ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PIERRE MOLINO

Sur la *G*-géométrie des variétés différentiables

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 3 (1969), p. 461-480

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_3_461_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA G-GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

par PIERRE MOLINO

(*) Soient V une variété différentielle (C^∞) de dimension n, G un sous-groupe de Lie fermé de $GL(n, R)$. Un certain nombre de problèmes concernant les G-structures ont un caractère purement local. Comme sur toute variété il existe localement des G-structures, il est naturel d'étudier directement la « G-géométrie » de V sans faire a priori d'hypothèses d'existence. Ceci revient à traiter simultanément le cas de toutes les structures locales du type considéré sur V. Bien entendu cette étude a un lien étroit avec la théorie des déformations qui s'intéresse à un « continuum » de structures sur une variété. Pour simplifier on se limite au cas des structures du premier ordre.

I. L'espace des G-structures sur V.

I.1. *Soit* $E^0 = E^0(V, GL(n, R))$ le fibré principal des repères linéaires de V muni de sa 1 forme fondamentale θ^0. L'espace $F_G^0 = E^0/G$ quotient de E^0 par les translations à droite de G sera dit espace des G-structures sur V. Dans le triangle commutatif de fibrations :

(I.1.1)
$$\begin{tikzcd} E^0 \arrow[rr, "\pi^0"] \arrow[dr, "\psi^0"'] & & F_G^0 \arrow[dl, "p^0"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Pervenuto alla Redazione il 18 Marzo 1969.

(*) Cet article a été écrit pendant que l'auteur était invité par l'École Normale Supérieure de Pise. Le sejour de l'auteur a été financé par le CNR (Contratto di Ricerca, n.° 115.2755.0 4930).

π^0 est une fibration principale de groupe structural G, et θ^0 est tensorielle pour cette fibration.

Une section globale (différentiable) s de F_G^0 au dessus de V définit une G-structure sur V, c'est à dire le couple $[E_s, \theta_s]$ d'un fibré principal sur V, E_s, de groupe structural G, et d'une forme fondamentale θ_s sur E_s (1-forme tensorielle à valeurs dans R^n de rang n en tout point). E_s et θ_s sont induits par E^0 et θ^0 sur l'image $s(V)$ de la section, ce que l'on notera :

$$[E_s, \theta_s] = s^*([E^0, \theta^0]). \tag{I.1.2}$$

Toute G-structure s'obtient par ce procédé.

Une famille différentiable à un paramètre $\{s_t, t \in R\}$ de sections de F_G^0 définira une famille différentiable à un paramètre de G-structures.

Une section locale s_0 de F_G^0 au dessus d'un ouvert U de V définira une G structure locale $[E_{s_0}, \theta_{s_0}] = s_0^*([E^0, \theta^0])$ sur U. Muni de cette structure, U sera dit « domaine G-structuré ».

On appellera faisceau des germes de G-structures sur V le faisceau $\mathcal{F}_G^0$ des germes de sections locales de F_G^0.

REMARQUE : L'espace fibré principal $E^0 \longrightarrow F_G^0$ définit des classes caractéristiques sur F_G^0. Si s est une section de F_G^0, les classes caractéristiques définies sur V par E_s seront les images des précédentes par l'application induite $s^* : H^*(F_G^0, A) \longrightarrow H^*(V, A)$ où A est l'anneau de coefficients considéré. Il est clair que les classes obtenues ne dépendent que de la classe d'homotopie de la section s. En particulier, deux G-structures qui définissent des classes caractéristiques distinctes ne peuvent être reliées par une famille différentiable à 1 paramètre de structures. Ainsi les classes caractéristiques sont invariantes dans les composantes connexes par arcs de $H^0(V, \mathcal{F}_G^0)$.

I.2. *Considérons l'espace* $\mathcal{E}_G^0 = \mathcal{E}_G^0(F_G^0, GL(n, R))$ des repères transverses à la fibration $F_G^0 \longrightarrow V$. On a le diagramme commutatif de fibrations :

(I.2.1)

$$\begin{tikzcd}
E^0 \arrow[r, "i^0"] \arrow[dr, leftrightarrow, "id."'] & \mathcal{E}_G^0 \arrow[r, "\Psi_0"] \arrow[d, "p^0"] & F_G^0 \arrow[d, "p^0"] \\
& E^0 \arrow[r, "\psi^0"] \arrow[d, "\pi^0"'] & V \\
& F_G^0 \arrow[ur, "p^0"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{E}_G^0$ est muni naturellement d'une 1-forme fondamentale θ_G^0 à valeurs dans R^n dont la restriction à E^0 est θ^0. E^0, par l'injection i^0, est un G-sous fibré principal de $\mathcal{E}_G^0$. Si E_s est la G-structure définie par une section s de $F_G^0 \dashrightarrow V$, $(\pi^0 \circ P^0)^{-1}(s(V)) = (P^0)^{-1}(E_s)$ est un G-sous fibré principal $\mathcal{E}_s$ de $\mathcal{E}_G^0$, « projetable » celui-là pour la fibration P^0. Si $\widetilde{F}_G^0 = \mathcal{E}_G^0/G$ est le fibré quotient de $\mathcal{E}_G^0$ par les translations à droite de G, on a le diagramme commutatif :

(1.2.2)
$$\begin{tikzcd}
E^0 \arrow[r, "i^0"] & \mathcal{E}_G^0 \arrow[r, "\widetilde{\pi}^0"] \arrow[d, "P^0"'] & \widetilde{F}_G^0 \arrow[d, "\widetilde{p}^0"] \arrow[dr, "\widetilde{P}^0"] & \\
 & E^0 \arrow[r, "\pi^0"] & F_G^0 \arrow[dr, "p^0"] & F_G^0 \arrow[d, "p^0"] \\
 & & & V
\end{tikzcd}$$

L'image $(\widetilde{\pi}^0 \circ i^0)(E^0)$ définit une section S^0 de $\widetilde{F}_G^0 \xrightarrow{\widetilde{P}^0} F_G^0$. De même, si s est une section de $F_G^0 \longrightarrow V$, $\mathcal{E}_s = (P^0)^{-1}(E_s)$ définit une section $\widetilde{s}$ de $\widetilde{F}_G^0 \xrightarrow{\widetilde{P}^0} F_G^0$ « projetable » suivant $\widetilde{p}_0$, i. e. :

(1.2.3) $$\widetilde{p}_0 \circ \widetilde{s} = s \circ p^0.$$

Une famille différentiable à 1 paramètre s_t de G-structures sur V définit une famille différentiable à 1 paramètre $\widetilde{s}_t$ de sections projetables de $\widetilde{F}_G^0 \longrightarrow F_G^0$ (c'est à dire une famille à un paramètre de G-sous-fibrés principaux de $\mathcal{E}_G^0$ projetables) et réciproquement.

Naturellement si on se contente d'étudier dans $\widetilde{F}_G^0$ les section (ou les familles de sections) projetables cela revient simplement à étudier directement les sections (ou familles de sections) de F_G^0. Au contraire il semble intéressant d'étudier les sections (ou familles de sections) quelconque de $\widetilde{F}_G^0$. Soit S une telle section. Elle définit un G-sous fibré principal $\mathcal{E}_S$ de $\mathcal{E}_G^0$. Si on regarde $\widetilde{F}_G^0$ comme le produit fibré $F_G^0 \underset{V}{\boxtimes} F_G^0$, S est le graphe d'une application fibrée $F_G^0 \longrightarrow F_G^0$ et définira donc une « corrélation entre structures » : pour toute G-structure (ou germe de G-structure) s, $S(s)$ sera une autre G-structure (ou germe de G structure). On pourra encore dire que S définit un « morphisme structural » sur V. S^0 définira le morphisme identité, et pour toute section s de $F_G^0 \longrightarrow V$, $\widetilde{s}$ définira un morphisme constant. On a la proposition immédiate :

PROPOSITION I.2.1 : S'il existe une famille différentiable à un paramètre $\{S_t, 0 \leq t \leq 1\}$ de sections de $\widetilde{F}^0_G \longrightarrow F^0_G$ avec $S_0 = S^0$ et $S_1 = \widetilde{s}$, alors $H^0(V, \mathcal{F}^0_G)$ est connexe par arcs.

REMARQUE : Plus généralement, si G' est un autre sous groupe de Lie fermé de $GL(n, R)$, soit $\widetilde{F}^0_{G,G'} = \mathcal{E}^0_G/G'$. Une section S de $\widetilde{F}^0_{G,G'} \longrightarrow F^0_G$ définira une corrélation entre structures de types différents.

I.3. *En fait, dans les constructions précédentes,* comme dans l'étude infinitésimale qui va suivre, n'intervient essentiellement que le diagramme de fibrations :

(I.3.1)
$$\begin{array}{ccc} E^0 & \xrightarrow{\pi^0} & F^0_G \\ & & \downarrow p^0 \\ & & V \end{array}$$

Où π^0 est une G-fibration principale munie d'une 1 forme tensorielle θ^0 à valeurs dans R^n dont le noyau en chaque point est le sous-espace vertical pour la fibration $p^0 \circ \pi^0$. Ceci conduit à une généralisation naturelle (qui sera élargie ultérieurement dans l'étude des G-structures quotient) :

DEFINITION I.3.1 : Soit un diagramme de fibrations :

(I.3.2)
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & F \\ & & \downarrow p \\ & & V \end{array}$$

Où π est une fibration principale de groupe $G \subset GL(n, R)$ — $n =$ dimension de V — et où E est muni d'une 1 forme tensorielle θ à valeurs dans R^n dont le noyau en chaque point est le sous-espace vertical pour la fibration $\psi = p \circ \pi$. On dit que le couple $[E, \theta]$ est une G-structure transverse à la fibration p. Le fibré $F \longrightarrow V$, muni du couple $[E, \theta]$, est dit fibré G structuré.

Etant donné un fibré arbitraire $F \longrightarrow V$, considérons le fibré principal $\mathcal{E}_F(F, GL(n, R))$ des repères transverses à la fibration. Soit $\widetilde{F} = \mathcal{E}_F/G$. Une G-structure transverse à la fibration sera définie par une section S de $\widetilde{F} \longrightarrow F$. On a une projection naturelle $\mathcal{E}_F \xrightarrow{P} E^0(V)$ qui induit une projection

$\tilde{d}: \tilde{F} \longrightarrow F_G^0$. Les G structures transverses projetables correspondront aux sections $\tilde{s}$ de $\tilde{F} \longrightarrow F$ qui sont l'image réciproque par p de sections s de $F_G^0 \longrightarrow V$.

Si $[E, \theta]$ est une G structure transverse à la fibration $F \longrightarrow V$, on a un diagramme commutatif de fibrations :

(I.3.3)
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathcal{E}_F \arrow[r, "p"] \arrow[d] & E^0 \arrow[d] \\ F \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \tilde{F} \arrow[r, "\tilde{p}"] & F_G^0 \end{tikzcd}$$

qui montre que $[E, \theta]$ est l'image inverse de $[E^0, \theta^0]$ par une application $f: F \longrightarrow F_G^0$ respectant la fibration. En ce sens, le couple $[E^0, \theta^0]$ joue un rôle universel. Mais cela n'empêche pas d'étudier d'autres fibrations G-structurées sur V que la fibration « universelle » $F_G^0 \longrightarrow V$. On obtiendra, à l'aide des sections (ou des sections locales) de $F \longrightarrow V$ des G-structures (ou des G-structures locales) sur V. Toute fibration G-structurée $F \longrightarrow V$, munie de sa G-structnre transverse $[E, \theta]$ définit ainsi un faisceau $\mathcal{F}_E$ de germes de G-structures sur V, c'est à dire un sous-faisceau de $\mathcal{F}_G^0$. On aura ainsi des « G-géométries restreintes » sur la variété V.

EXEMPLES :

(1) Soit $E(V, G)$ une G-structure sur V munie de sa forme fondamentale θ. Si H est un sous groupe de Lie fermé de G, $F_E = E/H$, le couple $[E, \theta]$ définit une H-structure transverse à la fibration $F_E \longrightarrow V$. La H-géométrie restreinte correspondante sur V est celle des H-structures subordonnées à la G structure E.

(2) Soit $E = E(V, G)$ un G-fibré principal arbitraire su V. Considérons le produit fibré $E_E^0 = E^0 \boxtimes E$ et le quotient $F_E^0 = E_E^0/G$. $F_E^0 \longrightarrow V$ sera dit « espace des soudures » sur E. Si θ_E^0 est l'image réciproque de θ^0 par la projection $E_E^0 \longrightarrow E^0$, le couple $[E_E^0, \theta_E^0]$ définit une G-structure transverse sur l'espace des soudures. La G-géométrie restreinte correspondante sur V (que l'on peut appeler « géométrie des soudures sur E ») est l'étude des G-structures sur V appartenant à la même classe d'isomorphisme de fibrés principaux (celle de E).

L'intérêt essentiel de la géométrie des soudures consiste dans la possibilité de linéariser les problèmes. En effet F_E^0 est un ouvert (dense) dans

le fibré vectoriel $L_E^0 \to V$ des 1 formes tensorielles sur E à valeurs dans R^n. D'où l'intérêt de l'étude des soudures, en particulier dans les problèmes de déformations : soit V une variété compacte. On considère une famille à un paramètre différentiable de G-structures sur V. Toute les structures de la famille sont isomorphes en tant de G-fibrés principaux (étant induits à partir de $E^0 \to F_G^0$ par une famille continue d'applications $V \to F_G^0$). Soit E un G-fibré principal appartenant à la même classe d'isomorphisme. La famille de G-structures définit alors une famille de soudures. Au voisinage de la section s_0 on a donc une variation infinitésimale dont l'étude est un problème linéaire car le fibré tangent vertical à F_E^0 le long de s^0 s'identifie canoniquement à L_R^0. Ainsi, dans [3], GUILLEMIN - STERNBERG utilisent l'espace des soudures (en imposant bien entendu une condition de rigidité pour les soudures d'une même famille, dont on verra qu'elle se traduit par un système différentiel qui — dans ce cas — est linéaire).

(3) Soit W une autre variété différentiable et la fibration triviale $V \times W \to V$. Si $[E, \theta]$ est une G-structure transverse à cette fibration, elle définit une famille différentiable de G-structures sur V paramétrées par la variété W. Par exemple une famille différentiable à 1 paramètre de G-structures sur V correspond à une G-structure transverse pour la projection $V \times R \to V$.

Prenons pour W une sphère S^p. Supposons V munie d'une G-structure $[E(V, G), \theta]$. Considérons l'espace $\mathcal{E}_{S^p}$ des repères transverses à la fibration $V \times S^p \to V$. Munissons la sphère S^p d'une origine 0 et identifions V à $V \times \{0\}$. Dans $\widetilde{F}_{S^p} = \mathcal{E}_{S^p}/G$, on a une section de $\widetilde{F}_{S^p} \to V \times S^p$ au dessus de $V \times \{0\}$, à savoir la section s_0 définie par la G-structure $[E, \theta]$. Les classes d'homotopie de sections S de $\widetilde{F}_{S^p} \to V \times S^p$ qui coïncident avec s_0 sur $V \times \{0\}$ définissent l'homotopie de l'espace $H^0(V, \mathcal{F}_G^0)$ en dimension p.

REMARQUE : Chaque section S de $\widetilde{F}_{S^p} \to V \times S^p$ définit un G-fibré principal sur $V \times S^p$, donc des classes caractéristique sur $V \times S^p$. De la suite d'applications $V \xrightarrow{i} V \times S^p \xrightarrow{p} V$ on déduit une suite d'applications $H^*(V, A) \xrightarrow{p^*} H^*(V \times S^p, A) \xrightarrow{i^*} H^*(V, A)$. Une classe d'homotopie de $H^0(V, \mathcal{F}_G^0)$ en dimension p définit des classes caractéristiques dans $H^*(V \times S^p, A)$ dont les images par i^* sont les classes caractéristiques de la G-structure $[E, \theta]$. L'élément neutre du groupe d'homotopie correspond aux images par p^* des classes caractéristiques de la G structure $[E, \theta]$.

II. Les G-prolongements de V.

Les constructions que l'on va faire sur l'espace des G-structures F_G^0 pourraient être faites de la même manière sur tout fibré G-structuré. Mais

il suffit de traiter le cas de F_G^0, compte tenu du rôle universel du couple $[E^0, \theta^0]$ (diagramme I.3.3) : si $F \longrightarrow V$ est un autre fibré G-structuré, on a une application $f : F \longrightarrow F_G^0$ qui nous permettra de reporter sur F les constructions faites sur F_G^0.

II.1. *Pour étudier la géométrie infinitésimale* de l'espace des G structures, on introduira les espaces de jets de sections du fibré $F_G^0 \longrightarrow V$. Par commodité, on notera $F_G^k = J_V^k F_G^0$ le fibré des k-jets (k entier > 0) de sections de F_G^0 et on l'appellera espace des k-jets de G-structures sur V. On aura, pour tout couple d'entiers k, l avec $k > l > 0$ un diagramme commutatif de fibrations :

(II.1.1)
$$\begin{tikzcd}
F_G^k \arrow[r, "p_l^k"] \arrow[dr, "p^k"'] & F_G^l \arrow[r, "p_0^l"] \arrow[d, "p^l"] & F_G^0 \arrow[d, "p^0"] \\
& V & V
\end{tikzcd}$$

Tout germe de section s de F_G^0 définira un germe $j^* s$ de section « intégrable » de F_G^k. Réciproquement, un germe de section s^k de $F_G^k \longrightarrow V$ sera intégrable si et seulement si :

(II.1.2)
$$s^k = j^1 (p_{k-1}^k \circ s^k).$$

En général le second membre de (II.1.2) appartient à $J_V^1 (F_G^{k-1})$. On a une injection naturelle $F_G^k \longrightarrow J_V^1 (F_G^{k-1})$ qui donne un sens à la condition précédente.

II.2. *On se propose de construire* les « G-prolongements » de V, c'est à dire des espaces fibrès qui réalisent simultanément les prolongements successifs de tous les germes de G-structures sur V. Pour cela on adoptera, en ce qui concerne les prolongements, la méthode de SINGER-STERNBERG (voir [7]). Dans ces conditions la définition n'est pas entièrement intrinsèque : pour tout groupe G d'automorphismes linéaires de R^n on devra choisir une fois pour toutes un supplémentaire $\mathcal{C}$ de $\partial (g \otimes R^{n*})$ dans $R^n \otimes \Lambda^2 (R^{n*})$ où g est l'algèbre de Lie de G et ∂ l'application définie par :

$$\partial (S) (u \wedge v) = S(u) v - S(v) u.$$

E^0, fibré sur F_G^0, et muni de sa forme fondamentale θ^0, pourra être regardé comme le G-prolongement d'ordre 0.

Considérons la famille E_G^1 formée des sous-espaces « horizontaux » de E^0 dont la « torsion » appartient à $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{E}_G^1$ désigne l'image réciproque du fibré $E^0 \longrightarrow F_G^0$ par la projection $p_0^1 : F_G^1 \longrightarrow F_G^0$, on a le diagramme commutatif de fibrations :

(II.2.1)
$$\begin{tikzcd}
E_G^1 \arrow[d] \arrow[dr, "\pi^1"] & & \\
\mathcal{E}_G^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_G^1 \arrow[d, "p_0^1"] \arrow[dr, "p^1"] & \\
E^0 \arrow[r, "\pi^0"] & F_G^0 \arrow[r, "p^0"'] & V
\end{tikzcd}$$

où la fibration $E_G^1 \longrightarrow \mathcal{E}_G^1$ est une fibration principale de groupe structural $G^{(1)}$ d'algèbre de Lie $g^{(1)}$ (avec les notations de SINGER-STERNBERG). E_G^1, en tant que fibré de repères sur E^0, est muni d'une 1-forme tensorielle θ_G^1 à valeurs dans $R^n + gl(n, R)$. En tout point $z^1 \in E_G^1$ on a un « sous-espace canonique » H_{z^1}, qui est l'image réciproque par θ_G^1 du sous-espace $R^n + g$ de $R^n + gl(n, R)$. H_{z^1} peut encore être défini comme suit : si $\pi^1(z^1) = y^1$ et $p_0^1(y^1) = y^0$, y^1 définit en y^0 un sous-espace h_{y^1} horizontal pour la fibration $F_G^0 \longrightarrow V$. Alors H_{z^1} est l'image réciproque de h_{y^1} par l'application linéaire tangente en z^1 à $p_0^1 \circ \pi^1$.

DEFINITION II.2.1 : Le couple $[E_G^1, \theta_G^1]$ formé du fibré $E_G^1 \xrightarrow{\pi^1} F_G^1$ muni de la forme θ_G^1 sera dit G-prolongement d'ordre 1 de V.

Le G-prolongement d'ordre 1 possède la propriété caractéristique suivante :

PROPOSITION II.2.1 : Si s est une section (respectivement une section locale, un germe de section) de $F_G^0 \longrightarrow V$, E_s la G-structure associée (respectivement G structure locale, germe de G-structure), le premier prolongement E_s^1 de E_s, muni de sa forme fondamentale θ_s^1 est induit à partir de E_G^1, muni de sa forme fondamental θ_G^1, par le jet d'ordre 1 de s, soit :

(II.2.2)
$$[E_s^1, \theta_s^1] = (j^1 s)^* ([E_G^1, \theta_G^1]) .$$

On remarquera que dans l'énoncé de la propriété caractéristique n'intervient que la restriction de θ_G^1 aux sous-espaces canoniques en chaque

point de E_G^1. C'est en réalité cette restriction que l'on appellera forme fondamentale sur E_G^1. C'est donc une 1-forme partiellement définie en chaque point.

Les G-prolongements d'ordre supérieur de V seront construit par récurrence de façon à vérifier, pour les ordres correspondants, une propriété caractéristique analogue à la précédente. Supposons construit de la sorte le G-prolongement d'ordre k, E_G^k, muni de sa forme fondamentale θ_G^k. On va indiquer comment se construit le prolongement d'ordre $k+1$. Par hypothèse on a un diagramme commutatif :

(II.2.3)
$$\begin{tikzcd} E_G^k \arrow[r, "\pi^k"] & F_G^k \arrow[d, "p_{k-1}^k"'] \arrow[dr, "p^k"] & \\ & F_G^{k-1} \arrow[r, "p^{k-1}"] & V \end{tikzcd}$$

Sur E_G^k on a une 1-forme θ_G^k définie sur le sous-espace canonique H_{z^k} en chaque point $z^k \in E_G^k$: si $\pi^k(z^k) = y^k$, $p_{k-1}^k(y^k) = y^{k-1}$, y^k définit un sous-espace horizontal h_{y^k} en y^{k-1} pour la fibration p^{k-1}. Alors $H_{z^k} = (p_{k-1}^k \circ \pi^k)^{-1}(h_{y^k})$. θ_G^k est à valeurs dans $R^n + g + g^{(1)} + \ldots + g^{(k-1)}$. Par hypothèse le couple $[E_G^k, \theta_G^k]$ vérifie la propriété analogue à la proposition II.2.1 pour l'ordre k.

Ceci étant, soit $\mathcal{E}_G^{k+1}$ l'image inverse du fibré $E_G^k \longrightarrow F_G^k$ par la projection $p_k^{k+1} : F_G^{k+1} \longrightarrow F_G^k$. On a diagramme commutatif :

(II.2.4)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_G^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & F_G^{k+1} \arrow[d, "p_k^{k+1}"] & \\ E_G^k \arrow[r, "\pi^k"] & F_G^k \arrow[r, "p^k"] & V \end{tikzcd}$$

Un point $\mathcal{Z}^{k+1} \in \mathcal{E}_G^{k+1}$ est un couple (z^k, y^{k+1}) avec $p_k^{k+1}(y^{k+1}) = \pi^k(z^k) = y^k \cdot y^{k+1}$ définit en y^k un sous espace horizontal $h_{y^{k+1}}$ pour la fibration p^k. Soit $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}} = (\pi^k)'^{-1}(h_{y^{k+1}})$. Pour toute G-structure locale ayant y^{k+1} comme $(k+1)$-jet en $(p^k \circ \pi^k)(z^k)$, $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$ représente, d'après l'hypothèse de récurrence, l'espace tangent en z^k à son k ème prolongement. Le $(k+1)$-ème prolongement définira alors en z^k une famille distinguée de repères de $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$. De plus cette famille de repères ne dépend pas de la structure locale considérée, mais seulement de son $(k+1)$ ème-jet y^{k+1}. Ce qui revient à remarquer que la fibre en un point du $(k+1)$-ème prolongement d'une G-structure ne dépend que de son $(k+1)$ ème-jet en ce point.

On a ainsi obtenu pour tout couple (z^k, y^{k+1}), c'est à dire pour tout point $\mathcal{Z}^{k+1} \in \mathcal{C}_G^{k+1}$, une famille distinguée de repères de $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$. La réunion de ces familles aux différents points de $\mathcal{C}_G^{k+1}$ forme alors un $G^{(k+1)}$-fibré principal E_G^{k+1} sur $\mathcal{C}_G^{k+1}$; si z^{k+1} appartient à la fibre de E_G^{k+1}, au dessus de $\mathcal{Z}^{k+1}$, z^{k+1} définit un repère de $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$. Donc on aura sur E_G^{k+1} une 1-forme fondamentale θ_G^{k+1}, à valeurs dans $R^n + g + g^{(1)} + \ldots + g^{(k)}$, définie sur l'image réciproque de $\widetilde{h}_{z^k, y^{k+1}}$ par la projection $E_G^{k+1} \longrightarrow E_G^k$, c'est à dire sur l'image réciproque de $h_{y^{k+1}}$ par la projection $E_G^{k+1} \longrightarrow F_G^k$, autrement dit le sous-espace canonique $H_{z^{k+1}}$.

Il est clair par la construction même que le couple $[E_G^{k+1}, \theta_G^{k+1}]$ possède pour l'ordre $k+1$ la propriété caracteristique analogue à la proposition II.2.1. On a donc établi par récurrence :

PROPOSITION II.2.2 : Pour tout $k > 0$ on peut construire un couple $[E_G^k, \theta_G^k]$ unique formé d'un fibré $E_G^k \longrightarrow F_G^k$ et d'une forme fondamentale θ_G^k (1-forme à valeurs dans $R^n + g + \ldots + g^{(k-1)}$ partiellement définie sur les sous espace canoniques de E_G^k) tel que si s est une section (respectivement une section locale, un germe de section) de $F_G^0 \longrightarrow V$, E_s la G-structure associée (respectivement G-structure locale, germe de G-structure) le $k^{\text{ème}}$ prolongement E_s^k de E_s, muni de sa forme fondamentale θ_s^k, est induit à partir de E_G^k, muni de sa forme fondamentale θ_G^k, par le jet d'ordre k de s, soit :

$$[E_s^k, \theta_s^k] = (j_s^k)^* ([E_G^k, \theta_G^k]). \tag{II.2.5}$$

II.3. *Sur le $k^{\text{ème}}$ prolongement* d'une G-structure se trouve défini un « tenseur de structure » d'ordre k. Construisons le tenseur correspondant sur les G-prolongements de V.

La valeur du tenseur de structure d'ordre k au dessus d'un point de V dépend, pour une G-structure, du jet d'ordre $(k+1)$ de la G-structure en ce point. Autrement dit, dans le diagramme commutatif :

(II.3.1)
$$\begin{tikzcd}
E_G^{k+1} \arrow[d] \arrow[dr, "\pi^{k+1}"] & \\
\mathcal{C}_G^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & F_G^{k+1} \arrow[d, "p_k^{k+1}"'] \\
E_G^k \arrow[r, "\pi^k"] & F_G^k
\end{tikzcd}$$

le tenseur de structure d'ordre k, t_G^k, sera un tenseur sur le fibré $\mathcal{C}_G^{k+1} \to F_G^{k+1}$. On peut également prendre son image réciproque sur E_G^{k+1}, mais ceci donnera un décalage sur les ordres. Etant donnée une section s de $F_G^0 \to V$, et la G-structure associée E_s, si l'on veut construire son $k^{\text{ème}}$ prolongement muni de son tenseur de structure t_s^k, il faudra prendre le couple $[E_s^k, t_s^k]$ induit à partir de $[\mathcal{C}_G^{k+1}, t_G^k]$ par l'application $j^{k+1} s : V \to F_G^{k+1}$.

Soit maintenant V_0 une variété différentiable de méme dimension n que V. Etant donné un pseudo-groupe de Lie transitif Γ sur V_0, d'ordre 1 et de groupe d'isotropie linéaire G, on peut définir sur V la notion de germe de Γ structure, de Γ-structure locale, éventuellement de Γ-structure globale. On notera $\mathcal{F}_\Gamma$ le faisceau des germes de Γ-structures sur V. Pour tout entier $k > 0$, pour qu'un germe de G-structure soit un germe de Γ-structure, on aura une condition nécessaire portant sur le tenseur de structure d'ordre k, qui devra être constant et égal au tenseur correspondant de la Γ-structure associée au pseudo-groupe sur la variété modèle V_0. Cette condition sera vérifiée sur une partie du fibré $\mathcal{C}_G^{k+1} \to F_G^{k+1}$, c'est à dire au dessus d'un sous-fibré F_Γ^{k+1} de F_G^{k+1}. En particulier, si l'on prend $k + 1 = k_0 =$ ordre de stabilité pour la cohomologie de Spencer de l'algèbre de Lie de G, on obtient un sous-fibré $F_\Gamma^{k_0}$ de $F_G^{k_0}$; c'est à dire un système différentiel (non linéaire) d'ordre k_0 sur le fibré $F_G^0 \to V$. Ce système sera appelé *système différentiel fondamental pour les Γ-structures sur V.*

En restreignant pour tout $k > 0$ les G-prolongements de V aux sous-fibrés F_Γ^k, on obtient des « Γ-prolongements de V », E_Γ^k, munis de la 1 forme θ_Γ^k obtenue par restriction de θ_Γ^k.

Une « presque Γ-structure » sur V (ou un germe de presque Γ-structure) sera définie par une section s de F_G^0 (ou un germe de section) dont le jet d'ordre k_0 soit à valeurs dans $F_\Gamma^{k_0}$. De façon équivalente elle sera définie par une section (ou un germe de section) intégrable de $F_\Gamma^{k_0}$. Soit :

PROPOSITION II.3.1 : Les presque Γ-structures sur V correspondent aux solutions du système différentiel fondamental pour les Γ-structures, c'est à dire aux sections s^{k_0} de $F_\Gamma^{k_0}$ veréfiant la condition :

$$s^{k_0} = j^1 (p_{k_0-1}^{k_0} \circ s^{k_0}) . \tag{II.3.2}$$

Si l'on prend pour Γ le pseudo-groupe de Lie d'ordre 1 plat $\Gamma(G)$, on obtient un système différentiel fondamental d'ordre k_0 pour les G-structures plates, défini par un sous fibré $F_{\Gamma(G)}^{k_0}$ de $F_G^{k_0}$, dont les solutions seront les G-structures formellement plates sur V.

III. Les Γ-deformations.

III.1. *Tout champ de vecteurs X sur V* définit de façon naturelle une opération infinitésimale sur les k-jets de G-structures de V, pour tout entier $k \geq 0$. Donc X se relève en un champ de vecteurs projetables X_G^k sur F_G^k. En fait, si y^k est un point de F_G^k, la valeur de X_G^k au point y^k ne dépend que du $(k+1)$-jet de X au point $x = p^k(y^k)$.

Pour $0 < l < k$ on notera $y^l = p_l^k(y^k)$.

Notons $T^k F_G^k$ le fibré tangent à F_G^k; $T^l F_G^k (0 \leq l < k)$ l'image réciproque du fibré $T^l F_G^l$ par la projection $F_G^k \longrightarrow F_G^l$.

$J^m T$ désignant le fibré des m-jets de vecteurs tangents à V, notons $J^m T \circ F_G^k$ l'image réciproque du précédent par la projection $F_G^k \longrightarrow V$.

La correspondance $X \longrightarrow X_G^k$ définit un morphisme de fibrés vectoriels $J^{k+1} T \circ F_G^k \xrightarrow{\lambda^{k+1}} T^k F_G^k$. De même, pour $0 \leq l < k$ on aura un morphisme $J_{l+1} T \circ F_G^l \xrightarrow{\lambda^{l+1}} T^l F_G^l$ d'où l'on déduit un morphisme (encore noté λ^{l+1}) $J_{l+1} T \circ F_G^k \longrightarrow T^l F_G^k$, et on a le diagramme commutatif :

$$\text{(III.1.1)} \qquad \begin{tikzcd}
J^{k+1} T \circ F_G^k \arrow[r] \arrow[d, "\lambda^{k+1}"'] & J^k T \circ F_G^k \arrow[r] \arrow[d, "\lambda^k"'] & \cdots \arrow[r] & J^l T \circ F_G^k \arrow[r] \arrow[d, "\lambda^l"'] & T \circ F_G^k \arrow[d, equal] \\
T^k F_G^k \arrow[r] & T^{k-1} F_G^k \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & T^0 F_G^k \arrow[r] & T \circ F_G^k
\end{tikzcd}$$

En fait, $(T^l F_G^k)_{y^k}$ s'identifie à $(T^l F_G^l)_{y^l}$. En particulier, considérons le cas $l = k-1 \cdot y^k$ définit un sous-espace horizontal h_{y^k} en y^{k-1} dans F_G^{k-1}. Considérons $l_{y^k} = (\lambda^k)^{-1}(h_{y^k}) \cdot l_{y^k}$ s'identifie à un sous-espace de l'espace $(J^k T)_x$ des k-jets de champs de vecteurs en $x = p^k(y^k)$. Notons $l_{y^k}^x$ ce sous-espace. Tout k-jet de champs de vecteurs en x appartenant à $l_{y^k}^x$ se relèvera de façon naturelle au dessus de y^{k-1} en un vecteur tangent en chaque point de la fibre correspondente de $E_G^{k-1} \longrightarrow F_G^{k-1}$. Autrement dit, si $X_G^{k-1}(y^{k-1}) \in h_{y^k}$ alors $X_G^{k-1}(y^{k-1})$ se relève dans E^{k-1}.

Les espaces l_{y^k} peuvent s'interpréter de la façon suivante comme définissant un système différentiel d'ordre k : considérons le fibré $T \circ F_G^0 \longrightarrow V$ des vecteurs « transverses » de F_G^0. Le fibré des k-jets de sections (sur V) de $T \circ F_G^0$ s'identifie à $J^k T \circ F_G^k$. Si Γ est par exemple un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1 de groupe d'isotropie linéaire G, en un point $y^k \in F_\Gamma^k$, le sous-espace l_{y^k} de $J^k T \circ F_G^k$ définit *les k-jets de Γ-champs relatifs*

à y^k. Prenons la réunion des l_{y^k} pour tous les $y^k \in F^k_\Gamma$. On obtient ainsi un système différentiel (non linéaire) d'ordre k sur le fibré $T \circ F^0_G$ qui sera dit *systeme différentiel des Γ-champs de V d'ordre k.* Ce système différentiel est « projetable » sur F^0_G (par construction). Une solution de ce système sera une Γ-presque structure (pour $k \geq k_0 + 1$) sur V munie d'un automorphisme infinitésimal. On remarquera enfin que la restriction de ce système au dessus d'une Γ-presque structure est un système différentiel linéaire, celui qui définit les automorphisme infinitésimaux de la structure considérée.

III.2. *On notera désormais* l^Γ_k le sous-fibré de $J^k T \circ F^k_G$ qui définit le système différentiel des Γ-champs de vecteurs de V d'ordre k. On a diagramme commutatif de fibrations :

(III.2.1)
$$\begin{tikzcd} \ell^\Gamma_k \arrow[r, "p_k"] \arrow[dr, "\mathcal{S}_k"'] & F^k_\Gamma \arrow[d, "p^k"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Pour $0 \leq p \leq n$, on notera $l^\Gamma_k \otimes \Lambda^p(T)^*$ le fibré obtenu en faisant le produit tensoriel sur F^k_G de l^Γ_k et de $\Lambda^p(T^*) \circ F^k_G$. Si on prend l'espace $J^m_V(l^\Gamma_k \otimes \Lambda^p)$ des m-jets de sections (sur V) de $l^\Gamma_k \otimes \Lambda^p$, on notera $\mathcal{J}^m_\Gamma(l^\Gamma_k \otimes \Lambda^p)$ la restriction du précédent au dessus de $F^{k+m}_\Gamma \subset J^m_V(F^k_G)$.

PROPOSITION III.2.1 : On a la suite de SPENCER :

(III.2.2)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ell^\Gamma_{k+m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}^m_\Gamma(\ell^\Gamma_k) \arrow[r, "\mathcal{D}^1"] \arrow[d] & \mathcal{J}^{m-1}_\Gamma(\ell^\Gamma_{k-1} \otimes T^*) \arrow[r, "\mathcal{D}^2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathcal{D}^p"] & \mathcal{J}^{m-p}_\Gamma(\ell^\Gamma_{k-p} \otimes \Lambda^p) \arrow[d] \\ & F^{k+m}_\Gamma \arrow[r] & F^{k+m}_\Gamma \arrow[r] & F^{k+m-2}_\Gamma \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F^{k+m-2p} \end{tikzcd}$$

dans laquelle les carrés sont commutatifs (ici $p = \inf(k, n, m)$) et $\mathcal{D}^{i+1} \circ \mathcal{D}^i = 0$.

En réalité la proposition résulte immédiatement de ce que, pour un point donné $y^{k+m} \in F^{k+m}_\Gamma$, si on considère une Γ-presque structure locale E_s telle que $j^{k+m} s = y^{k+m}$, la suite de SPENCER,

(III.2.3) $$0 \to \mathcal{O} \to \underline{H_k} \xrightarrow{D^1} \underline{H_{k-1} \otimes T^*} \xrightarrow{D^2} \cdots \xrightarrow{D^p} \underline{H_{k-p} \otimes \Lambda^p} \quad (p < m, n, k)$$

relative aux automorphismes infinitésimaux de E_s correspond, au point $x = p^{k+m}(y^{k+m})$, à des morphismes de fibrés qui ne dépendent pas de la section.

Par commodité, on prendra les images réciproques des fibrés

$$\mathcal{J}_\Gamma^{m-q}(l_{k-q}^\Gamma \otimes \Lambda^q)$$

sur F_Γ^{k+m} par la projection $F_\Gamma^{k+m} \to F_\Gamma^{k+m-2q}$. On obtiendra ainsi des fibrés notés $\mathcal{J}_\Gamma^{m-q}(l_{k-q}^\Gamma \otimes \Lambda^q)_{k+m}$, et la suite :

$$\text{(III.2 4)} \qquad 0 \to l_{k+m}^\Gamma \to \mathcal{J}_\Gamma^m(l_k^\Gamma) \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \mathcal{J}_\Gamma^{m-1}(l_{k-1}^\Gamma \otimes T^*)_{k+m} \xrightarrow{\mathcal{D}^2} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\mathcal{D}^p} \mathcal{J}_\Gamma^{m-p}(l_{k-p}^\Gamma \otimes \Lambda^p)_{k+m}$$

de fibrés et de morphismes de fibrés vectoriels sur F_Γ^{k+m}.

Il est clair que la suite précédente ne définit pas d'opérateurs différentiels linéaires mais, sous la forme (III.2.2), une suite d'opérateurs différentiels non linéaires d'ordre 1.

III.3. *Ecrivons la suite* (III.2.2) *pour* $m = 2$. On obtient ainsi :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & l_{k+2}^\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}_\Gamma^2(l_k^\Gamma) \arrow[r, "\mathcal{D}^1"] \arrow[d] & \mathcal{J}_\Gamma^1(l_{k-1}^\Gamma \otimes T^*) \arrow[r, "\mathcal{D}^2"] \arrow[d] & l_{k-2}^\Gamma \otimes \Lambda^2 T^* \arrow[d] \\
& F_\Gamma^{k+2} \arrow[r] & F_\Gamma^{k+2} \arrow[r] & F_\Gamma^k \arrow[r] & F_\Gamma^{k-2}
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}^2$ est linéaire au dessus de chaque point y^k de F_Γ^k. Soit $(\mathcal{N}_{k-1}^\Gamma)_{y^k}$ le noyau de $\mathcal{D}^2$ en y^k, $\mathcal{N}_{k-1}^\Gamma$ la réunion de ces noyaux aux différents points de F_Γ^k.

$\mathcal{N}_{k-1}^\Gamma$ est un sous fibré de l'espace $J_V^1(l_{k-1}^\Gamma \otimes T^*)$. Donc il définit un système différentiel d'ordre 1 sur le fibré $l_{k-1}^\Gamma \otimes T^* \to V$. Ce système sera dit : *système différentiel des Γ-déformations infinitésimales* à l'ordre $k-1$. Il est, par construction, projetable sur F_G^0. Une solution de ce système sera une presque Γ-structure E_s sur V munie d'un cocycle global pour la suite de SPENCER ordinaire (III.2.3) dans $\underline{H_{k-1} \otimes T^*}$. On sait (voir GUILLEMIN-STERNBERG, op. cité) qu'une déformation infinitésimale d'une Γ-structure correspond précisément à un tel cocycle.

Un élément $\xi \in \mathcal{N}_{k-1}^\Gamma$ au dessus de y^k dans F_Γ^k sera dit 1-jet de déformation infinitésimale relatif au k-jet de Γ-structure y^k.

III.4. *Un autre point de vue sur les déformations.* Reprenons les notations de I.2. Une Γ-structure E_s sur V définit une section s de $F_G^0 \longrightarrow V$, au dessus de laquelle E_s correspond à la restriction de $E^0 \longrightarrow F_G^0$. On a une section S^0 de $\widetilde{F}_G^0 \longrightarrow F_G^0$. Pour déformer E_s on peut, sans changer s, déformer S^0 au dessus de $s(V)$. On peut alors se demander s'il n'est pas possible de « déformer » S^0 au dessus de F_G^0 de façon que pour tout germe de Γ structure s on obtienne une déformation de Γ-structure. Si une telle déformation existe on dira que c'est une « *Γ-déformation simultanée sur V* ». En fait on peut toujours construire de telles déformations, mais qui sont pour chaque Γ-structure des équivalences globales, en partant d'un difféomorphisme f de V sur elle-même. On peut se poser la question de savoir si toute Γ-déformation simultanée est nécessairement une équivalence.

Donnons la version infinitésimale de ce problème. En reprenant les notations du paragraphe précédent, $\mathcal{N}_{k-1}^{\Gamma}$ définit un sous-fibré de $J_V^1(l_{k-1}^{\Gamma} \otimes T^*)$. On peut en déduire un sous-fibré $\mathcal{S}_{k-1}^{\Gamma}$ de $J_{F_\Gamma^{k-1}}^1(l_{k-1}^{\Gamma} \otimes T^*)$: un 1-jet de section ξ du fibré $l_{k-1}^{\Gamma} \otimes T^* \longrightarrow F_\Gamma^{k-1}$ appartiendra à $\mathcal{S}_{k-1}^{\Gamma}$ si et seulement si pour tout $y^k \in F_\Gamma^k$ la restriction de ξ au dessus de h_{y^k} appartient à $\mathcal{N}_{k-1}^{\Gamma}$.

$\mathcal{S}_{k-1}^{\Gamma}$ définit un système différentiel d'ordre 1 sur le fibré $l_{k-1}^{\Gamma} \otimes T^* \longrightarrow$ $\longrightarrow F_\Gamma^{k-1}$. Ce système différentiel sera dit « *système différentiel des Γ-déformations infinitésimales simultanées* » sur V à l'ordre $k-1$. Il est clair que une solution de ce système définira pour tout germe de Γ-structure sur V un cocycle pour la suite de SPENCER (III.2.3) correspondante dans $H_{k-1} \otimes T^*$.

IV. G-Structures quotient.

La plupart des constructions faites précédemment peuvent, convenablement adaptées, s'étendre au cadre plus général des « G-structures quotient » (comme on l'avait déjà fait remarquer pour les G-structures transverses à une fibration). On se contentera d'indiquer rapidement comment cette généralisation peut se faire, et de montrer le rôle (en un certain sens) universel des G-structures quotient par rapport aux G-structures usuelles. Ce dernier point avait été indiqué dans [6] avec une erreur évidente, rectifiée ici (c'est le groupe linéaire et non le groupe orthogonal qui intervient dans la construction).

IV.1. *Soient F une variété différentiable* de dimension N, n un entier $< N$, G un sous-groupe de Lie fermé de $GL(n, R)$. Une G-structure quotient sur F sera définie par le couple $[E, \theta]$ d'un G-fibré principal de base

F et d'une 1-forme tensorielle sur E, à valeurs dans R^n et de rang maximum en tout point. θ définit un système de Pfaff, et donc un champ d'éléments de contact $\{M_y, y \in F\}$ de codimension n sur F. Si $\mathcal{E}(F, GL(n, R))$ désigne l'espace des repères transverses au champ $\{M_y\}$, $\widetilde{F} = \mathcal{E}/G$, E correspond à une section globale de $\widetilde{F} \to F$, et toute autre section définirait une autre G-structure quotient ayant le même système de Pfaff sous-jacent.

Il est clair que le cas des G-structures transverses à une fibration est un cas particulier de G-structures quotients. Une situation intermédiaire, également importante, est celle des G-structures transverses à un feuilletage. Dans ce cas on a un feuilletage relevé dans $\mathcal{E}$. Si la G-structure transverse est réunion de feuilles du feuilletage relevé, on dit qu'elle est projetable, ou feuilletée. Elle est dite Γ-structure transverse si elle est localement l'image réciproque d'une Γ-structure par la projection suivant le feuilletage. Les Γ-structures transverses ont été étudiées par HAEFLIGER (voir [5]).

Si $[E, \theta]$ est une G-structure quotient sur F et si V est une n sous variété de F transverse au champ d'éléments $\{M_y\}$, alors $[E, \theta]$ induit une G-structure $[E_V, \theta_V]$ sur V. Ou encore, étant donnée une n-variété V, toute immersion $f: V \to F$ transverse en chaque point au champ d'éléments $\{M_y\}$ induit une G-structure sur V, définie par :

$$[E_V, \theta_V] = f^*([E, \theta]). \tag{IV.1.1}$$

REMARQUE : On notera en particulier que si $[E, \theta]$ est une G-structure transverse à une fibration $F \to V$, toute application $f: V \to F$ transverse à la fibration (pas nécessairement une section) induit une G-structure sur V.

IV.2. *On peut, à l'aide du théorème* de plongement de WHITNEY, construire une « G-structure quotient universelle » en ce sens que pour toute n-variété V et pour toute G-structure $[E_V, \theta_V]$ sur cette variété, $[E_V, \theta_V]$ est induite sur V par une immersion dans l'espace de la G structure quotient universelle.

Pour cela, considérons le groupe affine $GA(2n+1, R)$ et l'espace quotient $F^0 = GA(2n+1, R)/GL(n+1, R) \times G$. On notera E^0 l'espace $GA(2n+1, R)/GL(n+1, R)$. On a alors le diagramme de fibrations :

$$\begin{array}{ccc} E^0 & \xrightarrow{\pi^0} & F^0 \\ & & \downarrow p^0 \\ & & R^{2n+1} = GA(2n+1, R)/GL(2n+1, R) \end{array} \tag{IV.2.1}$$

dans lequel π^0 est une fibration principale de groupe structural G. On a sur E^0 une 1-forme fondamentale θ^0 à valeurs dans R^n de rang n en tout point, définie de la façon suivante : soit $z^0 \in E^0$, $y^0 = \pi^0(z^0)$, $x = p^0(y^0)$, z^0 définit le couple $\{M_x, z_x^0\}$ d'un $(n+1)$ plan M_x en x et d'un n-repère z_x^0 transverse à M_x. Soit N_x le sous espace engendré par ce repère transverse. Pour tout vecteur v_0 tangent en z^0 à E^0, soit v_{0x} sa projection sur R^{2n+1} en x. Soit $\mathcal{N}(v_{0x})$ la composante sur N_x de v_{0x}. On posera alors $\theta_{z^0}^0(v_0) = z_x^0(\mathcal{N}(v_{0x}))$. Il est clair que la 1-forme θ^0 ainsi définie est tensorielle et de rang n en tout point

On a donc une G structure quotient $[E^0, \theta^0]$ sur F^0.

PROPOSITION IV.2.1 : Pour toute n-variété différentiable V, toute G-structure $[E_V, \theta_V]$ sur V est induite à partir de la G-structure quotient $[E^0, \theta^0]$ par une immersion transverse f, soit :

$$[E_V, \theta_V] = f^*([E^0, \theta^0]). \tag{IV.2.2}$$

En effet, le théorème de WHITNEY permet de plonger différentiablement V dans R^{2n+1}. Munissant R^{2n+1} de sa métrique habituelle, en tout point $x \in V$ on obtient un $(n+1)$ sous espace M_x supplémentaire de l'espace tangent T_x à V en x. Si V est munie d'une G structure $[E_V, \theta_V]$, celle ci définit en chaque point x une classe de repères de T_x. Cette classe de repères, avec le sous-espace M_x, correspond à un point $y^0 \in F^0$ au dessus de x. On obtient ainsi une application $(y^0 = f(x))$ de V dans F^0, et il est clair que $f^*([E^0, \theta^0])$ coïncide avec $[E_V, \theta_V]$.

COROLLAIRE : Pour qu'il existe une G-structure sur V, il faut et il suffit qu'il existe une immersion transverse de V dans F^0.

Ainsi la G-structure quotient $[E^0, \theta^0]$ sur F^0 joue un rôle universel pour les G-structures (sur les n-variétés). Pour cette raison on pourra l'appeler « G-structure quotient universelle », à condition toutefois de préciser qu'elle n'est pas la solution canonique d'un problème universel. On remarquera que le système de Pfaff sous-jacent à $[E^0, \theta^0]$ sur F^0 n'est pas intégrable ; il ne s'agit donc pas d'une G-structure transverse à un feuilletage.

REMARQUE : Il serait intéressant d'arriver à construire des G-structures quotient universelles (au sens précédent) ayant des propriétés plus maniables, par exemple (*a*) d'être transverses à un feuilletage (*b*) vérifier la propriété que si f_1 et f_2 sont deux immersions transverses d'une variété V, alors les G-structures qu'elles définissent sur V sont les mêmes si et seulement si il existe une homotopie transverse entre f_1 et f_2. Le problème est ouvert.

IV.3. *Venons en à la géométrie* des G-structures quotient. On reprend les notations de IV.1.

On définit sans difficultés, pour $k > 0$, l'espace des k-jets de sous variétés transverses au champ d'éléments de contact $\{M_y\}$. On notera F^k cet espace. On aura des projections :

(IV.3.1)
$$\begin{tikzcd} F^k \arrow[r, "p^k_\ell"] \arrow[dr, "p^k"'] & F^\ell \arrow[d, "p^\ell"] \\ & F \end{tikzcd}$$

On construira les prolongements successifs de $E \longrightarrow F$ exactement comme au paragraphe (II.2) à ceci près que la construction du premier prolongement n'aura pas les propriétés particulières d'un espace de repères : ce sera une famille de sous-espaces transverses dans E, et la 1-forme fondamentale n'y sera définie que sur les sous espaces canoniques. De façon générale on aura un diagramme commutatif à l'ordre $k+1$:

(IV.3.2)
$$\begin{tikzcd} E^{k+1} \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\pi^{k+1}"] & \\ \mathcal{E}^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & F^{k+1} \arrow[d, "p^{k+1}_k"] \\ E^k \arrow[r, "\pi^k"] & F^k \end{tikzcd}$$

où la fibration $E^{k+1} \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1}$ sera principale de groupe structural $G^{(k+1)}$. E^{k+1} est muni d'une 1-forme fondamentale θ^{k+1} à valeurs dans $R^n + g + g^{(1)} + \dots + g^{(k)}$ définie partiellement sur les sous-espaces canoniques de E^{k+1}. De même, sur $\mathcal{E}^{k+1}$ sera défini un tenseur de structure d'ordre k, t^k.

Si f est une immersion transverse d'une n variété V dans F, f définit de façon naturelle pour tout $k > 0$ une immersion f^k de V dans F^k, transverse au champ d'éléments de contacts $\{M^k_{y^k}, y^k \in F^k\}$ obtenu par image réciproque du champ $\{M_y, y \in F\}$ par la projection $F^k \longrightarrow F$. On a alors :

PROPOSITION IV.3.1 : Si $[E_V, \theta_V]$ est la G-structure induite par l'immersion transverse $f: V \longrightarrow F$, son $k^{\text{ème}}$ prolongement, muni de sa forme fondamentale, est induit par l'application $f^k: V \longrightarrow F^k$ à partir du $k^{\text{ème}}$ prolongement de $E \longrightarrow F$ muni de sa forme fondamentale. Soit :

$$(\text{IV.3.3}) \qquad [E_V, \theta_V] = f^*([E, \theta]) \Longrightarrow [E_V^k, \theta_V^k] = f^k{}_* ([E^k, \theta^k]).$$

Ainsi, par exemple, l'étude des prolongements successifs d'une G-structure quotient universelle (pour les n variétés) permet l'étude simultanée des prolongements de toutes les G-structures usuelles.

Si Γ est un pseudo groupe de Lie transitif d'ordre 1, de groupe d'isotropie linéaire G, la condition pour qu'un k-jet transverse soit un k-jet de presque-Γ-structure définit une sous-variété F_Γ^k de F^k. Si l'on prend $k > k_0 + 1$ (ordre de stabilité de G) on obtient un *système différentiel fondamental pour les Γ-structures transverses sur F.* Une solution de ce système définira une sous-variété transverse sur F telle que la G-structure induite sur cette sous-variété par $[E, \theta]$ soit une presque Γ-structure.

Soit $T \cdot F$ le fibré vectoriel sur F défini en chaque point y par le quotient de l'espace tangent en y, $\mathcal{T}_y$, par le sous-espace $M_y \cdot T \cdot F$ sera dit fibré vectoriel transverse (ou quotient) sur F. On a sur $T \cdot F$ un champ d'éléments de contacts $\{T \cdot M_z, z \in T \cdot F\}$ de codimension n, image réciproque du champ $\{M_y\}$ par la projection $T \cdot F \longrightarrow F$. Une sous variété transverse à ce champ d'éléments de contact dans $T \cdot F$ sera formée du couple d'une sous-variété transverse sur F et d'un champ de vecteurs sur cette sous-variété. Les k-jets de sous-variétés transverses dans $T \cdot F$ se projetteront sur les k-jets transverses de sous-variétés de F. On notera $J^k T \cdot F^k$ l'espace des k-jets transverses dans $T \cdot F$; au dessus de $y^k \in F^k$, la condition pour qu'un k-jet $z^k \in J^k T \cdot F^k$ définisse un automorphisme infinitésimal du k-jet de G-structure défini par y^k détermine un sous espace vectoriel l_{y^k} de la fibre $J^k T \cdot F^k \longrightarrow F^k$. La réunion de ces sous espaces aux différents points de F_Γ^k forme une sous variété l_k^Γ de $J^k T \cdot F^k$, donc un système différentiel d'ordre k sur la variété $T \cdot F$; et pour $k \geq k_0 + 1$ on obtiendra le *système différentiel des Γ-champs transverses* sur Γ. Une solution sera une sous-variété transverse dans F munie par $[E, \theta]$ d'une presque Γ structure, avec un automorphisme infinitésimal sur cette variété.

Enfin, si l'on note $l_k^\Gamma \otimes \Lambda^p(T^*)$ le produit tensoriel sur F^k de l_k^Γ par l'image réciproque du fibré $\Lambda^p(T^*)$, $0 \leq p \leq n$, et si l'on considère la restriction $\mathcal{J}_\Gamma^m(l_k^\Gamma \otimes \Lambda^p(T^*))$ au dessus de F_Γ^{k+m} de l'espace des m-jets de

sous-variétés de $l_k^\Gamma \otimes \Lambda^p(T^*)$ transverses au champ d'éléments de contact relevés à partir du champ $\{M_y\}$, alors on a une suite de SPENCER :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ell^\Gamma_{k+m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}^m_\Gamma(\ell^\Gamma_k) \arrow[r, "\mathcal{D}^1"] \arrow[d] & \mathcal{J}^{m-1}_\Gamma(\ell^\Gamma_{k-1} \otimes T^*) \arrow[r, "\mathcal{D}^2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathcal{D}^p"] & \mathcal{J}^{m-p}_\Gamma(\ell^\Gamma_{k-p} \otimes \Lambda^p) \arrow[d] \\
& F^{k+m}_\Gamma \arrow[r] & F^{k+m}_\Gamma \arrow[r] & F^{k+m-2}_\Gamma \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F^{k+m-2p}_\Gamma
\end{tikzcd}$$

(IV.3.4) où les carrés commutent et $\mathcal{D}^{i+r} \circ \mathcal{D}^i = 0$.

En particulier le noyau de $\mathcal{D}^2$ définira une sous-variété $\mathcal{N}^\Gamma_{k-1}$ de l'espace des 1-jets transverses à $l^\Gamma_{k-1} \otimes T^*$, donc un système différentiel d'ordre 1 sur $l^\Gamma_{k-1} \otimes T^*$. Une solution de ce système sera formée d'un variété transverse dans F, munie par $[E, \theta]$ d'une presque Γ-structure, et d'un cocycle de déformation infinitésimale de cette structure. Ainsi ce système sera-t-il appelé *système différentiel des Γ-déformations infinitésimales transverses* sur F (à l'ordre $k - 1$).

REMARQUE : Pour que les constructions précédentes soient correctes, il faut faire certaines hypothèses de régularité sur la G-structure quotient. On peut remarquer que ces hypothèses seront automatiquement satisfaites sur la G-structure quotient universelle introduite au paragraphe précédent, pour des raisons évidentes d'homogénéité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. S. CHERN, *The geometry of G-structures.* Bulletin of AMS (72) 1966 pp. 167-219.

[2] C. EHRESMANN, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie.* Colloque C.N.R.S. — Strasbourg 1953 (Editions du C.N.R.S.).

[3] GUILLEMIN-STERNBERG, *Déformation theory of Pseudogroup structures* Mem. of AMS 1966.

[4] H. GOLDSCHMIDT, *Existence theorems for analytic partial différential equations.* I Annals of Maths 1967, (86) pp, 246-272. II à paraitre.

[5] A. HAEFLIGER, *Structures feullietées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes.* Comment. Math. Helvet. 1958, (32), pp. 248-329.

[6] P. MOLINO, *Applications des structures infinitésimales quotient à l'étude des problèmes d'existence pour les G-structures ....* C.R.A.S. 1968, (tome 266). pp. 1242-1245.

[7] SINGER-STERNBERG, *The infinite groups of Lie and Cartan.* Journal d'Analyse mathématique 1965, (XV) pp. 1-114.

[8] D C. SPENCER, *Deformations of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups.* Ann. of Maths 1962, (76) pp 306-445.

Departement de Mathématiques
Université de Montpellier
France