uno di tali iperpiani passa per l'origine o di S^n , allora per 3_{*}) il relativo semispazio che contiene $\mathbb{P}$ conterrà tutto S_+^n . Pertanto $\mathbb{P}$ è intersezione di S_+^n e di un numero finito di semispazi chiusi aventi per frontiera iperpiani non passanti per o . Esisteranno quindi due sottoinsiemi $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ ed $\mathcal{A}'(\mathbb{P})$ di S^n tali che

$$(3.2) \quad \mathbb{P} = \left(\bigcap_{a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \{s \in S_+^n; \sum_1^n a_j s_j \leq 1\} \right) \cap \left(\bigcap_{a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \{s \in S_+^n; \sum_1^n a'_j s_j \geq 1\} \right).$$

Dalla 3_{*}) segue che deve essere $a_j \leq m_j^{-1} \leq a'_j$ e quindi che $a'_j > 0$ ed $a_j \leq a'_j$ per ogni $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$, $a' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ ed $j = 1, \dots, n$. Essendo $\mathbb{P}$ limitato $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ non potrà essere vuoto e per ogni $j = 1, \dots, n$ esisterà un $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ con $a_j > 0$. Mostriamo che si può fare in modo che $\mathcal{A}(\mathbb{P}) \subset S_+^n \setminus \{o\}$. Se $a \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ non potrà essere $a_j \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$, poichè per almeno un $s \in \mathbb{P}^+$ è $\sum_1^n a_j s_j = 1$. Supponiamo che $a_j \leq 0$ per $j = j_1, \dots, j_h$, e sia $a^* \in S_+^n \setminus \{o\}$ tale che $a_j^* = 0$ per $j = j_1, \dots, j_h$ e $a_j^* = a_j$ per i rimanenti j . Se $s \in \mathbb{P}$, il punto s^* tale che $s_j^* = 0$ per $j = j_1, \dots, j_h$ ed $s_j^* = s_j$ per i

rimanenti j appartiene a $\mathbb{P}_0$ e quindi è

$$\sum_1^n a_j^* s_j = \sum_1^n a_j s_j^* \leq 1,$$

onde

$$\mathbb{P} \subset \{s \in S_+^n; \sum_1^n a_j^* s_j \leq 1\} \subset \{s \in S_+^n; \sum_1^n a_j s_j \leq 1\}.$$

In $\mathcal{A}(\mathbb{P})$ possiamo quindi sostituire a con $a^* \in S_+^n \setminus \{0\}$. $\mathbb{P}$ soddisfa dunque le A_* e B_* .

Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ la funzione $P(\xi)$ introdotta in (3.1) è un moltiplicatore in Ψ per il lemma 1.2; se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ la funzione $P_1(\xi)$ di (3.1') è indefinitamente differenziabile su E^n ed a crescita lenta, cioè un moltiplicatore in $\mathcal{S}$, ed anche come si vede facilmente utilizzando il lemma 2.1 un moltiplicatore in Ψ . Anche la funzione $[P_1(\xi)]^{-1}$, essa pure indefinitamente differenziabile su E^n ed a crescita lenta, è un moltiplicatore in $\mathcal{S}$ ed in Ψ .

LEMMA 3.5 *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ la funzione $[P(\xi)]^{-1}$, $\xi \in E^n \setminus \{0\}$ è un moltiplicatore in Ψ .*

DIMOSTRAZIONE. Una qualunque derivata (con indici di derivazione interi non negativi) di $[P(\xi)]^{-1}$ è combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti di potenze intere negative di $P(\xi)$ per derivate della stessa $P(\xi)$. Queste ultime sono maggiorabili in $E^n \setminus A$ con combinazioni lineari a coefficienti costanti di funzioni del tipo $\prod_1^n |\xi_j|^{r_j}$, r_j reali, ed ogni potenza negativa di $P(\xi)$ è maggiorabile in $E^n \setminus A$ con funzioni dello stesso tipo poichè è $\prod_1^n |\xi_j|^l \leq P(\xi)$, qualunque sia $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$. Ciò prova il lemma, tenuto conto del lemma 2.1.

TEOREMA 3.1. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ ed $r \in \mathbb{P}_0$, la funzione $\prod_1^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) per $1 < p < \infty$ e*

$q = p/(1 - p\eta)$ qualunque sia $\eta \in [\alpha_r, \beta_r] \cap [0, p^{-1}[$, ove $\alpha_r = h^{-1}(\mathbb{P}^r)^{(19)}$ e $\beta_r = k^{-1}(\mathbb{P}^r)$ se $r \notin \dot{\mathbb{P}}^+$ ed $\alpha_r = \beta_r = 0$ se $r \in \dot{\mathbb{P}}^+$.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione che la funzione $\prod_1^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in $\mathcal{P}$ è una immediata conseguenza dei lemmi 1.2 e 3.5. È $0 \leq \alpha_r \leq \beta_r$. Se $\eta \in [\alpha_r, \beta_r]$ è $r + \eta \in \mathbb{P}$ onde per la v) del lemma 3.1 è

$$(3.3) \quad \prod_1^n |\xi_j|^{r_j + \eta} \leq P(\xi), \quad \xi \in E^n.$$

Sia $\mathcal{V}$ l'insieme dei multi-indici $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ tali che gli h_j possano assumere soltanto i valori zero ed uno. Se $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ ed $r \in S_+^n$ è per $\xi \in E^n \setminus A$

$$D^{\mathbf{h}} \prod_1^n |\xi_j|^{r_j} = \prod_1^n (r_j \xi_j^{-1})^{h_j} |\xi_j|^{r_j} \quad (20) \quad \text{e} \quad D^{\mathbf{h}} P(\xi) = \sum_1^{N(\mathbb{P})} \prod_1^n (s_j^l \xi_j^{-1})^{h_j} |\xi_j|^{s_j^l},$$

onde

$$(3.4) \quad \prod_1^n |\xi_j|^{h_j} |D^{\mathbf{h}} P(\xi)| \leq C P(\xi), \quad \xi \in E^n \setminus A,$$

con C dipendente soltanto da $\mathbf{h}$. Se $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$, $D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1} \right)$ si esprime come combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti $D^{\mathbf{b}} \prod_1^n |\xi_j|^{r_j} \cdot D^{\mathbf{c}} [P(\xi)]^{-1}$, con $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{k}$. È poi

$$D^{\mathbf{c}} [P(\xi)]^{-1} = \sum_1^{|\mathbf{c}|} (-1)^{\nu} \nu! [P(\xi)]^{-\nu-1} \sum_{\substack{\mathbf{h}^i \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\} \\ \mathbf{h}^1 + \dots + \mathbf{h}^{\nu} = \mathbf{c}}} \prod_1^{\nu} D^{\mathbf{h}^i} P(\xi),$$

$\xi \in E^n \setminus A,$

dalla quale tenuto conto di (3.4)

$$(3.5) \quad |D^{\mathbf{c}} [P(\xi)]^{-1}| \leq C \prod_1^n |\xi_j|^{-c_j} [P(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A.$$

⁽¹⁹⁾ Si intende che sia $h^{-1}(\mathbb{P}^r) = 0$ se $h(\mathbb{P}^r) = +\infty$, ossia se e solo se $r \in \mathbb{P} \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$.

⁽²⁰⁾ Si intende che sia $(r_j \xi_j^{-1})^{h_j} = 1$ se r_j ed h_j sono entrambi nulli. Analoga convenzione si intende valida in espressioni dello stesso tipo.

Per $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$ riesce quindi

$$\left| \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{k_j} D^{\mathbf{k}} \left(\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq C \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A,$$

onde per (3.3), qualunque sia $\eta \in [\alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{r}}]$, è

$$(3.6) \quad \left| \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{k_j + \eta} D^{\mathbf{k}} \left(\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq C \quad \xi \in E^n \setminus A.$$

Per un teorema di Lizorkin [12] ciò assicura che la funzione $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore di tipo (p, q) , $1 < p \leq q < \infty$, per ogni q tale che $q^{-1} = p^{-1} - \eta$, $\eta \in [\alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{r}}] \cap [0, p^{-1}]$. Quest'ultimo insieme sarà vuoto quando $\alpha_{\mathbf{r}} \geq p^{-1}$.

OSSERVAZIONI. 1). Ricordando le espressioni di $h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})$ e $k(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})$ si vede che se $\eta > 0$ non appartiene a $[\alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{r}}]$, allora $\mathbf{r} + \eta \mathbf{e} \notin \mathbb{P}$ e quindi per la v) del lemma 3.1 la funzione $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j + \eta} [P(\xi)]^{-1}$ non è limitata su $E^n \setminus \{0\}$.

2) Dalla stessa v) del lemma 3.1 segue anche che se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ ed $\mathbf{r} \in S_+^n \setminus \mathbb{P}$ la funzione $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$, non essendo limitata su E^n , non può essere un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 \leq p \leq \infty$.

COROLLARIO 3.1. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ ed $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ la funzione $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} P^{\mathbf{r}}(\xi) \cdot [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione considerata è somma di termini del tipo $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j + s_j} [P(\xi)]^{-1}$ con $\mathbf{s}$ vertice di $\mathbb{P}^{\mathbf{r}}$. È dunque $\mathbf{r} + \mathbf{s} \in \mathbb{P}$ e quindi $\mathbb{P}^{\mathbf{r} + \mathbf{s}} \in \mathcal{P}^n$ od $\mathbf{r} + \mathbf{s} \in \dot{\mathbb{P}}^+$, onde $\alpha_{\mathbf{r} + \mathbf{s}} = 0$ per ognuno degli $\mathbf{s}$ indicati. D'altra parte per almeno uno di tali $\mathbf{s}$ è $\mathbf{r} + \mathbf{s} \in \dot{\mathbb{P}}^+$ onde per esso è $\beta_{\mathbf{r} + \mathbf{s}} = 0$.

COROLLARIO 3.2. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ la funzione $[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) per ogni q tale che $q^{-1} \in [p^{-1} - k^{-1}(\mathbb{P}), p^{-1} - h^{-1}(\mathbb{P})]$ se $k(\mathbb{P}) > 1$ e $1 < p < k(\mathbb{P})$ e per ogni q tale che $q^{-1} \in [0, p^{-1} - h^{-1}(\mathbb{P})]$ se $p \in [k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[\cap]1, \infty[$.

COROLLARIO 3.3. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ e $\delta \in]0, 1[$ la funzione $(\delta P)(\xi) [P(\xi)]^{-1}$ ⁽²⁴⁾ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) per ogni p e q

(24) $(\delta P)(\xi)$ è la funzione associata secondo la (3.1) al poliedro $\delta \mathbb{P}$.

talì che $1 < p < \infty$ e $q = p/(1 - p\eta)$, con $\eta \in [(1 - \delta)k^{-1}(\mathbb{P}), (1 - \delta)k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{s}^l$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, sono i vertici di $\mathbb{P}$, $\delta \mathbf{s}^l$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, sono i vertici di $\delta \mathbb{P}$. La funzione $(\delta P)(\xi)[P(\xi)]^{-1}$ è quindi somma di termini del tipo $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{\delta s_j^l} [P(\xi)]^{-1}$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$. Evidentemente tutti i $\delta \mathbf{s}^l$ appartengono a $\mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}^+$ e quindi è

$$\begin{aligned} \alpha_{\delta \mathbf{s}^l} &= h^{-1}(\mathbb{P}^{\delta \mathbf{s}^l}) = \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'_{\delta \mathbf{s}^l}(\mathbb{P})} \left\{ \left(1 - \sum_{j=1}^n a'_j \delta s_j^l \right) / \sum_{j=1}^n a'_j \right\} = \\ &= \max \left[0, \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \left\{ \left(1 - \delta \sum_{j=1}^n a'_j s_j^l \right) / \sum_{j=1}^n a'_j \right\} \right], \\ \beta_{\delta \mathbf{s}^l} &= k^{-1}(\mathbb{P}^{\delta \mathbf{s}^l}) = \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \left(1 - \sum_{j=1}^n a_j \delta s_j^l \right) / \sum_{j=1}^n a_j \right\}. \end{aligned}$$

Il risultato enunciato segue subito dal teorema 3.1 osservando che

$$\begin{aligned} \max_l \alpha_{\delta \mathbf{s}^l} &= \max \left[0, \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} \max_l \left\{ \left(1 - \delta \sum_{j=1}^n a'_j s_j^l \right) / \sum_{j=1}^n a'_j \right\} \right] = \\ &= \max \left[0, \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})} (1 - \delta) / \sum_{j=1}^n a'_j \right] = (1 - \delta) k^{-1}(\mathbb{P}), \\ \min_l \beta_{\delta \mathbf{s}^l} &= \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \min_l \left\{ \left(1 - \delta \sum_{j=1}^n a_j s_j^l \right) / \sum_{j=1}^n a_j \right\} = (1 - \delta) k^{-1}(\mathbb{P}). \end{aligned}$$

Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ è $h^{-1}(\mathbb{P}) = 0$; i risultati dei corollari 3.1 e 3.2 coincidono allora con quelli dei teoremi 2.4 e 2.3 di [3], quello del corollario 3.3 con un caso particolare del teorema 2.1 di [3].

COROLLARIO 3.4. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ la funzione $P(\xi)[P_0(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$; la funzione $P_0(\xi)[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore di tipo (p, p) soltanto se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ (nel qual caso $P(\xi) = P_0(\xi)$).

TEOREMA 3.2. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ ed $\mathbf{r} \in \mathbb{P}$, per le funzioni $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} [P_1(\xi)]^{-1}$ e $\prod_{j=1}^n (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} [P(\xi)]^{-1}$ valgono gli stessi risultati enunciati nel teorema 3.1 per la funzione $\prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Si seguono le linee della dimostrazione del teorema 3.1. Per $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ e $\xi \in E^n$ è

$$(3.7) \quad \left| D^{\mathbf{h}} \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \right| \leq c \prod_1^n |\xi_j|^{-h_j} (1 + \xi_j^2)^{r_j/2}$$

e quindi

$$\prod_1^n |\xi_j|^{h_j} |D^{\mathbf{h}} P_1(\xi)| \leq c P_1(\xi).$$

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 3.1 a proposito della $[P(\xi)]^{-1}$ si ottiene inoltre

$$|D^{\mathbf{c}} [P_1(\xi)]^{-1}| \leq c \prod_1^n |\xi_j|^{-c_j} [P_1(\xi)]^{-1}, \quad \mathbf{c} \in \mathcal{V},$$

onde per $\mathbf{k} \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} & \left| \prod_1^n |\xi_j|^{k_j} D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n |\xi_j|^{r_j} [P_1(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq \\ & \leq c \sum_{\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{k}} \prod_1^n |\xi_j|^{b_j} D^{\mathbf{b}} \prod_1^n |\xi_j|^{r_j} \prod_1^n |\xi_j|^{c_j} D^{\mathbf{c}} [P_1(\xi)]^{-1} \leq \\ & \leq c' \prod_1^n |\xi_j|^{r_j} [P_1(\xi)]^{-1} \leq 2c' \prod_1^n |\xi_j|^{r_j} [P(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A, \end{aligned}$$

l'ultima maggiorazione seguendo dalla $P(\xi) \leq 1 + P_1(\xi) \leq 2 P_1(\xi)$. Per la (3.6) e con gli η là indicati è quindi

$$\prod_1^n |\xi_j|^{k_j + \eta_j} \left| D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n |\xi_j|^{r_j} [P_1(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq c, \quad \xi \in E^n \setminus A, \quad \mathbf{k} \in \mathcal{V},$$

ciò che prova il teorema per la prima delle funzioni indicate. Analogamente, tenuto conto delle (3.5) e (3.7), risulta

$$\prod_1^n |\xi_j|^{k_j} \left| D^{\mathbf{k}} \left(\prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} [P(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq c \prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} [P(\xi)]^{-1},$$

$$\xi \in E^n \setminus A, \quad \mathbf{k} \in \mathcal{V}.$$

È poi $(1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \leq c(1 + |\xi_j|^{r_j})$ e quindi $\prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} \leq c \sum_{\mathbf{v}} \prod_1^n |\xi_j|^{v_j}$ quest'ultima somma essendo estesa a tutti i vertici $\mathbf{v}$ del parallelepipedo $\mathbb{Q}(\mathbf{r})$.

Risulta quindi

$$\prod_1^n |\xi_j|^{k_j + \eta} \left| D^k \left(\prod_1^n (1 + \xi_j^2)^{r_j/2} [P(\xi)]^{-1} \right) \right| \leq c \sum_{\mathbf{v}} \prod_1^n |\xi_j|^{v_j + \eta} [P(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A.$$

Per (3.3) il secondo membro di quest'ultima maggiorazione resterà limitato in $E^n \setminus A$ se η è contenuto in tutti gli intervalli $[0, \beta_{\mathbf{v}}]$, per i $\mathbf{v}$ indicati, ossia, riuscendo sempre per tali $\mathbf{v}$ $\beta_{\mathbf{r}} \leq \beta_{\mathbf{v}}$, se η è contenuto in $[0, \beta_{\mathbf{r}}]$. Ciò completa la prova del teorema.

COROLLARIO 3.5. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ le funzioni $[P(\xi)/P_1(\xi)]^q$, $q = 1, -1$, sono moltiplicatori in Ψ e moltiplicatori di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che le funzioni considerate sono somme di funzioni del tipo di quelle cui si riferisce il teorema 3.2, con $\mathbf{r}$ coincidente con uno dei vertici di $\mathbb{P}$ e che in tal caso è $\beta_{\mathbf{r}} = 0$.

Se $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in S^n$ e $0 \leq t_j \leq s_j$, $j = 1, \dots, n$, indichiamo con $Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)$ la funzione associata in accordo alla (3.1) al parallelepipedo $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \{\mathbf{r} \in S_+^n; t_j \leq r_j \leq s_j, j = 1, \dots, n\}$:

$$Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi) = \prod_1^n (|\xi_j|^{t_j} + |\xi_j|^{s_j}), \quad \xi \in E^n \quad (22).$$

È immediato che

LEMMA 3.6. Se $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in S_+^n$ e $\max_{1 \leq j \leq n} t_j < \min_{1 \leq j \leq n} s_j$ è

$$[Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)]^{-1} \in L_r$$

se e soltanto se $r \in] \max_{1 \leq j \leq n} s_j^{-1}, \min_{1 \leq j \leq n} t_j^{-1} [$.

LEMMA 3.7. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ e $k(\mathbb{P}) < h(\mathbb{P})$ allora $[P(\xi)]^{-1} \in L_r$ per ogni $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{P}$ e $t_j < s_j$, $j = 1, \dots, n$, tutti i vertici di $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ appartengono a $\mathbb{P}$ per la i) del lemma 3.1 e quindi per la v) dello stesso lemma è

$$Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi) \leq 2^n P(\xi), \quad \xi \in E^n.$$

(22) Si tenga presente tuttavia che $\mathbb{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \in \mathcal{P}_*^n$ se e solo se $\mathbf{t} = \mathbf{o}$.

È inoltre $\max_{1 \leq j \leq n} s_j^{-1} \geq k(\mathbb{P})$ il segno eguale verificandosi per $s = k^{-1}(\mathbb{P})$ e $\min_{1 \leq j \leq n} t_j^{-1} \leq h(\mathbb{P})$ il segno eguale verificandosi per $t = h^{-1}(\mathbb{P})$ e. Si applica poi il lemma precedente con $t = h^{-1}(\mathbb{P})$ e, $s = k^{-1}(\mathbb{P})$ e.

LEMMA 3.8. Se $0 \leq \sigma < \varrho$ è $\mathcal{F}^{-1}[(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}] \in L_{r'}(E^1)$, per ogni $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}[$ n $[1, \infty[$.

DIMOSTRAZIONE. Se $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}[$ è $(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1} \in L_r$. Per $r = 1$ $\mathcal{F}^{-1}[(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}]$ è continua e convergente a zero all'infinito. Per $1 < r \leq 2$ la validità del lemma è assicurata da un noto teorema di Hausdorff-Young. Se $\sigma^{-1} \leq 2$ null'altro è da provare. Se $\sigma^{-1} > 2$ ed $r \in]\max(\varrho^{-1}, 2), \sigma^{-1}[$ è $1 < (1 - \sigma)^{-1} < r' < 2$ e

$$(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-r'} t^{r'-2} \in L_1(E^1)$$

come subito si verifica. La tesi del lemma segue allora da un teorema di Hardy-Littlewood ⁽²³⁾.

COROLLARIO 3.6. Se $t, s \in S_+^n$ e $\max_{1 \leq j \leq n} t_j < \min_{1 \leq j \leq n} s_j$ è

$$\mathcal{F}^{-1}[Q(t, s; \xi)^{-1}] \in L_{r'}, \quad \forall r \in]\max_{1 \leq j \leq n} s_j^{-1}, \min_{1 \leq j \leq n} t_j^{-1}[$$

TEOREMA 3.3. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ allora

$$\mathcal{F}^{-1}[P(\xi)]^{-1} \in L_{r'} \quad \forall r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[$$

DIMOSTRAZIONE. Per $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[$ il teorema è conseguenza del lemma 3.7 e del citato teorema di Hausdorff-Young; se $k(\mathbb{P}) < 1 < h(\mathbb{P})$ è $[P(\xi)]^{-1} \in L_1$ ancora per il lemma 3.7 onde $\mathcal{F}^{-1}[P(\xi)]^{-1}$ è continua E^n e convergente a zero all'infinito. Se $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[$ 2, $\infty[$, il lemma 3.7 assicura che $[P(\xi)]^{-1} \in L_2^{\text{loc}}$. D'altra parte dalla

$$[P(\xi)]^{-1} \leq n \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{m_j} \right)^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus \{0\}$$

conseguenza della v) del lemma 3.1, segue che per $|\xi|$ sufficientemente grande è

$$[P(\xi)]^{-1} \leq c(1 + |\xi|^2)^{-m'/2},$$

⁽²³⁾ Si veda [19] teorema 82, p. 113. Si può provare che per $\sigma = 0$ il lemma vale anche con $r = \infty$.

con $m' = \min_{1 \leq j \leq n} m_j$. Per m intero positivo sufficientemente grande è quindi

$$(1 + |\xi|^2)^{-m} [P(\xi)]^{-1} \in L_2.$$

La funzione $[P(\xi)]^{-1}$ è quindi il prodotto di un polinomio e di una funzione di quadrato integrabile onde

$$(3.8) \quad \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \in \mathcal{D}'_{L_2}.$$

Scriviamo allora

$$[P(\xi)]^{-1} = Q(t, s; \xi) [P(\xi)]^{-1} [Q(t, s; \xi)]^{-1}$$

con $t = h^{-1}(\mathbb{P})$ e $s = k^{-1}(\mathbb{P})$. I vertici di $\mathbb{Q}(t, s)$ appartengono tutti a $\mathbb{P}$ e quindi per il teorema 3.1 la funzione $Q(t, s; \xi) [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$. La tesi del teorema è allora conseguenza della (3.8), del teorema 2.2 e del corollario 3.6.

COROLLARIO 3.7. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ ed $s \in \mathbb{P}_0 \setminus \mathbb{P}^+$ allora

$$\prod_1^n (i\xi_j)^{s_j} [P(\xi)]^{-1} \in L_r \quad \forall r \in]k(\mathbb{P}^s), h(\mathbb{P}^s)[,$$

$$D^s \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \in L_{r'} \quad \forall r' \in]k(\mathbb{P}^s), h(\mathbb{P}^s)[\cap [1, \infty[.$$

DIMOSTRAZIONE. È

$$\prod_1^n (i\xi_j)^{s_j} [P(\xi)]^{-1} = P^s(\xi) \prod_1^n (i\xi_j)^{s_j} [P(\xi)]^{-1} [P^s(\xi)]^{-1}, \quad \xi \in E^n \setminus A.$$

Basta allora osservare che per il corollario 3.1 la funzione $P^s(\xi) \prod_1^n (i\xi_j)^{s_j} \cdot [P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < +\infty$ e quindi è anche limitata su E^n e che è ancora $\mathcal{F}^{-1} \left(\prod_1^n (i\xi_j)^{s_j} \cdot [P(\xi)]^{-1} \right) \in \mathcal{D}'_{L_2}$.

Se $f(x)$ è una funzione definita in E^n ed $h \in E^n$ porremo

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{e} \quad \Delta_{h_j} f(x) = \Delta_h f(x) \quad \text{se} \quad h = h_j e^j.$$

LEMMA 3.9. Se $0 \leq \sigma < \varrho < 1 + \sigma$, $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}[n]1, \infty[$, allora

$$\| \Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \|_{L_{r'}(E^1)} \leq c |h|^{e-r^{-1}} \quad \forall h \in E^1$$

con c dipendente soltanto da r, ϱ, σ .

DIMOSTRAZIONE. Servendosi per esempio del già citato teorema di Lizorkin si verifica che la funzione

$$\mu(t) = (|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1} (1 + t^2)^{(e-\sigma)/2}, \quad t \in E^1 \setminus \{0\},$$

che per il lemma 2.1 è un moltiplicatore in Ψ , è anche un moltiplicatore di tipo (r, q) con $1 < r < q < \infty$, $q^{-1} = r^{-1} - \sigma$, e quindi di tipo (q', r') . Da un teorema di A. P. Calderón⁽²⁴⁾ si trae poi che se $q^{-1} < u < 1$ è

$$(3.9) \quad \| \Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((1 + t^2)^{-u/2}) \|_{L_{q'}(E^1)} = \| \mathcal{F}^{-1} ((e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-u/2}) \|_{L_{q'}(E^1)} \leq c |h|^{u-q^{-1}}$$

per ogni $h \in E^1$ con c dipendente soltanto da u e q ; per il lemma 3.8 è noto inoltre che $\Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \in L_{r'}(E^1)$. Applicando il teorema 2.2 e la (3.9) con $u = \varrho - \sigma$ si ha quindi

$$\begin{aligned} \| \Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \|_{L_{r'}(E^1)} &= \| \mathcal{F}^{-1} ((e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-(e-\sigma)/2} \mu(t)) \|_{L_{r'}(E^1)} \leq \\ &\leq c \| \mathcal{F}^{-1} ((e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-(e-\sigma)/2}) \|_{L_{q'}(E^1)} \leq c' |h|^{e \cdot \sigma - q^{-1}} = c' |h|^{e-r^{-1}}, \end{aligned}$$

poichè $q^{-1} = r^{-1} - \sigma < \varrho - \sigma < 1$. Si noti che se $\sigma \geq 1$ non c'è alcun r che soddisfi alle ipotesi del lemma e che se $\sigma < 1$ è $0 < \varrho - r^{-1} < \varrho - \sigma < 1$.

LEMMA 3.10. Se $0 \leq \sigma < \varrho$, $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}[n]1, \infty[$ è

$$\| \Delta_h \mathcal{F}^{-1} ((|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \|_{L_{r'}(E^1)} \leq c |h|^\lambda \quad \forall \lambda \in]0, \min(\varrho - r^{-1}, 1)[$$

con c indipendente da $h \in E^1$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon \geq 0$ tale che $0 < \varrho - r^{-1} - \varepsilon < 1$. Per il lemma 3.9 con $\sigma = 0$ e $\varrho - r^{-1} - \varepsilon$ in luogo di ϱ è

$$\| \mathcal{F}^{-1} ((e^{iht} - 1)(1 + |t|^{e-r^{-1}-\varepsilon})^{-1}) \|_{L_{q'}(E^1)} \leq c |h|^{e-r^{-1}-\varepsilon-q^{-1}} \quad \forall h \in E^1$$

⁽²⁴⁾ [2] teorema 4, con $n = 1$.

con $q \in]\varrho - r^{-1} - \varepsilon)^{-1}, \infty[$ e c indipendente da h . Per il teorema 3.1 con $n = 1$ la funzione

$$\mu_1(t) = (|t|^\sigma + |t|^e)^{-1} (1 + |t|^{e-r^{-1}-\varepsilon}) \quad t \in E^1 \setminus \{0\}$$

è un moltiplicatore in $\mathcal{V}$ ed un moltiplicatore di tipo (r, q) con $1 < r < \infty$ e $q \in [(r^{-1} - \sigma)^{-1}, \infty[$. Scelto q in entrambi gli intervalli indicati e tenuto conto dei risultati del lemma 3.8 e del teorema 2.2 si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \|A_h \mathcal{F}^{-1}(|t|^\sigma + |t|^e)^{-1}\|_{L_{r'}(E^1)} &= \|\mathcal{F}^{-1}((e^{iht} - 1)(1 + |t|^{e-r^{-1}-\varepsilon})^{-1} \mu_1(t))\|_{L_{r'}(E^1)} \leq \\ &\leq c |h|^{e-r^{-1}-\varepsilon-q^{-1}} \quad \forall h \in E^1 \end{aligned}$$

qualunque sia q sufficientemente grande ed $\varepsilon \geq 0$ tale che $\varrho - r^{-1} - \varepsilon \in]0, 1[$, onde la tesi del lemma è provata.

COROLLARIO 3.8. Se $t, s \in S_+^n$, $\max_{1 \leq i \leq n} t_i < \min_{1 \leq i \leq n} s_i$, $r \in]\max_{1 \leq i \leq n} s_i^{-1}, \min_{1 \leq i \leq n} t_i^{-1}[$, $n \in]1, \infty[$

è

$$\|A_{h_j} \mathcal{F}^{-1}([Q(t, s; \xi)]^{-1})\|_{L_{r'}} \leq c |h_j|^\lambda \quad \forall \lambda \in]0, \min(s_j - r^{-1}, 1)[$$

con c indipendente da $h_j \in E^1$.

LEMMA 3.11. Se $0 < \varrho < 1$, $1 < p < \infty$ è

$$M_p^p((e^{iht} - 1)(1 + |t|^e)^{-1}) \leq c |h|^e \quad \forall h \in E^1$$

con c dipendente soltanto da ϱ e p .

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni

$$\mu_2(t) = (e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-e/2} \quad \text{e} \quad \mu_3(t) = (1 + t^2)^{e/2}(1 + |t|^e)^{-1}$$

sono entrambi moltiplicatori di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$. Tale è anchè il loro prodotto e per il già citato risultato di Calderón

$$\begin{aligned} M_p^p((e^{iht} - 1)(1 + |t|^e)^{-1}) &\leq c \|\mathcal{F}^{-1}((e^{iht} - 1)(1 + t^2)^{-e/2})\|_{L_1(E^1)} \leq c' |h|^e \\ &\quad \forall h \in E^1. \end{aligned}$$

LEMMA 3.12. Se $0 \leq \sigma < \varrho$, $r \in]\varrho^{-1}, \sigma^{-1}] \cap]1, \infty[$ e $\varrho - r^{-1} < 1$, allora

$$M_p^q((e^{iht} - 1)(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) \leq c |h|^{e-r^{-1}} \quad \forall h \in E^1$$

per $1 < p < r$, $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$ e c indipendente da h .

DIMOSTRAZIONE. Se $r^{-1} = \sigma = 0$ il lemma coincide con il lemma 3.11. Per il teorema 3.1 con $n = 1$ la funzione

$$\mu_4(t) = (1 + |t|^{e-r^{-1}})(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1} \quad t \in E^1 \setminus \{0\}$$

è un moltiplicatore in Ψ ed è un moltiplicatore di tipo (p, q) per $1 < p < \infty$ e $q^{-1} = p^{-1} - \eta$ con qualunque $\eta \in [\sigma, r^{-1}] \cap [0, p^{-1}[$, mentre per il lemma 3.11 è

$$M_p^p((e^{iht} - 1)(1 + |t|^{e-r^{-1}})^{-1}) \leq c |h|^{e-r^{-1}} \quad \forall h \in E^1, \quad 1 < p < \infty,$$

poichè è $0 < \varrho - r^{-1} < 1$. D'altra parte, sempre per il teorema 3.1 con $n = 1$, la funzione $(e^{iht} - 1)(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}$ è un moltiplicatore di tipo (p, q) per $1 < p < \infty$ e $q^{-1} = p^{-1} - \eta$ con qualunque $\eta \in [\sigma, \varrho] \cap [0, p^{-1}[$. Ponendo $\eta = r^{-1}$ e ricordando il teorema 2.3 si otterrà allora

$$\begin{aligned} M_p^q((e^{iht} - 1)(|t|^\sigma + |t|^\varrho)^{-1}) &\leq M_p^p((e^{iht} - 1)(1 + |t|^{e-r^{-1}})^{-1}) M_p^q(\mu_4) \leq \\ &\leq c |h|^{e-r^{-1}} \quad \forall h \in E^1. \end{aligned}$$

COROLLARIO 3.9. Se $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in S_+^n$, $\max_{1 \leq i \leq n} t_i \leq \min_{1 \leq i \leq n} s_i$, $r \in [\max_{1 \leq i \leq n} s_i^{-1}, \min_{1 \leq i \leq n} t_i^{-1}] \cap]1, \infty[$ e $0 < s_j - r^{-1} < 1$ è

$$M_p^q((e^{ih_j \xi_j} - 1)[Q(\mathbf{t}, \mathbf{s}; \xi)]^{-1}) \leq c |h_j|^{s_j - r^{-1}}$$

con $1 < p < r$, $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$ e c indipendente da $h_j \in E^1$ ⁽²⁵⁾.

Sia $\mathcal{A}_j(\mathbb{P}) = \{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P}); a_j > 0\}$. Poniamo

$$\begin{aligned} \gamma_j(r) &= \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_j(\mathbb{P})} \left[\left(1 - r^{-1} \sum_{i \neq j}^n a_i \right) / a_j \right] \quad \text{per } 1 \leq r < \infty \\ &\text{e } \gamma_j(\infty) = \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_j(\mathbb{P})} a_j^{-1} = m_j. \end{aligned}$$

⁽²⁵⁾ Basta osservare che le funzioni $(|\xi_i|^{t_i} + |\xi_i|^{s_i})^{-1}$, $\xi_i \in E^1$, $0 \leq t_i \leq s_i$, sono moltiplicatori di tipo (p, q) in E^1 per $1 < p < \infty$ ed ogni q tale che $q^{-1} = p^{-1} - \eta$, $\eta \in [t_i, s_i] \cap [0, p^{-1}[$.

TEOREMA 3.4. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[n]1, \infty[$ allora per ogni $\lambda \in]0, \min(\gamma_j(r) - r^{-1}, 1)[$, è

$$\| \Delta_{h_j} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \|_{L_{r'}} \leq c |h_j|^\lambda$$

ove c può dipendere da λ ma non da $h_j \in E^1$.

DIMOSTRAZIONE. Supporremo ovviamente $k(\mathbb{P}) < h(\mathbb{P})$. Sia $s \in S_+^n$, $s_i = \varepsilon^{-1}$, $i \neq j$, $\varepsilon \in]k(\mathbb{P}), r[$, $s_j = \gamma_j(\varepsilon)$. È $s \in \mathbb{P}^+$ e $\gamma_j(r) \geq \gamma_j(\varepsilon) > k^{-1}(\mathbb{P}) > r^{-1}$. Sia poi $t = h^{-1}(\mathbb{P})$ e. È $t \in \mathbb{P}$ e $h^{-1}(\mathbb{P}) < r^{-1} < \min_{1 \leq i \leq n} s_i$ onde per la i) del lemma 3.1 $Q(t, s) \subset \mathbb{P}$ e $r \in]\max_{1 \leq i \leq n} s_i^{-1}, \min_{1 \leq i \leq n} t_i^{-1}[$. Per il teorema 3.1 la funzione $Q(t, s; \xi)[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$. Avendo presente il corollario 3.8 e il teorema 3.3, il teorema 2.2 assicura che per ogni $h_j \in E^1$ è

$$\| \Delta_{h_j} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \|_{L_{r'}} \leq c' \| \mathcal{F}^{-1}(e^{ih_j \xi_j} - 1)[Q(t, s; \xi)]^{-1} \|_{L_{r'}} \leq c |h_j|^\lambda$$

per ogni $\lambda \in]0, \min(\gamma_j(\varepsilon) - r^{-1}, 1)[$. Ciò prova il teorema poichè la maggiorazione ottenuta vale qualunque sia $\varepsilon \in]k(\mathbb{P}), r[$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow r} \gamma_j(\varepsilon) = \gamma_j(r)$.

TEOREMA 3.5. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[n]1, \infty[$ allora per ogni $h_j \in E^1$ è

$$M_p^q((e^{ih_j \xi_j} - 1)[P(\xi)]^{-1}) \leq c |h_j|^\mu \quad 1 < p < r, q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$$

con $\mu = \gamma_j(r) - r^{-1}$ se $\gamma_j(r) - r^{-1} < 1$ e con qualunque $\mu \in]0, 1[$ in caso contrario⁽²⁶⁾.

DIMOSTRAZIONE. Si procede come nella dimostrazione del teorema precedente scegliendo in ogni caso $t = h^{-1}(\mathbb{P})$ e, $s_i = r^{-1}$, $i \neq j$, ed $s_j = \gamma_j(r)$ se $\gamma_j(r) - r^{-1} < 1$, $s_j \in]r^{-1}, 1 + r^{-1}[$ se $\gamma_j(r) \geq 1 + r^{-1}$. Si utilizza poi il corollario 3.9, il corollario 3.2 e la seconda parte del teorema 2.3.

4. DEFINIZIONE 4.1 Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$ e $1 < p < \infty$, indichiamo con $W_p^{\mathbb{P}}$ lo spazio vettoriale sul corpo complesso costituito dalle $f \in \Phi'$ tali che $\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) \in \Phi'_p$ ossia per il lemma 1.11 tali che

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}), \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{L_{p'}} \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

⁽²⁶⁾ In questo caso c potrà dipendere da μ .

Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ esiste per il corollario 1.9 una ed una sola $v \in L_p$ tale che

$$(4.1) \quad \langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}), \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{\varphi}) \rangle = \int_{E^n} \bar{v} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \Phi;$$

poniamo

$$(4.2) \quad \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \|v\|_{L_p}.$$

TEOREMA 4.1. *L'applicazione $f \rightarrow v$ da $W_p^{\mathbb{P}}$ ad L_p definita dalla (4.1) è un isomorfismo di $W_p^{\mathbb{P}}$ su L_p , rispetto alla loro struttura di spazi vettoriali. La (4.2) definisce una norma in $W_p^{\mathbb{P}}$. Con tale norma $W_p^{\mathbb{P}}$ è uno spazio di Banach e l'applicazione suindicata una isometria lineare di $W_p^{\mathbb{P}}$ su L_p .*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, ricordando che $[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ , dalla (4.1) segue

$$(4.3) \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} \bar{v} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}\tilde{\varphi}) \, dx \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

L'applicazione definita dalla (4.1) è evidentemente lineare; essa è poi iniettiva poichè se per una $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ fosse $v = 0$, per la (4.3) sarebbe $\langle f, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \Phi$, ossia $f = 0$ ⁽²⁷⁾. La stessa applicazione è inoltre suriettiva. Infatti se $v \in L_p$, la forma lineare definita in Φ da

$$\varphi \rightarrow \int_{E^n} \bar{v} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}\tilde{\varphi}) \, dx$$

è continua in Φ , poichè $[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ . Essa definisce un elemento $f \in \Phi'$ per il quale vale la (4.1) onde $f \in W_p^{\mathbb{P}}$. Lo spazio $W_p^{\mathbb{P}}$ si può dunque considerare come l'immagine di L_p rispetto all'isomorfismo definito dalla (4.3), inverso di quello definito dalla (4.1). Da ciò seguono le altre affermazioni del teorema.

TEOREMA 4.2. *Gli spazi Φ ed $\mathcal{S}$ sono contenuti in ogni $W_p^{\mathbb{P}}$ con immersione continua e sono densi in ogni $W_p^{\mathbb{P}}$.*

⁽²⁷⁾ Si intende lo zero di Φ' .

DIMOSTRAZIONE. Sia m un intero pari non inferiore ad $n \max_{1 \leq j \leq n} m_j$ ⁽²⁸⁾.

Per il teorema 3.2, ove a $\mathbb{P}$ si sostituisca il poliedro $\left\{ \mathbf{s} \in S_+^n; \sum_1^n m^{-1} s_j \leq 1 \right\} \in \mathcal{P}^n$ e sia quindi $P_1(\xi) = \sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2}$, la funzione $P(\xi) \left[\sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right]^{-1}$ è un moltiplicatore in $\mathcal{P}$ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$, poichè per tutti i vertici $\mathbf{s}^i$ di $\mathbb{P}$ è $\alpha_{\mathbf{s}^i} = 0$. Se $u \in \mathcal{S}$ è quindi

$$\mathcal{F}^{-1}(P(\xi) \tilde{u}) = \mathcal{F}^{-1} \left(P(\xi) \left[\sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right]^{-1} \tilde{u} \sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right) \in L_p$$

poichè è ancora $\tilde{u} \sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \in \mathcal{S}$. È dunque $u \in W_p^{\mathbb{P}}$. Inoltre

$$\|u\|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \|\mathcal{F}^{-1}(P(\xi) \tilde{u})\|_{L_p} \leq c \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\tilde{u} \sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right) \right\|_{L_p}$$

ove l'ultimo membro si può maggiorare con una stessa seminorma di u in $\mathcal{S}$, qualunque sia $u \in \mathcal{S}$. Ciò prova che l'immersione di $\mathcal{S}$ in $W_p^{\mathbb{P}}$ è continua. Tale è anche quella di Φ in $W_p^{\mathbb{P}}$, poichè la topologia di Φ è più fine di quella indotta in Φ da $\mathcal{S}$. Proviamo che Φ è denso in $W_p^{\mathbb{P}}$. Sia $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ e $v \in L_p$ l'immagine di f secondo la (4.1). Per il corollario 1.3 esiste una successione (v_ν) di elementi di Φ convergente a v in L_p . Sia $f_\nu = \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1} \tilde{v}_\nu)$. È $f_\nu \in \Phi$ e $\|f_\nu\|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \|v_\nu\|_{L_p}$. Ne segue che

$$\|f_\nu - f\|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \|v_\nu - v\|_{L_p}$$

onde la successione (f_ν) converge ad f in $W_p^{\mathbb{P}}$.

TEOREMA 4.3 Se $h(\mathbb{P}) > p$, è continua l'immersione di $W_p^{\mathbb{P}}$ in Φ'_q per ogni $q \in [p/(1 - ph^{-1}(\mathbb{P})), p/(1 - pk^{-1}(\mathbb{P}))]$ se anche $k(\mathbb{P}) > p$ e per ogni $q \geq p/(1 - ph^{-1}(\mathbb{P}))$ se $k(\mathbb{P}) \leq p < h(\mathbb{P})$.

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ dalla (4.3) e dal corollario 3.2 segue

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \|v\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_{q'}} \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

⁽²⁸⁾ I numeri m_j sono stati definiti nella ii) del lemma 3.1.

per i q indicati nell'enunciato poichè ogni moltiplicatore di tipo (p, q) è anche moltiplicatore di tipo (q', p') . Per le (1.5) e (4.2) è allora

$$\|f\|_{\Phi'_q} \leq c \|v\|_{L_p} = c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}.$$

COROLLARIO 4.1. *Se $f \in \mathcal{N}$ ed $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, con $h(\mathbb{P}) > p$, allora $f \in L_q$ per i q indicati nel teorema 4.3 ed è*

$$\|f\|_{L_q} \leq c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}, \quad \text{ove la costante } c \text{ è indipendente da } f.$$

DIMOSTRAZIONE. Il corollario discende dal teorema 4.3 e dal teorema 1.1.

TEOREMA 4.4. *Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ è*

- i) $D^{\mathbf{r}} f \in W_p^{\mathbb{P}^{\mathbf{r}}}$ e $\|D^{\mathbf{r}} f\|_{W_p^{\mathbb{P}^{\mathbf{r}}}} \leq c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}$ se $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$
- ii) $D^{\mathbf{r}} f \in \Phi'_p$ e $\|D^{\mathbf{r}} f\|_{\Phi'_p} \leq c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}$ se $\mathbf{r} \in \dot{\mathbb{P}}^+$

con c indipendente da f .

DIMOSTRAZIONE. Posto $g = \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) \in \Phi'_p$ è $f = \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}\tilde{g})$ e per $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$

$$P^{\mathbf{r}}(\xi) \widehat{D^{\mathbf{r}} f} = \prod_1^n (i \xi_j)^{r_j} P^{\mathbf{r}}(\xi) \tilde{f} = \prod_1^n (i \xi_j)^{r_j} P^{\mathbf{r}}(\xi) [P(\xi)]^{-1} \tilde{g}$$

le eguaglianze intendendosi in Φ' . Per il corollario 3.1 ed il teorema 2.1 è quindi $\mathcal{F}^{-1}(P^{\mathbf{r}}(\xi) \widehat{D^{\mathbf{r}} f}) \in \Phi'_p$ e

$$\|D^{\mathbf{r}} f\|_{W_p^{\mathbb{P}^{\mathbf{r}}}} \leq c \|g\|_{\Phi'_p} = c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}.$$

Allo stesso modo si prova ii).

TEOREMA 4.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ è che*

$$D^{\mathbf{s}^l} f \in \Phi'_p, \quad l = 1, \dots, N(\mathbb{P}).$$

La norma (4.2) è equivalente alla

$$(4.4) \quad \sum_1^{N(\mathbb{P})} \|D^{\mathbf{s}^l} f\|_{\Phi'_p}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{s}^l \in \dot{\mathbb{P}}^+$ la prima affermazione del teorema è la ii) del teorema precedente. Se $\mathbf{s}^l \notin \dot{\mathbb{P}}^+$ è $\mathbb{P}^{\mathbf{s}^l} \in \mathcal{P}^n$ e quindi $h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}^l}) = +\infty$, onde dalla i) del teorema precedente e dal teorema 4.3 segue ancora che $D^{\mathbf{s}^l} f \in \Phi'_p$ e

$$(4.5) \quad \|D^{\mathbf{s}^l} f\|_{\Phi'_p} \leq c \|f\|_{W_p \mathbb{P}}.$$

È così provata la condizione necessaria e la maggiorazione

$$\sum_1^{N(\mathbb{P})} \|D^{\mathbf{s}^l} f\|_{\Phi'_p} \leq c \|f\|_{W_p \mathbb{P}} \quad \text{con } c \text{ indipendente da } f,$$

poichè per la ii) del teorema precedente la (4.5) vale anche per ogni $\mathbf{s}^l \in \dot{\mathbb{P}}^+$. Per provare la condizione sufficiente osserviamo che

$$\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) = \sum_1^{N(\mathbb{P})} \mathcal{F}^{-1}\left(\prod_j | \xi_j |^{\mathbf{s}_j^l} \prod_j (i \xi_j)^{-\mathbf{s}_j^l} \widehat{D^{\mathbf{s}^l} f}\right) \in \Phi'_p$$

e che le funzioni $\prod_j | \xi_j |^{\mathbf{s}_j^l} \prod_j (i \xi_j)^{-\mathbf{s}_j^l}$ sono moltiplicatori in Ψ e moltiplicatori di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$. Per il teorema 2.1 è quindi

$$\|f\|_{W_p \mathbb{P}} = \|\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f})\|_{\Phi'_p} \leq c \sum_1^{N(\mathbb{P})} \|D^{\mathbf{s}^l} f\|_{\Phi'_p} \quad \text{con } c \text{ indipendente da } f.$$

COROLLARIO 4.2. $W_p \mathbb{P}$ si può definire come lo spazio delle $f \in \Phi'$ tali che $D^{\mathbf{s}^l} f \in \Phi'_p$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$ ed assumere in esso come norma la (4.4).

COROLLARIO 4.3. Se $f \in \mathcal{N}$, $f \in W_p \mathbb{P}$ ed $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0$ è un multi-indice di interi non negativi appartenente a $\dot{\mathbb{P}}^+$ oppure tale che $h(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}) > p$ allora $D^{\mathbf{r}} f \in L_q$ ed esiste una costante positiva c indipendente da f tale che

$$\|D^{\mathbf{r}} f\|_{L_q} \leq c \sum_1^{N(\mathbb{P})} \|D^{\mathbf{s}^l} f\|_{\Phi'_p}$$

con $q = p$ se $\mathbf{r} \in \dot{\mathbb{P}}^+$ e per tutti i $q = p / (1 - p\eta)$, $\eta \in [h^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}), h^{-1}(\mathbb{P}^{\mathbf{r}})] \cap [0, p^{-1}[$ se $\mathbf{r} \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$. In particolare se tutti gli $\mathbf{s}^l$ sono multi-indici di

interi non negativi è $D^{\mathbf{s}^l} f \in L_p$ e

$$\| D^{\mathbf{r}} f \|_{L_q} \leq c \sum_{i=1}^{N(\mathbb{P})} \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{L_p}$$

per i q suindicati.

DIMOSTRAZIONE Il corollario è conseguenza dei teoremi 4.4 e 4.5 e del corollario 1.9, tenuto conto che se $f \in \mathcal{H}$ ed $\mathbf{r}$ è un multi-indice di interi non negativi è pure $D^{\mathbf{r}} f \in \mathcal{H}$, come segue dalla formula di rappresentazione (1.2') di ogni $f \in \mathcal{D}'_{L_p, a}$.

TEOREMA 4.6. È $W_p^{\mathbb{P}_0} \subset W_p^{\mathbb{P}} \subset W_p^{\mathbb{P}^+}$ e l'immersione del primo nel secondo e di questo nel terzo di tali spazi è continua.

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}_0}$ è $g = \mathcal{F}^{-1}(P_0(\xi)\tilde{f}) \in \Phi'_p$. Per il corollario 3.4 la funzione $P(\xi)[P_0(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$. Il teorema 2.1 assicura allora che

$$\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)[P_0(\xi)]^{-1}\tilde{g}) \in \Phi'_p \text{ e}$$

$$\| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \| \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) \|_{\Phi'_p} \leq c \| g \|_{\Phi'_p} = c \| f \|_{W_p^{\mathbb{P}_0}}.$$

Analogamente si mostra la continuità dell'immersione di $W_p^{\mathbb{P}}$ in $W_p^{\mathbb{P}^+}$ utilizzando il fatto che dal teorema 3.1 segue che $P^+(\xi)[P(\xi)]^{-1}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$.

COROLLARIO 4.4. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ ed $\mathbf{r} \in \mathbb{P}^+$ allora le norme $\| D^{\mathbf{r}} f \|_{W_p^{\mathbb{P}^{\mathbf{r}}}}$ se $\mathbf{r} \in \mathbb{P}^+ \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ e $\| D^{\mathbf{r}} f \|_{\Phi'_p}$ se $\mathbf{r} \in \dot{\mathbb{P}}^+$ si possono maggiorare anziché con $\| f \|_{W_p^{\mathbb{P}}}$ come nel teorema 4.4. con $\| f \|_{W_p^{\mathbb{P}^+}}$ ovvero con $\sum_{\mathbf{s}^l \in \mathbb{P}^+} \| D^{\mathbf{s}^l} f \|_{\Phi'_p}$. Vale evidentemente anche in questo caso un risultato analogo a quello del corollario 4.3.

TEOREMA 4.7. Se $\delta \in]0, 1[$ e $h(\mathbb{P}) > (1 - \delta)p$ allora è continua l'immersione di $W_p^{\mathbb{P}}$ in $W_q^{\delta\mathbb{P}}$ per ogni $q = p/(1 - p\eta)$, $\eta \in [(1 - \delta)h^{-1}(\mathbb{P}), (1 - \delta)h^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$.

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ è $g = \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{f}) \in \Phi'_p$ onde per il corollario 3.3 ed il teorema 2.1

$$\mathcal{F}^{-1}((\delta P)(\xi)\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}((\delta P)(\xi)[P(\xi)]^{-1}\tilde{g}) \in \Phi'_q$$

$$\|f\|_{W_q^{\delta\mathbb{P}}} = \|\mathcal{F}^{-1}((\delta P)(\xi)\tilde{f})\|_{\Phi'_q} \leq c \|g\|_{\Phi'_p} = c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}$$

per i q indicati nell'enunciato.

DEFINIZIONE 4.2. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ e $1 < p < \infty$, indichiamo con $L_p^{\mathbb{P}}$ lo spazio vettoriale sul corpo complesso costituito dalle $u \in \mathcal{S}'$ tali che $\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u}) \in L_p$. In $L_p^{\mathbb{P}}$ consideriamo la norma

$$\|u\|_{L_p^{\mathbb{P}}} = \|\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})\|_{L_p}.$$

Ricordando che $P_1(\xi)$ e $[P_1(\xi)]^{-1}$ sono moltiplicatori in $\mathcal{S}$, allo stesso modo del teorema 4.1 si prova che

TEOREMA 4.8. Esiste una isometria lineare di $L_p^{\mathbb{P}}$ su L_p .
Da questo e dal teorema 4.1 segue allora

COROLLARIO 4.5. Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$ esiste una isometria lineare di $W_p^{\mathbb{P}}$ su $L_p^{\mathbb{P}}$.

TEOREMA 4.9. $L_p^{\mathbb{P}}$ coincide, con equivalenza delle norme, con lo spazio delle $f \in \mathcal{N}$ tali che $f \in W_p^{\mathbb{P}}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $u \in L_p^{\mathbb{P}}$ allora per il teorema 3.2 è

$$\langle u, \varphi \rangle = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})} \mathcal{F}^{-1}([P_1(\xi)]^{-1}\tilde{\varphi}) dx \right| \leq c \|\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_q},$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ e $q = p/(1 - p\eta)$, $\eta \in [0, k^{-1}(\mathbb{P})] \cap [0, p^{-1}[$. E' dunque $u \in L_q$ per i q indicati e quindi $u \in \mathcal{N}$. Ricordando il corollario 3.5 risulta poi

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})} \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)[P_1(\xi)]^{-1}\tilde{\varphi}) dx \quad \forall \varphi \in \Phi$$

e

$$|\langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}), \varphi \rangle| \leq c \|\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{u})\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_{p'}} \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

onde $\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}) \in \Phi'_p$ e quindi $u \in W_p^{\mathbb{P}}$. Sia ora $f \in \mathcal{N}$ ed $f \in W_p^{\mathbb{P}}$. Poichè $h(\mathbb{P}) = +\infty$ per il corollario 4.1 è $f \in L_q$ per gli stessi q indicati più sopra. Se m è un intero pari non inferiore ad $n \max_{1 \leq j \leq n} m_j$ la funzione $P_1(\xi) \cdot$

$\cdot \left[\sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right]^{-1}$ è per il teorema 3.2 ed il corollario 3.5 un moltiplicatore di tipo (p, p) , $1 < p < \infty$ ⁽²⁹⁾. Pertanto per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ è

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}), \varphi \rangle &= \langle f, \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{\varphi}) \rangle = \\ &= \int_{E^n} \bar{f} \mathcal{F}^{-1} \left(P_1(\xi) \left[\sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right]^{-1} \left[\sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right] \tilde{\varphi} \right) dx \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}), \varphi \rangle| &\leq c \|f\|_{L_q} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \tilde{\varphi} \right) \right\|_{L_{q'}} \leq \\ &\leq c' \|f\|_{L_q} \sup_{|\mathbf{k}| \leq m} \|D^{\mathbf{k}} \varphi\|_{L_{q'}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

con $\mathbf{k}$ multi-indice di interi non negativi. Ciò prova che $\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}) \in \mathcal{D}'_{L_q} \subset \mathcal{N}$. D'altra parte per il corollario 3.5 ed il teorema 2.1 è

$$\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi) [P(\xi)]^{-1} P(\xi)\tilde{f}) \in \Phi'_p$$

onde per il corollario 1.9 $\mathcal{F}^{-1}(P_1(\xi)\tilde{f}) \in L_p$. Ciò completa la prova del teorema.

TEOREMA 4.10. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $f \in \mathcal{N}$ ed $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, $h(\mathbb{P}) > \max(p, k(\mathbb{P}))$ allora esiste una (ed una sola) $v \in L_p$ tale che f coincide quasi ovunque in E^n con la funzione*

$$(4.6) \quad u(x) = \int_{E^n} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y) v(y) dy$$

⁽²⁹⁾ È $P_1(\xi) \left[\sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right]^{-1} = P_1(\xi) [P(\xi)]^{-1} P(\xi) \left[\sum_1^n (1 + \xi_j^2)^{m/2} \right]^{-1}$. Si applica il

teorema 3.2 con $\mathbb{P} = \left\{ s \in S_+^n; \sum_1^n m^{-1} s_j \leq 1 \right\}$.

ed è $\|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}} = \|v\|_{L_p}$. Inoltre se $s \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ è un multi-indice di interi non negativi allora quasi ovunque in E^n

$$(4.6') \quad D^s u(x) = \int_{E^n} D_x^s \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y) v(y) dy = D^s f(x).$$

DIMOSTRAZIONE. Esiste un $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})[\cap [1, \infty[$ tale che $r > p$. Pertanto per il teorema 3.3 dalla (4.3) segue che

$$(4.7) \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{E^n} \overline{v}(y) dy \int_{E^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)} \varphi(x) dx =$$

$$= \int_{E^n} \varphi(x) dx \int_{E^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)} v(y) dy = \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

D'altra parte per il teorema 3.3 e per noti teoremi sulla convoluzione delle funzioni $u \in L_q$ per $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$, mentre per il corollario 4.1 allo stesso L_q appartiene anche f . Dal corollario 1.3 segue allora che $f(x) = u(x)$ quasi ovunque in E^n .

Sia ora $s \in \mathbb{P}_0 \setminus \dot{\mathbb{P}}^+$ un multi-indice di interi non negativi. Dalla ii) del corollario 3.2 segue che $h(\mathbb{P}^s) > h(\mathbb{P})$ e $k(\mathbb{P}^s) < h(\mathbb{P}^s)^{(30)}$. Sia $r > p$ tale che $r \in]k(\mathbb{P}^s), h(\mathbb{P}^s)[\cap [1, \infty[$. Dalla (4.7) segue che

$$(4.7') \quad \langle D^s u, \varphi \rangle = \langle D^s f, \varphi \rangle = (-1)^{|s|} \langle f, D^s \varphi \rangle =$$

$$= (-1)^{|s|} \int_{E^n} \overline{v}(y) dy \int_{E^n} \overline{\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)} D^s \varphi(x) dx =$$

$$= \int_{E^n} \overline{v}(y) dy \int_{E^n} \overline{D_x^s \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)} \varphi(x) dx =$$

$$= \int_{E^n} \varphi(x) dx \int_{E^n} \overline{D_x^s \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})(x-y)} v(y) dy \quad \forall \varphi \in \Phi$$

⁽³⁰⁾ Se $k(\mathbb{P}^s) = h(\mathbb{P}^s)$ esisterebbero un $\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})$ ed un $\mathbf{a}' \in \mathcal{A}'(\mathbb{P})$ tali che $\sum_1^n a'_j$.
 $\cdot [1 - \sum_1^n a'_j s_j]^{-1} = \sum_1^n a_j \left[1 - \sum_1^n a_j s_j \right]^{-1}$. Per la B_* della definizione 3.1 deve allora essere $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ e quindi $h(\mathbb{P}) = k(\mathbb{P})$.

ove l'ultimo integrale scritto, che è la funzione a secondo membro di (4.6'), appartiene ad L_q per $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$ a causa del corollario 3.7 e quindi ad $\mathcal{N}$. Avendo presente che anche $D^s f$ e $D^s u$ appartengono ad $\mathcal{N}$, la (4.7') assicura, a causa del teorema 1.1, che quasi ovunque in E^n vale la (4.6').

COROLLARIO 4.6 *Se $h(\mathbb{P}) > \max(p, k(\mathbb{P}))$ lo spazio delle $f \in \mathcal{N}$ tali che $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ coincide con lo spazio delle (classi⁽³¹⁾ delle) funzioni rappresentate da (4.6) con $v \in L_p$.*

DIMOSTRAZIONE. Il corollario è conseguenza del teorema precedente e del fatto che se $v \in L_p$ la u data da (4.6) appartiene ad $\mathcal{N}$, come si è osservato più sopra e che è

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}), \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi$$

onde $\mathcal{F}^{-1}(P(\xi)\tilde{u}) \in \Phi'_p$.

TEOREMA 4.11. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $1 < p < \infty$, $h(\mathbb{P}) > \max(p, k(\mathbb{P}))$ e $q^{-1} = p^{-1} - r^{-1}$ con $r \in]k(\mathbb{P}), h(\mathbb{P})] \cap]p, \infty]$, allora per ogni $h_j \in E^1$ e qualunque sia $f \in \mathcal{N}$ tale che $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ è*

$$\| \Delta_{h_j} f \|_{L_q} \leq c |h_j|^\mu \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}$$

con $\mu = \gamma_j(r) - r^{-1}$ se $\gamma_j(r) - r^{-1} < 1$ e con qualunque $\mu \in]0, 1[$ in caso contrario.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (4.6) segue

$$\Delta_{h_j} u(x) = \int_{E^n} \mathcal{F}^{-1}((e^{ih_j \xi_j} - 1)[P(\xi)]^{-1})(x - y) v(y) dy$$

onde il teorema è conseguenza del teorema 3.5 e del fatto che u ed f coincidono quasi ovunque in E^n .

TEOREMA 4.12. *Se $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_*^n$, $1 < p < \infty$, $k(\mathbb{P}) < p < h(\mathbb{P})$ allora ogni $f \in \mathcal{N}$ tale che $f \in W_p^{\mathbb{P}}$ coincide quasi ovunque con una funzione continua su E^n e convergente a zero all'infinito e quasi ovunque in E^n e per una qualunque di tali f è*

$$|f(x)| \leq c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}} \quad e \quad |\Delta_{h_j} f(x)| \leq c |h_j|^\lambda \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}$$

(³¹) Rispetto alla eguaglianza quasi ovunque in E^n .

con un qualunque $\lambda \in]0, \min(\gamma_j(p) - p^{-1}, 1)[$ e c indipendente oltre che da f anche da $h_j \in E^1$.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione del teorema è conseguenza del teorema 4.10, del fatto che per il teorema 3.3 $\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1}) \in L_{p'}$ e di un noto teorema sulla convoluzione delle funzioni. Dalla (4.6) segue poi

$$|u(x)| \leq \|\mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})\|_{L_{p'}} \|v\|_{L_p} = c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}.$$

La seconda affermazione del teorema è conseguenza del teorema 3.4 poichè

$$|\Delta_{h_j} u(x)| \leq \|\Delta_{h_j} \mathcal{F}^{-1}([P(\xi)]^{-1})\|_{L_{p'}} \|v\|_{L_p} \leq c |h_j|^\lambda \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}.$$

Utilizzando la (4.6') si possono ottenere, nelle ipotesi del teorema 4.10, risultati riguardanti le derivate di f . Proviamo qui come esempio il seguente

TEOREMA 4.13. Se $f \in \mathcal{N}$, $f \in W_p^{\mathbb{P}}$, $k(\mathbb{P}) < p < h(\mathbb{P})$ ed $\mathbf{s}$ è un multi-indice di interi non negativi tale che $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_{op} \setminus \mathbb{P}_{op}^+$, ove

$$\mathbb{P}_{op} = \bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n; \sum_1^n a_j s_j \leq 1 - p^{-1} \sum_1^n a_j \right\} \in \mathcal{P}^n$$

allora $D^{\mathbf{s}} f$ coincide quasi ovunque in E^n con una funzione continua e convergente a zero all'infinito e quasi ovunque in E^n è

$$|D^{\mathbf{s}} f(x)| \leq c \|f\|_{W_p^{\mathbb{P}}}$$

con c indipendente da f .

DIMOSTRAZIONE. Da $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_{op} \setminus \mathbb{P}_{op}^+$ ricordando il lemma 3.2 segue che $h(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}) \geq h(\mathbb{P})$ e $k(\mathbb{P}^{\mathbf{s}}) < p$. Il teorema è allora conseguenza della (4.6') e del corollario 3.7.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BURENKOV, V. I., *Teoremy vlozheniya i prodolzheniya dlya klassov differenciruemykh funktsii mnogih peremennykh, zadannykh vo vsem prostranstve*, Itogi Nauki, Matematicheskii Analiz 1965, VINITI Moskva 1966.
- [2] CALDERÓN, A. P., *Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions*, Proceedings of Symposia in pure Math., IV, 1961.
- [3] CATTABRIGA, L., *Alcuni teoremi di immersione per spazi funzionali generalizzanti gli spazi di S. L. Sobolev*, Annali dell'Univ. di Ferrara, Sez. VII, 12, 1967.
- [4] CATTABRIGA, L., *Alcuni teoremi di immersione per spazi funzionali generalizzanti gli spazi di S. L. Sobolev*, Atti del Convegno su le equazioni alle derivate parziali, Bologna 22-24 aprile 1967.
- [5] CATTABRIGA, L., *Alcune osservazioni su certi moltiplicatori dell'integrale di Fourier*, Annali dell'Univ. di Ferrara, Sez. VII, 13, 1968.
- [6] EGGLESTON, H. G. *Convexity*, Cambridge Univ. Press, 1963.
- [7] FRIEDMAN, A., *Generalized functions and partial differential equations*, Prentice-Hall, 1963.
- [8] GEL'FAND, I. M. - ŠILOV, G. E., *Prostranstva osnovnykh i obobščennykh funktsii*, Fizmatgiz, Moskva 1958.
- [9] IL'IN, V. P., *O neravenstvakh mezdu normami častnykh proizvodnykh funktsii mnogih peremennykh*, Trudy MIAN, 84, 1965.
- [10] LIZORKIN, P. I., *Obobščennoe liuvillevskoe differencirovanie i funktsional'nye prostranstva $L_p^r(E_n)$. Teoremy vlozheniya*, Matem. Sb., 60, 1963.
- [11] LIZORKIN, P. I., *Neisotropnye besselevy potentsialy. Teoremy vlozheniya dlya prostranstva Soboleva $L_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ s drobnymi proizvodnymi*, Doklady Akad. nauk SSSR, 170, 1966.
- [12] LIZORKIN, P. I., *O moltiplikatorakh integralov Fur'e v prostranstvakh $L_{p, \phi}$* , Trudy MIAN, 89, 1967.
- [13] LIZORKIN, P. I. - NIKOL'SKII, S. M., *Klassifikaciya differenciruemykh funktsii na ocnove prostranstv s dominiruyushei smesannoi proizvodnoi*, Trudy MIAN 77, 1965.
- [14] NIKOL'SKII, S. M., *Ob ustoičivyykh granichnykh znacheniyakh differenciruemoi funktsii mnogih peremennykh*, Matem. Sb., 61, 1963.
- [15] NIKOL'SKII, S. M., *Priblizhenie funktsii mnogih peremennykh i teoremy vlozheniya*, Nauka, Moskva 1969.
- [16] RAMAZANOV, M. D., *Funktsional'nye prostranstva i preobrazovanie Fur'e*, Trudy MIAN, 91, 1967.
- [17] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, II, Hermann, Parigi 1959.
- [18] STRICHARTZ, R. S., *Sobolev inequalities and extension theorems for functions with certain L^p -derivatives*, Studia Mathem., 30, 1968.
- [19] TITCHMARSH, E. C., *Theory of Fourier integrals*, Oxford, 1948.
- [20] VOLEVIC, L. R. - PANEYAH, B. P., *Nekotorye prostranstva obobščennykh funktsii i teoremy vlozheniya*, Uspehi Matem. nauk, 20, 1965.

Istituto Matematico, Università di Ferrara